МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Сташ Айдамир Хазретович

ПОКАЗАТЕЛИ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2024

Диссертация подготовлена на кафедре математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет»

Научный консультант: **Сергеев Игорь Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Глызин Сергей Дмитриевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова»,
математический факультет,
заведующий кафедрой компьютерных сетей;
Попова Светлана Николаевна,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», Институт математики, информационных технологий и физики, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений;
Фурсов Андрей Серафимович,
доктор физико-математических наук,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»,
факультет вычислительной математики и кибернетики, профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления.

Защита диссертации состоится «27» декабря 2024 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16–10.

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3158

Автореферат разослан «25» октября 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Г.А. Чечкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование линейных нестационарных дифференциальных систем имеет не только самостоятельное значение, но и служит базой для изучения нелинейных систем по первому приближению. Линейные системы имеют многочисленные приложения, которые порождают ряд новых теоретических задач, требующих изучения колебательных свойств решений.

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений, важнейшими направлениями которой являются теория устойчивости и теория колебаний.

Теория устойчивости, созданная А.М. Ляпуновым (1892 г.), естественным образом связана, прежде всего, с характеристическими показателями Ляпунова решений дифференциальных систем, а также с введенными позже показателями Перрона, Боля, Винограда, Миллионщикова и Изобова, отвечающими за разнообразные асимптотические свойства решений.

Изучением различных свойств самых разных показателей решений систем занимались многие математики. Приведем список (далеко не полный) тех из них, кто внес вклад в эту теорию: Р.Э. Виноград, Б.Ф. Былов, В.М. Миллионщиков, Н.А. Изобов, А.В. Ильин, М.И. Рахимбердиев, И.Н. Сергеев, Е.К. Макаров, Е.А. Барабанов, С.Н. Попова, А.С. Фурсов, А.Н. Ветохин, В.В. Быков и другие. Исчерпывающую (на соответствующий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах[1,2] и монографиях[3,4].

Однако для полного описания реальных природных процессов важна информация не только о росте исследуемых функций, но и об их колебательных свойствах. В теории колебаний немалая роль отводится вопросам колеблемости решений дифференциальных уравнений, восходящим к фундаментальным исследованиям Ж. Штурма (1837–41 гг.) и более поздним исследованиям А. Кнезера (1896–98 гг.).

Исследования по тематике колеблемости успешно продвигались усилиями многих математиков, среди которых необходимо особо отметить В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, А.Ю. Левина, Н.А. Изобова, В.А. Козлова, А.Д. Мышкиса, И.В. Каменева, Дж.Д. Мирзова, И.В. Асташову, С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова, В.В. Рогачева и других (обширные библио-

[1]Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – 1974. – Т. 12. – С. 71–146.

[2]Изобов Н.А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и ее приложениям // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, №12. – С. 2034–2055.

[3]Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[4]Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. – Мн.: БГУ, 2006. – 320 с.

графии по этому вопросу можно найти, например, в обзоре[5] и монографии[6]). Заметим, что перечисленных авторов в основном интересовали вопросы, связанные с наличием у заданного уравнения или системы хотя бы одного колеблющегося решения, а также с описанием всего множества таких решений или каких-либо дополнительных их свойств. Немало усилий в этих работах было направлено на получение коэффициентных признаков наличия или отсутствия колеблющихся решений.

Последнее время интерес к таким свойствам решений линейных нестационарных систем, как ограниченность, устойчивость, колеблемость и т.п., возрос в связи с задачами изучения автоколебаний и хаотических режимов, возникающих в различных электронных и лазерных устройствах. В связи с этим, особенно интересной и актуальной представляется задача об определении аналогов показателей Ляпунова, отвечающих за колеблемость решений дифференциальных уравнений и систем.

Диссертация посвящена описанию ряда характеристик асимптотического поведения решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем, связанных с их колебательными свойствами. В работе автора рассматриваются следующие характеристики колеблемости и вращаемости:

– характеристические частоты *строгих знаков*, *нулей* и *корней*;

– показатели колеблемости *строгих знаков*, *нестрогих знаков*, *нулей*, *корней* и *гиперкорней*;

– показатели ориентированной вращаемости.

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертации является изучение свойств ляпуновских характеристик колеблемости на пространстве линейных систем с равномерной топологией, а также исследование *линейных* показателей колеблемости по первому приближению. В исследовании делается акцент на отказе от требования ограниченности коэффициентов рассматриваемых систем на временно́й полуоси.

В работе решены следующие задачи:

– на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами установить соотношения между всеми показателями колеблемости, найти их спектры и главные значения для каждой автономной системы;

– при каждом $n > 2$ построить линейное дифференциальное уравнение

[5] Кигурадзе И.Т.,Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.

[6] Асташова И.В. Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / И.В. Асташова и др.; под ред. И.В. Асташовой — М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012.

n-го порядка, спектры (множества различных значений на всех ненулевых решениях) верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней которого совпадают с наперед заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль;

– исследовать в пространстве решений линейных однородных дифференциальных уравнений выше второго порядка сильные показатели колеблемости на остаточность (т. е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном отрезке);

– при каждом $n > 2$ исследовать в пространстве n-мерных линейных однородных дифференциальных систем с равномерной топологией каждый из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней на непрерывность и инвариантность относительно бесконечно малых возмущений;

– выяснить наличие или отсутствие зависимости между мощностями спектров всех линейных показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения.

Объектом исследования являются пространства линейных однородных дифференциальных уравнений и систем с непрерывными на временно́й полуоси коэффициентами, наделённые равномерной топологией, а также нелинейные дифференциальные системы с заданными линейными приближениями.

Предметом исследования являются свойства ляпуновских характеристик колеблемости решений линейных уравнений и систем, их главные значения (регуляризованные по Миллионщикову), которые рассматриваются как функционалы на пространстве уравнений и систем, а также свойства *линейных* показателей колеблемости решений нелинейных систем.

Характеристики колеблемости и вращаемости. И.Н. Сергеевым были впервые введены в рассмотрение характеристики колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений, которые явились весьма эффективным средством для изучения колебательных свойств. Так, в работе[7] он определил понятие *характеристической частоты* $\nu(y)$ скалярной функции y, позволившей численно измерять колеблемость решений уравнений на полупрямой.

Частоту решения можно интерпретировать как среднее (по всей полупрямой) значение числа нулей решения на полуинтервале длины π. Оказалось, что на решениях линейных однородных уравнений с ограниченными коэффициентами она принимает лишь конечные значения[7] и позволяет естественным образом классифицировать колеблющиеся решения, ставя в соответствие, к

[7]Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения// Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.

примеру, функции $y(t) = \sin \omega t$ ее частоту $\nu(y) = \omega$ (подобно тому, как показатели Ляпунова и Перрона позволяют измерять по экспоненциальной шкале рост нормы решения, ставя в соответствие вектор-функции x с нормой $|x(t)| = \exp \lambda t$ ее показатель $\chi(x) = \lambda$).

В работах[8,9] введены и изучены различные модификации характеристических частот, но уже для вектор-функций x, в частности, так называемые *полные* $\sigma(x)$ и *векторные* $\zeta(x)$ частоты. Подсчет последних происходит путем усреднения числа нулей проекции функции x на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получается векторная частота $\sigma(x)$, а если после — то полная частота $\zeta(x)$. Таким образом, полная и векторная частоты являются обобщениями понятия характеристической частоты на случай решений систем. Для решения y линейного уравнения n-го порядка эти характеристики определяются как величины $\sigma(x)$ и $\zeta(x)$ соответственно, где $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$. Позже, в работе[10], были определены более сложные характеристики – показатели вращаемости для решений дифференциальных уравнений и систем.

