ОТЗЫВ официального оппонента

о диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Дорофеевой Александры Владимировны на тему: «Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях» по специальности 1.1.4. – «Теория вероятностей и математическая статистика»

Данная диссертация посвящена исследованию аппроксимаций распределений должным образом нормированных сумм независимых случайных величин с помощью нормального закона. Благодаря трудам А. де Муавра, П.-С.Лапласа, П.Л.Чебышева, А.А.Маркова, А.М.Ляпунова и многих других классиков было осознано, что при весьма широких условиях линейным образом преобразованные суммы независимых слагаемых сходятся по распределению к стандартному гауссовскому закону, когда число слагаемых стремится к бесконечности. По предложению Д.Пойа в 1920 году группа результатов, описывающих упомянутую сходимость, стала называться центральной предельной теоремой теории вероятностей. В 20-м веке были установлены глубокие результаты о сходимости сумм случайных величин в схеме серий к безгранично делимым и устойчивым распределениям. Важными вехами на этом пути являются монографии Б.В.Гнеденко и А.Н.Колмогорова (1949), И.А.Ибрагимова и Ю.В.Линника (1965), В.В.Петрова (1972), В.М.Золотарева (1986). При этом следует отметить, что и тематика исследований, связанная с центральной предельной теоремой, получила дальнейшее развитие. Стали изучаться случайные векторы, случайные элементы со значениями в банаховых пространствах, системы зависимых величин. Важное направление, имеющее разнообразные приложения в физике, технике, стохастической финансовой математикой и других областях, оказалось связанным с моделями, использующими суммы случайного числа случайных величин. Отметим известные монографии B.V.Gnedenko, V.Yu.Korolev (1996), V.V.Kalashnikov (1997), в которых исследуются модели такого рода. В диссертации А.В.Дорофеевой получены уточнения ранее известных оценок (равномерных и неравномерных) скоростей сходимости в центральной предельной теореме при весьма слабых моментных ограничениях на слагаемые (когда «запас моментов» слагаемых в определенном смысле чуть выше второго порядка). Автором получены новые оценки скорости нормального приближения для сумм случайного числа случайных величин. Кроме того, рассмотрено поведение функции концентрации для изучаемых сумм, и, наконец, рассмотрен вопрос о точности приближения распределений нормированных сумм независимых случайных величин к гауссовскому закону, когда центральная предельная теорема не имеет места. Таким образом, тематика рассматриваемой диссертации является весьма актуальной и представляет несомненный интерес для разнообразных приложений.

Диссертация, объемом 103 страницы, состоит их введения, четырех глав и списка литературы, насчитывающего 81 источник. Работа хорошо структурирована. Она основана на 2-х публикациях автора (без соавторов) и 8 статьях с соавторами.

Во введении описаны цели исследования и дается обзор предшествующих работ по теме диссертации. Приятно отметить эрудицию А.В.Дорофеевой.

В первой главе найдены верхние оценки констант, которые фигурируют в ряде известных неравенств, описывающих равномерную скорость сходимости функций распределений нормированных сумм независимых слагаемых к функции распределения Φ |стандартного нормального закона. Например, согласно теореме Петрова (1965) величина $\Delta_n := \sup_{\{x\in R\}}|P(S_n\text{-}ES_n \le xB_n) - \Phi(x)|$, где $S_n=X_1+\ldots+X_n$, $(B_n)^2:=(\sigma_1)^2+\ldots(\sigma_n)^2$, $n\in N$, а независимые $X_1,\ldots,X_n$ таковы, что $EX_k=0$, $0<(\sigma_k)^2:= E(X_k)^2<\infty$, $k\in N$, допускает оценку вида

