ОТЗЫВ
официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Резниченко Игоря Олеговича
на тему: «Улучшенные квадратурные формулы для вычисления потенциалов простого и двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца»
по специальности 1.1.2.«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

В диссертации И.О. Резниченко разработаны новые квадратурные формулы для вычисления поверхностных потенциалов для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

Актуальность темы. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя лежат в основе метода граничных интегральных уравнений, широко используемого в пространственных задачах математической физики. Основная идея этого метода состоит в использовании интегрального представления для решения краевой задачи в виде поверхностных потенциалов. В результате исходная задача сводится к интегральному уравнению относительно плотностей этих потенциалов, которые обычно должны обеспечить выполнение граничного условия. При этом снижается размерность задачи: вместо исходной трехмерной задачи решается двумерное уравнение на поверхности.

При численном решении краевых задач возникает необходимость численной аппроксимации поверхностных потенциалов, причем здесь можно выделить два аспекта проблемы. Во-первых, это аппроксимация так называемых прямых значений поверхностных потенциалов и выражающихся через них краевых значений этих потенциалов при аппроксимации самих интегральных уравнений. Во-вторых, это вычисление значений поверхностных потенциалов в точках пространства и краевых значений этих потенциалов на поверхности на этапе обработки результатов численного решения интегрального уравнения.

В диссертации рассмотрены оба этих вопроса. Здесь следует заметить, что вопросы аппроксимации потенциалов простого и двойного слоя на поверхности при записи интегрального уравнения, в целом, достаточно проработаны. Без существования эффективных способов аппроксимации этих потенциалов на поверхности успешное применение метода граничных интегральных уравнений было бы просто невозможно. Однако, здесь следует заметить, что обычно для аппроксимации поверхностей используются плоские ячейки и вычисление поверхностных потенциалов ведется по таким ячейкам. В работе предложены более точные формулы, учитывающие кривизну поверхности, что является актуальным и представляет интерес. А вот второй вопрос, связанный с вычислением значений поверхностных потенциалов в произвольных точках пространства, в действительности представляет собой серьезную проблему, которая гораздо менее проработана. Суть этой проблемы в том, что вблизи поверхности, на расстояниях соизмеримых с шагом дискретизации, вычисление поверхностных потенциалов по прямым формулам невозможно. Это связано как с наличием особенности в подъинтегральном выражении, так и с разрывностью, например, потенциала двойного слоя и нормальной производной простого слоя. Хотя эта проблема тем или иным способом решается каждым вычислителем, разработка универсальных устойчивых алгоритмов, позволяющих надежно вычислять значения поверхностных потенциалах во всех точках пространства актуальна.

Краткая характеристика основного содержания работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Список литературы содержит 100 наименований. Полный объем диссертации составляет 171 страницу.

Во **введении** даётся обзор литературы, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена вычислению значений потенциала простого слоя в точках, как вне поверхности, так и на самой поверхности. Так же в этой главе рассмотрено интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала простого слоя, возникающее при решении краевой задачи Неймана для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Для численного решения этого уравнения применена разработанная автором квадратурная формула вычисления прямого значения градиента потенциала простого слоя на поверхности. Так же в этой главе приведены результаты тестирования разработанных формул, в которых анализировалась погрешность вычисления значений потенциала простого слоя на поверхности и в окрестности поверхности, а также точность численных решений интегрального уравнения относительно нормальной производной потенциала простого слоя. Во всех тестах осуществлялось сравнение получаемых результатов с результатами, получаемыми с применением простейших известных формул, показавшие преимущества по точности для формул автора.

Во **второй главе** аналогичные результаты получены для потенциала двойного слоя. Здесь построены квадратурные формулы вычисления значений потенциала простого слоя, как вне поверхности, так и прямого значения на самой поверхности. Формулы для прямых значений использованы при численном решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя, возникающего при решении краевой задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

В **заключении**приведены основные результаты диссертации.

Научная новизна работы. К новым результатам, полученным в диссертации, следует отнести разработку следующих новых квадратурных формул для вычисления:

- значений потенциала простого слоя в произвольной точке пространства и на самой поверхности,

- прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности,

- значении потенциала двойного слоя в произвольной токе пространства и прямого значения этого потенциала на самой поверхности. Новизна формул состоит в линейной или кусочно-постоянной аппроксимации гладких составляющих подъинтегральных выражений и аналитическом интегрировании оставшихся выражений, содержащих особенность.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что, во-первых, предложенные автором квадратурные формулы могут быть использованы при численном решении граничных интегральных уравнений, возникающих при представлении решения в виде потенциалов простого и двойного слоя. Во-вторых, полученные квадратурные формулы могут быть использованы для анализа поведения численных решений краевых задач, полученных методом граничных интегральных уравнений вблизи граничных поверхностей. Полученные результаты непосредственно могут быть применены в рамках метода граничных интегральных уравнения в скалярных задачах рассеяния волн, в панельных методах аэродинамики.