Все показатели колеблемости, называемые в работе[11] *линейными* для решений нелинейных систем, оказались применимы лишь к решениям, определённым гарантированно на всей положительной полуоси времени, тогда как для решений нелинейных систем такой гарантии дать нельзя. В работе[11] были предприняты попытки распространения определения этих показателей на системы, решения которых не обязательно продолжаемы на всю полуось, а именно, им были определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели.

Изучением характеристических частот, показателей колеблемости и вращаемости занимались В.В. Быков, Е.А. Барабанов, А.С. Войделевич, А.Ю. Горицкий, а также М.В. Смоленцев, Д.С. Бурлаков и другие ученики И.Н. Сергеева. Они изучали спектры указанных характеристик для различных типов уравнений и систем, связи между значениями показателей и коэффициентами уравнений и систем, а также связи этих характеристик друг с другом.

В статье[10] были систематизированы все введенные к тому моменту харак-

[8] Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76, №1. – С. 149–172.

[9] Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сборник. – 2013. – Т. 204, № 1. – С. 119-138.

[10] Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та матем. и инфор. УдГУ. – 2015. – Вып. 2 (46). – С. 171–183.

[11] Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2021. – № 3. – С. 41–46.

теристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты были переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости, а показатели вращаемости и вращения — в сильные и слабые показатели ориентированной вращаемости. Характеристические частоты (или скалярные частоты) в работах[12, 13, 14] стали называться частотами Сергеева.

Методология диссертационного исследования. При доказательстве утверждений в диссертации широко используются методы и результаты теории линейных дифференциальных систем, линейной алгебры, математического анализа, теории возмущений и теории колебаний, а также разработанный автором *метод варьирования системы*, позволяющий преобразовывать исходные линейные однородные дифференциальные системы из различных классов так, чтобы они обладали наперед заданными свойствами.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Даны окончательные ответы на некоторые, долгое время остававшиеся открытыми, вопросы о свойствах показателей колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений и систем. В частности, в работе:

1) на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами установлены соотношения между всеми показателями колеблемости, найдены их спектры и главные значения для каждой автономной системы;

2) для произвольного суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, содержащего нуль, при любом $n > 2$ построено уравнение n-го порядка, спектры верхних сильных показателей колеблемости (строгих и нестрогих) знаков, нулей и корней которого совпадают с множеством $\mathcal{A}$;

3) при любом $n > 2$ в пространстве решений уравнений n-го порядка установлено отсутствие свойства остаточности у сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней;

4) при любом $n > 2$ в пространстве n-мерных линейных систем с равномерной топологией найдены точки, в которых каждый из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни инвариантным относительно бесконечно малых возмущений;

5) установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех линейных показателей колеблемости двумерной нелинейной

[12] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I //Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №10. – С. 1302–1320.

[13] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений //Доклады НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, №1. – С. 24–31.

[14] Войделевич А. С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений //Журнал Белорусского гос. ун-та. Матем. Инфор. – 2019. – №1. – С. 28–32.

системы и системы ее первого приближения.

Положения, выносимые на защиту.

1. Полное описание всех значений показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами.

2. Построение линейного дифференциального уравнения порядка выше второго, спектры верхних сильных показателей колеблемости (строгих и нестрогих) знаков, нулей и корней которого совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль.

3. Неостаточность сильных показателей колеблемости нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений порядка выше второго с непрерывными коэффициентами.

4. Разрывность крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней на множестве линейных однородных дифференциальных систем с равномерной на положительной полуоси топологией и их неинвариантность относительно бесконечно малых возмущений.

5. Отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех линейных показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть полезны специалистам, занимающимся качественной теорией дифференциальных уравнений, в частности, теорией асимптотических характеристик колеблемости. Каждый из разделов диссертации может составить содержание специального курса для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности «Математика».

Степень достоверности. Достоверность результатов подтверждена строгими математическими доказательствами. Все результаты, выносимые автором на защиту, получены автором лично. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации прошли апробацию и обсуждение на всероссийских и международных конференциях, а также научных семинарах:

– на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете (21 октября 2011 г., 13 апреля 2012 г., 22 марта 2013 г., 20 сентября 2013 г., 25 апреля 2014 г., 17 апреля 2015 г., 23 октября 2015 г., 15 апреля 2016 г., 18 ноября 2016 г., 22 сентября

2017 г., 14 декабря 2018 г., 26 апреля 2019 г., 24 апреля 2020 г., 8 апреля 2022 г., 14 апреля 2023 г., 15 сентября 2023 г., 15 марта 2024 г.);

– на семинаре «Нелинейная динамика и синергетика» в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова (Ярославль, 11 апреля 2024 г.);

– на международном научном семинаре «Теория операторов, дифференциальные уравнения и их приложения» в Южном математическом институте Владикавказского научного центра РАН (Владикавказ, 10 мая 2023 г.);

– на научно-исследовательском семинаре «Динамические системы и теория управления» в Адыгейском государственном университете (17 апреля 2014 г., 20 ноября 2014 г., 9 апреля 2015 г., 15 октября 2015 г., 7 апреля 2016 г., 10 ноября 2016 г., 20 апреля 2017 г., 16 сентября 2017 г., 19 апреля 2018 г., 6 декабря 2018 г., 18 апреля 2019 г., 19 сентября 2019 г., 16 апреля 2020 г., 31 марта 2022 г., 6 апреля 2023 г., 21 декабря 2023 г.);

– на международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры», посвящённой 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.);

– на конференции математических центров России (Сочи, 9–13 августа 2021 г.; Москва, 7–11 ноября 2022 г.; Майкоп, 10–15 октября 2023 г.);

– на международной Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г.);

– на международной Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения», посвящённой 115-летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина (Воронеж; 3–9 мая 2023 г.);

– на международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-А, Дзинага, 29 июня – 5 июля 2023 г.);

– на международной конференции «XXXII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2021)» (Симферополь, 18–25 сентября 2021 г.);

– на международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2020» (Уфа, 11–14 ноября 2020 г.);

– на III международной конференции «Кавказская математическая конференция» (Third International Conference «Caucasian Mathematics Conference») (Ростов-на-Дону, 26–29 августа 2019 г.);

– на V международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», посвященной 80-летию А. М. Нахушева (Нальчик, 4–7 декабря 2018 г.);

– на школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 4–8 декабря 2013 г., 17–22 октября 2016 г.);

– на II международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 28 ноября – 1 декабря 2012 г.);

– на международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее» (Майкоп; 8–10 октября 2015 г., 20–24 октября 2017 г., 15–20 октября 2019 г., 13–17 октября 2021 г.);

– на международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь» (Майкоп, 9–10 февраля 2012 г., 7–8 февраля 2013 г., 7–8 февраля 2015 г., 8–9 февраля 2016 г., 8–9 февраля 2017 г., 8–9 февраля 2018 г.).

Опубликование результатов диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 77 печатных работах, из них 18 статей в научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ [1–18], 19 статей в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК, индексируемых в базе данных РИНЦ [19–37] и 40 публикаций с тезисами выступлений на математических конференциях и семинарах [38–77].

