

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Балашова Дарья Михайловна

**Ветвящиеся случайные блуждания
со знакопеременными источниками**

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Яровая Елена Борисовна

Москва — 2022

Оглавление

Введение	3
1 Ветвящиеся случайные блуждания с конечным числом знаковых источников	9
1.1 Описание модели	9
1.2 Симплициальные конфигурации источников	12
1.2.1 Три источника ветвления произвольной интенсивности . . .	12
1.2.2 Знакопеременные источники ветвления	14
1.3 Произвольные конфигурации источников	17
1.3.1 Ключевые уравнения и вспомогательные результаты . . .	19
1.3.2 Свойства эволюционного оператора	22
1.3.3 Доказательство предельной теоремы	33
2 Ветвящиеся случайные блуждания с бесконечным числом источников	37
2.1 Описание модели	37
2.2 Основные уравнения	41
2.3 Критическая ветвящаяся среда	45
2.3.1 Предельное распределение поля частиц	47
2.3.2 Первый момент численности субпопуляции	50
2.3.3 Условное матожидание численности субпопуляции	52
2.3.4 Второй условный момент численности субпопуляции	54
2.4 Надкритическая ветвящаяся среда	64
3 Многотипные ветвящиеся случайные блуждания	68
3.1 Описание модели	68
3.2 Первые моменты локальных численностей частиц	70
3.3 Критическая ветвящаяся среда	72
3.3.1 Пространственная кластеризация частиц в размерностях $d = 1, 2$	74
3.3.2 Численное моделирование	80
Заключение	83
Литература	85

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена ветвящимся случайным блужданиям (ВСБ) – одной из интенсивно развивающихся областей теории стохастических процессов. В работе рассматриваются ВСБ с непрерывным временем на дискретных структурах.

Ветвящиеся процессы с диффузией частиц были впервые представлены в статье Б. А. Севастьянова [32]. С тех пор моделям ВСБ было посвящено множество публикаций, важные результаты для подобных процессов были получены А.В. Скороходом [34]. Необходимость исследования сложных вероятностных моделей с делением, гибелью и пространственным движением частиц привело к развитию теории ВСБ. Следует заметить, что подобные модели способны описать процессы, возникающие в статистической физике [23, 12], химической кинетике [11], теории гомополимеров [10], биологии [13] и иммунологии [4, 5, 3].

ВСБ с одним источником ветвления изучались рядом авторов, в качестве примера можно привести монографию Е. Б. Яровой [38] и библиографию к ней. Случайные блуждания, лежащие в основе ВСБ, с нарушением условия однородности были рассмотрены в работах Е. А. Жижинной и Р. А. Минлоса [26, 27]. В работе Е. Б. Яровой [41] была предложена модель с конечной дисперсией скачков случайного блуждания и конечным количеством источников трех типов, в некоторых из которых допускается нарушение симметричности блуждания, в другой работе Е. Б. Яровой [43] рассмотрено ВСБ с бесконечной дисперсией скачков в случае одинаковой интенсивности источников ветвления, в работе И. И. Христолюбова и Е. Б. Яровой [37] исследована модель с источниками генерации частиц различной положительной интенсивности, в которых интенсивность деления частиц превосходит интенсивность гибели. В работе А. И. Рытовой [31] рассмотрена модель ВСБ с бесконечной дисперсией скачков. В работе Е. Вл. Булинской [6] изучается каталитический ветвящийся процесс с произвольным конечным множеством катализаторов, в ней предложена полная классификация каталитических ветвящихся процессов. В работах М. В. Платоновой и К. С. Рядовкина [29, 30] ВСБ с непрерывным временем обобщаются на

решетки с источниками ветвления, расположенными периодически.

Остановимся на работах, посвященных исследованиям стационарных распределений частиц и перемежаемости в моделях ВСБ с источниками, расположенными в каждой точке решетки. В работе С. Молчанова, Дж. Витмайера [17] доказано существование устойчивого состояния для критического ветвящегося процесса с делением на двух потомков и возвратным случайным блужданием на решетке. В работе Е. Черноусовой, С. Молчанова [9] рассмотрено произвольное общее количество потомков в каждом источнике, которые случайным образом распределяются в пространстве вокруг родительской частицы. В работе Е. Черноусовой с соавторами [8] представлено ВСБ с иммиграцией в непрерывном пространстве \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$. Если основной механизм ветвления является докритическим, модель имеет уникальное устойчивое состояние для каждого значения интенсивности иммиграции. Следует заметить, что методы, используемые в доказательстве, различны в решетчатой модели и в модели непрерывного пространства. Работа Д. Хан с соавторами [16] содержит результаты о существовании пределов для первых двух моментов численностей частиц ВСБ с непрерывным временем на многомерной решетке с иммиграцией и бесконечным числом начальных частиц. В работе Е. Черноусовой [7] с докритическим ВСБ с внешней иммиграцией частиц оцениваются кумулянты и доказываются существование стационарного состояния.

Естественным обобщением перечисленных направлений является рассмотрение ВСБ с нарушением симметрии случайного блуждания в конечном числе точек решетки и знакопеременными интенсивностями источников, а также переход к бесконечному количеству источников на решетке и бесконечному числу начальных частиц. Новым направлением является изучение многотипных ветвящихся случайных блужданий и получение предельных теорем для популяций и субпопуляций частиц различных типов.

Цель работы. Целью работы является анализ предельной пространственной структуры популяций и субпопуляций частиц в ВСБ на \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, с конечным или бесконечным числом источников ветвления произвольных интенсивностей и различными начальными распределениями частиц, асимптотический анализ численностей частиц и их целочисленных моментов.

Научная новизна. Получены новые результаты для ВСБ со знакопеременными источниками, а также для ВСБ с бесконечным числом источников в условиях критического и надкритического ветвления. В отличие от предыдущих исследований, в диссертационной работе, по-видимому, впервые рассмот-

рены многотипные ВСБ. Для них был изучен эффект пространственной кластеризации в том случае, когда в основе процесса лежит возвратное случайное блуждание. Полученные результаты проиллюстрированы численным моделированием.

Методы исследования. В работе использованы методы теории вероятностей и случайных процессов, спектральной теории, теории дифференциальных уравнений, метод интеграла Лапласа и преобразование Фурье, а также численные моделирования на программном пакете Wolfram|Alpha и языке программирования Python.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории ветвящихся случайных блужданий, а также для практического моделирования биологических процессов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о собственных значениях эволюционного оператора для ВСБ со знакопеременными источниками ветвления, находящимися в симплицеальной конфигурации.
2. Теорема об экспоненциальном росте числа частиц без предположений о дисперсии скачков основного случайного блуждания для ВСБ со знакопеременными источниками и псевдо-источниками ветвления.
3. Теорема о нерегулярности роста субпопуляций частиц в случае критического закона ветвления в каждой точке решетки с бесконечным числом начальных частиц.
4. Достаточные условия существования предельного стационарного распределения поля частиц.
5. Теорема о наличии зоны регулярного роста моментов в предположении суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки.
6. Теоремы об асимптотике второго условного момента численности субпопуляции в случаях суперэкспоненциально легких и тяжелых хвостов случайного блуждания.

7. Теорема об асимптотике численности субпопуляции частиц при условии ее невырождения для многотипного ВСБ с критическим ветвящимся процессом.
8. Теорема о нерегулярности предельного поведения поля частиц в пространствах размерности $d = 1, 2$ при условии конечности дисперсии скачков случайного блуждания, лежащего в основе процесса.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2017”, Москва, Россия, 20 апреля 2017
- Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (АСМРТ-2017), Москва, Россия, 23-28 октября 2017
- Аспирантский коллоквиум кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, Москва, Россия, 13 декабря 2017 и 23 октября 2019
- 9th International Workshop on Applied Probability (IWAP 2018), Будапешт, Венгрия, 18-21 июня 2018
- IX Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM2018-Germeyer100), Москва, Россия, 22-27 октября 2018
- Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике, Санкт-Петербург, Россия, 24-26 декабря 2018
- ASMDA 2019 (Applied Stochastic Models and Data Analysis 2019, June 11-14, Florence, Italy), Флоренция, Италия, 11-14 июня 2019
- 62nd ISI World Statistics Congress, Куала-Лумпур, Малайзия, 18-23 августа 2019
- The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5), Москва, Россия, 23-27 ноября 2020
- Семинар отдела дискретной математики МИАН, Москва, Россия, 1 декабря 2020

- The 5th International workshop on branching processes and their applications, Badajoz, Испания, 6-22 апреля 2021
- 19th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA 2021), Греция, 1-4 июня 2021
- 63rd ISI World Statistics Congress, Virtual, Нидерланды, 11-16 июля 2021

Публикации. Результаты диссертации содержатся в 18 публикациях. В научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI представлено 6 публикаций, 2 из которых – без соавторов. В материалах международных конференций представлено 12 публикаций, 5 из которых – статьи. Список работ автора приведен в конце автореферата и диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация, объемом 91 страница, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 44 наименований. В диссертацию вошли результаты, выполненные при поддержке РФФИ (гранты 17-01-00468 и 20-01-00487, руководитель грантов – профессор Е. Б. Яровая).

В первой главе описывается модель ВСБ со знакопеременными источником ветвления, приводятся основные дифференциальные уравнения. Существование положительного собственного значения эволюционного оператора обеспечивает экспоненциальный рост первого момента полного числа частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке. Такой результат был получен в [37] для конечного числа источников положительной интенсивности. В диссертации проводится обобщение, когда среди источников могут быть те, в которых интенсивность гибели может превышать интенсивность рождения частиц. Для случая симплицальной конфигурации источников ветвления установлено, что количество положительных собственных значений эволюционного оператора с учетом их кратности не превышает количества источников ветвления с положительной интенсивностью, а максимальное собственное значение является простым. В случае произвольной конфигурации источников основное внимание уделено анализу спектральных характеристик оператора, описывающего эволюцию средних чисел частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке. Полученные результаты обеспечивают явные условия для экспоненциального роста числа частиц без каких-либо предположений о дисперсии скачков лежащего в основе случайного блуждания.

Вторая глава содержит результаты для ВСБ с бесконечным количеством

начальных частиц и бесконечным количеством источников с возможностью деления на произвольное число потомков. Для критического ветвящегося процесса в каждой точке решетки, т.е. когда интенсивность гибели частиц равна интенсивности рождения, в случае невозвратного случайного блуждания по решетке доказана сходимости распределения поля частиц к предельному стационарному распределению. Показано отсутствие перемежаемости в зоне $|x - y| = O(\sqrt{t})$, где $x - y$ – пространственная координата, а t – время, в предположении простого симметричного случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки.

В третьей главе рассматривается непрерывное по времени симметричное ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с частицами нескольких типов и марковским процессом ветвления в каждой точке решетки. Предполагается, что в начальный момент времени в каждой точке решетки находится по одной частице каждого из типов, в процессе ветвления частица может произвести произвольное число потомков каждого из типов. В случае возвратности случайного блуждания и критичности процесса ветвления исследуется эффект пространственной кластеризации популяции частиц. Завершается глава результатами численного моделирования, которые позволяют обнаружить этот эффект при конечном времени.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю – профессору Яровой Елене Борисовне – за постановки и обсуждение задач и внимание к работе.

Глава 1

Ветвящиеся случайные блуждания с конечным числом знакопеременных источников

Глава посвящена ВСБ с непрерывным временем по d -мерной решетке \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, с одной начальной частицей и конечным числом центров генерации частиц, называемых источниками ветвления. Мы предполагаем, что на решетке находятся источники ветвления трех типов. Каждая частица движется по решетке, пока не достигнет источника, в котором происходит изменение поведения. Если это источник первого типа, то происходит гибель или размножение без нарушения симметричности случайного блуждания. Если источник относится ко второму типу, то возможно нарушение симметричности случайного блуждания, характеризующееся дополнительным параметром, который усиливает степень ветвления или блуждания в источнике. В источниках третьего типа возможно только нарушение симметричности случайного блуждания без размножения или гибели частиц. Введем, согласно [41], обозначение $BRW/r/k/m$ для ВСБ с r источниками первого, k источниками второго и m источниками третьего типа.

1.1 Описание модели

Мы предполагаем, что базовое случайное блуждание задано матрицей переходных интенсивностей $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$, обладающей свойствами $a(x, y) = a(y, x) = a(0, y - x) = a(y - x)$ для всех x и y . Таким образом, случайное блуждание симметрично и пространственно однородно. Кроме того, предполагаются выполненными свойства регулярности $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) = 0$ и неприводимости, то есть для всех $z \in \mathbb{Z}^d$ существует множество векторов $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ для $i = 1, 2, \dots, k$.

Вероятность перехода $p(t, \cdot, y)$ удобно рассматривать как функцию $p(t)$ в

$l^2(\mathbb{Z}^d)$, зависящая от времени t и параметра y . Для времени $h \rightarrow 0$ имеют места равенства:

$$\begin{aligned} p(h, x, y) &= a(x, y)h + o(h) \text{ при } y \neq x, \\ p(h, x, x) &= 1 + a(x, x)h + o(h). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Как известно из [25], переходные вероятности удовлетворяют системе обратных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = \sum_{x'} a(x, x')p(t, x', y), \quad p(0, x, y) = \delta(x - y),$$

где δ – дискретная δ -функция Кронекера на \mathbb{Z}^d .

На множестве функций $u(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, рассмотрим оператор

$$(\mathcal{A}u)(x) = \sum_{x' \in \mathbb{Z}^d} a(x - x')u(x').$$

Условия возможности суммирования в предыдущем равенстве и существования оператора \mathcal{A} дает лемма Шура [38]. Оператор \mathcal{A} , как оператор в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$, является самосопряженным.

Вводя нарушения симметрии в $k + m$ источниках, мы получим оператор неоднородного блуждания

$$\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \sum_{i=r+1}^{r+k+m} \zeta_i \Delta_{x_i} \mathcal{A}.$$

где $\Delta_y = \delta_y \delta_y^T$, $\delta_y = \delta_y(\cdot)$ – вектор-столбец на решетке, принимающий единичное значение в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ и нули в остальных точках решетки. Операторы Δ_y действуют в каждом из функциональных пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, см. [41]. Случайное блуждание частиц определяется матрицей переходных интенсивностей $\bar{\mathcal{A}} = (\bar{a}(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$, в которой $\bar{a}(x, y) = a(x - y)$ при $x \neq x_i$, $i = r + 1, \dots, r + k + m$. В источнике x_i , $i = r + 1, \dots, r + k + m$, элементы $\bar{a}(x_i, y)$ определяются следующим образом:

$$\bar{a}(x_i, y) = -(1 - \alpha_i) \frac{a(x_i - y)}{a(0)},$$

где $\alpha_i < 1$ – интенсивности нарушения симметрии.

