МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Орлова Анастасия Сергеевна

О сходимости и скорости сходимости жадных приближений в специальных случаях

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители: **Лукашенко Тарас Павлович**
доктор физико-математических наук, профессор

Галатенко Владимир Владимирович
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Бородин Петр Анатольевич**
доктор физико-математических наук, доцент, профессор РАН, МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета

Лукомский Сергей Федорович
доктор физико-математических наук, профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета

Малыхин Юрий Вячеславович
кандидат физико-математических наук, Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, старший научный сотрудник

Защита диссертации состоится «19» апреля 2024 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.
E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.3/2812

Автореферат разослан «   » марта 2024г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук   В.Б. Шерстюков

Общая характеристика работы.

Актуальность проблемы. Исследование рядов Фурье является классической областью математики. Начало изучения рядов Фурье относится к первой половине XIX века. Так, в 1807 году Ж.-Б. Ж. Фурье был сделан доклад перед Французской академией на тему представления функции в виде тригонометрического ряда, в 1811 году были опубликованы его записи[1], а в 1822 году опубликована работа[2] по этой теме. После этого последовали работы О. Л. Коши 1823–1828 годов[3, 4, 5], и дальнейшее развитие тема рядов Фурье получила в работах Г. Л. Дирихле[6]. Первоначальной целью введения тригонометрических рядов было решение уравнения теплопроводности, однако позже было найдено множество различных приложений.

Ортогональные ряды Фурье являются обобщением тригонометрических рядов Фурье. Их активное изучение началось в первой половине прошлого века. В это время было написано много работ в данном направлении. Так, в 1909 году вышла статья Г. Вейля[7], позже опубликованы работы А. Зигмунда 1927 и 1930 годов[8, 9], работы Г. Штейнгауза 1920–1934 годов[10, 11, 12, 13]. Отдельным направлением является изучение ортогональных рядов Фурье на конкретных системах. Тематике ортогональных рядов также посвящены работы А. Хаара[14, 15, 16] и Г. Радемахера[17].

[1]Fourier J.-B. J. Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. — 1811.

[2]Fourier J.-B. J. Théorie analytique de la chaleur. — 1822.

[3]Cauchy A.-L. Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. — 1823.

[4]Cauchy A.-L. Leçons sur les applications du calcul infinitésimal a la géométrie. — 1826–1828.

[5]Cauchy A.-L. Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie // Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques. — 1827. — Vol. 1. — P. 157–169.

[6]Dirichlet L. P. G. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données // J. für die reine und angewandte Mathematik. — 1829. — Vol. 4. — P. 157–169.

[7]Weyl H. Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonal-funktionen vortschreiten // Math. Ann. — 1909. — Vol. 67. — P. 225–245.

[8]Zygmund A. Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales // Fund. Math. — 1927. — Vol. 10. — P. 356–362.

[9]Zygmund A. Un theoreme sur les series orthogonales // Studia Math. — 1930. — Vol. 2. — P. 181–182.

[10]Steinhaus H. An example of a thoroughly divergent orthogonal development // Proc. London Math. Soc. — 1920. — Vol. 20, № 2. — P. 123–126.

[11]Steinhaus H. Sur les développements orthogonaux // Bull. Acad. Polonaise. — 1926. — P. 11–39.

[12]Steinhaus H. Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie de séries orthogonales // Studia Math. — 1929. — Vol. 1. — P. 191–200.

[13]Steinhaus H. Przyklady rozwiniec biortogonalnych // Mathesis Polska. — 1934. — Vol. 9. — P. 33–40.

[14]Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Functionsysteme // Math. Ann. — 1910. — Vol. 69. — P. 331–371; — 1912. — Vol. 71. — P. 33–53.

[15]Haar A. Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Zeit. — 1929. — Vol. 31. — P. 128—137.

[16]Haar A. Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Zeit. — 1930. — Vol. 31. — P. 769—798.

[17]Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann. — 1922. — Vol. 87. — P. 112—138.