Личный вклад автора. В диссертацию включены только те результаты, которые получены лично автором. В списке основных публикаций автора отсутствуют работы в соавторстве.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, перечня условных обозначений, четырех глав, содержащих 26 разделов, заключения и библиографического списка. Полный объём диссертации составляет 217 страниц текста, из которых 31 страница занимает библиографический список, содержащий 327 наименований (с учётом 77 публикаций соискателя).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема, объект и предмет исследования диссертации соответствуют паспорту специальности 1.1.2. — «Дифференциальные уравнения и математическая физика» по следующим областям исследования: 1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. 4. Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. 5. Динамические системы, дифференциальные уравнения на многообразиях. 6. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений. 8. Аналитическая теория дифференциальных уравнений. 12. Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.

Степень разработанности темы исследования. Решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в силу теоремы существования и единственности не имеют вовсе нулей, а значит, все характеристики колеблемости равны нулю.

1. Для систем с постоянными или периодическими коэффициентами (и вообще, для правильных систем) спектры показателей Ляпунова и Перрона одинаковы: они в автономном случае совпадают с множеством действительных частей собственных значений ее матрицы, а в периодическом случае естественным образом выражаются через множество мультипликаторов системы. В работе[15] указаны случаи существования и отсутствия взаимосвязи частоты нулей уравнения Хилла с его мультипликаторами.

Спектры показателей колеблемости *нулей* линейных однородных автономных дифференциальных систем были полностью изучены:

– спектры сильных показателей колеблемости *нулей* (как и набор регуляризованных по Миллионщикову их значений) любой *автономной* системы совпадают с множеством *модулей мнимых частей собственных значений* задающего ее оператора[8];

– сильные и слабые показатели колеблемости *нулей* любого решения автономной системы совпадают между собой[16].

В связи с этим возникает естественный вопрос *об описании соотношений между всеми показателями колеблемости на множестве решений линейных однородных автономных дифференциальных систем, а также об их возможных спектрах и главных значениях для любой автономной системы.*

Полный ответ на этот вопрос дает теорема 3.1 (ниже).

2. Спектры всех характеристик колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка были полностью исследованы:

– для любого *уравнения второго порядка* спектры всех характеристических частот и показателей колеблемости состоят из одного числа, причем все верхние (как и все нижние) характеристические частоты и показатели колеблемости совпадают между собой[7, 8];

– существует решение некоторого уравнения второго порядка, все верхние характеристики колеблемости которого не совпадают с нижними[8, 17];

– на множестве решений уравнения Хилла все верхние характеристики колеблемости совпадают с нижними[15].

---

[15] Сташ А.Х. Свойства характеристик колеблемости Сергеева периодического уравнения второго порядка//Владикав. матем. журнал. – 2021. – Т. 23, вып. 2. – С. 78–86.

[16] Бурлаков Д.С., Цой С.В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 2014. – Вып. 30. – С. 75–93.

[17] Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка// Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 2013. – Вып. 29. – С. 414–442.

Для линейных однородных дифференциальных уравнений более второго порядка о строении спектров характеристических частот и показателей колеблемости известно следующее:

– главные значения характеристических частот уравнений с постоянными коэффициентами совпадают с множеством *модулей мнимых частей корней* соответствующего характеристического многочлена[7];

– существует автономное уравнение четвертого порядка[18] и периодическое уравнение третьего порядка[19], спектры верхних характеристических частот которого содержат невырожденный отрезок;

– существует *периодическое* уравнение третьего порядка, спектры характеристических частот и показателей колеблемости которого содержат одно и то же наперед заданное количество различных *существенных* значений (т.е. каждое значение принимается на решениях, множество начальных значений которых имеет положительную меру)[20];

– построено дифференциальное уравнение третьего порядка, спектры всех характеристических частот и показателей колеблемости которого содержат *счетное множество различных существенных значений*[21];

– доказано существование дифференциального уравнения третьего порядка с *континуальными спектрами* показателей колеблемости[22];

– спектры верхних характеристических частот уравнения порядка выше двух являются *суслинскими множествами* неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой[23, 24]; также в предположении, что спектры содержат точку нуль, установлено обращение этого утверждения[13].

Заметим, что *спектр* показателей Ляпунова n-мерной линейной системы состоит ровно из n чисел (с учетом их кратности). В то же время, спектр показателей Перрона такой системы, вообще говоря, не является конечным

---

[18] Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. – 2012.– Т. 48, №4. – С. 479–486.

[19] Смоленцев М.В. Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, №10. – С. 1413–1417.

[20] Сташ А.Х. О существенных значениях частот Сергеева и показателей колеблемости решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. – 2023. – Т. 33, вып. 1. – С. 141–155.

[21] Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2013. – Вып. 2 (119). – С. 9–23.

[22] Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2013. – Вып. 3 (122). – С. 9–17.

[23] Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II //Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №12. – С. 1595–1609.

[24] Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, №4. – С. 419–425.

и, более того, может совпадать с любым наперед заданным ограниченным и замкнутым сверху измеримым (суслинским) подмножеством числовой прямой.

Возникает естественный вопрос: *может ли спектр какого-либо показателя колеблемости дифференциального уравнения порядка выше второго быть произвольным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль*?

Положительный ответ на этот вопрос содержится в теореме 2.7 (ниже).

3. В работе[25] было введено свойство *остаточности* для асимптотических характеристик решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем, призванное облегчить их исследование. Первоначально ожидалось, что все асимптотические характеристики окажутся остаточными:

– из определений характеристического, нижнего, экспоненциального, центрального и генерального показателей[3, 4] следует их остаточность на множестве решений дифференциальных систем;

– на множестве решений дифференциальных уравнений все характеристические частоты являются *остаточными*[7];

– на множестве решений уравнений и систем все слабые показатели колеблемости гиперкорней являются *остаточными*, поскольку они совпадают с соответствующими слабыми показателями блуждаемости[9];

– на множестве решений уравнений второго порядка все сильные показатели колеблемости являются *остаточными*, так как они совпадают с соответствующими характеристическими частотами[8, 26].

В связи с этим возникает естественный вопрос: *будет ли остаточным какой-либо из сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных уравнений порядка выше второго*?

Теорема 2.8 (ниже) дает отрицательный ответ на этот вопрос.

4. Спектры показателей колеблемости отдельных классов неавтономных линейных однородных дифференциальных систем совершенно разнообразны:

– существует двумерная система *с не более чем счетными множествами существенных значений* показателей колеблемости[27];

– для любого $n \geqslant 2$ существует n-мерная система с *континуальными спектрами* показателей колеблемости[28];

---

[25] Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений //Тр. сем. им. И.Г. Петровского. – 1983. – Вып. 9. – С. 111–166.

[26] Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2011. – №6. – С. 21–26.

[27] Сташ А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 2. – С. 157–171.

[28] Сташ А.Х. О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем // Вест. рос. ун-тов. Матем. – 2023. – Т. 28, № 141. – С. 60–67.

– спектры показателей колеблемости и ориентированной вращаемости треугольных систем состоят из одного нулевого значения[29].

Любое из *крайних* (т. е. наименьшее и наибольшее) значений спектра какого-либо показателя можно рассматривать как функционал, определенный на линейном топологическом пространстве n-мерных систем с *равномерной* на $\mathbb{R}_+$ топологией.