Мы предполагаем, что ветвление определяется инфинитезимальными производящими функциями

$$f_i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n} u^n, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

где $\sum_n b_n(x_i) = 0$, $b_n(x_i) \geq 0$ при $n \neq 1$ и $b_1(x_i) < 0$, $f_i^{(r)}(1) < \infty$ при всех $r \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1. *Интенсивностью источника x_i называется величина*

$$\beta_i = f'(1, x_i) = \sum_n n b_n(x_i) = -(b_1(x_i)) \left(\sum_{n \neq 1} n \frac{b_n(x_i)}{-b_1(x_i)} - 1 \right),$$

характеризующая среднее число рождающихся в нем потомков.

Введем оператор \mathcal{Y} , полученный в результате возмущения ограниченного самосопряженного оператора $\mathcal{A} : l^p(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}^d)$ (генератора симметричного случайного блуждания), которые имеет вид:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^r \beta_i \Delta_{x_i} + \left(\sum_{i=r+1}^{r+k} \zeta_i \Delta_{x_i} \mathcal{A} + \sum_{i=r+1}^{r+k} \beta_i \Delta_{x_i} \right) + \sum_{i=r+k+1}^{r+k+m} \zeta_i \Delta_{x_i} \mathcal{A}, \quad (1.2)$$

где числа β_s и ζ_i – характеристики интенсивности источников. Если сгруппировать однотипные слагаемые, то данный оператор можно считать частным случаем операторов вида

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} + \sum_i \zeta_i \Delta_{u_i} \mathcal{A} + \sum_i \beta_i \Delta_{v_i} \quad (1.3)$$

с конечным числом слагаемых в правой части. Тогда точки из множества $V \setminus U$ – источники первого типа, $U \cap V$ – источники второго типа, $U \setminus V$ – источники третьего типа.

Пусть $\mu_t(y)$ – число частиц в момент времени t в точке y и $m_1(t, x, y) := \mathbb{E}_x \mu_t(y)$ – математическое ожидание числа частиц в точке y в момент времени t при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ в системе была одна частица, расположенная в точке x . Тогда, согласно [25],

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} &= \sum_{x'} \bar{a}(x, x') m_1(t, x', y) + \sum_{i=1}^N \beta_i \delta(x - x_i) m_1(t, x, y), \\ m_1(0, x, y) &= \delta(x - y). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Поведение среднего числа частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке можно описать в терминах эволюционного оператора специального типа

$$\mathcal{H} = \bar{\mathcal{A}} + \sum_{i=1}^{r+k} \beta_i \Delta_{x_i}, \quad x_i \in \mathbb{Z}^d. \quad (1.5)$$

Этот оператор можно трактовать как линейный ограниченный оператор, действующий в каждом из функциональных пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, см. [41].

Согласно [41] эволюционные уравнения для переходных вероятностей (1.1) и моментов численностей частиц (1.4) можно представить как следующие дифференциальные уравнения в пространствах $l^2(\mathbb{Z}^d)$ и $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$, соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{dp(t, x, y)}{dt} &= (\overline{\mathcal{A}}p(t, \cdot, y))(x), \quad p(0, x, y) = \delta(x - y), \\ \frac{dm_1(t, x, y)}{dt} &= (\mathcal{H}m_1(t, \cdot, y))(x), \quad m_1(0, x, y) = \delta(x - y).\end{aligned}$$

Функция Грина оператора \mathcal{A} может быть представлена как преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$:

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta, \quad \lambda \geq 0,$$

где $\phi(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i(\theta, z)}$ при $\theta \in [-\pi, \pi]$. Для дальнейших исследований существенную роль играет величина $G_0 := G_0(0, 0)$.

Если выполнено неравенство

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} |z|^2 a(z) < \infty, \quad (1.6)$$

где $|z|$ – евклидова норма вектора z , то дисперсия скачков конечна и $G_0 = \infty$ при $d = 1$ и $d = 2$ и $G_0 < \infty$ при $d \geq 3$ [43].

1.2 Симплициальные конфигурации источников

В данном разделе мы рассмотрим модель с источниками в симплициальной конфигурации без нарушения симметрии блуждания, таким образом

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}. \quad (1.7)$$

1.2.1 Три источника ветвления произвольной интенсивности

Рассмотрим ВСБ на \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, с тремя источниками ветвления, имеющими произвольные интенсивности $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и находящимися в вершинах некоторого симплекса, то есть $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_3| = |x_2 - x_3|$. Симплексы такого рода на \mathbb{Z}^d существуют, например, в качестве их вершин можно выбрать точки

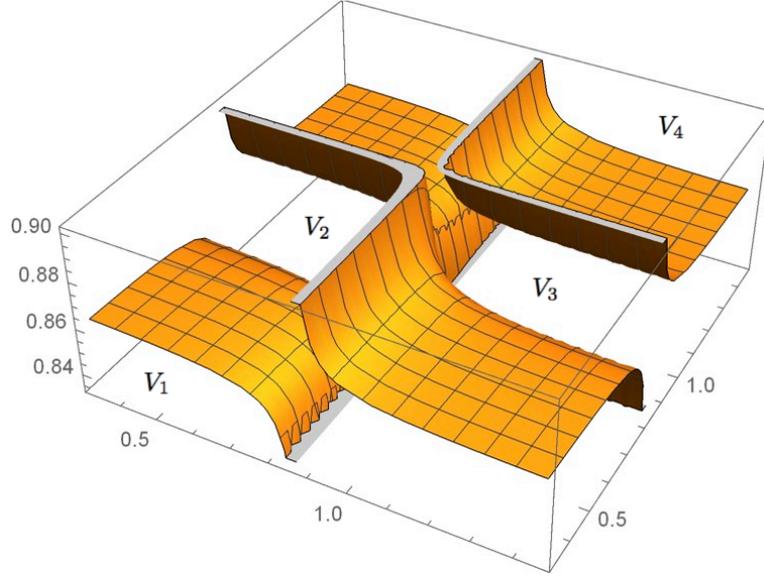


Рис. 1.1: Области значений параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

$(0, 0, t, 0, 0, \dots)$, $(0, t, 0, 0, 0, \dots)$, $(t, 0, 0, 0, 0, \dots)$, $t \in \mathbb{Z}$. Обозначим

$$\tilde{G}_\lambda := G_\lambda(x_i, x_j) = G_\lambda(0, |x_i - x_j|) \quad \text{при } i \neq j,$$

эта величина не зависит от i, j в силу симплициальной конфигурации источников. В этом случае оператор (1.5) принимает вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{A} + \beta_1 \Delta_{x_1} + \beta_2 \Delta_{x_2} + \beta_3 \Delta_{x_3}.$$

Заметим, что λ является собственным значением оператора \mathcal{H} тогда и только тогда, когда выполнено

$$\begin{aligned} & \beta_1 \beta_2 \beta_3 (3\tilde{G}_0^2 G_0 - 2\tilde{G}_0^3 - G_0^3) + (\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \\ & + \beta_2 \beta_3) (G_0^2 - \tilde{G}_0^2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) G_0 + 1 = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

см. [41, теор. 6].

На рис. 1.1 представлены области значений параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ по числу собственных значений оператора \mathcal{H} в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^3)$. На этом рисунке координаты источников: $x_1 = (0, 0, 1)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (1, 0, 0)$, оператор \mathcal{A} – стандартный лапласиан, то есть $a(0) = -1$, $a(z) = 1/6$ для $z = \{z_1, z_2, z_3\}$ таких, что $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 1$, иначе $a(z) = 0$. В результате моделирования в системе Wolfram[®] Alpha получены значения $G_0 = 1.1564$ и $\tilde{G}_0 = 0.0414$.

Область V_1 представляет множество значений параметров $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, при которых отсутствуют положительные собственные значения оператора \mathcal{H} . Область V_2 соответствует единственному, V_3 – двум и V_4 – трём собственным значениям оператора с учетом кратности.

В случае одинаковых интенсивностей $\beta := \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ обозначим через β_c и β_{c_1} такие критические значения для интенсивности β , что при $\beta \leq \beta_c$ спектр оператора \mathcal{H}_β не содержит собственных значений, при $\beta \in (\beta_c, \beta_{c_1})$ у оператора имеется одно и при $\beta \geq \beta_{c_1}$ более одного собственного значения. Уравнение (1.8) в этом случае принимает вид

$$\beta^3(3\tilde{G}_0^2 G_0 - 2\tilde{G}_0^3 - G_0^3) + 3\beta^2(G_0^2 - \tilde{G}_0^2) - 3\beta G_0 + 1 = 0,$$

тогда

$$\beta_c = \frac{1}{G_0 + 2\tilde{G}_0}, \quad \beta_{c_1} = \frac{1}{G_0 - \tilde{G}_0}.$$

Вычисления, выполненные в системе Wolfram[®] Alpha, дают следующие результаты: $\beta_c = 0.8070$, $\beta_{c_1} = 0.8969$

1.2.2 Знакопеременные источники ветвления

Рассмотрим ВСБ с p источниками положительной интенсивности $\beta > 0$ и n источниками отрицательной интенсивности $(-\beta) < 0$, находящимися в вершинах симплекса, $|x_i - x_j| = \text{const}$ для $i \neq j$. Обозначим $\tilde{G}_\lambda := G_\lambda(x_i, x_j) = G_\lambda(0, |x_i - x_j|)$ при $i \neq j$. Источники с положительной интенсивностью указывают на точки, где степень рождаемости преобладает над степенью смертности, а в источниках с отрицательной интенсивностью – наоборот.

Теорема 1.1. *Предположим $\beta_1 = \dots = \beta_p = \beta$ и $\beta_{p+1} = \dots = \beta_{p+n} = -\beta$. Тогда количество собственных значений $\lambda > 0$ эволюционного оператора \mathcal{H} с учетом их кратности не превосходит количества источников ветвления с положительной интенсивностью и максимальное среди собственных значений является простым.*

Доказательство. Согласно (1.5) оператор \mathcal{H} имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{A} + \beta\Delta_{x_1} + \dots + \beta\Delta_{x_p} - \beta\Delta_{x_{p+1}} - \dots - \beta\Delta_{x_{p+n}}.$$

Заметим, что λ является собственным значением оператора \mathcal{H} тогда и только

тогда, когда система линейных уравнений относительно переменных X_1, \dots, V_{p+n}

$$\begin{cases} -X_1 + \beta G_\lambda X_1 + \beta \tilde{G}_\lambda X_2 + \dots + \beta \tilde{G}_\lambda X_{p+n} = 0 \\ -X_2 + \beta \tilde{G}_\lambda X_1 + \beta G_\lambda X_2 + \dots + \beta \tilde{G}_\lambda X_{p+n} = 0 \\ \dots \\ X_{p+1} + \beta \tilde{G}_\lambda X_1 + \beta \tilde{G}_\lambda X_2 + \dots + \beta \tilde{G}_\lambda X_{p+n} = 0 \\ \dots \\ X_{p+n} + \beta \tilde{G}_\lambda X_1 + \beta \tilde{G}_\lambda X_2 + \dots + \beta G_\lambda X_{p+n} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

имеет нетривиальное решение, см. [41, теор. 6]. Пусть $S_{p,n}$ – матрица системы (1.9):

$$S_{p,n} = \begin{pmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda + 1 & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{pmatrix},$$

докажем в этом случае по индукции следующее равенство:

$$\begin{aligned} |S_{p,n}| &= (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^{n-1} \times \\ &\times ((\beta G_\lambda)^2 + (p+n-2)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - (p+n-1)(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + (p-n)\beta \tilde{G}_\lambda - 1). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} |S_{p,1}| &= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 - \beta \tilde{G}_\lambda & 0 & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda - \beta G_\lambda + 1 & 0 \\ 0 & \beta G_\lambda - 1 - \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda - \beta G_\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \beta \tilde{G}_\lambda - \beta G_\lambda + 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 - \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda - 1 + (p-1)\beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} = \\
&= (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} \cdot ((\beta G_\lambda)^2 + (p-1)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - p(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + \\
&+ (p-1)\beta \tilde{G}_\lambda - 1).
\end{aligned}$$

Проведем шаг индукции:

$$\begin{aligned}
|S_{p,n+1}| &= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \beta G_\lambda - 1 & \dots & \dots & \dots \\ \beta \tilde{G}_\lambda & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda + 1 & \beta \tilde{G}_\lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1 & \dots \end{vmatrix} = \\
&= (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1) \cdot |S_{p,n}| + (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1) \cdot (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^p \times \\
&\times (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^{n-1} \cdot \beta \tilde{G}_\lambda = (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^n \times \\
&\times ((\beta G_\lambda)^2 + (p+n-1)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - (p+n)(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + (p-n-1)\beta \tilde{G}_\lambda - 1).
\end{aligned}$$

Индуктивный переход проведен, следовательно, требуемое равенство (1.10) доказано.

Вернемся к вопросу о существовании собственных значений оператора, что равносильно существованию у системы линейных уравнений (1.9) нетривиального решения и равенства определителя ее матрицы 0. Получаем

$$\begin{aligned}
&(\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda - 1)^{p-1} (\beta G_\lambda - \beta \tilde{G}_\lambda + 1)^{n-1} \times \\
&\times ((\beta G_\lambda)^2 + (p+n-2)\beta^2 G_\lambda \tilde{G}_\lambda - (p+n-1)(\beta \tilde{G}_\lambda)^2 + (p-n)\beta \tilde{G}_\lambda - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь первый множитель имеет не более $p - 1$ корня с учетом кратности, второй множитель не имеет корней в силу неравенства $G_\lambda > \tilde{G}_\lambda$, третий множитель имеет не более одного корня. Таким образом, оператор \mathcal{H} имеет не более p собственных значений. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим $D_\lambda := (G_\lambda - \tilde{G}_\lambda)(G_\lambda + (n + p - 1)\tilde{G}_\lambda)$. Собственные значения оператора \mathcal{H} находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} &= G_\lambda - \tilde{G}_\lambda, \\ \frac{1}{\beta} &= \frac{2D_\lambda}{(n - p)\tilde{G}_\lambda + \sqrt{(n - p)^2(\tilde{G}_\lambda)^2 + 4D_\lambda}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Заметим, что $G_\lambda - \tilde{G}_\lambda$ монотонно убывает по λ [2], при этом

$$\frac{2D_\lambda}{(n - p)\tilde{G}_\lambda + \sqrt{(n - p)^2(\tilde{G}_\lambda)^2 + 4D_\lambda}} > G_\lambda - \tilde{G}_\lambda.$$

Следовательно, старшее собственное значение λ_0 находится из уравнения (1.11) и имеет единичную кратность.