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов, полученных в диссертации, обусловлена применением строгих аналитических подходов к вычислению интегралов по ячейкам поверхностной сетки, а также методическими численными исследованиями, в которых проверялась реальная точность предложенных квадратурных формул на примерах, в которых известно аналитическое решение.

Основные результаты диссертации относятся к научным направлениям:

- краевые задачи для дифференциальных уравнений,

- интегральные уравнения математической физики,

- численные методы решения краевых задач на основе теории потенциала и метода граничных интегральных уравнений,

что свидетельствует о соответствии диссертации специальности 1.1.2. - «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

По результатам диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 6 статей опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в системы цитирования Scopus и/или Web of Science.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Замечания и недостатки:

1. Упомянутые автором приложения предложенных им формул для потенциала простого слоя к задачам потенциального обтекания тел, а формул для потенциала двойного слоя к задачам теплопроводности, на мой взгляд, недостаточно полно раскрывают области применимости полученных результатов. В первую очередь хочется отметить важность полученных формул для решения скалярных задач рассеяния волн, где возникают оба типа рассмотренных поверхностных потенциалов, и где полученные автором результаты, на мой взгляд, применимы в первую очередь. В задачах переноса тепла, равно как и в стационарных задачах для уравнения диффузии, так же возникают оба типа этих потенциалов, в зависимости от типа граничных условий.

2. Что касается задач аэродинамики, то здесь, в частности в аэродинамике крыла, широкое применение нашли так же методы, основанные на применении потенциала двойного слоя. При этом независимо от типа используемого потенциала вопрос вычисления полей на основе плотности потенциала на этапе обработки результатов здесь важен. Однако, в задачах аэродинамики основной интерес представляют не сами потенциалы, а их градиенты, т.е. скорости. При расчете аэродинамических характеристик в первую очередь интерес представляет касательная составляющая скорости на поверхности тела, для вычисления которой нужно знать краевое значение касательной составляющей производной потенциала на поверхности. Но эти вопросы в диссертации как раз не рассматривались.

3. Авторы используют для построения квадратурных формул разбиение поверхности на ячейки, являющиеся частями поверхности, что требует знания параметризации поверхности. В современных прикладных задачах математического моделирования более удобен подход, при котором поверхность

аппроксимируется системой ячеек простой формы (например, треугольников), информация о которых хранится в виде списка угловых точек ячеек. Формулы, предложенные автором, при таком способе задания поверхностей не применимы, по крайней мере, напрямую.

4. Неточности по обзору состояния вопроса:

- на стр. 5 автор отмечает, что «существенные трудности остаются при численной реализации метода потенциалов», ссылаясь на работу [12]. По существу соглашаясь с приведенным тезисом, обращаю внимание, что данная ссылка слабо отражает современное состояние этого вопроса: ссылка [12] есть перевод книги авторов Колтон Д, Кресс Р, изданной еще в 1983 голу.

- на стр. 9, строка 8 сверху, автор пишет, что «В [27] предложен численный метод решения сингулярных интегральных уравнений, возникающих при сведении краевых задач гидродинамики к интегральных уравнениям». Как раз в работе И.К. Марчевского [27] основной упор сделан на сведение данного класса задач к уравнениям со слабой особенностью, а аппарат сингулярных уравнений возникает в методах дискретных вихрей и вихревых рамок, возникших в научной школе С.М.Белоцерковского и теоретически осмысленных в научной школе И.К. Лифанова (см. ссылки [48]-[49] из диссертации).

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. - «Дифференциальные уравнения и математическая физика»(по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Резниченко Игорь Олегович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. - «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,
Ведущий научный сотрудник
Научно-исследовательского центра
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

СЕТУХА Алексей Викторович ____________________

27 марта 2023 г.

Контактные данные:

тел.: 7(917)5443497, e-mail: setuhaav@rambler.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.07 – Вычислительная математика
Адрес места работы:

119234, г. Москва, ул. Ленинские Горы, д. 1, стр. 4,
МГУ имени М.В.Ломоносова, НИВЦ.
Тел.: +7 495 939-5424; сайт: https://rcc.msu.ru/contact

Подпись ведущего научного сотрудника НИВЦ МГУ, д.ф.-м.н. Сетухи А.В. заверяю.