Сужения крайних показателей колеблемости на топологическое подпространство уравнений второго порядка непрерывны[26] и, будучи *остаточными*[25], *инвариантны* относительно *бесконечно малых* (т. е. исчезающих на бесконечности) возмущений. Более того, определены[15] необходимое и достаточное условия инвариантности частоты уравнения Хилла относительно равномерно малых возмущений уравнения.

Из результатов работ[8, 16, 30] в силу непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов следует, что сужение любого из крайних показателей колеблемости на топологическое подпространство автономных систем есть непрерывная функция.

В работах[31, 32] на множестве двумерных систем были найдены не только точки разрыва, но и точки неинвариантности крайних показателей колеблемости относительно бесконечно малых возмущений.

В 1930 г. Перрон построил[33] пример, показывающий, что при $n \geqslant 2$ каждый из характеристических показателей Ляпунова, рассматриваемый как функционал на пространстве $\mathcal{M}^n$, разрывен и неинвариантен относительно бесконечно малых возмущений. Из свойства остаточности указанных функционалов следует[25], что ни один из них не является даже полунепрерывным.

Таким образом, оставался открытым естественный вопрос: *можно ли для любого $n > 2$ в пространстве n-мерных систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка указать точки, в которых сразу все крайние показатели колеблемости терпят разрыв и не инвариантны относительно бесконечно малых возмущений*?

В теореме 4.1 (ниже) содержится положительный ответ на этот вопрос.

[29] Сташ А.Х. Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем // Владикав. матем. журнал. – 2023. – Т. 25, вып. 2. – С. 136–143.

[30] Сташ А. Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. – 2019. – Т. 29, вып. 4. – С. 558–568.

[31] Сергеев И.Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости// Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2019. – № 1. – С. 21–26.

[32] Сташ А.Х. О разрывности крайних частот на множестве линейных двумерных дифференциальных систем// Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естеств.-матем. и техн. науки. – 2013. – Вып. 4 (125). – С. 25–31.

[33] Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 31, Hf. 4. – S. 748–766.

5. Перрон открыл эффект инверсии знака показателей Ляпунова для решений специальных классов нелинейных систем дифференциальных уравнений и их первых приближений[34]. Им была построена нелинейная система, первое приближение которой имело отрицательные характеристические показатели, а почти все ее решения обладали положительными характеристическими показателями. Различные модификации контрпримера Перрона изучались многими авторами[35,36,37,38,39].

В работе[40] доказано существование такой двумерной возмущённой дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели, и возмущением также произвольно заданного высшего порядка малости в окрестности начала координат, что все её нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и всё множество их показателей Ляпунова совпадает с заданным ограниченным суслинским множеством положительной полуоси.

В работе[41] перечислены различные реализуемые соотношения между линейными, сферическими, радиальными и шаровыми разновидностями этих показателей, а также их взаимосвязи с аналогичными показателями системы первого приближения, в частности, одноэлементные спектры линейных показателей колеблемости гиперкорней двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения могут быть совершенно произвольными.

В связи с последним результатом возникает естественный вопрос *о возможности различия не только между самими спектрами показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения, но даже и между мощностями этих спектров.*

Яркий положительный ответ на этот вопрос содержит теорема 3.8 (ниже).

Основное содержание работы

[34] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. – 1930. – Bd. 32, Hf. 1. – S. 703–728.

[35] Леонов Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 1566—1567.

[36] Изобов Н.А., Ильин А.В. Конечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 12. – С. 1522–1536.

[37] Изобов Н.А., Ильин А.В. Эффект Перрона бесконечной смены значений характеристических показателей в любой окрестности начала координат // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 11. – С. 1420–1432.

[38] Изобов Н.А., Ильин А.В. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 11. – С. 1427–1439.

[39] Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 4. – С. 31–43

[40] Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 464–472.

[41] Сергеев И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению// Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 6. – С. 726–734.

Во **введении** описывается предмет исследования, обосновывается актуальность темы диссертации и обсуждается степень разработанности рассматриваемых проблем. Определяются цели и задачи работы, а также формулируются её основные результаты.

В **первой главе** вводятся необходимые обозначения, понятия и приводятся известные факты об объектах исследования.

Во **второй главе** доказаны утверждения о возможных значениях характеристик колеблемости решений линейного однородного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами. Изучено свойство остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений порядка выше второго, а также возможность выполнения строгих неравенств между слабыми и сильными показателями в некоторой точке указанного множества.

В разделе 2.1 приводится обзор литературы и формулировка основных результатов.

В разделе 2.2 для некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка установлены эффективные формулы, позволяющие вычислять характеристики колеблемости, пользусь только коэффициентами уравнения. Даны вспомогательные определения и факты, необходимые для доказательства основных результатов настоящего раздела. Установлено равенство между нижними и верхними характеристиками колеблемости и вращаемости на множестве решений уравнения Хилла, а также взаимосвязь нецелой частоты уравнения Хилла с мультипликаторами. Основным результатом этого раздела является критерий инвариантности частоты уравнения Хилла относительно равномерно малых возмущений уравнения.

В разделе 2.3 доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней которых содержат наборы, состоящие из любого конечного наперед заданного числа метрически и топологически существенных значений. Отказавшись от периодичности коэффициентов, доказано существование линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней которых содержат счетные множества метрически и топологически существенных значений.

Кроме того, доказано существование дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами показателей колеблемости. При этом спектры всех показателей колеблемости заполняют один и тот же отрезок числовой оси с заданными положительными несоизмеримыми концами.

Оказалось, что для каждого решения построенного уравнения все показатели колеблемости совпадают между собой.

В разделе 2.4 для любого $n > 2$ методом варьирования системы построен пример линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с непрерывными неограниченными на временной полуоси коэффициентами, спектры верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней которого совпадают с наперед заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль.

В разделе 2.5 установлено, что сильные показатели колеблемости, рассматриваемые как функционалы на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений порядка выше двух, не являются остаточными. Для доказательства этого факта используется метод варьирования системы на конечном участке полуоси. Кроме того, при любом $n > 2$ приводится решение некоторого уравнения n-го порядка, у которой показатели колеблемости являются точными, но не абсолютными.

В разделе 2.6 полностью изучены множества значений характеристик колеблемости решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Оказалось, что сильные и слабые показатели колеблемости строгих смен знаков решений неоднородного уравнения принимают лишь нулевые значения, а для любого решения все его сильные и слабые показатели колеблемости нестрогих смен знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают между собой. Установлено, что спектры сильных и слабых показателей колеблемости нестрогих смен знаков, нулей, корней и гиперкорней неоднородного уравнения состоят из набора их главных значений.

В **третьей главе** на множестве решений линейных однородных автономных дифференциальных систем полностью описаны показатели колеблемости и ориентированной вращаемости, а также найдены спектры этих показателей линейных однородных треугольных дифференциальных систем и установлена взаимосвязь спектров показателей колеблемости и вращаемости взаимно-сопряженных двумерных систем. Кроме того, доказаны утверждения о возможных спектрах показателей колеблемости смен знаков, нулей, корней и гиперкорней линейных однородных дифференциальных систем. Проведено исследование показателей колеблемости по первому приближению.

В разделе 3.1 приводится обзор литературы и формулировка основных результатов.