Напомним, что через β_c мы обозначили такое минимальное значение интенсивности источников, что при $\beta > \beta_c$ в спектре оператора \mathcal{H} содержатся положительные собственные значения, а через β_{c_1} такое максимальное значение интенсивности, что при $\beta \in (\beta_c, \beta_{c_1})$ имеется единственное собственное значение $\lambda_0(\beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{(n - p)\tilde{G}_0 + \sqrt{(n - p)^2(\tilde{G}_0)^2 + 4D_0}}{2D_0}, \\ \beta_{c_1} &= \frac{1}{G_0 - \tilde{G}_0}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

1.3 Произвольные конфигурации источников

В данном разделе мы предполагаем, что на решетке могут присутствовать источники трех типов в предположении и что в (1.3) параметры β_j вещественны. При таком предположении, обозначив старшее положительное собственное значение оператора \mathcal{U} через λ_0 , будет показано, что если существует λ_0 , то оно простое и гарантирует экспоненциальный рост первых моментов m_1 частиц как в произвольной точке, так и на всей решетке.

Теорема 1.2. Пусть оператор \mathcal{Y} ВСБ/ $r/k/m$ имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 > 0$, и пусть оставшаяся часть его спектра расположена на полупрямой $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq \lambda_0 - \epsilon\}$, где $\epsilon > 0$. Если $\beta_i^{(r)} = O(r!r^{r-1})$ для всех $i = 1, \dots, N$ и $r \in \mathbb{N}$, то справедливы следующие утверждения в смысле сходимости по распределению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(y) e^{-\lambda_0 t} = \psi(y) \xi, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\lambda_0 t} = \xi, \quad (1.12)$$

где $\psi(y)$ – собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0 и ξ – невырожденная случайная величина.

Один из подходов к анализу уравнений (1.1) и эволюционных уравнений для среднего числа частиц $m_1(t, x, y)$ и $m_1(t, x)$ состоит в том, чтобы рассматривать их как дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. Чтобы применить этот подход к нашему случаю, введем операторы

$$(\mathcal{A}u)(x) = \sum_{x'} a(x - x') u(x'), \quad (\Delta_{x_i} u)(x) = \delta(x - x_i) u(x), \quad i = 1, \dots, N.$$

на множестве функций $u(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$. Оператор (1.3) можно представить в более удобной форме:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\beta_1, \dots, \beta_{k+r}} = A + \sum_{i=1}^{k+r} \beta_i \Delta_{v_i} \quad (1.13)$$

где $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, \beta_{k+r}$. Все операторы из (1.13) можно рассматривать как линейные непрерывные операторы в любом из пространств $l^p(\mathbf{Z}^d)$, $p \in [1, \infty]$. Заметим, что оператор \mathcal{A} является самосопряженным в $l^2(\mathbf{Z}^d)$ [42, 22, 21].

Теперь, рассматривая для каждого $t \geq 0$ и каждого $y \in \mathbf{Z}^d$ $p(t, \cdot, y)$ и $m_1(t, \cdot, y)$ как элементы $l^p(\mathbf{Z}^d)$ для некоторого p можно записать (см., например, [42]) следующие дифференциальные уравнения в $l^p(\mathbf{Z}^d)$:

$$\begin{aligned} \frac{dp(t, x, y)}{dt} &= (A p(t, \cdot, y))(x), & p(0, x, y) &= \delta(x - y), \\ \frac{dm_1(t, x, y)}{dt} &= (\mathcal{Y} m_1(t, \cdot, y))(x), & m_1(0, x, y) &= \delta(x - y), \end{aligned}$$

и для $m_1(t, x)$ следующее дифференциальное уравнение в $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$:

$$\frac{dm_1(t, x)}{dt} = (\mathcal{Y} m_1(t, \cdot))(x), \quad m_1(0, x) \equiv 1.$$

Отметим, что при больших t асимптотика переходных вероятностей $p(t, x, y)$, а также средних чисел частиц $m_1(t, x, y)$ и $m_1(t, x)$ тесно связано с операторами \mathcal{A} и спектральными свойствами \mathcal{Y} .

Свойства $p(t, x, y)$ могут быть выражены через функцию Грина, которую можно определить [38, § 2.2] как преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$ или через резольвентную форму:

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta, \quad \lambda \geq 0,$$

где $x, y \in \mathbf{Z}^d$, $\lambda \geq 0$, и $\phi(\theta)$ – преобразование Фурье переходной интенсивности $a(z)$:

$$\phi(\theta) := \sum_{z \in \mathbf{Z}^d} a(z) e^{i(\theta, z)} = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} a(x) \cos(x, \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d. \quad (1.14)$$

Смысл функции $G_0(x, y)$ в следующем: она представляет среднее время, проведенное частицей в $y \in \mathbf{Z}^d$ как $t \rightarrow \infty$ при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в точке $x \in \mathbf{Z}^d$. Асимптотическое поведение средних чисел частиц $m_1(t, x, y)$ и $m_1(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$ можно описать в терминах функции $G_\lambda(x, y)$, см., например, [38]. Наконец, асимптотическое поведение ВСБ сильно зависит от конечности $G_0 := G_0(0, 0)$, это было показано в [43].

Подход, представленный в этом разделе, основан на представлении эволюционных уравнений ВСБ в виде дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Его также можно применять к широкому кругу задач, включая описание эволюции моментов высших порядков числа частиц (см., например, [38], [42]).

1.3.1 Ключевые уравнения и вспомогательные результаты

Начнем с важного замечания. Поскольку оператор \mathcal{Y} , вообще говоря, не является самосопряженным, обширный аналитический аппарат, развитый в [22] и сильно зависящий от самосопряженности задействованных операторов, не применим здесь напрямую. Однако из-за структуры \mathcal{Y} эту трудность можно относительно легко устранить. Действительно, рассмотрим следующее дифференциальное уравнение в банаховом пространстве

$$\frac{df(t, x, y)}{dt} = \mathcal{Y}f(t, x, y)$$

с $\mathcal{Y} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \mathcal{A} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \Delta_{v_j}$. Теперь введем оператор

$$D := \left(I + \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

который корректно определен при $\zeta_i > -1$, и перепишем уравнение, используя эти обозначения:

$$\frac{df(t, x, y)}{dt} = \left(D^{-2} \mathcal{A} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \Delta_{v_j} \right) f(t, x, y),$$

что равносильно

$$D^{-1} \frac{dDf(t, x, y)}{dt} = \left(D^{-1} D^{-1} \mathcal{A} D^{-1} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \Delta_{v_j} D^{-1} \right) Df(t, x, y).$$

Применяя D к обеим частям приведенного выше уравнения, мы получаем

$$\frac{dDf(t, x, y)}{dt} = \left(D^{-1} \mathcal{A} D^{-1} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j D \Delta_{v_j} D^{-1} \right) Df(t, x, y).$$

Поскольку операторы D и Δ_{v_j} коммутируют, приведенное выше выражение эквивалентно

$$\frac{dg(t, x, y)}{dt} = \left(D^{-1} \mathcal{A} D^{-1} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \Delta_{v_j} \right) g(t, x, y),$$

где $g := Df$. Таким образом, мы переписали исходное уравнение таким образом, что ранее несамосопряженный оператор \mathcal{Y} был заменен на самосопряженный оператор

$$\mathcal{Y}' := D^{-1} \mathcal{A} D^{-1} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \Delta_{v_j},$$

а взаимно однозначное соответствие между решениями f исходного уравнения и решениями g нового уравнения устанавливается по формуле $g = Df$. Поэтому, когда дело доходит до анализа задач Коши, оператор \mathcal{Y} во всех смыслах может считаться самосопряженным.

Введем производящие функции Лапласа случайных величин $\mu_t(y)$ и μ_t for $z \geq 0$:

$$F(z; t, x, y) := \mathbf{E}_x e^{-z\mu_t(y)}, \quad F(z; t, x) := \mathbf{E}_x e^{-z\mu_t}.$$

где \mathbf{E}_x – среднее значение при условии $\mu_0(\cdot) = \delta_x(\cdot)$.

Теорема 1.3. Пусть оператор A имеет вид (1.1). Функции $F(z; t, x)$ и $F(z; t, x, y)$ непрерывно дифференцируемы по t равномерно по $x, y \in \mathbf{Z}^d$ для всех

$0 \leq z \leq \infty$. Они удовлетворяют неравенствам $0 \leq F(z; t, x), F(z; t, x, y) \leq 1$ и являются решениями следующих задач Коши в $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$

$$\frac{dF(z; t, \cdot)}{dt} = AF(z; t, \cdot) + \sum_{j=1}^{k+r} \Delta_{v_j} f_j(F(z; t, \cdot)) \quad (1.15)$$

с начальным условием $F(z; 0, \cdot) = e^{-z}$ и

$$\frac{dF(z; t, \cdot, y)}{dt} = AF(z; t, \cdot, y) + \sum_{j=1}^{k+r} \Delta_{v_j} f_j(F(z; t, \cdot, y)) \quad (1.16)$$

с начальным условием $F(z; 0, \cdot, y) = e^{-z\delta_y(\cdot)}$.

Теорема 1.3 позволяет перейти от анализа рассматриваемой ВСБ к рассмотрению соответствующей задачи Коши в банаховом пространстве. Обратим внимание, что, в отличие от случая с одиночным ветвящимся источником, рассмотренного в [38], в правой части формулы есть не один, а несколько членов $\Delta_{v_j} f_j(F)$ уравнений (1.15) и (1.16), $j = 1, 2, \dots, N$.

Теорема 1.4. Моменты $m_n(t, \cdot, y) \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ и $m_n(t, \cdot) \in l^\infty(\mathbb{Z}^d)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям в соответствующих банаховых пространствах для всех натуральных $n \geq 1$:

$$\frac{dm_1}{dt} = \mathcal{Y}m_1, \quad (1.17)$$

$$\frac{dm_n}{dt} = \mathcal{Y}m_n + \sum_{j=1}^{k+r} \Delta_{v_j} g_n^{(j)}(m_1, \dots, m_{n-1}), \quad n \geq 2, \quad (1.18)$$

начальные значения $m_n(0, \cdot, y) = \delta_y(\cdot)$ и $m_n(0, \cdot) \equiv 1$ соответственно. Здесь $\mathcal{Y}m_n$ означает $\mathcal{Y}m_n(t, \cdot, y)$ or $\mathcal{Y}m_n(t, \cdot)$ соответственно, и

$$g_n^{(j)}(m_1, \dots, m_{n-1}) := \sum_{q=2}^n \frac{\beta_j^{(q)}}{q!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_q > 0 \\ i_1 + \dots + i_q = n}} \frac{n!}{i_1! \dots i_q!} m_{i_1} \dots m_{i_q}. \quad (1.19)$$

Теорема 1.4 позже будет использована при доказательстве теоремы 1.9, чтобы определить асимптотическое поведение моментов при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 1.5. Моменты $m_1(t, x, \cdot) \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ удовлетворяют следующей задаче Коши в $l^2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\frac{dm_1(t, x, \cdot)}{dt} = \mathcal{Y}m_1(t, x, \cdot), \quad m_1(0, x, \cdot) = \delta_x(\cdot).$$

Эта теорема позволяет нам получать различные дифференциальные уравнения, используя симметрию ВСБ.

Теорема 1.6. *Момент $m_1(t, x, y)$ удовлетворяет обоим интегральным уравнениям*

$$m_1(t, x, y) = p(t, x, y) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \int_0^t p(t-s, x, v_j) m_1(t-s, v_j, y) ds,$$

$$m_1(t, x, y) = p(t, x, y) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \int_0^t p(t-s, v_j, y) m_1(t-s, x, v_j) ds.$$

Момент $m_1(t, x)$ удовлетворяет обоим интегральным уравнениям

$$m_1(t, x) = 1 + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \int_0^t p(t-s, x, v_j) m_1(s, v_j) ds, \quad (1.20)$$

$$m_1(t, x) = 1 + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \int_0^t m_1(s, x, v_j) ds. \quad (1.21)$$

При $k > 1$ моменты $m_k(t, x, y)$ и $m_k(t, x)$ удовлетворяют уравнениям

$$m_k(t, x, y) = m_1(t, x, y) + \sum_{j=1}^{k+r} \int_0^t m_1(t-s, x, v_j) g_k^{(j)}(m_1(s, v_j, y), \dots, m_{k-1}(s, v_j, y)) ds,$$

$$m_k(t, x) = m_1(t, x) + \sum_{j=1}^{k+r} \int_0^t m_1(t-s, x, v_j) g_k^{(j)}(m_1(s, v_j), \dots, m_{k-1}(s, v_j)) ds.$$

Эта теорема позволяет перейти от дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям. Позже это используется для доказательства теоремы 1.9.

Теоремы 1.4–1.6 являются обобщением на случай ВСБ/ $r/k/m$ леммы 1.2.1, теоремы 1.3.1 и теоремы 1.4.1 из [38], доказанных там для ВСБ/1/0/0. Доказательства теорем 1.4–1.6 отличаются только техническими деталями от доказательств приведенных выше утверждений из [38] и поэтому здесь не приводятся.

1.3.2 Свойства эволюционного оператора

Мы называем ВСБ надкритическим, если $\mu_t(y)$ и μ_t растут экспоненциально. Как уже упоминалось во введении, одним из основных результатов работы является предельное поведение числа частиц (1.12), из которого следует, что ВСБ

с несколькими ветвящимися источниками произвольной интенсивности является надкритическим, если оператор \mathcal{Y} имеет положительное собственное значение λ . По этой причине мы посвятили этот раздел изучению спектральных свойств оператора \mathcal{Y} .

Отметим утверждение, доказанное в [38, Lemma 3.1.1].

Лемма 1.1. *Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} содержится на полупрямой $(-\infty, 0]$. Кроме того, поскольку оператор $\sum_{j=1}^N \beta_j \Delta_{v_j}$ компактен, $\sigma_{ess}(\mathcal{Y}) = \sigma(\mathcal{A}) \subset (-\infty, 0]$, где $\sigma_{ess}(\mathcal{Y})$ обозначает существенный спектр [15] оператора \mathcal{Y} .*

Следующая теорема дает критерий наличия положительного собственного значения в спектре оператора \mathcal{Y} .