$$\Delta_n \le C\,((B_n)^2 g(B_n))^{-1}\sum_{k=1}^{n} E((X_k)^2 g(X_k)).$$

Здесь функция $g(x)$ четная, неотрицательная, $g(x)>0$ при $x>0$, причем $g(x)$ и $x/g(x)$ не убывают на $(0, \infty)$, C – положительная константа. Нетривиальная и важная задача – найти C, для которой Δ_n будет допускать приведенную оценку при всех g из указанного класса (или определенного более узкого). В.Ю.Королев и С.В.Попов (2011) доказали, что $C \leq 2{,}011$ для введенного выше класса функций g. Эти же авторы показали, что опустить C ниже уровня 0,54093 невозможно. А.В.Дорофеевой удалось понизить верхнюю оценку C до 1,8627. В диссертации также отдельно рассматриваются некоторые специальные случаи, например, когда величины $X_1, \ldots, X_n$ одинаково распределены или имеют симметричные распределения. При получении указанного результата автор диссертации продемонстрировал творческие способности. Приятно отметить смелость автора диссертации, поскольку в настоящее время нет подхода, позволяющего найти оптимальную (неулучшаемую) константу C в приведенном выше неравенстве для Δ_n. Речь идет лишь о некоторых улучшениях предшествующих исследований. Заслуживает внимания перенесение оценок скорости сходимости на схему суммирования случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин (всюду предполагается, что суммируемые величины и величина, описывающая случайное число слагаемых, независимы), которое содержит теорема 5. Ключевую роль в этом играет красивая лемма 7, показывающая как изучение сумм случайных величин, когда число слагаемых описывается так называемым пуассон-биномиальным распределением (определение дается в диссертации на странице 36), сводится к исследованию детерминированного количества новых слагаемых. Применение этой леммы даже для биномиального числа слагаемых улучшило соответствующий результат Й.Сунклодаса (2014). Кроме того, А.В.Дорофеева получила ряд оценок для пуассоновских случайных сумм, смешанных пуассоновских случайных сумм, геометрических сумм, отрицательно биномиальных и пуассон-обратных гамма распределений (теоремы 5 – 9 и следствия). При выводе упомянутых оценок существенную роль играет техника «урезания» исходных случайных величин.

Во второй главе результаты первой развиваются для получения неравномерных оценок скорости сходимости функций распределения сумм случайных величин (а также сумм случайного числа случайных слагаемых) к функции распределения стандартного нормального закона. Тем самым уточняются некоторые известные оценки предшествующих работ. Прежде всего рассматриваются биномиальные суммы (для них устанавливается теорема 12), затем исследуются биномиальные суммы для более узких классов функций g (теоремы 13 и 14). Далее изучаются пуассоновские суммы (теоремы 15 – 18).

Глава 3 содержит результаты, описывающие поведение функции концентрации Леви для сумм независимых слагаемых с ростом их числа. Теорема 20 получается как немедленное следствие теоремы 1 и леммы из работы В.Е.Бенинга, Н.К.Галиевой, В.Ю.Королева (2013). Оставшаяся часть главы посвящена верхним оценкам функции концентрации для сумм случайного числа случайных величин, которые рассматривались в главе 1. Большинство из этих результатов справедливо названо следствиями, хотя, например, сформулирована теорема 24 (без доказательства) и перед ней написано, что она получается из теоремы 7 и лемм 19, 20.

В главе 4 рассматривается точность нормальной аппроксимации без предположения, что последовательность изучаемых (нормированных сумм) удовлетворяет центральной предельной теореме. Этот вопрос сложно изучить во всей общности. Поэтому оптимальный выбор параметров приближающего нормального закона не исследуется, но предлагается их конкретный выбор. Задача решается при дополнительных предположениях типа (67) и (68), указанных на странице 87. На наш взгляд, тематика главы 4 является очень важной и перспективной.

Диссертационная работа Дорофеевой Александры Владимировны «Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме и ее обобщениях при ослабленных моментных условиях» соответствует специальности 1.1.4. – «Теория вероятностей и математическая статистика», направлению «Предельные теоремы». Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Положения диссертации, вынесенные на защиту, вполне обоснованы. Достоверность результатов обусловлена корректностью доказательств.

Результаты, приведенные в диссертации А.В. Дорофеевой, являются новыми и представляют несомненный интерес.

По диссертации можно высказать следующие замечания.

1. На странице 8 автор пишет: «Оценки скорости сходимости, которые получаются при требовании наличия нескольких первых моментов слагаемых, принято называть оценками скорости сходимости при ослабленных моментных условиях. Так, например, требования 1–5 есть не что иное, как ослабленные моментные условия». В частности, на странице 7 дается требование 1 вида $E \exp\{a|X_i|\}<\infty$, $a>0$, $i=1, \ldots, n$, $n\in N$. Такое экспоненциальное ограничение не принято называть ослаблением моментных условий.