В разделе 3.2 установлено, что на множестве решений автономных дифференциальных систем показателей колеблемости и ориентированной вращаемости являются точными и абсолютными. Оказалось, что они напрямую зависят от собственных значений матрицы системы. Как следствие, найдены спектры всех показателей колеблемости и вращаемости автономных систем с симметричной матрицей. Доказано, что они состоят из одного нулевого значения. Кроме того, дано полное описание главных значений показателей колеблемости и ориентированной вращаемости таких систем. Эти значения для показателей колеблемости нестрогих знаков, корней и гиперкорней совпали с множеством модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, а показатели колеблемости строгих смен знаков могут состоять из нуля и наименьшего по модулю мнимых частей комплексных корней соответствующего характеристического многочлена. Спектры показателей ориентированной вращаемости естественным образом определяется теоретико-числовыми свойствами набора мнимых частей собственных значений матрицы системы. Это множество может содержать (в отличие от показателей колеблемости и блуждаемости) значения, отличные от нуля, и от мнимых частей собственных значений матрицы системы, причем мощность этого спектра может быть экспоненциально велика по сравнению с размерностью пространства.

В разделе 3.3 установлено, что спектры всех показателей колеблемости и вращаемости линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными коэффициентами состоят из одного нулевого значения.

В разделе 3.4 установлено совпадение спектров каждого показателя колеблемости и вращаемости взаимно-сопряженных двумерных систем дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

В разделе 3.5 доказано существование линейной однородной двумерной дифференциальной системы, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней которых содержат не более чем счетные множества метрически и топологически существенных значений. При этом в случае конечного спектра удается построить систему с периодическими коэффициентами, а в случае счетного спектра - систему с непрерывными ограниченными на положительной полуоси коэффициентами.

В разделе 3.6 для любого $n \geqslant 2$ установлено существование n-мерной дифференциальной системы с континуальными спектрами показателей колеблемости. При четных n спектры всех показателей колеблемости заполняют один и тот же отрезок числовой оси с наперед заданными положительными несоизмеримыми концами, а при нечетных n к указанным спектрам еще дополнительно добавляется нуль. Оказалось, что для каждого решения построенной дифференциальной системы все показатели колеблемости совпадают между собой.

В разделе 3.7 установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы ее первого приближения. А именно, методом варьирования системы построена двумерная нелинейная система, все нетривиальные решения которой бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей колеблемости заполняет отрезок $[0,1]$ или совпадает с наперед заданным непустым подмножеством рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а спектры линейной системы ее первого приближения состоят только из одного элемента. Более того, спектры показателей колеблемости сужения построенной нелинейной двумерной системы на прямое произведение любой открытой окрестности нуля фазовой плоскости и временной полуоси могут состоять из заданного количества элементов, или быть счётными, или даже достигать мощности континуума. Кроме того, доказано существование нелинейной системы, спектры всех показателей колеблемости которой совпадают с произвольным заранее заданным интервалом отрезка $[0,1]$, а соответствующие спектры линейной системы её первого приближения также состоят из одного неотрицательного числа.

В **четвертой главе** изучены вопросы разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем с равномерной топологией. Установлено существование точек на множестве дифференциальных систем, в которых все старшие и младшие показатели колеблемости нулей, корней и гиперкорней не только не являются непрерывными, но и не являются полунепрерывными ни сверху, ни снизу. Кроме того, доказана неинвариантность крайних показателей колеблемости относительно бесконечно малых возмущений, для чего также использован метод варьирования системы.

В **заключении** приводятся итоги выполненного исследования, рекомендации по использованию полученных результатов и перспективы дальнейшего развития темы.

Формулировки основных результатов. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (не обязательно ограниченными — будем отождествлять их с соответствующими системами). Подмножества множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящие из *ограниченных* и *автономных* систем, обозначим соответственно через $\mathcal{M}^n$ и $\mathcal{C}^n$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ (далее звездочкой снизу помечаем любое линейное пространство с выколотым нулем) и положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} \equiv \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

В множестве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ естественным образом выделим также подмножество $\tilde{\mathcal{E}}^n$

систем, имеющих матрицы вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

и отвечающих *линейным однородным дифференциальным уравнениям n-го порядка*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

каждое из которых задается своей непрерывной вектор-функцией

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$$

и, преобразуясь в систему A стандартным переходом от скалярной переменной y к векторной

$$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}),$$

отождествляется с этой системой. Множество всех ненулевых решений $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ и положим

$$\mathcal{S}^n_{\mathcal{E}} \equiv \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение I[7, 9, 17]**.** Для заданного момента $t > 0$ и скалярной функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ введем следующие обозначения для количеств специфических точек на промежутке $(0, t]$:

- $\nu^-(y, t)$ — число точек *строгой смены знака* функции y, т. е. таких, что в любой окрестности каждой из них она принимает как положительные, так и отрицательные значения;

- $\nu^\sim(y, t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции y, т. е. таких, что в любой проколотой окрестности каждой из них она принимает как неположительные, так и неотрицательные значения;

- $\nu^0(y, t)$ — число *нулей* функции y;

- $\nu^+(y, t)$ — число *корней* функции y, т. е. ее нулей с учетом их *кратности*;

- $\nu^*(y, t)$ — число *гиперкорней* функции y: при его подсчете каждый ее некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз, а для вектор-функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ и вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$, взяв в качестве $y(\cdot)$ скалярное произведение $\langle x(\cdot), m\rangle$, обозначим

$$\nu^\alpha(x,m,t) \equiv \nu^\alpha(y,t), \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

Определение II[7, 8, 10, 12]**.** *Верхние* (*нижние*) *характеристические частоты строгих знаков, нулей* и *корней* любого решения $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ зададим при $\alpha = -, 0, +$ соответственно формулами

$$\hat{\omega}^\alpha(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,t) \quad \left(\check{\omega}^\alpha(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,t)\right),$$

а *верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости строгих* и *нестрогих знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* решения $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ зададим при $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ соответственно формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$
$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right).$$

Определение III[10]**.** Для каждого показателя

$$\varkappa : \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

условимся о следующем:

- если его верхнее значение (с крышечкой) для функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ совпадает с аналогичным нижним значением (с галочкой), то будем называть это значение *точным* (записывая его без галочки и крышечки);
- если его слабое значение (с пустым кружочком) для функции $x \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{M}}$ совпадает с аналогичным сильным значением (с полным кружочком), то будем называть это значение *абсолютным* (записывая его без кружочков вообще);
- назовем его *спектром* для системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ множество $\varkappa(\mathcal{S}_*(A))$;
- назовем его i*-м верхним* $\varkappa_{\bar{i}}(A)$ и *нижним* $\varkappa_{\underline{i}}(A)$ *главными* (или *регуляризованными по Миллионщикову*) значениями для системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\varkappa_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{V\in G^i(A)} \sup_{x\in V_*} \varkappa(x), \qquad \varkappa_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{V\in G^{n-i+1}(A)} \inf_{x\in V_*} \varkappa(x),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ и $G^i(A)$ — множество i-мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$, а при $i = 1$ и $i = n$ будем называть эти значения *крайними*.

Для любой системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ справедливы соотношения

$$0 \leqslant \varkappa_{\overline{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_{\overline{n}}(A), \qquad 0 \leqslant \varkappa_{\underline{1}}(A) \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_{\underline{n}}(A),$$

$$\varkappa_{\underline{i}}(A) \leqslant \varkappa_{\overline{i}}(A), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\varkappa_{\underline{1}}(A) = \varkappa_{\overline{1}}(A) = \inf_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x), \qquad \varkappa_{\underline{n}}(A) = \varkappa_{\overline{n}}(A) = \sup_{x \in \mathcal{S}_*(A)} \varkappa(x),$$

поэтому крайние значения будем обозначать просто $\varkappa_1(A)$ и $\varkappa_n(A)$.