Теорема 1.7. *Число $\lambda > 0$ является собственным значением и $f \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ является соответствующим собственным вектором оператора \mathcal{Y} , тогда и только тогда, когда система линейных уравнений*

$$f(u_i) = \frac{1}{1 + \zeta_i} \left(\lambda \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) I_{u_j - u_i}(\lambda) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) I_{v_j - u_i}(\lambda) \right) \quad (1.22)$$

for $i = 1, \dots, k + m$, и

$$f(v_i) = \left(\lambda \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) I_{u_j - v_i}(\lambda) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) I_{v_j - v_i}(\lambda) \right) \quad (1.23)$$

for $i = 1, \dots, k + r$, относительно переменных $f(u_j)$ и $f(v_j)$, где

$$I_x(\lambda) := G_\lambda(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{-i(\theta, x)}}{\lambda - \phi(\theta)} d\theta, \quad x \in \mathbb{Z}^d,$$

имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Для того чтобы $\lambda > 0$ было собственным значением оператора \mathcal{Y} , необходимо и достаточно, чтобы существовал ненулевой элемент $f \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, удовлетворяющее уравнению

$$(\mathcal{Y} - \lambda I) f = \left(\mathcal{A} + \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \mathcal{A} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \Delta_{v_j} - \lambda I \right) f = 0.$$

Очевидно, что множества решений такого уравнения для операторов \mathcal{Y} и $C^{-1}\mathcal{Y}C$ одинаковы для любого оператора C . Положим $C := \left(I + \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \right)^{\frac{1}{2}}$. Он

корректно определен, поскольку $\zeta_i > -1$ для всех i . Таким образом, приведенное выше уравнение можно переписать следующим образом:

$$\left(\mathcal{A} + \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \mathcal{A} \Delta_{u_i} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \Delta_{v_j} - \lambda I \right) f = 0$$

Поскольку $(\Delta_{v_j} f)(x) := f(x) \delta_{v_j}(x) = f(v_j) \delta_{v_j}(x)$ и $(\mathcal{A} \Delta_{u_i} f)(x) := f(x) \mathcal{A} \delta_{u_i}(x)$, предыдущее выражение можно переписать следующим образом:

$$(\mathcal{A} f)(x) + \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \mathcal{A} \delta_{u_j}(x) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) \delta_{v_j}(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

Применим к этому равенству преобразование Фурье и получим

$$(\widetilde{\mathcal{A} f})(\theta) + \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \widetilde{\mathcal{A} \delta_{u_j}}(\theta) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) e^{i(\theta, v_j)} = \lambda \tilde{f}(\theta), \quad (1.24)$$

для $\theta \in [-\pi, \pi]^d$. Преобразование Фурье $\widetilde{\mathcal{A} f}$ $(\mathcal{A} f)(x)$ имеет вид $\phi \tilde{f}$, где \tilde{f} – преобразование Фурье f , а $\phi(\theta)$ определяется равенством (1.14), см. [38, лемма 3.1.1]. Имея это в виду и используя тот факт, что по определению преобразования Фурье

$$\widetilde{\mathcal{A} \delta_{u_j}}(\theta) = \phi(\theta) \widetilde{\delta_{u_j}}(\theta) = \phi(\theta) \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \delta_{u_j}(x) e^{i(x, \theta)} = \phi(\theta) e^{i(u_j, \theta)},$$

мы перепишем равенство (1.24) как

$$\phi(\theta) \tilde{f}(\theta) + \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \phi(\theta) e^{i(u_j, \theta)} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) e^{i(\theta, v_j)} = \lambda \tilde{f}(\theta),$$

или

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{1}{\lambda - \phi(\theta)} \left[\sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \phi(\theta) e^{i(u_j, \theta)} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) e^{i(\theta, v_j)} \right], \quad (1.25)$$

где $\theta \in [-\pi, \pi]^d$. Since $\lambda > 0$ и $\phi(\theta) \leq 0$, $\int_{[-\pi, \pi]^d} |\lambda - \phi(\theta)|^{-2} d\theta < \infty$, что позволяет

нам применить обратное преобразование Фурье к равенству (1.25):

$$\begin{aligned}
& \Phi^{-1} \left[\frac{1}{\lambda - \phi(\theta)} \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \phi(\theta) e^{i(u_j, \theta)} \right] \\
&= \Phi^{-1} \left[- \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) e^{i(u_j, \theta)} + \frac{\lambda}{\lambda - \phi(\theta)} \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) e^{i(u_j, \theta)} \right] \\
&= - \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{-i(\theta, u_j - x)} d\theta + \lambda \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) I_{u_j - x}(\lambda) \\
&= - \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \mathbf{I}[x = u_j] + \lambda \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) I_{u_j - x}(\lambda)
\end{aligned}$$

мы получим

$$\begin{aligned}
f(x) + \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) \mathbf{I}[x = u_j] \\
= \lambda \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) I_{u_j - x}(\lambda) \phi(\theta) e^{i(u_j, \theta)} + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j I_{v_j - x}(\lambda) f(v_j). \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Выбирая $x = u_i$, где $i = 1, \dots, k+m$, или $x = v_i$, где $i = 1, \dots, k+r$, мы можем переписать (1.26) следующим образом:

$$\begin{aligned}
f(u_i) &= \frac{1}{1 + \zeta_i} \left(\lambda \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) I_{u_j - u_i}(\lambda) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) I_{v_j - u_i}(\lambda) \right), \\
f(v_i) &= \lambda \sum_{j=1}^{k+m} \zeta_j f(u_j) I_{u_j - v_i}(\lambda) + \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j) I_{v_j - v_i}(\lambda).
\end{aligned}$$

Заметим, что любое решение системы (1.22) полностью определяет $f(x)$ на всей области определения по формуле (1.26), что и завершает доказательство теоремы. \square

Пусть среди $k+r$ источников, в которых происходит ветвление, в $s \leq k+r$ интенсивности источников $\beta_i > 0$, $i = 0, \dots, s$, а в $k+r-s$ интенсивности источников $\beta_i \leq 0$, $i = s+1, \dots, k+r$. Мы представляем оператор \mathcal{Y} , определенный в (1.13), следующим образом:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \mathcal{A} + \sum_{i=1}^s \beta_i \Delta_{v_i} + \sum_{i=s+1}^{k+r} \beta_i \Delta_{v_i}.$$

Введем определение оператора

$$\mathcal{B} := \lambda I - \mathcal{A} - \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \mathcal{A} - \sum_{i=s+1}^{k+r} \beta_i \Delta_{v_i},$$

тогда собственный вектор h , соответствующий собственному значению λ оператора \mathcal{Y} , удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{B}h = \sum_{i=1}^s \beta_i \delta_{v_i} \langle \delta_{v_i}, h \rangle.$$

Заметим, что $\langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0$. Кроме того, $\beta_i < 0$ при $i = s+1, \dots, k+r$ и, следовательно, $\langle \sum_{i=s+1}^{k+r} \beta_i \Delta_{v_i} x, x \rangle \leq 0$. Следовательно, оператор \mathcal{B} обратим. Проблема существования положительных собственных значений оператора \mathcal{Y} превращается в вопрос о существовании ненулевых решений уравнения $h = \mathcal{B}^{-1} \sum_{j=1}^s \beta_j \delta_{v_j} \langle \delta_{v_j}, h \rangle$, которое после введения вспомогательных переменных $q_i = \langle \delta_{v_i}, h \rangle$ и скалярного умножения этого равенства слева на δ_{v_i} сводится к конечной системе уравнений

$$q_i = \sum_{j=1}^s \beta_j \langle \delta_{v_i}, \mathcal{B}^{-1} \delta_{v_j} \rangle q_j, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (1.27)$$

Обозначим матрицу $B^{(\lambda)}$:

$$B_{i,j}^{(\lambda)} := \beta_j \langle \delta_{v_i}, \mathcal{B}^{-1} \delta_{v_j} \rangle, \quad i, j = 1, \dots, s. \quad (1.28)$$

Таким образом, матричное представление (1.27) имеет следующий вид

$$q = B^{(\lambda)} q, \quad (1.29)$$

а проблема о положительных собственных значениях \mathcal{Y} сводится к вопросу о том, для каких $\lambda > 0$ число 1 является собственным значением матрицы $B^{(\lambda)}$.

Теорема 1.8. Пусть $\lambda_0 > 0$ — наибольшее собственное значение оператора \mathcal{Y} . Тогда λ_0 — простое собственное значение матрицы \mathcal{Y} , а 1 — наибольшее собственное значение матрицы $B^{(\lambda_0)}$.

Доказательство. Обозначим $\zeta := \max(0, \max_i(\zeta_i)) \geq 0$ и заметим, что элементы оператора

$$\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} + \sum_{i=1}^{k+m} \zeta_i \Delta_{u_i} \mathcal{A} - \mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1)I$$

неотрицательны. Из теста Шура [14] следует, что в каждом из пространств $l^p(\mathbf{Z}^d)$ для операторной нормы $\tilde{\mathcal{A}}$ существует оценка

$$\|\tilde{\mathcal{A}}\|_p \leq -\mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1). \quad (1.30)$$

Оператор \mathcal{B} можно представить следующим образом:

$$\mathcal{B} = \lambda I - \mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1)I - \sum_{i=s+1}^{k+r} \beta_i \Delta_{v_i} - \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{F}_\lambda - \tilde{\mathcal{A}},$$

где оператор

$$\mathcal{F}_\lambda = \lambda I - \mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1)I - \sum_{i=s+1}^{k+r} \beta_i \Delta_{v_i}$$

является диагональным со всеми диагональными элементами не менее $-\mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1) + \lambda > 0$. Тогда

$$\|\mathcal{F}_\lambda^{-1}\|_p \leq \frac{1}{-\mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1) + \lambda}. \quad (1.31)$$

Тогда \mathcal{B} можно представить в виде $\mathcal{B} = \mathcal{F}_\lambda \left(I - \mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}} \right)$ и поэтому

$$\mathcal{B}^{-1} = \left(I - \mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}} \right)^{-1} \mathcal{F}_\lambda^{-1}. \quad (1.32)$$

Здесь в силу (1.30) и (1.31) операторная норма $\mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}}$ меньше одного:

$$\|\mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}}\|_p \leq \frac{-\mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1)}{-\mathbf{a}(0, 0)(\zeta + 1) + \lambda} < 1,$$

и поэтому оператор $\left(I - \mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}} \right)^{-1}$ can be представим в виде ряда:

$$\left(I - \mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}} \right)^n.$$

Следовательно, в силу (1.32)

$$\mathcal{B}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}} \right)^n \mathcal{F}_\lambda^{-1}. \quad (1.33)$$

Заметим, что правая часть (1.33) представляет собой сумму произведений операторов (бесконечных матриц) с неотрицательными элементами. Следовательно, каждый элемент оператора (бесконечной матрицы) \mathcal{B}^{-1} неотрицателен.

Докажем, что каждый элемент оператора \mathcal{B}^{-1} строго положителен. Для доказательства используем тот факт, что наше случайное блуждание неприводимо. Заметим, что, поскольку случайное блуждание под действием оператора \mathcal{A} неприводимо, для любой пары $x, y \in \mathbf{Z}^d$ существует $n \geq 1$ и множество точек

$$u_0, u_1, \dots, u_n \in \mathbf{Z}^d, \quad u_0 = x, \quad u_n = y, \quad (1.34)$$

таких, что $a(u_1 - u_0)a(u_2 - u_1) \cdots a(u_n - u_{n-1}) > 0$, откуда следует

$$\bar{a}(u_1 - u_0)\bar{a}(u_2 - u_1) \cdots \bar{a}(u_n - u_{n-1}) > 0. \quad (1.35)$$

Заметим, что элементы бесконечной матрицы \mathcal{B}^{-1} нумеруются парами точек $x, y \in \mathbf{Z}^d$. Кроме того, элемент с номерами (x, y) матрицы $\left(\mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}}\right)^n$ в (1.33) представляет собой сумму вида

$$\sum_{u_0=x, u_n=y} \bar{a}(u_1 - u_0)\bar{a}(u_2 - u_1) \cdots \bar{a}(u_n - u_{n-1}) f_{u_0, u_1, \dots, u_n} \quad (1.36)$$

со всеми возможными “цепочками” из n элементов, которые удовлетворяют (1.34). Положительные множители f_{u_0, u_1, \dots, u_n} образуются благодаря наличию диагональной матрицы \mathcal{F}_λ^{-1} из $\left(\mathcal{F}_\lambda^{-1} \tilde{\mathcal{A}}\right)^n$. Но в силу (1.35) хотя бы один член в сумме (1.36) строго положителен, а остальные неотрицательны. Следовательно, вся сумма также строго положительна, а это означает, что все элементы оператора (бесконечной матрицы) \mathcal{B}^{-1} строго положительны. Поскольку элементы \mathcal{B}^{-1} (см. (1.28)) положительны, матрица $B^{(\lambda)}$ положительна.

Правая часть (1.32) содержит операторы \mathcal{F}_λ^{-1} , элементы которых, монотонно убывающие по $\lambda > 0$, стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Так как в этом случае все перемножаемые и складываемые операторы (бесконечные матрицы) положительны, то все их элементы в этом случае также будут монотонно убывать по $\lambda > 0$ и стремиться к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$.

Сначала покажем, что если λ_0 является наибольшим собственным значением оператора \mathcal{U} , то наибольшее (абсолютное) собственное значение матрицы $B^{(\lambda_0)}$ равно 1. Действительно, допустим, что это не так.

Из (1.29) следует, что $\lambda_0 > 0$ является собственным значением \mathcal{U} тогда и только тогда, когда 1 является собственным значением $B^{(\lambda_0)}$. Все элементы $B^{(\lambda_0)}$ строго положительны. Следовательно, по теореме Перрона-Фробениуса, см. [36, Theorem 8.4.4], матрица $B^{(\lambda_0)}$ имеет строго положительное собственное значение, которое строго больше (по модулю) любого другого собственного значения.

Обозначим доминирующее собственное значение $B^{(\lambda_0)}$ через $\gamma(\lambda_0)$. Поскольку мы предполагали, что 1 не является наибольшим собственным значением $B^{(\lambda_0)}$, то $\gamma(\lambda_0) > 1$. Учитывая, что относительно λ функции $I_{x_i-x_j}(\lambda)$ непрерывны, то все элементы $B^{(\lambda)}$ и все собственные значения $B^{(\lambda)}$ — непрерывные функции относительно λ . Все собственные значения матрицы $B^{(\lambda)}$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, так как для всех i и j $I_{x_i-x_j}(\lambda) \rightarrow 0$ как $\lambda \rightarrow \infty$. Следовательно, существует такое $\hat{\lambda} > \lambda_0$, что $\gamma(\hat{\lambda}) = 1$. Тогда, как было показано ранее, $\hat{\lambda}$ должно быть собственным значением оператора \mathcal{Y} , что противоречит исходному предположению, что λ_0 является наибольшим собственным значением оператора \mathcal{Y} .

Мы только что доказали, что 1 является наибольшим собственным значением $B^{(\lambda_0)}$; тогда из теоремы Перрона-Фробениуса получаем простоту этого собственного значения. Поэтому для завершения доказательства нам нужно показать простоту собственного значения λ_0 оператора \mathcal{Y} .

