ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации А. Н. Калинина
«Связь задач Монжа и Канторовича»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук
по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Диссертационная работа А. Н. Калинина представляет собой исследование в области функционального анализа и теории меры. Она посвящена связям между двумя классическими задачами оптимальной транспортировки мер, поставленными Монжем и Канторовичем. Тематику диссертации следует отнести к современному направлению функционального анализа на стыке с теорией экстремальных задач и стохастическим анализом.

Перспективность проведенного автором исследования задач оптимальной транспортировки мер в бесконечномерных пространствах очевидна ввиду многочисленных приложений теории оптимальной транспортировки к практическим задачам распределения ресурсов и регулирования транспортных потоков с большим числом параметров. Это нередко приводит к ситуациям, близким к системам с бесконечным числом параметров. В этой области работает много квалифицированных специалистов в ведущих научных центрах мира.

Диссертация А. Н. Калинина состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Введение близко к автореферату и дает обзор исследований и постановок задач, относящихся к области диссертации, а также включает формулировки основных результатов диссертации. Классические задачи Монжа и Канторовича в их современной постановке исходят из одинаковых данных, состоящих из двух радоновских вероятностных мер μ и ν на вполне регулярных топологических пространствах X и Y и ограниченной непрерывной функции стоимости h на произведении $X \times Y$. Задача Монжа состоит в минимизации интеграла от функции $h(x, T(x))$ по мере μ на множестве всех борелевских отображений, переводящих меру μ в ν. Задача Канторовича состоит минимизации интеграла от h по радоновским вероятностным мерам σ на $X \times Y$ с проекциями μ и ν на сомножители (мера σ называется планом Канторовича). Вторая задача линейна, причем в ней достигается минимум, а в задаче Монжа минимума может не быть, существует лишь инфимум. При этом минимум Канторовича не меньше инфимума Монжа. Однако известно, что в случае суслинских пространств (например полных сепарабельных метрических пространств) и меры μ без атомов минимум Канторовича равен инфимуму Монжа. Оставался открытым вопрос об условиях на пространства и меры, при которых для всех ограниченных непрерывных функций стоимости выполнено такое равенство. Первые две главы диссертации А. Н. Калинина посвящены решению этой проблемы. Третья глава тесно связана с задачами оптимизации функционалов на пространстве мер и посвящена описанию крайних точек некоторых часто встречающихся в приложениях выпуклых множеств в пространстве мер.

В главе 1 построен пример безатомических радоновских вероятностных мер на компактах, первую из которых можно отобразить на вторую, но для некоторой непрерывной функции стоимости значения в соответствующих задачах Монжа и Канторовича различны.

В главе 2 найдены широкие достаточные условия для равенства значений в задачах Монжа и Канторовича с непрерывной функцией стоимости. Основной ее результат дает фактически точное условие равенства: обе меры сепарабельны, причем первая не имеет атомов. Пример из главы 1 означает, что сепарабельность убрать нельзя. Правда, в буквальном смысле она не является необходимым условием, так как общий основной результат главы 2, имеющий несколько технический характер, дает еще более широкое достаточное условие.

Наконец, глава 3 относится к теории локализации, органично связанной с задачами Монжа и Канторовича. Два основных вопроса — локализация гиперболических мер и описание крайних точек семейств некоторых классов вогнутых мер. В этой главе построено обобщение локализационной теории и усилены результаты известных специалистов, в том числе С. Г. Бобкова. Первый основной результат главы — описание крайних точек семейства вогнутых мер, для которых интегралы от заданного конечного набора полунепрерывных снизу функций положительны. Второй основной результат — новый метод нахождения локализующей меры. Ранее известный метод бисекций для нахождения локализующей меры на пространстве Фреше с борелевской вероятностной мерой и положительными интегралами от двух заданных полунепрерывных снизу функций обобщен на случай произвольного конечного числа функций. Отметим, что обоснование этих новых результатов основано на сочетании методов теории меры, функционального анализа и топологии, в частности используется известная теорема Борсука–Улама.

Перечислим основные результаты диссертации.

1. Достаточные условия равенства инфимумов в задачах Монжа и Канторовича на бесконечномерных вполне регулярных топологических пространствах с радоновскими вероятностными мерами в случае непрерывной функцией стоимости. В частности, доказано, что достаточно такого условия: рассматриваемые меры сепарабельны и не имеют атомов.

2. Первый пример компактного топологического пространства с безатомическими вероятностными мерами и непрерывной функции стоимости, для которых инфимумы в задачах Монжа и Канторовича различны, причем в обеих задачах достигается минимум, т.е. инфимумы являются минимумами.

3. Описание крайних точек семейств логарифмически вогнутых мер на бесконечномерных пространствах с произвольным конечным числом ограничений.

4. Обобщение метода локализации гиперболических мер на пространствах Фреше на случай произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Все результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

Отметим некоторые недостатки работы. В параграфе 1.2 главы 1 обозначения, используемые в формулировке примера 1.2.1, вводятся лишь после самого примера на следующей странице. В формулировке и доказательстве леммы 1.2.4 индекс s_n в нескольких местах ошибочно заменен на индекс n. Доказательство теоремы 3.2.1 посвящено лишь первому утверждению теоремы, а другим многочисленным утверждениям теоремы посвящен краткий комментарий и ссылка на работу [53]. Определение мер, для которых выполнен закон нуля и единицы, дано лишь перед теоремой 3.2.3, но уместнее поместить это определение перед теоремой 3.1.3, где утверждается, что закон нуля и единицы справедлив для гиперболических мер. Перечисленные замечания не влияют на содержательную часть диссертации.

По теме диссертации опубликованы 3 статьи в журналах из баз данных WoS и Scopus.

Основные результаты диссертации были представлены на нескольких конференциях и семинарах, в том числе на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» (руководители В. И. Богачев, Н. А. Толмачев, С. В. Шапошников), международном научно-исследовательском семинаре "Infinite-dimensional stochastic analysis" в университете г. Билефельда в Германии, Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в МГУ, международной конференции "Infinite-dimensional analysis" (Италия), международной конференции "Infinite-dimensional analysis and mathematical physics" (МГУ), международной конференция "Recent advances in mass transportation" (Москва, ВШЭ), Третьей Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН) и международная конференции "New frontiers in high-dimensional probability and applications to machine learning" (Сочи, Сириус).

Результаты диссертации имеют теоретический характер и могут быть использованы специалистами по теории меры, функциональному анализу и стохастическому анализу, в частности, в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, НИУ «Высшая школа экономики», Санкт-Петербургском государственном университете, Институте динамики систем и теории управления СО РАН (Иркутск).

Подводя итог сказанному, можно констатировать, что в диссертации А. Н. Калинина «Связь задач Монжа и Канторовича» решены важные задачи функционального анализа и теории меры. Данная работа полностью удовлетворяет требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а ее автор А. Н. Калинин заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова,
Шапошников Станислав Валерьевич

Контактные данные:
тел. +74959391801, email: starticle@mail.ru
Специальность, по которой оппонентом защищена диссертация:
01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:
119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391244, факс +74959392090
email: mmmf@mech.math.msu.su, сайт http//www.math.msu.su/)

Подпись профессора С.В. Шапошникова удостоверяю
Декан механико-математического факультета МГУ,
член-корр. РАН, профессор А. И. Шафаревич