Собственные значения $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ будем, по умолчанию, считать упорядоченными по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей.

Теорема I (3.1). *При любом $n > 1$ для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ каждый показатель колеблемости является точным, абсолютным и удовлетворяет соотношениям*

$$\nu^-(x) \leqslant \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x),$$

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(A)) = \{|\operatorname{Im}\lambda_1(A)|\} \text{ \textit{при} } n = 2,$$

$$0 \in \nu^-(\mathcal{S}_*(A)) \subset \{0, |\operatorname{Im}\lambda_1(A)|\} \text{ \textit{при} } n > 2,$$

$$\nu^-_{n}(A) = \nu^-_{\overline{n-1}}(A) = \nu^-_{\underline{n-1}}(A) \leqslant |\operatorname{Im}\lambda_1(A)|,$$

$$\nu^-_{\overline{j}}(A) = \nu^-_{\underline{j}}(A) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2 \quad (n > 2).$$

Из этой теоремы и ее доказательства, а также из результатов работ[8, 16] следует, что:

- для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ при всех $\varkappa = \hat{\nu}^\alpha_\bullet, \check{\nu}^\alpha_\bullet, \hat{\nu}^\alpha_\circ, \check{\nu}^\alpha_\circ$ и $\alpha = \sim, 0, +, *$ выполнены равенства

$$\varkappa_{\overline{j}}(A) = \varkappa_{\underline{j}}(A) = |\operatorname{Im}\lambda_j(A)|, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

- спектры показателей колеблемости нулей, нестрогих знаков, корней и гиперкорней автономных систем состоят из множества модулей мнимых частей собственных значений ее матрицы;

- если хотя бы одно собственное значение матрицы системы действительно или все собственные значения комплексны, но некоторому из них соответствует более одной жордановой клетки, то показатели строгих знаков всех ее решений равны нулю;

- если все собственные значения комплексны и каждому из них соответствует ровно одна жорданова клетка, то спектр показателя строгих знаков автономной системы состоит из нуля и наименьшего из модулей мнимых частей собственных значений.

Определение IV[42]**.** Множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ называется *суслинским множеством* прямой $\mathbb{R}$, если оно либо пусто, либо является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии, а множество $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ — суслинское множество *расширенной* числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества $\{-\infty, +\infty\}$.

Теорема II (2.7). *Для произвольного содержащего нуль суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ и любого $n > 2$ существует дифференциальное уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющее равенствам*

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^-(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^0(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^+(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}, \quad \alpha = -, \sim, 0, +.$$

Определение V[25]. Назовем функционал $\varkappa : \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *остаточным*, если для любых функций $x, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $x(t) = y(t)$, $t \geqslant t_0$, имеет место равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

Теорема III (2.8). *При любом $n > 2$ ни один из функционалов*

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}, \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha} : \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \alpha = \sim, 0, +, *,$$

не является остаточным.

Все крайние показатели системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ будем рассматривать как функционалы на линейном топологическом пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ с естественными для функции линейными операциями и равномерной на $\mathbb{R}_+$ топологией, задаваемой метрикой

$$\rho_U(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A(t) - B(t)|, 1\}, \quad A, B \in \tilde{\mathcal{M}}^n.$$

[42] Куратовский К. Топология. В 2-х т. – Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 596 с.

Определение VI[25]**.** Для системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ через $\mathcal{B}(A)$ обозначим множество систем $B \in \tilde{\mathcal{M}}^n$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to +\infty} |B(t) - A(t)| = 0,$$

при выполнении которого возмущение $B - A$ назовем *бесконечно малым*, а функционал, определенный на $\tilde{\mathcal{M}}^n$, назовем *инвариантным в точке* $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если его сужение на множество $\mathcal{B}(A)$ есть константа.

Теорема IV (4.1). *Для любого $n > 2$ в пространстве $\tilde{\mathcal{M}}^n$ существует система, в которой ни один из крайних показателей колеблемости нулей, корней и гиперкорней не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху, ни полунепрерывным снизу, ни инвариантным относительно бесконечно малых возмущений.*

Для заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовой фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

допускающую нулевое решение и обеспечивающую существование и единственность решений задач Коши.

Определение VII. С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - A(t)x| = o(x), \quad x \to 0.$$

Будем рассматривать нелинейные системы вида (1), у которых все ненулевые решения определены на всей числовой полуоси. Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1), а через $x_f(\cdot, x_0)$ то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0, x_0) = x_0$.

Теорема V (3.8). *Для любого непустого подмножества $X \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $X = [0, 1]$ существуют две системы*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x) \equiv f(t, x), \quad |B(t, x)| \leqslant |x|^2, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2),$$

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, обладающие свойствами

$$\nu^{\alpha}(\mathcal{S}_*(A)) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases}$$

$$\nu^{\alpha}(\mathcal{S}_*(f)) = \begin{cases} X \cup \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ X \cup \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases}$$

причем для каждого значения $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *множества* $\{\nu^{\alpha}(x_f(\cdot, x_0)) \mid 0 < |x_0| < \varepsilon\}$ *и* $\nu^{\alpha}(\mathcal{S}_*(f))$ *равномощны.*

Заключение

В диссертации изучен важный класс функционалов на пространстве обыкновенных дифференциальных уравнений и систем — ляпуновские характеристики колеблемости. Разработан метод варьирования системы, с помощью которого установлены следующие их свойства: неостаточность сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений выше второго порядка, разрывность крайних показателей колеблемости на множестве дифференциальных систем с равномерной на положительной полуоси топологией и их неинваринатность относительно бесконечно малых возмущений, а также отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения. Кроме того, с помощью метода варьирования системы конструктивно доказано существование дифференциального уравнения порядка выше второго, у которого спектры верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль. На множестве решений автономных дифференциальных систем установлены точность и абсолютность всех показателей колеблемости, найдены их спектры, описаны их главные значения. Полученные в работе результаты обобщают и усиливают предшествующие результаты ряда авторов, а на некоторые вопросы, долгое время остававшиеся открытыми, дают окончательные ответы.

Результаты работы могут быть полезны специалистам по качественной теории дифференциальных уравнений.

Благодарности. Выражаю искреннюю признательность своему научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору Игорю Николаевичу Сергееву за внимание и ценные замечания.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

1. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.767). – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1418–1422 (0.3125 п.л.). DOI: 10.1134/S0374064114100203

Перевод: Stash A.Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations // Differential Equations (IF WoS: 0.431; Scopus SJR: 0.387). – 2014. – V. 50, № 10. – P. 1413–1417.

2. Stash A.Kh. Spectra of total and vector frequencies of third-order linear differential equations // Journal of Mathematical Sciences (Scopus SJR: 0.277). – 2015. – V. 210, № 3. – P. 270–280 (0.6875 п.л.). DOI:10.1007/s10958-015-2565-4

3. Сташ А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот // Дифференциальные уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.875). – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 143–144 (0.125 п.л.). DOI: 10.1134/S0374064115010161

Перевод: Stash A.Kh. Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies // Differential Equations (IF WoS: 0.344; Scopus SJR: 0.391). – 2015. – V. 51, № 1. – P. 146–148.

4. Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.426). – 2017. – № 2. – С. 65–68 (0.25 п.л.).

Перевод: Stash A.Kh. The absence of residual property for total hyperfrequencies of solutions to third order differential equations // Moscow University Mathematics Bulletin (WoS; Scopus SJR: 0.195). – 2017. – V. 72, № 2. – P. 81–83. DOI: 10.3103/S0027132217020085

5. Сташ А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.642). – 2019. – № 5. – С. 48–51 (0.25 п.л.).

Перевод: Stash A.Kh. Some properties of oscillation indicators of solutions to a two-dimensional system // Moscow University Mathematics Bulletin (WoS; Scopus SJR: 0.200). – 2019. – V. 74, № 5. – P. 202–204. DOI: 10.3103/S0027132219050061

6. Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки (WoS; RSCI; ИФ РИНЦ: 0.968;

Scopus SJR: 0.401). – 2019. – Т. 29, вып. 4. – С. 558–568 (0.6875 п.л.). DOI: 10.20537/vm190407

7. Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки (WoS; RSCI; ИФ РИНЦ: 1.045; Scopus SJR: 0.310). – 2021. – Т. 31, вып. 1. – С. 59–69 (0.6875 п.л.). DOI: 10.35634/vm210105

8. Сташ А.Х. Свойства характеристик колеблемости Сергеева периодического уравнения второго порядка // Владикавказский математический журнал (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.508; Scopus SJR: 0.300). – 2021. – Т. 23, вып. 2. – С. 78–86 (0.5625 п.л.). DOI: 10.46698/n2399-6862-7231-a

9. Сташ А.Х. Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Владикавказский математический журнал (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.480; Scopus SJR: 0.276). – 2022. – Т. 24, вып. 3. – С. 120–132 (0.8125 п.л.). DOI: 10.46698/a8125-0078-5238-y

Перевод: Stash A.Kh. Oriented rotatability exponents of solution to homogeneous autonomous linear differential systems // Siberian Mathematical Journal (IF WoS: 0.500; Scopus SJR: 0.659). – 2024. – V. 65, № 1. – P. 234–244.

10. Сташ А.Х. О существенных значениях частот Сергеева и показателей колеблемости решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки (IF WoS: 0.600; RSCI; ИФ РИНЦ: 0.876; Scopus SJR: 0.345). – 2023. – Т. 33, вып. 1. – С. 141–155 (0.9375 п.л.). DOI: 10.35634/vm230110

11. Сташ А.Х. О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления (ИФ РИНЦ: 1.115; Scopus SJR: 0.250). – 2023. – № 1. – С. 78–109 (2 п.л.). DOI: 10.21638/11701/spbu35.2023.106

12. Сташ А.Х. Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем // Владикавказский математический журнал (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.480; Scopus SJR: 0.210). – 2023. – Т. 25, вып. 2. – С. 136–143 (0.5 п.л.). DOI: 10.46698/z2651-3365-0189-p

13. Сташ А.Х. Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.129). – 2023. – Т. 59, № 5. – С. 588–595 (0.5 п.л.). DOI: 10.31857/S0374064123050035

Перевод: Stash A.Kh. On the control of the spectra of upper strong oscillation exponents of signs, zeros, and roots of third-order differential equations //

Differential Equations (IF WoS: 0.800; Scopus SJR: 0.573). – 2023. – V. 59, № 5. – P. 597–605.

14. Сташ А.Х. Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения // Дифференциальные уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.129). – 2023. – Т. 59, № 8. – С. 1139–1142 (0.25 п.л.). DOI: 10.31857/S0374064123080125

Перевод: Stash A.Kh. Comparing the spectra of oscillation exponents of a nonlinear system and the first approximation system // Differential Equations (IF WoS: 0.800; Scopus SJR: 0.573). – 2023. – V. 59, № 8. – P. 1147–1150.

15. Сташ А.Х. О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем // Вестник российских университетов. Математика (RSCI; Scopus SJR: 0.410; ИФ РИНЦ: 0.603). – 2023. – Т. 28, № 141. – С. 60–67 (0.5 п.л.). DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67

16. Сташ А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы // Труды института математики и механики УрО РАН (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.146; Scopus SJR: 0.311; IF WoS: 0.400). – 2023. – Т. 29, № 2. – С. 157–171 (0.9375 п.л.). DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-157-171

Перевод: Stash A.Kh. On essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (WoS; Scopus SJR: 0.289). – 2023. – V. 321, № 1. – P. 216–229.

17. Сташ А.Х. О бесконечных спектрах показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Известия вузов. Математика (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.819). – 2024. – № 4. – С. 47–66 (1.25 п.л.). DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-47-66

Перевод: Stash A.Kh. On infinite spectra of oscillation exponents of third-order linear differential equations // Russian Mathematics (WoS; Scopus SJR: 0.457). – 2024. – V. 68, № 4. – P. 42–59.

18. Сташ А.Х. О некоторых свойствах сильных показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений // Владикавказский математический журнал (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.480; Scopus SJR: 0.210). – 2024. – Т. 26, вып. 2. – С. 122–132 (0.6875 п.л.). DOI: 10.46698/x2543-2938-8548-c

Публикации в журналах из перечня ВАК, индексируемые в РИНЦ

19. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник

Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.300). – 2013. – Вып. 2 (119). – С. 9–23 (0.9375 п.л.).

20. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.300). – 2013. – Вып. 3 (122). – С. 9–17 (0.5625 п.л.).

21. Сташ А.Х. О разрывности крайних частот на множестве линейных двумерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.300). – 2013. – Вып. 4 (125). – С. 25–31 (0.4375 п.л.).

22. Сташ А.Х. О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.338). – 2014. – Вып. 1 (133). – С. 30–36 (0.4375 п.л.).

23. Сташ А.Х. О счетных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.338). – 2014. – Вып. 2 (137). – С. 23–32 (0.625 п.л.).

24. Сташ А.Х. О существенных значениях частот решений линейного дифференциального периодического уравнения третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.338). – 2014. – Вып. 3 (142). – С. 33–44 (0.75 п.л.).

25. Сташ А.Х. О спектрах полных и векторных частот знаков и корней линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.440). – 2015. – Вып. 1 (154). – С. 27–31 (0.3125 п.л.).

26. Сташ А.Х. О некоторых свойствах полных и векторных частот знаков и корней решений линейных однородных двумерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.440). – 2015. – Вып. 2 (161). – С. 13–17 (0.3125 п.л.).

27. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.440). – 2015. – Вып. 3 (166). – С. 18–22 (0.3125 п.л.).

28. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений линейных неоднородных автономных дифференциальных уравнений // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.440). – 2015. – Вып. 4 (171). – С. 30–35 (0.375 п.л.).

29. Сташ А.Х. О разрывности младших частот нулей и корней на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.199). – 2016. – Вып. 1 (176). – С. 17–24 (0.5 п.л.).

30. Сташ А.Х. Свойства главных полных и векторных частот строгих знаков линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.199). – 2016. – Вып. 2 (181). – С. 39–47 (0.5625 п.л.).

31. Сташ А.Х. К вопросу о строгих неравенствах между нижними и верхними главными частотами дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.199). – 2016. – Вып. 3 (186). – С. 21–27 (0.4375 п.л.).