Предположим, что это не так и λ_0 не является простым. В этом случае имеется по крайней мере два линейно независимых собственных вектора f_1 и f_2 , соответствующих собственному значению λ_0 . Следовательно, мы можем снова применить равенство (1.26), заметить, что линейная независимость векторов f_1 и f_2 эквивалентна линейной независимости векторов

$$\hat{f}_i := (f_i(u_1), \dots, f_i(u_N)), \quad i = 1, 2.$$

Из определения $B^{(\lambda)}$ и теоремы 1.7 следует, что векторы \hat{f}_1 и \hat{f}_2 удовлетворяют $(B^{(\lambda_0)} - I)f = 0$, что противоречит простоте собственного значения 1 оператора $B^{(\lambda_0)}$. Теорема доказана. \square

Лемма 1.2. Пусть \mathcal{Y} — самосопряженный непрерывный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве E , спектр которого представляет собой несвязное объединение двух множеств: первое — конечное (с учетом кратности) множество изолированных собственных значений $\lambda_i > 0$, а вторая — оставшаяся часть спектра, входящая в $[-s, 0]$, $s > 0$. Тогда решение $m(t)$ задачи Коши

$$\frac{dm(t)}{dt} = \mathcal{Y}m(t), \quad m(0) = m_0,$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_0 t} m(t) = C(m_0),$$

где $\lambda_0 = \max_i \lambda_i$.

Доказательство. Обозначим через V_{λ_i} конечномерное собственное пространство \mathcal{Y} , соответствующее собственному значению λ_i .

Рассмотрим проекцию P_i of \mathcal{Y} на V_{λ_i} , см. [15]. Пусть

$$\begin{aligned} x_i(t) &:= P_i m(t), \\ v(t) &:= \left(I - \sum_i P_i \right) m(t) = m(t) - \sum_i x_i(t). \end{aligned}$$

Все спектральные операторы P_i и $(I - \sum P_i)$ коммутируют с \mathcal{Y} , см. [15]. Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= P_i \mathcal{Y} m(t) = \mathcal{Y} x_i(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \left(I - \sum P_i \right) \mathcal{Y} m(t) = \left(I - \sum P_i \right) \mathcal{Y} \left(I - \sum P_i \right) v(t). \end{aligned}$$

Поскольку $x_i(t) \in V_{\lambda_i}$, мы видим, что $\mathcal{Y} x_i(t) = \lambda_i x_i(t)$, откуда следует, что $x_i(t) = e^{\lambda_i t} x_i(0)$. Поскольку спектр оператора

$$\mathcal{Y}_0 := \left(I - \sum P_i \right) \mathcal{Y} \left(I - \sum P_i \right)$$

is входит в спектр оператора \mathcal{Y} и \mathcal{Y}_0 не имеет изолированных собственных значений λ_i , он входит в $[-s, 0]$. Отсюда для всех $t \geq 0$ получаем $|v(t)| \leq |v(0)|$, см. [38, Lemma 3.3.5]. Следовательно

$$m(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} P_i m(0) + v(t), \quad (1.37)$$

и доказательство завершено. □

Замечание 1.1. Пусть λ_0 – наибольшее собственное значение \mathcal{Y} . Обозначим $P_0 m(0) = C(m_0)$ в (1.37). Тогда $C(m_0) \neq 0$ тогда и только тогда, когда ортогональная проекция $P_0 m(0)$ начального значения $m_0 = m(0)$ на соответствующее собственное значение λ_0 собственное пространство отлично от нуля.

Если собственное значение λ_0 оператора \mathcal{Y} простое, а f – собственный вектор, соответствующий λ_0 , то проекция P_0 определяется по формуле $P_0 x = \frac{(f, x)}{(f, f)} f$, где (\cdot, \cdot) обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве E . В тех случаях, когда λ_0 не просто, описание проекции P_0 представляет собой значительно более сложную задачу. Мы доказали простоту наибольшего собственного значения \mathcal{Y} выше, что позволяет нам обойти эту проблему.

Теорема 1.9. Пусть определенный в (1.13) оператор \mathcal{Y} с параметрами $\{\zeta_i\}_{i=1}^{k+r}$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^{k+m}$ имеет конечное число положительных собственных значений (с учетом кратности). Обозначим через λ_0 наибольший из них, а соответствующий λ_0 нормализованный вектор через f . Тогда для $t \rightarrow \infty$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются следующие утверждения:

$$m_n(t, x, y) \sim C_n(x, y)e^{n\lambda_0 t}, \quad m_n(t, x) \sim C_n(x)e^{n\lambda_0 t}, \quad (1.38)$$

где

$$C_1(x, y) = f(y)f(x), \quad C_1(x) = f(x) \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j),$$

а функции $C_n(x, y)$ и $C_n(x) > 0$ при $n \geq 2$ определяются следующим образом:

$$C_n(x, y) = \sum_{j=1}^{k+r} g_n^{(j)}(C_1(v_j, y), \dots, C_{n-1}(v_j, y)) D_n^{(j)}(x),$$

$$C_n(x) = \sum_{j=1}^{k+r} g_n^{(j)}(C_1(v_j), \dots, C_{n-1}(v_j)) D_n^{(j)}(x),$$

где $D_n^{(j)}(x)$ — некоторые функции, удовлетворяющие оценкам $|D_n^{(j)}(x)| \leq \frac{2}{n\lambda_0}$ для $n \geq n_*$, $n_* \in \mathbb{N}$ и $g_n^{(j)}$ — функции, определенные в (1.19).

Доказательство. При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции $\nu_n := m_n(t, x, y)e^{-n\lambda_0 t}$. Из теоремы 1.4 (см. уравнения (1.17) и (1.18) для m_n) получаем следующие уравнения для ν_n :

$$\frac{d\nu_1}{dt} = \mathcal{Y}\nu_1 - \lambda_0\nu_1,$$

$$\frac{d\nu_n}{dt} = \mathcal{Y}\nu_n - n\lambda_0\nu_n + \sum_{j=1}^{k+r} \Delta_{v_j} g_n^{(j)}(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

начальные значения $\nu_n(0, \cdot, y) = \delta_y(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку λ_0 является наибольшим собственным значением \mathcal{Y} , спектр $\mathcal{Y}_n := \mathcal{Y} - n\lambda_0 I$ при $n \geq 2$ входит в $(-\infty, -(n-1)\lambda_0]$. Как было показано, например, в [38, р. 58], если спектр самосопряженного непрерывного оператора $\tilde{\mathcal{Y}}$ в гильбертовом пространстве содержится в $(-\infty, -s]$, $s > 0$, а также $f(t) \rightarrow f_*$ при $t \rightarrow \infty$, то решение уравнения

$$\frac{d\nu}{dt} = \tilde{\mathcal{Y}}\nu + f(t)$$

удовлетворяет при условии $\nu(t) \rightarrow -\tilde{\mathcal{Y}}^{-1}f_*$. По этой причине для $n \geq 2$ получаем

$$\begin{aligned} C_n(x, y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \nu_n = - \sum_{j=1}^{k+r} \left(\mathcal{Y}_n^{-1} \Delta_{v_j} g_n^{(j)}(C_1(\cdot, y), \dots, C_{n-1}(\cdot, y)) \right) (x) \\ &= - \sum_{j=1}^{k+r} g_n^{(j)}(C_1(v_j, y), \dots, C_{n-1}(v_j, y)) (\mathcal{Y}_n^{-1} \delta_{v_j}(\cdot))(x). \end{aligned}$$

Теперь докажем существование такого натурального числа n_* , что для всех $n \geq n_*$ оценки

$$D_n^{(j)}(x) := |(\mathcal{Y}_n^{-1} \delta_{v_j}(\cdot))(x)| \leq \frac{2}{n\lambda_0}$$

имеют место. Мы вычисляем норму оператора \mathcal{Y}_n^{-1} . Для этого рассмотрим два вектора u и x такие, что $u = \mathcal{Y}_n x = \mathcal{Y}x - n\lambda_0 x$. Тогда $\|u\| \geq n\lambda_0 \|x\| - \|\mathcal{Y}x\| \geq (n\lambda_0 - \|\mathcal{Y}\|)\|x\|$, hence $\|\mathcal{Y}_n^{-1}u\| = \|x\| \leq \|u\| / (n\lambda_0 - \|\mathcal{Y}\|)$, и для всех $n \geq n_* = 2\lambda_0^{-1}\|\mathcal{Y}\|$ оценка $\|\mathcal{Y}_n^{-1}\| \leq \frac{2}{n\lambda_0}$ имеет место. Отсюда делаем вывод, что

$$|(\mathcal{Y}_n^{-1} \delta_{v_j}(\cdot))(x)| \leq \|\mathcal{Y}_n^{-1} \delta_{v_j}(\cdot)\| \leq \|\mathcal{Y}_n^{-1}\| \|\delta_{v_j}(\cdot)\| \leq \frac{2}{n\lambda_0}, \quad n \geq n_*.$$

Теперь нам нужно оценить асимптотическое поведение моментов числа частиц. Из (1.21) следует, что при $t \rightarrow \infty$ выполняются следующие асимптотические эквивалентности:

$$m_1(t, x) \sim \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j \int_0^t m_1(s, x, v_j) ds \sim \sum_{j=1}^{k+r} \frac{\beta_j}{\lambda_0} m_1(t, x, v_j). \quad (1.39)$$

Функция $m_1(t, x, 0)$ демонстрирует экспоненциальный рост, когда $t \rightarrow \infty$ и $m_1(t, x)$ будут демонстрировать такое же поведение.

Теперь мы можем вывести асимптотику старших моментов $m_n(t, x)$ для $n \geq 2$ из уравнений (1.18) аналогично тому, как это было сделано выше для $m_n(t, x, y)$.

Перейдем к доказательству равенств для $C_1(x, y)$ и $C_1(x)$. Собственное значение λ_0 является простым по Следствию 1.8, и отсюда согласно замечанию 1.1 следует, что

$$C_1(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_0 t} m_1(t, x, y) = P m_0 = (m_1(0, x, y), f) f(x).$$

Но $m_1(0, x, y) = \delta_y(x)$, следовательно

$$C_1(x, y) = (m_1(0, x, y), f) f(x) = f(y) f(x).$$

Мы также получаем из (1.39), что

$$C_1(x) = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j C_1(x, v_j) = f(x) \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j),$$

что завершает доказательство. \square

Следствие 1.9.1. $C_n(x, y) = \psi^n(y) C_n(x)$, где $\psi(y) = \frac{\lambda_0 f(y)}{\sum_{j=1}^{k+r} \beta_j f(v_j)}$.

Доказательство. Докажем следствие индукцией по n . При $n = 1$ базис индукции выполняется по теореме 1.9. Теперь обратимся к индукционному переходу: согласно теореме 1.9,

$$\begin{aligned} C_{n+1}(x, y) &= \sum_{j=1}^{k+r} g_{n+1}^{(j)}(C_1(v_j, y), \dots, C_n(v_j, y)) D_{n+1}^{(j)}(x), \\ C_{n+1}(x) &= \sum_{j=1}^{k+r} g_{n+1}^{(j)}(C_1(v_j), \dots, C_n(v_j)) D_{n+1}^{(j)}(x); \end{aligned}$$

поэтому достаточно доказать, что для всех j выполняются равенства

$$g_{n+1}^{(j)}(C_1(v_j, y), \dots, C_n(v_j, y)) = \psi^{n+1}(y) g_{n+1}^{(j)}(C_1(v_j), \dots, C_n(v_j)).$$

Как следствие определения и предположения индукции,

$$\begin{aligned} &g_{n+1}^{(j)}(C_1(v_j, y), \dots, C_n(v_j, y)) \\ &= \sum_{r=2}^{n+1} \frac{\beta_j^{(r)}}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0 \\ i_1 + \dots + i_r = n+1}} \frac{n!}{i_1! \dots i_r!} C_{i_1}(v_j, y) \dots C_{i_r}(v_j, y) \\ &= \psi^{n+1}(y) \sum_{r=2}^{n+1} \frac{\beta_j^{(r)}}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0 \\ i_1 + \dots + i_r = n+1}} \frac{n!}{i_1! \dots i_r!} C_{i_1}(v_j) \dots C_{i_r}(v_j), \end{aligned}$$

что доказывает следствие. \square

1.3.3 Доказательство предельной теоремы

Введем функцию

$$f(n, r) := \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0 \\ i_1 + \dots + i_r = n}} i_1^{i_1} \dots i_r^{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Следующая вспомогательная лемма доказана в [37, Lemma 9].

Лемма 1.3. *Существует такая константа $C > 0$ that $f(n, r) < C \frac{n^n}{r^{r-1}}$ для всех $n \geq r \geq 2$.*

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.2.

Доказательство. Определим функции

$$m(n, x, y) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_n(t, x, y)}{m_1^n(t, x, y)} = \frac{C_n(x, y)}{C_1^n(x, y)},$$

$$m(n, x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_n(t, x)}{m_1^n(t, x)} = \frac{C_n(x)}{C_1^n(x)};$$

ак следует из теоремы 1.9 и положительности $G_\lambda(x, y)$, эти определения корректны. Следствие 1.9.1 дает

$$m(n, x, y) = m(n, x) = \frac{C_n(x)}{C_1^n(x)} = \frac{C_n(x, y)}{C_1^n(x, y)}.$$

Из вышеприведенных равенств и асимптотических эквивалентностей (1.38) получаем утверждения теоремы 1.2 в терминах сходимости моментов случайных величин $\xi(y) = \psi(y)\xi$ и ξ .

Распределения предельных случайных величин $\xi(y)$ и ξ однозначно определяются своими моментами, если, как показано в [38], выполняется условие Карлемана

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(n, x, y)^{-1/2n} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(n, x)^{-1/2n} = \infty \quad (1.40)$$

Ниже мы установим, что ряд для $m(n, x)$ расходится и, следовательно, указанные моменты однозначно определяют случайную величину ξ ; утверждение о $\xi(y)$ и его моментах доказывается примерно таким же образом.

Поскольку $\beta_j^{(r)} = O(r!r^{r-1})$, существует такая константа D , что для всех $r \geq 2$ и $j = 1, \dots, k+r$ выполняется неравенство $\beta_j^{(r)} < Dr!r^{r-1}$. Без ограничения общности считаем, что для всех n

$$C_n(x) \leq \max_{j=1, \dots, k+r} C_n(v_j) = C_n(v_1).$$

Пусть $\gamma := 2NCDE \frac{\lambda_0 \beta_2}{2} C_1^2(v_1)$, где C определено в лемме 1.3, а константа E такова, что $C_n(v_1) \leq \gamma^{n-1} n! n^n$ для $n \leq \max\{n_*, 2\}$, где n_* определено в теореме 1.9. С этого момента доказательство следует схеме доказательства [37, Th. 1] и включено только для удобства чтения.