Переупорядочение слагаемых в ряде Фурье по убыванию норм совершенно естественно с точки зрения приближения n-членными линейными комбинациями векторов ортогональной системы, так как при таком переупорядочении частичные суммы ряда Фурье и являются элементами наилучшего n-членного приближения (это утверждение сразу следует из экстремального свойства коэффициентов Фурье и тождества Бесселя[18]). Ещё в работе С. Б. Стечкина 1955 года[19] установлено, что такое переупорядочение естественным образом возникает и при изучении вопроса абсолютной сходимости ряда Фурье.

Переупорядочение ряда Фурье по убыванию норм слагаемых эквивалентно применению к ортогональной системе и приближаемому элементу чисто жадного алгоритма[20], а также ортогонального жадного алгоритма[20].

В связи с активным развитием информационных технологий и необходимостью хранить и передавать данные в 90-х годах прошлого столетия жадные алгоритмы начали активно изучаться.

Сходимость чисто жадного алгоритма была доказана Л. Джонсом в 1992 году[21]. Более точно, была доказана следующая теорема.

Теорема A. *В гильбертовом пространстве H для произвольного словаря D и любого вектора $x \in H$ чисто жадный алгоритм сходится к приближаемому вектору x.*

Более подробное исследование сходимости алгоритма заключается в изучении скорости сходимости на индивидуальном векторе или на классе векторов. Классическим для изучения является класс векторов $\mathcal{A}_1(D)$, который можно считать обобщением класса ℓ_1 в пространстве ℓ_2 со стандартным ортогональным словарём D.

Когда речь идёт о скорости сходимости алгоритма на конкретном векторе x, вводится специальная последовательность $c_n(x)$, характеризующая наибольшее возможное отклонение жадного приближения от x на n-м шаге. Для оценки скорости сходимости на классе также вводится аналогичная последовательность. Так, в случае класса $\mathcal{A}_1(D)$ вводится последовательность c_n, которая характеризует наибольшее возможное отклонение жадного приближения от приближаемого вектора на n-м шаге для элементов из класса $\mathcal{A}_1(D)$.

---

[18] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука. — 1976.

[19] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102, № 1. — С. 37–40.

[20] DeVore R. A., Temlyakov V. N. Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. — 1996. — Vol. 5, № 1. — P. 173–187.

[21] Jones L. K. A simple lemma on greedy approximation in Hilbert space and convergence rates for projection pursuit regression and neural network training // Ann. Statist. — 1992. — Vol. 20, № 1. — P. 608–613.

В 1996 году в работе Р. ДеВора и В. Н. Темлякова[20] была получена оценка скорости сходимости для ортогонального жадного алгоритма на классе $\mathcal{A}_1(D)$.

Теорема B. *Для произвольного словаря D верно*

$$c_n^{OGA} \leqslant n^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

А. Бэррон в 1993 году[22] нашёл для класса $\mathcal{A}_1(D)$ скорость сходимости наилучших n-членных приближений, она совпадает с вышеприведённой оценкой скорости сходимости для ортогонального жадного алгоритма.

В той же работе Р. ДеВора и В. Н. Темлякова 1996 года[20] получена оценка скорости сходимости на классе $\mathcal{A}_1(D)$ для чисто жадного алгоритма.

Теорема C. *Для произвольного словаря D верно*

$$c_n^{PGA} \leqslant n^{-\frac{1}{6}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Данная оценка сверху уточнялась в работах 1999 года[23] и 2004 года[24]. В работе А.В. Сильниченко 2004 года[24] был получен такой результат.

Теорема D. *Для произвольного словаря D верно*

$$c_n^{PGA} \leqslant 1,7\, n^{-0,182}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Оценка снизу также последовательно улучшалась в работах 1996 года[20], 2004 года[25] и 2009 года[26]. Так, в статье 2009 года[26] Е. Д. Лившицем доказана следующая оценка.