32. Сташ А.Х. Пример несовпадения полной и векторной частот гиперкорней решения дифференциального уравнения третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.199). – 2016. – Вып. 4 (191). – С. 47–50 (0.25 п.л.).

33. Сташ А.Х. О некоторых свойствах полных и векторных гиперчастот решений двумерной дифференциальной системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.370). – 2017. – Вып. 2 (201). – С. 31–34 (0.25 п.л.).

34. Сташ А.Х. Элементарное доказательство совпадения полной и векторной частот нулей решений автономных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.485). – 2018. – Вып. 1 (216). –

С. 54–58 (0.3125 п.л.).

35. Сташ А.Х. О некоторых свойствах гиперчастот решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.485). – 2018. – Вып. 2 (221). – С. 21–25 (0.3125 п.л.).

36. Сташ А.Х. О некоторых свойствах гиперчастот решений линейных многомерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.485). – 2018. – Вып. 3 (226). – С. 20–24 (0.3125 п.л.).

37. Сташ А.Х. О разрывности старших частот на множестве линейных однородных многомерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки (ИФ РИНЦ: 0.485). – 2018. – Вып. 4 (231). – С. 28–32 (0.3125 п.л.).

Аннотации докладов на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете

38. Сташ А.Х. О множестве значений полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1665 (0.0625 п.л.).

39. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 908 (0.0625 п.л.).

40. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 807–808 (0.125 п.л.).

41. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот решений двумерных линейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1497–1498 (0.125 п.л.).

42. Сташ А.Х. О спектрах частот некоторых линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 856 (0.0625 п.л.).

43. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты нестрогих знаков решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 829–830 (0.125 п.л.).

44. Сташ А.Х. О разрывности некоторых крайних частот на множестве линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 11. – С. 1552–1553 (0.125 п.л.).

45. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 6. – С. 853–854 (0.125 п.л.).

46. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты решений линейной однородной автономной дифференциальной системы // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 6. – С. 851–852 (0.125 п.л.).

47. Сташ А.Х. Неравенства между нижними и верхними главными частотами линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52, № 11. – С. 1584–1585 (0.125 п.л.).

48. Сташ А.Х. Некоторые свойства полных и векторных гиперчастот решений маломерных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 11. – С. 1560–1561 (0.125 п.л.).

49. Сташ А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости гиперкорней решений многомерных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1574–1576 (0.1875 п.л.).

50. Сташ А.Х. Показатели колеблемости решений дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 6. – С. 903–904 (0.125 п.л.).

51. Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости и частот Сергеева уравнения Хилла // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 6. – С. 837–838 (0.125 п.л.).

52. Сташ А.Х. О множествах значений показателей вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 6. – С. 858–860 (0.1875 п.л.).

53. Сташ А.Х. О нулевых спектрах показателей колеблемости и вращаемости треугольных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, № 6. – С. 861–862 (0.125 п.л.).

54. Сташ А.Х. Об управлении суслинскими спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней линейных однородных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, № 11. – С. 1575–1576 (0.125 п.л.).

55. Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений высокого порядка// Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 6. – С. 850–852 (0.1875 п.л.).

Тезисы докладов в материалах научных конференций

56. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных систем // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы II международной конференции молодых ученых. – Нальчик: ООО «Редакция журнала «Эльбрус», 2012. – С. 211–212 (0.125 п.л.).

57. Сташ А.Х. О множестве значений полных частот решений линейных уравнений третьего порядка // Материалы IX международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь». – Майкоп: Изд-во АГУ. Т. I. 2012. – С. 324–328 (0.3125 п.л.).

58. Сташ А.Х. О спектрах полных и векторных частот решений треугольных систем линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка // Материалы X международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь». – Майкоп: Изд-во АГУ. Т. I. 2013. – С. 323–325 (0.1875 п.л.).

59. Сташ А.Х. Некоторые свойства полных и векторных частот линейных двумерных дифференциальных систем // Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: Материалы XI Школы молодых ученых. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. – С. 69–72 (0.25 п.л.).

60. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты знаков и корней решений линейных треугольных дифференциальных систем // Материалы XII международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь», посвященной 75-летию Адыгейского государственного университета. – Майкоп: Изд-во АГУ. 2015. – С. 226–229 (0.25 п.л.).

61. Сташ А.Х. Свойства частот решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Материалы I международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп: Изд-во АГУ. 2015. – С. 204–207 (0.25 п.л.).

62. Сташ А.Х. О полных и векторных частотах решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // XIV Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики». – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2016. – С. 288–290 (0.1875 п.л.).

63. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты гиперкорней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений // Материалы

XIII международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2016. – С. 333–336 (0.25 п.л.).

64. Сташ А.Х. Пример несовпадения полной и векторной гиперчастот решения двумерной дифференциальной системы // Материалы II международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. – С. 226–228 (0.1875 п.л.).

65. Сташ А.Х. существовании двумерной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот нестрогих знаков и гиперкорней // Материалы XIV международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь». – Майкоп: Изд-во АГУ, Т. II, 2017. – С. 58–60 (0.1875 п.л.).

66. Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений автономных дифференциальных систем // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы V международной научной конференции, посвященной 80-летию А. М. Нахушева. – Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. – С. 187 (0.0625 п.л.).

67. Сташ А.Х. Формула для вычисления скалярных частот решений двух классов линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка // Материалы XV международной научной конференции молодых ученых «Наука. Образование. Молодежь». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2018. – С. 227–230 (0.25 п.л.).

68. Stash A.Kh. On the coincidence of the spectra of the exponents of oscillations of conjugate differential systems // Book of Abstracts. Third International Conference «Caucasian Mathematics Conference». – Rostov-on-Don: Rostov branch of the Russian Engineering Academy Publishing. 2019. P. 37–38 (0.125 п.л.).

69. Сташ А.Х. Свойства показателей колеблемости решений автономных дифференциальных систем // Материалы III международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2019. – С. 86–89 (0.25 п.л.).

70. Сташ А.Х. Свойства частот Сергеева уравнения Хилла // Сборник тезисов международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа-2020». Часть 2. – Уфа: Из-во Аэтерна, 2020. – С. 246–248 (0.1875 п.л.).

71. Сташ А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений дифференциальных систем // Сборник материалов международной конференции «КРОМШ-2021». – Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021. – С. 55 (0.0625 п.л.).

72. Сташ А.Х. О показателях вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Материалы IV международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп: Изд-во АГУ, 2021. – С. 195–197 (0.1875 п.л.).

73. Сташ А.Х. О спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вторая конференция математических центров России: сборник тезисов. – Москва: Из-во Моск. ун-та, 2022. – С. 221–223 (0.1875 п.л.).

74. Сташ А.Х. Вычисление показателей колеблемости некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. – Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2023. – С. 318–319 (0.125 п.л.).

75. Сташ А.Х. Вопросы непрерывности показателей колеблемости на множестве решений линейных дифференциальных систем // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXIV: материалы международной Воронежской весенней математической школы. – Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2023. – С. 372–374 (0.1875 п.л.).

76. Сташ А.Х. О спектрах характеристик колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения: тезисы докладов XVII международной научной конференции. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2023. – С. 224–225 (0.125 п.л.).

77. Сташ А.Х. О свойствах показателей колеблемости нелинейной системы и системы ее первого приближения// «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024): Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. – С. 292–295 (0.25 п.л.).