Покажем по индукции, что

$$C_n(x) \leq C_n(v_1) \leq \gamma^{n-1} n! n^n.$$

База индукции для $n = 1$ верна благодаря выбору C . Для доказательства шага индукции покажем, что

$$C_{n+1}(x) \leq C_{n+1}(v_1) \leq \gamma^n (n+1)! (n+1)^{n+1}.$$

Из формулы $C_{n+1}(v_1)$ и оценки для $D_n^{(j)}(x)$ из теоремы 1.9 следует, что

$$C_{n+1}(v_1) \leq \sum_{j=1}^N \sum_{r=2}^{n+1} \frac{\beta_r^{(j)}}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0 \\ i_1 + \dots + i_r = n+1}} \frac{(n+1)!}{i_1! \dots i_r!} C_{i_1}(v_1) \dots C_{i_r}(v_1) \frac{2}{\lambda_0(n+1)}.$$

По индукционному предположению

$$\frac{(n+1)!}{i_1! \dots i_r!} C_{i_1}(0) \dots C_{i_r}(0) \leq \gamma^{n+1-r} (n+1)! i_1^{i_1} \dots i_r^{i_r};$$

что в дополнение к тому факту, что $\beta_j^{(r)} < Dr!r^{r-1}$ и $\gamma^{n+1-r} \leq \gamma^{n-1}$, дает

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{r=2}^{n+1} \frac{\beta_j^{(r)}}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0 \\ i_1 + \dots + i_r = n+1}} \frac{(n+1)!}{i_1! \dots i_r!} C_{i_1}(v_1) \dots C_{i_r}(v_1) \\ & \leq N\gamma^{n-1} D(n+1)! \sum_{r=2}^{n+1} r^{r-1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r > 0 \\ i_1 + \dots + i_r = n+1}} i_1^{i_1} \dots i_r^{i_r} \\ & = N\gamma^{n-1} D(n+1)! \sum_{r=2}^{n+1} r^{r-1} f(n+1, r). \end{aligned}$$

Из леммы 1.3 получаем, что

$$\begin{aligned} N\gamma^{n-1} D(n+1)! \sum_{r=2}^{n+1} r^{r-1} f(n+1, r) & \leq N\gamma^{n-1} (n+1)! DC \sum_{r=2}^{n+1} (n+1)^{n+1} \\ & \leq N\gamma^{n-1} DC (n+1)! (n+1)^{n+2}. \end{aligned}$$

Отсюда, ссылаясь на определение γ , получаем

$$C_{n+1}(x) \leq \gamma^n (n+1)! (n+1)^{n+1},$$

что завершает доказательство шага индукции.

Поскольку $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $C_n(x) \leq \frac{\gamma^n}{2^n} (n+1)^{2n}$. Таким образом,

$$m(n, x) = \frac{C_n(x)}{C_1^n(x)} \leq \left(\frac{\gamma}{2C_1(x)}\right)^n (n+1)^{2n},$$

откуда получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(n, x)^{-1/2n} \geq \sqrt{\frac{2C_1(x)}{\gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Условие (1.40) выполнено, и соответствующая проблема моментов Стилтеса для моментов $m(n, x)$ имеет единственное решение [19, Th. 1.11]. Следовательно, утверждения (1.12) верны с точки зрения сходимости по распределению, и теорема 1.2 доказана. \square

Глава 2

Ветвящиеся случайные блуждания с бесконечным числом источников

Во второй главе содержатся результаты для ВСБ с бесконечным количеством начальных частиц и бесконечным количеством источников с возможностью деления на произвольное число потомков. Получены зоны перемежаемости в случае надкритического закона ветвления. Для критического случая деления на двух потомков найдено асимптотическое поведение условного совместного второго момента субпопуляций. Для ВСБ с суперэкспоненциально легкими хвостами блуждания доказана сходимости распределения поля частиц к стационарному.

Рассматривается симметричное ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с непрерывным временем и марковским ветвящимся процессом в каждой точке решетки. Предполагается, что в начальный момент времени в точках решетки находится по одной частице, и в процессе ветвления частица может произвести произвольное число потомков. Для критического ветвящегося процесса в случае невозвратного случайного блуждания по решетке доказана сходимости распределения поля частиц к предельному стационарному распределению. Показано отсутствие перемежаемости в зоне $|x - y| = O(\sqrt{t})$, где $x - y$ – пространственная координата, а t – время, в предположении *суперэкспоненциально легких хвостов* случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки.

2.1 Описание модели

Рассмотрим случайное поле частиц на многомерной решетке \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$. Через $N(t, y)$ обозначим количество частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени $t \geq 0$. Предполагается, что в начальный момент времени в каждой точке решетки на-

ходится по одной частице, и частицы эволюционируют независимо друг от друга и от всей предыстории. Пространственно-временная эволюция поля включает процессы блуждания (транспорта), размножения и гибели частиц.

Транспорт (блуждание) частиц по \mathbb{Z}^d до первого превращения (размножения или гибели) опишем в терминах генератора случайного блуждания

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\psi)(x) &:= \varkappa \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} [\psi(x+z) - \psi(x)]a(z) \\ &\equiv \varkappa \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} [\psi(x+z) - \psi(x)]a(z), \end{aligned} \quad (2.1)$$

который предполагается действующим в пространстве $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ [38]. В (2.1) функция $a(z)$ задает распределение случайных скачков, параметр $\varkappa > 0$ будем называть *коэффициентом диффузии* частиц. В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий:

1. регулярность:

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a(z) = -a(0) = 1, \quad a(z) \geq 0;$$

2. симметричность: $a(z) \equiv a(-z)$;

3. неприводимость: для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a(z_i) > 0$ при $i = 1, \dots, k$.

Структура случайного блуждания существенно зависит от распределения его скачков. Будем говорить, что случайное блуждание имеет *суперэкспоненциально легкие хвосты*, если для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^d$ выполняется условие:

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} e^{\langle \lambda, z \rangle} a(z) < \infty. \quad (2.2)$$

Примером служит простое случайное блуждание:

$$a(z) = \begin{cases} (2d)^{-1} & \text{при } |z| = 1, \\ 0 & \text{при } |z| > 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Как известно (см., напр., [25, 38]), переходные вероятности случайного блуждания $p(t, x, x+z)$ обладают свойством однородности по пространству

$$p(t, x, x+z) = p(t, 0, z).$$

В связи с этим далее будет удобно использовать обозначение

$$\bar{p}(t, z) := p(t, 0, z),$$

хотя иногда для подчеркивания роли пространственных переменных мы будем использовать и обозначение $p(t, x, y)$ вместо $\bar{p}(t, y - x)$. В этом случае переходные вероятности случайного блуждания $p(t, x, x + z)$ за малое время dt выражаются через переходные интенсивности:

$$\begin{aligned}\bar{p}(dt, z) &= a(z) dt + o(dt), \quad z \neq 0, \\ \bar{p}(dt, 0) &= 1 + a(0) dt + o(dt).\end{aligned}$$

Переходные вероятности случайного блуждания $\bar{p}(t, z)$ удовлетворяют обратным уравнениям Колмогорова

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}(t, z)}{\partial t} &= (\mathcal{L}\bar{p}(t, \cdot))(z), \\ \bar{p}(0, z) &= \delta(z),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где оператор \mathcal{L} действует по формуле (2.1), а $\delta(z)$ – символ Кронекера.

Для нахождения решения уравнения (2.4) удобно воспользоваться техникой преобразования Фурье. Для произвольной функции $\psi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, символом $\hat{\psi}(\theta)$ обозначим ее дискретное преобразование Фурье:

$$\hat{\psi}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \psi(x) e^{i\langle \theta, x \rangle}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d,$$

тогда для θ из d -мерного куба $T^d := [-\pi, \pi]^d$ обратное преобразование Фурье выражается равенством

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \hat{\psi}(\theta) e^{-i\langle \theta, x \rangle} d\theta.$$

Отметим теперь, что в предположении регулярности и симметричности случайного блуждания оператор (2.1) может быть представлен также в виде

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\psi)(x) &= \varkappa \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} [\psi(x + z) - \psi(x)] a(z) = \varkappa \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \psi(x + z) a(z) \\ &= \varkappa \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(x - z) \psi(z) = \varkappa (a * \psi)(x),\end{aligned}\tag{2.5}$$

где символом $*$ обозначается свертка функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, определяемая равенством

$$(\psi_1 * \psi_2)(x) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \psi_1(x - z) \psi_2(z) \quad \text{при } x \in \mathbb{Z}^d.$$

Учитывая, что преобразований Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье соответствующих функций:

$$\widehat{(\psi_1 * \psi_2)}(\theta) \equiv \hat{\psi}_1(\theta) \hat{\psi}_2(\theta), \quad (2.6)$$

из представления (2.5) получаем явный вид преобразования Фурье оператора \mathcal{L} :

$$\widehat{\mathcal{L}\psi}(\theta) = \varkappa \hat{a}(\theta) \hat{\psi}(\theta).$$

Далее, переходя в (2.4) к преобразованию Фурье, получаем уравнение

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \varkappa \hat{a}(\theta) \hat{p}(t, \theta),$$

из которого находится решение уравнения (2.4):

$$\bar{p}(t, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} e^{\varkappa \hat{a}(\theta)t - i\langle \theta, z \rangle} d\theta, \quad t \geq 0.$$

Здесь в силу симметричности блуждания $a(z) \equiv a(-z)$, и поэтому функция $\hat{a}(\theta)$ является вещественной:

$$\hat{a}(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i\langle \theta, z \rangle} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) \cos \langle \theta, z \rangle \leq 0,$$

а тогда

$$\bar{p}(t, z) \leq \bar{p}(t, 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} e^{\varkappa \hat{a}(\theta)t} d\theta \quad (2.7)$$

при каждом $z \in \mathbb{Z}^d$.

Заметим, что в силу симметричности блуждания функция $\hat{a}(\theta)$ является вещественной:

$$\hat{a}(\theta) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) e^{i\langle \theta, z \rangle} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a(z) \cos \langle \theta, z \rangle,$$

Перейдем к описанию механизма ветвления. Будем предполагать, что ветвление частиц в каждой из точек решетки определяется одной и той же инфинитезимальной производящей функцией

$$f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

где $b_n \geq 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$. Таким образом, каждая из частиц умирает в интервале $(t, t + dt)$ (при малом dt) с вероятностью $b_0 dt + o(dt)$ или распадается на $n \geq 2$ потомков с вероятностью $b_n dt + o(dt)$. Важной характеристикой интенсивности источника ветвления является параметр

$$\beta := f'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n, \quad (2.8)$$

который характеризует среднее число потомков частицы. Мы предполагаем, что ряд (2.8) сходится, т.е. $\beta < \infty$.

Для частицы, находившейся в начальный момент времени в точке x , обозначим через $n(t, x, y)$ количество потомков, которые в момент времени t попадают в точку y . В этом случае численность $N(t, y)$ общей популяции в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, представляющая собой сумму численностей независимых субпопуляций, может быть выражена следующим равенством:

$$N(t, y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} n(t, x, y),$$

где $n(0, x, y) = \delta_y(x)$ и $N(0, y) \equiv 1$. Объединяя блуждание и ветвление, мы получаем процесс, в котором частица, находящаяся в момент времени t в положении x , за малое время dt может

1. совершить прыжок в положение $x + z \neq x$ с вероятностью $\kappa a(z) dt + o(dt)$;
2. погибнуть с вероятностью $b_0 dt + o(dt)$;
3. произвести $n \neq 1$ число потомков с вероятностью $b_n dt + o(dt)$;
4. не совершить никаких действий с вероятностью $1 - \kappa dt + b_1 dt + o(dt)$.

При этом каждая новая частица эволюционирует независимо от остальных и всей предыстории.

2.2 Основные уравнения

Для субпопуляции $n(t, x, y)$ введем производящую функцию

$$u(t, x, y; z) := \mathbf{E} z^{n(t, x, y)}, \quad z > 0. \quad (2.9)$$

Согласно описанному выше закону изменения численности частиц за малое время dt , следуя аксиоматике из [25] мы получим (опуская технические детали, существенно повторяющие доказательство леммы 1.2.1 из [38]):

$$\begin{aligned} u(t + dt, x, y; z) &= b_0 dt + (1 - \varkappa dt + b_1 dt)u(t, x, y; z) \\ &+ \varkappa \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a(z)u(t, x + z, y; z) dt \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} b_n u^n(t, x, y; z) dt + o(dt). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{u(t + dt, x, y; z) - u(t, x, y; z)}{dt} &= \\ &= \varkappa \sum_{x' \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a(x')(u(t, x + x', y; z) - u(t, x, y; z)) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n(t, x, y; z) + O(dt) \end{aligned}$$

и, следовательно, производящая функция субпопуляции $n(t, x, y)$ является решением следующей параболической задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x, y; z)}{\partial t} &= (\mathcal{L}u(t, \cdot, y; z))(x) + f(u(t, x, y; z)), \\ u(0, x, y; z) &= \begin{cases} z, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Согласно ([35], т.2, гл. 13, п.2) производящая функция (2.9) бесконечно дифференцируема по s при $s > 0$. Тогда, дифференцируя (2.9) по s , получим вид соответствующих *факториальные моменты* $m_k(t, x, y)$ для $n(t, x, y)$:

$$m_k(t, x, y) := \left. \frac{\partial^k u(t, x, y; z)}{\partial s^k} \right|_{s=1} = \mathbb{E} \prod_{i=0}^{k-1} (n(t, x, y) - i).$$

Дифференциальные уравнения для первых факториальных моментов $m_1(t, x, y)$ и $m_2(t, x, y)$ получаем (см., напр., [38]) из (2.10) дифференцированием по s и подстановкой $s = 1$ в получившееся выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} &= (\mathcal{L}m_1(t, \cdot, y))(x) + \beta m_1(t, x, y), \\ m_1(0, x, y) &= \delta_y(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для нахождения первого факториального момента $m_1(t, x, y)$ применим к (2.11) преобразование Фурье и воспользуемся равенством (2.6). В результате получим систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{m}_1(t, x, y)}{\partial t} &= (\varkappa \hat{a}(\theta) + \beta) \hat{m}_1(t, \theta, y), \\ \hat{m}_1(0, \theta, y) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \delta_y(x) e^{i\langle \theta, x \rangle} = e^{i\langle \theta, y \rangle},\end{aligned}$$

решение которой может быть найдено в явном виде:

$$\hat{m}_1(t, \theta, y) = e^{t(\varkappa \hat{a}(\theta) + \beta)} e^{i\langle \theta, y \rangle}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье к $\hat{m}_1(t, \theta, y)$, находим:

$$m_1(t, x, y) = p(t, x, y) e^{\beta t}, \quad (2.12)$$

где параметр β определен формулой (2.8).