Теорема E. *Существуют словарь D и элемент $x \in \mathcal{A}_1(D)$ такие, что для некоторого числа $C > 0$ верно*

$$c_n^{PGA}(x) > Cn^{-0,1898}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[22]Barron A. R. Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1993. — Vol. 39, № 3. — P. 930–945.

[23]Konyagin S. V., Temlyakov V. N. Rate of convergence of pure greedy algorithms // East J. Approx. — 1999. — Vol. 5, № 4. — P. 493–499.

[24]Сильниченко А. В. О скорости сходимости жадных алгоритмов // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76, № 4. — С. 628–632.

[25]Лившиц Е. Д. О скорости сходимости чисто жадного алгоритма // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76, № 4. — С. 539–552.

[26]Лившиц Е. Д. О нижних оценках скорости сходимости жадных алгоритмов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73, № 6. — С. 125–144.

В 2023 году был анонсирован[27] новый результат о скорости сходимости чисто жадного алгоритма, который пока не опубликован в рецензируемом издании. Данный результат уточняет нижнюю оценку скорости сходимости, причём показатель в новой оценке совпадает с показателем в оценке сверху, полученной А. В. Сильниченко в 2004 году.

Таким образом, скорость сходимости чисто жадного алгоритма на классе $\mathcal{A}_1(D)$ ниже, чем для ортогонального жадного алгоритма. С другой стороны, в 2012 году А. В. Деревенцовым[28] был приведён пример вектора, на котором сходимость чисто жадного алгоритма существенно быстрее, чем ортогонального жадного алгоритма.

Наиболее сложным в реализации чисто жадного алгоритма и ортогонального жадного алгоритма является выбор очередного приближающего элемента $e_{n+1}(x)$. В. Н. Темляковым в работе 2000 года[29] было предложено ввести так называемую ослабляющую последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1]$ и в качестве очередного элемента разложения $e_{n+1}(x)$ выбирать произвольный элемент словаря, удовлетворяющий ослабленному условию. Применение слабых жадных алгоритмов к ортогональным словарям приводит к рядам Фурье, в которых слагаемые переупорядочены, но требование монотонности существенно ослаблено (и ослабление тем больше, чем меньше значения t_n). Модификации жадных алгоритмов, в которых выбор очередного элемента разложения $e_{n+1}(x)$ осуществляется на основе такого ослабленного условия, называются слабыми жадными алгоритмами. В частности, соответствующая модификация чисто жадного алгоритма называется слабым жадным алгоритмом. При введении ослабляющей последовательности ортогональному жадному алгоритму соответствует слабый ортогональный жадный алгоритм, который в случае ортогонального словаря эквивалентен слабому жадному алгоритму.

Сходимость слабых модификаций жадных алгоритмов зависит от ослабляющей последовательности, которая используется в данном алгоритме. Поэтому важным вопросом в изучении сходимости жадных алгоритмов является условие на ослабляющую последовательность, достаточное для сходимости алгоритма.

В работе 2000 года[29] были установлены следующие достаточные условия сходимости на ослабляющую последовательность для слабого жадного алгоритма и слабого ортогонального жадного алгоритма.

---

[27] Klusowski J. M., Siegel J. W. Sharp convergence rates for matching pursuit // arXiv:2307.07679 [stat.ML].

[28] Деревенцов А. В. Сравнение скорости сходимости чисто жадного и ортогонального жадного алгоритмов // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 4. — С. 528–532.

[29] Temlyakov V. N. Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. — 2000. — Vol.12, №2–3. — P. 213–227.

Теорема F. *Если для ослабляющей последовательности* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{k} = +\infty,$$

то в гильбертовом пространстве H *для произвольного словаря* D *и любого вектора* $x \in H$ *слабый жадный алгоритм сходится к приближаемому вектору* x.

Теорема G. *Если для ослабляющей последовательности* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 = +\infty,$$

то в гильбертовом пространстве H *для произвольного словаря* D *и любого вектора* $x \in H$ *слабый ортогональный жадный алгоритм сходится к приближаемому вектору* x.