2. На странице 12 читаем: «В то же время условие Линдеберга $\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon)=0$ для любого $\varepsilon>0$ является критерием сходимости в ЦПТ (центральной предельной теореме)». Однако условие Линдеберга является лишь достаточным для справедливости ЦПТ, а необходимые и достаточные условия были получены лишь во второй половине 20-го века в работах В.М.Золотарева и В.И.Ротаря. Здесь же отметим (это относится и к замечанию 1), что даже наличие второго момента не является необходимым для того, чтобы должным образом нормированные суммы независимых одинаково распределенных величин сходились по распределению к нормальному закону, как показывает теорема 4.17 в книге O.Kallenberg. Modern Probability, Springer, 1997.

3. На странице 36, по-видимому, следует определить величины X_j с волной, не просто полагая их равными с вероятностью p_j величинам X_j без волны, а требуется обеспечить независимость новых величин.

4. На странице 80 автор пишет: «На практике же мы имеем дело с конечными объемами выборок, что приводит к невозможности проверки выполнения условий, гарантирующих справедливость ЦПТ». Это не вполне точное утверждение. Например, имеется много ситуаций, когда наблюдения естественно считать независимыми, одинаково распределенными, невырожденными и ограниченными (в частности, в схеме Бернулли). Для таких наблюдений центральная предельная теорема справедлива.

5. Лемма 23 тривиальна. Достаточно перейти к дополнениям рассматриваемых событий. Поэтому удивляет доказательство, приведенное на странице 83 с фразой «из геометрических соображений вытекает». Не ясно, о какой геометрии идет речь.

6. На странице 28 после леммы 2 читаем: «Доказательство, основанное на результатах работ [56], [57] и [50], приведено в [22]». Это утверждение удивительно, поскольку работа [22] опубликована в 2011 году, а работа [50] – в 2012 году. Вопрос не возник бы, если бы автор диссертации просто написал: «Лемма 2 ([22])». Обычно именно так и даются ссылки.

7. Одни и те же фрагменты текста повторяются много раз (например, описание класса функций g воспроизводится на страницах 6,7 и 10, затем на страницах 25,26 и 61, а далее на странице 70). Это же относится и к ряду других обозначений. Нет необходимости приводить с полными выходными данными на страницах 22 и 23 работы автора по теме диссертации, когда достаточно сослаться на их номера в списке литературы. Заключение на страницах 93 и 94 воспроизводит текст страниц 19-21. Одни и те же утверждения также приводятся несколько раз под разными номерами. Например, на странице 51 после формулировки леммы 9 видим: «Доказательство. Формулировка и доказательство совпадают с формулировкой и доказательством леммы 3». При этом после леммы 3 написано:

«Доказательство. Доказательство см. в [22]» ([22] – это статья В.Ю.Королева и С.В.Попова)». Книга [24] дается и как [57]. На взгляд оппонента, лучше было бы иметь 90 страниц текста диссертации без повторов, чем 103 с повторами.

8. В соответствии с требованиями было бы желательно точнее указывать вклад каждого из соавторов в совместные публикации. Например, на странице 81 автор пишет «Результаты, описанные в настоящей главе, были опубликованы в статьях [74] и [75]».

9. Таблицы 1,2,3,4 (соответственно на страницах 29, 33, 34, 35) содержат данные численных расчётов, которые в диссертации не приводятся.

10. Имеется заметное количество опечаток и стилистических погрешностей.

Подводя итог, подчеркнем, что А.В.Дорофеева продемонстрировала владение вероятностно-аналитической техникой при решении интересных и сложных задач. Поэтому нет сомнений, что ее диссертация показывает высокую квалификацию автора. Указанные выше замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4. – «Теория вероятностей и математическая статистика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Дорофеева Александра Владимировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. – «Теория вероятностей и математическая статистика».

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
БУЛИНСКИЙ Александр Вадимович

09 июня 2023 года

Контактные данные:

тел.: +7 495 939 1403, e-mail: alexander.bulinski@math.msu.ru,
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.05 – «Теория вероятностей и математическая статистика»

Адрес места работы:
119991, Москва, Ленинские горы, 1, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей
Тел.: +7 495 939 1403, e-mail: alexander.bulinski@math.msu.ru

Подпись сотрудника ФГБОУ «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» профессора А.В. Булинского удостоверяю:

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова
член-корр. РАН, профессор
ШАФАРЕВИЧ Андрей Игоревич
14 июня 2023 года