Заметим, что представив уравнение (2.11) в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} &= ((\mathcal{L} + \beta I)m_1(t, \cdot, y))(x), \\ m_1(0, x, y) &= \delta_y(x),\end{aligned}$$

мы можем выразить решение $m_1(t, x, y)$ в абстрактной, но иногда более удобной операторной форме :

$$m_1(t, x, y) = \left(e^{(\mathcal{L} + \beta I)t} \delta_y(\cdot) \right) (x). \quad (2.13)$$

Чтобы получить уравнение для второго факториального момента

$$m_2(t, x, y) = \mathbf{E}[n(t, x, y)(n(t, x, y) - 1)],$$

мы дважды дифференцируем (2.10) по s и подставляем в результирующее выражение $s = 1$. Обозначив

$$\varsigma := \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n,$$

аналогично тому, как это делалось для первого факториального момента, получим задачу Коши

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_2(t, x, y)}{\partial t} &= (\mathcal{L}m_2(t, \cdot, y))(x) + \beta m_2(t, x, y) + (\varsigma - \beta) m_1^2(t, x, y), \\ m_2(0, x, y) &= 0.\end{aligned} \quad (2.14)$$

Представим это уравнение в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_2(t, x, y)}{\partial t} &= ((\mathcal{L} + \beta I)m_2(t, \cdot, y))(x) + (\varsigma - \beta)m_1^2(t, x, y), \\ m_2(0, x, y) &= 0,\end{aligned}$$

и применим для его решения формулу вариации произвольной постоянной:

$$\begin{aligned}m_2(t, x, y) &= \left(e^{(\mathcal{L} + \beta I)t} m_2(0, \cdot, y) \right) (x) \\ &\quad + (\varsigma - \beta) \int_0^t \left(e^{(\mathcal{L} + \beta I)(t-s)} m_1^2(s, \cdot, y) \right) (x) ds.\end{aligned}$$

Здесь в силу (2.14) $m_2(0, x, y) \equiv 0$, и поэтому первое слагаемое в правой части обращается в нуль:

$$m_2(t, x, y) = (\varsigma - \beta) \int_0^t \left(e^{(\mathcal{L} + \beta I)(t-s)} m_1^2(s, \cdot, y) \right) (x) ds. \quad (2.15)$$

Для упрощения правой части полученного выражения заметим, что каждый элемент $f \in l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq p < \infty$, может быть разложен по “базисным элементам” $\delta_z(\cdot)$, $z \in \mathbb{Z}^d$:

$$f(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f(z) \delta_z(x).$$

Выбрав $f(x) = m_1^2(s, x, y)$, где s и y временно рассматриваются как параметры, мы находим:

$$m_1^2(s, x, y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \delta_z(x) m_1^2(s, z, y).$$

Подставив полученное выражение в (2.15), получаем:

$$\begin{aligned}m_2(t, x, y) &= (\varsigma - \beta) \int_0^t \left(e^{(\mathcal{L} + \beta I)(t-s)} m_1^2(s, \cdot, y) \right) (x) ds = \\ &= (\varsigma - \beta) \int_0^t \left(e^{(\mathcal{L} + \beta I)(t-s)} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \delta_z(\cdot) m_1^2(s, z, y) \right) (x) ds = \\ &= (\varsigma - \beta) \int_0^t \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \left(e^{(\mathcal{L} + \beta I)(t-s)} \delta_z(\cdot) \right) (x) m_1^2(s, z, y) ds.\end{aligned}$$

Здесь в силу (2.13) $(e^{(\mathcal{L} + \beta I)(t-s)} \delta_z(\cdot))(x) = m_1(t - s, x, z)$, и поэтому

$$m_2(t, x, y) = (\varsigma - \beta) \int_0^t \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} m_1(t - s, x, z) m_1^2(s, z, y) ds, \quad (2.16)$$

причем всегда $\varsigma - \beta = \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - n) b_n > 0$.

2.3 Критическая ветвящаяся среда

Рассмотрим ситуацию, когда $\beta = 0$ в каждой точке решетки, т.е. закон ветвления в каждой точке решетки критический. Вначале докажем, что для субпопуляции потомков частицы $n(t, x, x)$ в точке, где в начальный момент времени находилась частица-прародительница данной субпопуляции, наблюдается нерегулярный рост моментов (см. утверждение теоремы 2.1).

Затем в данном разделе мы рассмотрим сумму вторых моментов локальных численностей субпопуляций частиц и докажем ее расходимость при условии возвратности случайного блуждания.

В силу (2.12) первый факториальный момент в этом случае принимает вид

$$m_1(t, x, y) = p(t, x, y), \quad (2.17)$$

откуда

$$\mathbb{E}N(t, y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}n(t, x, y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} m_1(t, x, y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, y) \equiv 1.$$

Система уравнений (2.14) для второго факториального момента в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_2(t, x, y)}{\partial t} &= (\mathcal{L}m_2(t, \cdot, y))(x) + \varsigma m_1^2(t, x, y), \\ m_2(0, x, y) &= 0, \end{aligned}$$

и ее решение (2.16) можно записать как

$$m_2(t, x, y) = \varsigma \int_0^t \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, z) p^2(s, z, y) ds. \quad (2.18)$$

Для удобства ссылок сформулируем следующее очевидное утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $f(x)$ – непрерывная при $t \geq 0$ функция, причем $f(t) \sim t^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, при $t \rightarrow \infty$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$\int_0^t f(s) ds \sim \begin{cases} \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{при } \gamma < 1, \\ \ln t & \text{при } \gamma = 1, \\ C & \text{при } \gamma > 1, \end{cases}$$

где C – некоторая положительная константа.

Как установлено в [38], $\bar{p}(t, 0) \sim Ct^{-d/2}$ при больших t . Поэтому по лемме 2.1 получаем для функции

$$G(t) := \int_0^t \bar{p}(u, 0) du$$

асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$.

Следствие 2.0.1.

$$G(t) \sim \begin{cases} 2\gamma_1\sqrt{t} & \text{при } d = 1, \\ \gamma_2 \ln t & \text{при } d = 2, \\ C_d & \text{при } d \geq 3, \end{cases}$$

где γ_1, γ_2 и C_d – некоторые константы, причем константа C_d , зависит только от размерности d .

Теорема 2.1. Пусть $\beta = 0$. Тогда при $d = 1$ или $d = 2$ для любого $y \in \mathbb{Z}^d$ в случае выполнения условия (2.2) и $t \rightarrow \infty$ имеют место соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_2(t, y, y)}{m_1^2(t, y, y)} = \infty.$$

Доказательство. Из (2.16) и очевидных равенств

$$m_1(t, y, y) = m_1(t, 0, 0) = \bar{p}(t, 0),$$

учитывая при этом доказанное в [40] монотонное убывание функции $\bar{p}(t, 0)$, получаем:

$$\begin{aligned} m_2(t, 0, 0) &= \varsigma \int_0^t \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \bar{p}(t-s, z) \bar{p}^2(s, z) ds \geq \varsigma \int_0^t \bar{p}(t-s, 0) \bar{p}^2(s, 0) ds \\ &\geq \varsigma \bar{p}^2(t, 0) \int_0^t \bar{p}(t-s, 0) ds = \varsigma \bar{p}^2(t, 0) \int_0^t \bar{p}(u, 0) du, \end{aligned}$$

где последнее равенство получается заменой переменных $s = t - u$ под знаком интеграла. Тогда

$$\frac{m_2(t, 0, 0)}{m_1^2(t, 0, 0)} \geq \varsigma \int_0^t \bar{p}(u, 0) du.$$

Утверждение теоремы для $d = 1$ и $d = 2$ теперь вытекает из следствия 2.0.1. \square

Еще раз обратившись к следствию 2.0.1, мы получаем, что

$$G(0) = \int_0^\infty \bar{p}(t, 0) dt = \infty,$$

при $d = 1$ и $d = 2$, т.е. в этих размерностях случайное блуждание является возвратным.

Для второго факториального момента при $\beta = 0$ имеет место неравенство

$$\mathbb{E}N^2(t, y) \geq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} m_2(t, x, y),$$

где в силу представления (2.18)

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} m_2(t, x, y) &= \varsigma \int_0^t \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s, x, z) \right) p^2(t - s, z, y) ds \\ &= \varsigma \int_0^t \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p^2(s, z, y) ds = \varsigma \int_0^t \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} \bar{p}^2(s, z') ds. \end{aligned}$$

Здесь правая часть оценивается снизу величиной $\varsigma \int_0^t \bar{p}^2(s, 0) ds$, интеграл в которой при $d = 1$ с точностью до константы ведет себя как $\ln t$. Значит, $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} m_2(t, x, y) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. На физическом уровне последнее соотношение выражает проявление высокой нерегулярности поля $N(t, y)$.

Возвратность случайного блуждания с конечной дисперсией скачков может появляться только в измерениях $d = 1$ и $d = 2$ (см. [38]), в этом случае $G_0 = \infty$. Если, однако, процесс блуждания невозвратен, т.е. $G_0 < \infty$, то при дополнительном предположении $b_n < \vartheta \delta^n$ при всех $n \geq 2$ для некоторых $\vartheta > 0$ и $\delta \in (0, 1)$ поле $N(t, y)$ сходится по распределению к стационарному состоянию (статистическому равновесию), что будет показано в следующем разделе.

2.3.1 Предельное распределение поля частиц

Целью данного раздела является исследование распределения $N(t, y)$ при $t \rightarrow \infty$ в перечисленных ниже предположениях:

1. закон ветвления – критический: $\sum_{n=0}^{\infty} n b_n = 0$;
2. $b_n < \vartheta \delta^n$ при всех $n \geq 2$ для некоторых $\vartheta > 0$ и $\delta \in (0, 1)$;
3. блуждание, задаваемое оператором \mathcal{L} , невозвратно: $\int_0^{\infty} \bar{p}(t, 0) dt < \infty$.

Следующая техническая лемма будет необходима для доказательства основной теоремы данного раздела.

Лемма 2.2. Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда существует такая константа $C > 0$, что при любом $k \geq 1$ справедливы оценки:

$$m_k(t, x, y) \leq C^k k! p(t, x, y), \quad \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} m_k(t, x, y) \leq C^k k!.$$

Доказательство этой леммы опускаем – оно основывается на методах, представленных в работах [9] и [17].

Обозначим через

$$M_k(X) := \mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-k+1))$$

k -й факториальный момент случайной величины X , а через

$$\chi_n(X) := \frac{d^n}{dz^n} \ln \varphi_X(z)|_{z=1}, \quad \text{где } \varphi_X(z) = \mathbf{E}(z^X),$$

кумулянт случайной величины X , принимающей целочисленные значения. Как известно, см., напр., [9, Eq. (35)], кумулянты и факториальные моменты связаны следующим равенством:

$$\chi_n(X) = n! \sum \frac{(-1)^{j_1+\dots+j_n-1} (j_1+\dots+j_n-1)!}{j_1! \dots j_n!} \prod_{k=1}^n \left(\frac{M_k(X)}{k!} \right)^{j_k}, \quad (2.19)$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным целочисленным решениям j_1, j_2, \dots, j_n уравнения $j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n = n$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда

$$N(t, y) \xrightarrow{d} N(\infty, y) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Согласно представлению (2.19) и лемме 2.2

$$\chi_k(N(t, y)) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \chi_k(n(t, x, y)) = O(m_k(t, x, y)) = O(C^k k!),$$

$$M_k(N(t, y)) = O(\chi_k(N(t, y))) = O(C^k k!).$$

Во втором из этих равенств из ограниченности и монотонности функции $M_k(N(t, y))$ следует сходимость (см. лемму 2.4 из [17]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_k(N(t, y)) = M_k(N(\infty, y)), \quad k \geq 1. \quad (2.20)$$

Докажем, что предельные моменты $M_k(N(\infty, y)) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, однозначно определяют распределение случайной величины $N(\infty, y)$. С этой целью для $N(\infty, y)$ достаточно проверить выполнение условия Карлемана (см., напр, [44])

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{E}N^k(t, y))^{-1/(2k)} = \infty, \quad (2.21)$$

гарантирующего единственность определения вероятностного распределения своими моментами.

Обозначим через $S(n, k)$ числа Стирлинга второго рода (количество неупорядоченных разбиений n -элементного множества на k непустых подмножеств), определяемые равенством

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

и напомним определение полилогарифмической функции:

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}.$$

Выражая $\mathbf{E}N^k(t, y)$ через факториальные моменты и используя лемму 2.2, получим соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\mathbf{E}N^k(t, y))^{1/k}}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{j=1}^k S(k, j) M_j(N(t, y)) \right)^{1/k}}{k} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{j=1}^k S(k, j) C^j j! \right)^{1/k}}{k} \\ &\leq \frac{C}{k} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^k S(k, j) j! \right)^{1/k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C}{k} \left(\frac{Li_{-k}(0.5)}{2} \right)^{1/k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C(\Gamma(k+1))^{1/k} (\ln 2)^{(k+1)/k}}{k 2^{1/k}} = C, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{E}N^k(t, y))^{-1/(2k)} \geq \sqrt{\frac{C}{k}},$$

из которого, в свою очередь, вытекает выполнение условия Карлемана (2.21). Таким образом, распределение случайной величины $N(\infty, y)$ однозначно определяется своими моментами. В силу соотношения (2.20) по теореме Фреше-Шохата [20, 44] из выполнения условия Карлемана вытекает сходимость по распределению $N(t, y) \xrightarrow{d} N(\infty, y)$ при $t \rightarrow \infty$. \square

2.3.2 Первый момент численности субпопуляции

Как отмечалось выше, одним из примеров случайного блуждания, для которого выполняется условие (2.2), является простое симметричное случайное блуждание, т.е. случайное блуждание, определяемое условием (2.3). Это связано с тем, что для простого симметричного случайного блуждания можно получить точные асимптотические представления [28]. В силу (2.17) результаты, полученные в [28], могут быть переформулированы для средних численностей субпопуляций частиц $m_1(t, x, y) := m_1(t, z)$ при $\beta = 0$. Представленные результаты являются, по нашему мнению, весьма непростыми. Рассмотрим этот случай подробнее.