Оценки скорости сходимости слабого ортогонального жадного алгоритма и слабого жадного алгоритма на классе $\mathcal{A}_1(D)$ были получены в той же работе[29] и могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема H. *Для произвольных словаря* D *и ослабляющей последовательности* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *верно*

$$c_n^{WOGA} \leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема I. *Для произвольных словаря* D *и невозрастающей ослабляющей последовательности* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *верно*

$$c_n^{WGA} \leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{-\frac{t_n}{2(2+t_n)}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Чисто жадные алгоритмы по системе возможно неполных словарей[30], в свою очередь, являются ещё одним из многих обобщений[31,32,33] чисто

[30] Бородин П. А., Копецка Е. Слабые пределы последовательных проекций и жадных шагов // Теория приближений, функциональный анализ и приложения. Сборник статей. К 70-летию академика Бориса Сергеевича Кашина. Труды МИАН. — 2022. — Т. 319. — С. 64–72.

[31] Temlyakov V. Greedy Approximation (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). — Cambridge: Cambridge University Press. — 2011.

[32] Бородин П. А. Жадные приближения произвольным множеством // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 2. — С. 43–59.

[33] Валов М. А. Конический жадный алгоритм // Изв. РАН. Сер. матем. — 2022. — Т. 112, № 2. — С. 163–169.

жадных алгоритмов. В работе П. А. Бородина и Е. Копецки[30] была доказана следующая теорема о слабой сходимости нового алгоритма.

Теорема J. *В гильбертовом пространстве H для произвольной системы возможно неполных словарей $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ таких, что для любого ненулевого вектора существует неортогональный вектор из $\bigcup_{i=1}^n D_i$, и любого вектора $x \in H$ чисто жадный алгоритм по системе возможно неполных словарей $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ слабо сходится к приближаемому вектору x.*

Постановка задач. Сформулированные теоремы о достаточном условии сходимости слабых жадных приближений для векторов гильбертова пространства на ослабляющую последовательность приводят к вопросу о возможности ослабления данного достаточного условия сходимости, например, если рассматриваются векторы класса $\mathcal{A}_1(D)$, а на сам словарь D накладываются дополнительные ограничения. Так, интересен случай «минимального» словаря, когда в качестве словаря рассматривается ортогональный словарь. Если в данном случае такое ослабление возможно, то возможно ли аналогичное ослабление в случае векторов класса $\mathcal{A}_1(D)$ для произвольного словаря или хотя бы для некоторого расширения ортогонального словаря?

В связи с полученными оценками скорости сходимости жадных приближений на классе $\mathcal{A}_1(D)$ в случае произвольного словаря D возникает вопрос о возможности улучшения данных оценок. Возможно ли улучшить оценку скорости сходимости, когда словарь D является не произвольным, а, например, ортогональным?

Добавление к словарю дополнительных элементов расширяет аппарат приближения алгоритма. Можно ли утверждать, что в этом случае улучшается скорость сходимости? В частности, существует ли вектор такой, что приближение по ортогональному словарю быстрее, чем приближение по расширению ортогонального словаря?

При применении жадного алгоритма по паре словарей — частного случая жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей — аппарат приближения также оказывается шире, чем при использовании жадного алгоритма по одному из словарей. С другой стороны, если речь идёт о сравнении жадного алгоритма по паре словарей и жадного алгоритма по объединению данных словарей, то не любая реализация второго алгоритма является реализацией первого. Таким образом, интересно сравнение скорости сходимости данных алгоритмов, хотя бы на индивидуальном векторе.

Здесь же возникает вопрос о сходимости ортогонального жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей к приближаемому вектору гильбертова пространства.

Цель работы. Цели работы включают:

- исследование классического вопроса достаточного условия сходимости слабых жадных алгоритмов на ослабляющую последовательность в случае ортогональных словарей и в случае словарей, являющихся расширениями ортогональных словарей;

- сравнение скорости сходимости чисто жадного алгоритма на ортогональном словаре и на расширении данного словаря;

- исследование вопроса сходимости ортогонального жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей;

- сравнение скорости сходимости чисто жадных алгоритмов и соответствующих алгоритмов по паре словарей.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Показано, что общие результаты о скорости сходимости слабых (ортогональных) жадных приближений в случае ортогонального словаря могут быть уточнены, причём полученное уточнение асимптотически неулучшаемо.

2. Показано, что достаточное условие сходимости слабого (ортогонального) жадного алгоритма в случае ортогонального словаря может быть ослаблено, причём полученное условие асимптотически неулучшаемо.

3. Показано, что достаточное условие сходимости в случае расширения ортогонального словаря одним вектором не может быть ослаблено для слабого жадного алгоритма и слабого ортогонального жадного алгоритма.

4. Показано, что скорость сходимости чисто жадного алгоритма по ортогональному словарю для индивидуального вектора может быть выше, чем скорость сходимости чисто жадного алгоритма по расширению данного словаря одним вектором.

5. Показано, что ортогональный жадный алгоритм по системе возможно неполных словарей сходится к приближаемому вектору гильбертова пространства.

6. Показано, что сходимость стандартного жадного алгоритма для индивидуального вектора может быть быстрее, чем сходимость жадного алгоритма по паре соответствующих словарей в случае чисто жадного алгоритма и в случае ортогонального жадного алгоритма; также доказано, что реализуема и обратная ситуация.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, методы функционального анализа и специальные методы изучения жадных разложений.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в теории жадных приближений, а также в прикладных вопросах обработки и передачи информации.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучается сходимость жадных алгоритмов, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.1 “Вещественный, комплексный и функциональный анализ” по направлению “вещественный анализ”.

Положения, выносимые на защиту.

1. В случае ортогонального словаря получена оценка скорости сходимости слабого (ортогонального) жадного алгоритма и доказана асимптотическая неулучшаемость данной оценки.

2. Для слабого жадного алгоритма и слабого ортогонального жадного алгоритма в случае расширения ортогонального словаря одним вектором показана невозможность ослабления достаточного условия сходимости.

3. Для чисто жадного алгоритма показано, что скорость сходимости разложения по ортогональному словарю для индивидуального вектора может быть выше, чем скорость сходимости разложения по расширению данного словаря одним вектором.

4. Для ортогонального жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей доказана сходимость разложения к приближаемому вектору гильбертова пространства.

5. В случае чисто жадного алгоритма и в случае ортогонального жадного алгоритма показано, что сходимость стандартного жадного алгоритма для индивидуального вектора может быть быстрее и может быть медленнее, чем сходимость жадного алгоритма по паре соответствующих словарей.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных **конференциях**:

- Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2017 г.);
- Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2019 г.);
- XXVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2021 г.);
- конференция «Аппроксимация и дискретизация» (Москва, 2021 г.);
- XXI Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2022 г.);
- Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2023 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих **научно-исследовательских семинарах**:

- научный семинар «Ортоподобные системы» механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Т. П. Лукашенко, доцента В. В. Галатенко, доцента Т. В. Родионова (многократно, 2014–2022 гг.);
- специальный семинар «Тригонометрические и ортогональные ряды» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора М. И. Дьяченко, профессора Т. П. Лукашенко, профессора В. А. Скворцова, профессора А. П. Солодова (2022 г.);
- специальный семинар «Геометрическая теория приближений» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора П. А. Бородина (2023 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 8 публикациях автора [1]–[8]. Из них 3 статьи [1]–[3] опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.1 — “вещественный, комплексный и функциональный анализ” и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI. Статьи [1]–[3] имеют две версии: на русском языке и на английском языке. В материалах международных конференций представлены 5 публикаций [4]–[8]. Работ в соавторстве нет. Список работ автора приведен в конце автореферата и диссертации.

Личный вклад автора. Диссертантом совместно с научными руководителями проводился выбор темы, а также осуществлялось планирование всей работы. Автору диссертации принадлежат доказательства основных результатов, приведенных в диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 41 наименования. Общий объём работы составляет 80 страниц.

Краткое содержание диссертации.

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте работы.

В **первой главе** содержатся основные понятия и определения. Так, приведены определения нормированного словаря, множества $\mathcal{A}_1(D)$ приближаемых векторов из гильбертова пространства H словарём D, определения рассматриваемых жадных алгоритмов: слабого жадного алгоритма и слабого ортогонального жадного алгоритма, чисто жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей и ортогонального жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей, чисто жадного алгоритма по паре словарей и ортогонального жадного алгоритма по паре словарей. Также в этой главе вводятся понятия скорости сходимости и сравнения алгоритмов по скорости сходимости, описывается рассматриваемый случай.

Во **второй главе** изучается скорость сходимости слабого ортогонального жадного алгоритма на подпространстве $\ell_1 \subset \ell_2$ в случае ортогонального словаря. Показано, что общие результаты о скорости сходимости слабых ортогональных жадных приближений в этом случае могут быть значительно уточнены, также установлено, что полученное уточнение асимптотически неулучшаемо.

Теорема 2.2. *Пусть для ослабляющей последовательности* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполняется условие* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k = +\infty$. *Тогда для стандартного ортогонального словаря* F *имеет место эквивалентность*

$$c_n^{WOGA} \sim \frac{1}{2\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k}}, \quad n \to \infty.$$

В **третьей главе** изучается сходимость слабых жадных алгоритмов и слабых ортогональных жадных алгоритмов в случае некоторых словарей, являющихся расширениями ортогонального словаря. В частности, показано, что для словаря, полученного из ортогонального добавлением одного вектора, уже нельзя ослабить достаточное условие сходимости на ослабляющую последовательность так же, как в случае ортогонального словаря. Более точно, получена следующая теорема для слабого ортогонального жадного алгоритма.

Теорема 3.2. *Для любой ослабляющей последовательности $\tau \in \ell_2 \setminus \ell_1$ существуют вектор $g \in \ell_2$ и вектор $x \in \ell_1$ такие, что для x существует реализация слабого ортогонального жадного алгоритма с ослабляющей последовательностью $t = c\tau$ ($c = \frac{\tau_1}{\|\tau\|_2^2}$, где $\tau = \{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$) по словарю, полученному из стандартного ортогонального добавлением вектора g, которая не сходится к приближаемому вектору x.*

Для слабого жадного алгоритма доказана аналогичная теорема.

Теорема 3.4. *Для любой ослабляющей последовательности $\tau \in \ell_2 \setminus \ell_1$ существуют вектор $g \in \ell_2$ и вектор $x \in \ell_1$ такие, что для x существует реализация слабого жадного алгоритма с ослабляющей последовательностью $t = c\tau$ ($c = \frac{\tau_1}{\|\tau\|_2^2}$, где $\tau = \{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$) по словарю, полученному из стандартного ортогонального добавлением вектора g, которая не сходится к приближаемому вектору x.*

Дополнительно показано, что добавление к стандартному ортогональному словарю одного вектора — даже из ℓ_1 — может значительно ухудшить скорость сходимости чисто жадного алгоритма.

Теорема 3.5. *Существуют вектор $g \in \ell_1$ и финитный вектор x такие, что любая реализация чисто жадного алгоритма по словарю, полученному из стандартного ортогонального добавлением вектора g, не сходится к приближаемому вектору x за конечное число шагов.*

Четвёртая глава посвящена сравнению стандартного жадного алгоритма и соответствующего жадного алгоритма по паре словарей. В первой части данной главы рассматривается случай чисто жадного алгоритма. Показано, что на индивидуальном векторе новый чисто жадный алгоритм по паре словарей может быть как быстрее, так и медленнее стандартного чисто жадного алгоритма. Более точно, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1. *Существуют*

I. *ортонормированные словари D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что*

   1) *чисто жадный алгоритм по словарю D_1 и чисто жадный алгоритм по словарю D_2 не сходятся за конечное число шагов,*

2) *чисто жадный алгоритм по паре словарей* D_1 *и* D_2 *сходится за конечное число шагов.*

II. *ортонормированные словари* D_1 *и* D_2 *и вектор* $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ *такие, что*

1) *чисто жадный алгоритм по словарю* D_1 *и чисто жадный алгоритм по словарю* D_2 *сходятся за конечное число шагов,*

2) *чисто жадный алгоритм по паре словарей* D_1 *и* D_2 *не сходится за конечное число шагов.*

Во второй части четвёртой главы речь идёт об обобщении ортогонального жадного алгоритма. Так, получен положительный результат о сходимости ортогонального жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей.

Теорема 4.4. *В гильбертовом пространстве* H *для произвольной системы возможно неполных словарей* $\{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ *и любого вектора* $x \in H$ *ортогональный жадный алгоритм по системе возможно неполных словарей* $\{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ *сходится к приближаемому вектору* x.

При сравнении ортогонального жадного алгоритма и ортогонального жадного алгоритма по паре словарей получена теорема, аналогичная теореме, сформулированной выше для чисто жадного алгоритма.

Теорема 4.5. *Существуют*

I. *ортонормированные словари* D_1 *и* D_2 *и вектор* $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ *такие, что*

1) *ортогональный жадный алгоритм по словарю* D_1 *и ортогональный жадный алгоритм по словарю* D_2 *не сходятся за конечное число шагов,*

2) *ортогональный жадный алгоритм по паре словарей* D_1 *и* D_2 *сходится за конечное число шагов.*

II. *нормированные словари* D_1 *и* D_2 *и вектор* $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ *такие, что*

1) *ортогональный жадный алгоритм по словарю* D_1 *и ортогональный жадный алгоритм по словарю* D_2 *сходятся за конечное число шагов,*

2) *ортогональный жадный алгоритм по паре словарей* D_1 *и* D_2 *не сходится за конечное число шагов.*

Заключение.

Обзор проведенного исследования. Тематика диссертации относится к области математического анализа. В диссертации изучаются вопросы сходимости и скорости сходимости жадных приближений. Установлены следующие основные результаты.

1. Показано, что общие результаты о скорости сходимости слабых (ортогональных) жадных приближений в случае ортогонального словаря могут быть уточнены, причём полученное уточнение асимптотически неулучшаемо.

2. Показано, что достаточное условие сходимости слабого (ортогонального) жадного алгоритма в случае ортогонального словаря может быть ослаблено, причём полученное условие асимптотически неулучшаемо.

3. Показано, что достаточное условие сходимости в случае расширения ортогонального словаря одним вектором не может быть ослаблено для слабого жадного алгоритма и слабого ортогонального жадного алгоритма.

4. Показано, что скорость сходимости чисто жадного алгоритма по ортогональному словарю для индивидуального вектора может быть выше, чем скорость сходимости чисто жадного алгоритма по расширению данного словаря одним вектором.

5. Показано, что ортогональный жадный алгоритм по системе возможно неполных словарей сходится к приближаемому вектору гильбертова пространства.

6. Показано, что сходимость стандартного жадного алгоритма для индивидуального вектора может быть быстрее, чем сходимость жадного алгоритма по паре соответствующих словарей в случае чисто жадного алгоритма и в случае ортогонального жадного алгоритма; также доказано, что реализуема и обратная ситуация.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы. Полученные результаты создают основу для последующего изучения данной области. Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться, в частности, в следующих направлениях.

1. Исследование возможности ослабления достаточного условия сходимости в случае словаря, не являющегося расширением ортогонального словаря, для слабого жадного алгоритма и для слабого ортогонального жадного алгоритма.

2. Сравнение скорости сходимости стандартного жадного алгоритма и скорости сходимости жадного алгоритма по паре соответствующих словарей на индивидуальном векторе для слабого жадного алгоритма и слабого ортогонального жадного алгоритма в случае различных ослабляющих последовательностей.

3. Исследование вопроса сильной сходимости чисто жадного алгоритма по системе возможно неполных словарей, а также исследование скорости сходимости жадных алгоритмов по системе возможно неполных словарей на классах сходимости в случае чисто жадного алгоритма и ортогонального жадного алгоритма.

4. Сравнение классовой оценки скорости сходимости стандартного жадного алгоритма и классовой оценки жадного алгоритма по паре словарей для чисто жадного алгоритма и для ортогонального жадного алгоритма.

Автор выражает **благодарность** своим научным руководителям доктору физико-математических наук профессору Тарасу Павловичу Лукашенко и кандидату физико-математических наук Владимиру Владимировичу Галатенко за постановку задач, плодотворные обсуждения, ценные советы и постоянное внимание к работе, а также сотрудникам кафедры математического анализа и кафедры теории функций и функционального анализа за доброжелательное отношение и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.1 — "вещественный, комплексный и функциональный анализ" и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[1] Орлова А. С. Скорость сходимости слабых жадных приближений по ортогональным словарям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2017. — № 2. — С. 68–72 / 0.55 п. л.
Журнал индексируется в РИНЦ, RSCI (двухлетний ИФ РИНЦ 0.467).
Orlova A. S. The rate of convergence of weak greedy approximations over orthogonal dictionaries // Moscow Univ. Math. Bull. — 2017. — Vol. 72. — P. 84–87.
Журнал индексируется в Scopus (SJR 2022 0.607).

[2] Орлова А. С. Сходимость слабого ортогонального жадного алгоритма при добавлении одного вектора к ортогональному словарю // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2022. — № 5. — С. 17–25 / 0.988 п. л.
Журнал индексируется в РИНЦ, RSCI (двухлетний ИФ РИНЦ 0.467).
Orlova A. S. Convergence of a weak greedy algorithm when one vector is added to the orthogonal dictionary // Moscow Univ. Math. Bull. — 2022. — Vol. 77. — P. 227–235.
Журнал индексируется в Scopus (SJR 2022 0.607).

[3] Орлова А. С. Сравнение чисто жадного алгоритма и чисто жадного алгоритма по паре словарей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 2023. — № 2. — С. 3–11 / 1.037 п. л.
Журнал индексируется в РИНЦ, RSCI (двухлетний ИФ РИНЦ 0.467).
Orlova A. S. Comparison of pure greedy algorithm with pure greedy algorithm in a pair of dictionaries // Moscow Univ. Math. Bull. — 2023. — Vol. 78. — P. 57–66.
Журнал индексируется в Scopus (SJR 2022 0.607).

Иные публикации

[4] Орлова А. С. Асимптотически точная оценка скорости сходимости слабых жадных приближений по ортогональным словарям // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (26 января – 1 февраля 2017 г.) — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2017. — С. 159.

[5] Орлова А. С. Индивидуальные и классовые оценки скорости сходимости слабых жадных приближений по ортогональным словарям // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы

Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.) — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2019. — С. 198–199.

[6] Орлова А. С. Сходимость слабых жадных приближений по расширениям ортогональных словарей // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ–2021» [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс — 2021. — https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22106/127438_uid163526_report.pdf.

[7] Орлова А. С. Сравнение скорости сходимости стандартного чисто жадного алгоритма и чисто жадного алгоритма по паре словарей // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 21–й международной Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.) — Саратов: Саратовский университет — Текст: электронный. — 2022. — С. 212–214.

[8] Орлова А. С. Ортогональные жадные алгоритмы и их модификации по паре словарей // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 1 февраля 2023 г.) — Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2023. — С. 276–278.

Орлова Анастасия Сергеевна

О сходимости и скорости сходимости жадных приближений в специальных случаях

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № __________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ________________________________