В этом случае для $m_1(t, z)$ имеет место, см., [28], следующее представление:

$$m_1(t, z) = \frac{e^{\sum_{j=1}^d \left(-\frac{z_j^2}{4\kappa t} + \frac{z_j^4}{192\kappa^3 t^3} - \frac{z_j^6}{2560\kappa^5 t^5} + \mathcal{O}\left(\frac{z_j^8}{t^7}\right) \right)}}{(4\pi \kappa t)^{\frac{d}{2}} \sqrt[4]{\prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{z_j^2}{4\kappa^2 t^2} \right)}} (1 + \nu_d(2\kappa t, z)), \quad (2.22)$$

где $\nu_d(2\kappa t, z) \rightarrow 0$ при $t^2 + z_j^2 \rightarrow \infty$. Для изучения зон перемежаемости поля частиц нам потребуется шкала изменения $m_1(t, z)$ при $t \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow \infty$, где z принимает значения порядка t^α , при различных значениях $\alpha \geq 0$. Из разложения (2.22) при фиксированном z вытекает асимптотическое равенство:

$$m_1(t, z) \sim (4\pi \kappa t)^{-\frac{d}{2}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

В силу (2.22) представление (2.23) справедливо не только для фиксированного z , но и для всех z , удовлетворяющих соотношению $|z| t^{-1/2} \rightarrow 0$. В частности, представление (2.23) справедливо при всех z , удовлетворяющих соотношению $|z| \leq c t^\alpha$, где $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Из представления (2.22) получаем, в частности, что в случае, когда $|z|$ имеет тот же порядок роста, что и $t^{1/2}$, т.е. при некоторых $c_1, c_2 > 0$, удовлетворяющих условию $c_1 t^{1/2} \leq |z| \leq c_2 t^{1/2}$, справедливо представление

$$m_1(t, z) \sim e^{-\frac{|z|^2}{4\kappa t}} (4\pi \kappa t)^{-\frac{d}{2}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

В силу (2.22) представление (2.24) справедливо не только при z , удовлетворяющем при некоторых $c_1, c_2 > 0$ условию $c_1 t^{1/2} \leq |z| \leq c_2 t^{1/2}$, но и при всех z , для которых $c_1 t^{1/2} \leq |z|$ и $\sum_{j=1}^d z_j^4 t^{-3} \rightarrow 0$, где второе соотношение равносильно условию $|z| t^{-3/4} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, представление (2.24) справедливо при всех z удовлетворяющих соотношениям $c_1 t^{1/2} \leq |z|$ и $|z| \leq c t^\alpha$, где $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4}$. Таким образом, соотношение (2.24) уже включает в себя случай умеренных уклонений случайного блуждания.

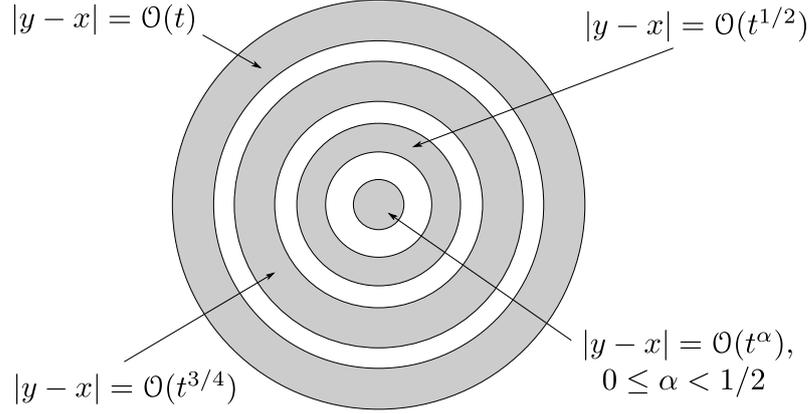


Рис. 2.1: Зоны различных типов асимптотик $m_1(t, z)$ при $|z| = |y - x|$.

В том случае, когда величина $|z|$ имеет тот же порядок роста, что и $t^{3/4}$, из (2.22) при условии $c_1 t^{3/4} \leq |z| \leq c_2 t^{3/4}$ с произвольными $c_1, c_2 > 0$ вытекает асимптотическое представление

$$m_1(t, z) \sim e^{-\frac{|z|^2}{4\pi t} + \sum_{j=1}^d \frac{(z_j)^4}{192\pi^3 t^3}} (4\pi \pi t)^{-\frac{d}{2}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Отметим, что найдется такая константа B , для которой при $|z| \leq B t^{3/4}$ справедливо неравенство

$$m_1(t, z) \geq C_d e^{-B_d \sqrt{t}} t^{-\frac{d}{2}}, \quad C_d > 0, \quad B_d > 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

где C_d и B_d некоторые константы, зависящие от размерности решетки. Снова, в силу (2.22) представление (2.25) справедливо не только при z , удовлетворяющем при некоторых $c_1, c_2 > 0$ и $t \rightarrow \infty$ условию $c_1 t^{3/4} \leq |z| \leq c_2 t^{3/4}$, но и при всех z удовлетворяющих соотношениям $c_1 t^{3/4} \leq |z|$ и $\sum_{j=1}^d z_j^6 t^{-5} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, из которых второе равносильно условию $|z| t^{-5/6} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, представление (2.25) справедливо при всех x и y удовлетворяющих соотношениям $c_1 t^{3/4} \leq |z|$ и $|z| \leq c t^\alpha$, где $\frac{3}{4} \leq \alpha < \frac{5}{6}$. Отметим также, что

в случае, когда $c_1 t^\alpha \leq |z| \leq c_2 t^\alpha$ и при этом $\frac{3}{4} < \alpha < \frac{5}{6}$, соотношение (2.26) перестает быть верным.

Наконец, для анализа ситуации, когда $|z|$ имеет тот же порядок роста как t , воспользуемся не представлением (2.22), а более точной формулой, из которой для некоторых $c_1, c_2 > 0$ при условии $c_1 t \leq |z| \leq c_2 t$, справедливо асимптотическое представление В силу (2.22) при $\alpha = 1$ получаем неравенство $m_1(t, z) \geq F_d e^{-K_d t} t^{-\frac{d}{2}}$ при некоторых $F_d, K_d > 0$.

2.3.3 Условное матожидание численности субпопуляции

Рассмотрим численности частиц в субпопуляциях

$$n(t, x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n(t, x, y),$$

они являются независимыми ветвящимися процессами.

Рассмотрим локальное математическое ожидание численности частиц в субпопуляции.

Лемма 2.3.

$$\mathbb{E}[n(t, x, y) | n(t, x) = k] = kp(t, x, y).$$

Доказательство. Доказательство по индукции по k . При $k = 1$

$$\mathbb{E}[n(t, x, y) | n(t, x) = 1] = p(t, x, y).$$

При $k > 1$ рассмотрим $\tau \leq t$ – момент первого деления, в результате которого образовалось несколько частиц, среди которых есть $m > 1$ частиц, каждая из которых является прародителем частицы из финальной субпопуляции $n(t, x)$. Обозначим количество потомков в финальной субпопуляции $n(t, x)$ обозначенных m частиц s_1, \dots, s_m . Заметим, что $\sum_{i=1}^m s_i = k$ и $s_i < k$, $i = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n(t, x, y) | n(t, x) = k] &= \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(\tau, x, w) \sum_{i=0}^m \mathbb{E}[n(t - \tau, w, y) | n(t - \tau, w) = s_i] \\ &= \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(\tau, x, w) \sum_{i=0}^m s_i p(t - \tau, w, y) \\ &= \sum_{i=0}^m s_i \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(\tau, x, w) p(t - \tau, w, y) = kp(t, x, y). \end{aligned}$$

□

Обозначим

$$\zeta := f''(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n,$$

в ([33] гл. 2, п. 2, теор. 3) доказано, что в критическом процессе при конечном ζ и $t \rightarrow \infty$

$$P(n(t, x) > 0) \sim \frac{2}{\zeta t}.$$

Теорема 2.3.

$$\mathbf{E}[n(t, x, y) | n(t, x) > 0] = \frac{\zeta t p(t, x, y)}{2}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[n(t, x, y) | n(t, x) > 0] &= \sum_{l=0}^{\infty} l P(n(t, x, y) = l | n(t, x) > 0) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l P(n(t, x, y) = l, n(t, x) > 0)}{P(n(t, x) > 0)} = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} l P(n(t, x, y) = l, n(t, x) > 0)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(n(t, x) = k)} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l P(n(t, x, y) = l, n(t, x) = k)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(n(t, x) = k)} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l P(n(t, x) = k) P(n(t, x, y) = l | n(t, x) = k)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(n(t, x) = k)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(n(t, x) = k) \mathbf{E}[n(t, x, y) | n(t, x) = k]}{\sum_{k=1}^{\infty} P(n(t, x) = k)} = \frac{p(t, x, y) \sum_{k=1}^{\infty} k P(n(t, x) = k)}{P(n(t, x) > 0)} \\ &= \frac{\zeta t p(t, x, y) \mathbf{E}n(t, x)}{2} = \frac{\zeta t p(t, x, y)}{2}. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим пространственную структуру поля частиц при условии суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания (2.2). Из [18] при $t \rightarrow \infty$ и $|x - y| = O(\sqrt{t})$ следует, что для некоторой зависящей от размерности решетки константы C_d

$$p(t, x, y) \sim \frac{C_d}{t^{d/2}}. \quad (2.27)$$

Следовательно, при $C'_d := \zeta C_d/2$, $t \rightarrow \infty$ и $|x - y| = O(\sqrt{t})$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n(t, x, y)|n(t, x) > 0] &\sim C'_1 \sqrt{t} && \text{при } d = 1, \\ \mathbb{E}[n(t, x, y)|n(t, x) > 0] &\sim C'_2 && \text{при } d = 2, \\ \mathbb{E}[n(t, x, y)|n(t, x) > 0] &\sim C'_d t^{1-d/2} && \text{при } d \geq 3. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3.4 Второй условный момент численности субпопуляции

Рассмотрим структуру субпопуляции $n(t, x, y)$, $y \in \mathbb{Z}^d$, для фиксированного y , большого t и $n(t, x) > 0$.

Определение 2.1. Совместная производящая функция процессов $n(t, x)$ и $n(t, x, y)$:

$$u(t, x, y; z, z_1) := \mathbb{E} z^{n(t, x)} z_1^{n(t, x, y)}. \quad (2.29)$$

Функция $u(t, x, y; z, z_1)$ является решением того же уравнения (2.10), но с другим критическим условием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x, y; z, z_1)}{\partial t} &= \mathcal{L}u(t, \cdot, y; z, z_1)(x) + f(u(t, x, y; z, z_1)), \\ u(0, x, y; z, z_1) &= \begin{cases} z, & x \neq y \\ z z_1, & x = y. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Используя дифференцирование по z_1 и подстановку $z_1 = 1$, можно вычислить или оценить условные моменты $\mathbb{E}[n(t, x, y)|n(t, x) > 0]$ и $\mathbb{E}[n(t, x, y)(n(t, x, y) - 1)|n(t, x) > 0]$. Введем факториальный k -ый совместный момент

$$\tilde{m}_k(t, x, y, z) := \left. \frac{\partial^k u(t, x, y; z, z_1)}{\partial z_1^k} \right|_{z_1=1} = \mathbb{E} z^{n(t, x)} \prod_{i=0}^{k-1} (n(t, x, y) - i).$$

Заметим, что $P\{n(t, x) = k\} = P\{n(t, 0) = k\}$ для любого $k \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$ в силу пространственной однородности закона ветвления. Введем производящую функцию ветвящегося процесса

$$\varphi(t, z) := \mathbb{E} z^{n(t, x)} = \mathbb{E} z^{n(t, 0)}.$$

Решая уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, z)}{\partial t} &= f(\varphi(t, z)), \\ \varphi(0, z) &= z, \end{aligned} \quad (2.31)$$

получим представление функции $\varphi(t, z)$ (в неявной форме).

Перейдем к рассмотрению первого факториального совместного момента

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{m}_1(t, x, y, z)}{\partial t} &= \mathcal{L}\tilde{m}_1(t, \cdot, z, y)(x) + \gamma(t, z)\tilde{m}_1(t, x, y, z), \\ \tilde{m}_1(0, x, z, y) &= z\delta_{xy},\end{aligned}\tag{2.32}$$

где $\gamma(t, z) := f'(u(t, x, y; z, 1)) = f'(\varphi(t, z))$.

Лемма 2.4. *Рассмотрим параболическую проблему с потенциалом, зависящую только от времени t :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} &= \mathcal{L}u(t, \cdot, y)(x) + \gamma(t)u(t, x, y), \\ u(0, x, y) &= \varphi(x, y).\end{aligned}$$

Тогда

$$u(t, x, y) = e^{\int_0^t \gamma(\tau) d\tau} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, w) \varphi(w, y).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$u(t, x, y) = e^{\int_0^t \gamma(\tau) d\tau} v(t, x, y),$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(t, x, y)}{\partial t} &= \mathcal{L}v(t, \cdot, y)(x), \\ v(0, x, y) &= \varphi(x, y).\end{aligned}$$

Применим преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{v}(t, \theta, y)}{\partial t} &= \hat{\mathcal{L}}(\theta)\hat{v}(t, \theta, y), \\ \hat{v}(0, \theta, y) &= \hat{\varphi}(\theta, y),\end{aligned}$$

решение:

$$\hat{v}(t, \theta, y) = e^{\hat{\mathcal{L}}(\theta)t} \hat{\varphi}(\theta, y).$$

Заметим, что

$$\hat{p}(t, \theta, 0) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, 0) e^{i\langle \theta, x \rangle} = e^{\hat{\mathcal{L}}(\theta)t},$$

получим

$$\begin{aligned}\hat{v}(t, \theta, y) &= \hat{p}(t, \theta, 0)\hat{\varphi}(\theta, y), \\ v(t, x, y) &= \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, w)\varphi(w, y), \\ u(t, x, y) &= e^{\int_0^t \gamma(\tau) d\tau} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, w)\varphi(w, y).\end{aligned}$$

□

Применяя лемму 2.4 к (2.32), находим первый факториальный совместный момент:

$$\tilde{m}_1(t, x, y, z) = zp(t, x, y)e^{\int_0^t \gamma(\tau, z) d\tau}. \quad (2.33)$$

Перейдем к рассмотрению второго факториального совместного момента

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{m}_2(t, x, y, z)}{\partial t} &= \mathcal{L}\tilde{m}_2(t, \cdot, y, z)(x) + \gamma(t, z)\tilde{m}_2(t, x, y, z) + \psi(t, z)\tilde{m}_1^2(t, x, y, z), \\ \tilde{m}_2(0, x, y, z) &= 0,\end{aligned} \quad (2.34)$$

где $\gamma(t, z) := f'(u_{z,1}(t, x, y)) = f'(\varphi(t, z))$ (тот же пространственно-независимый потенциал, что и в $\tilde{m}_1(t, x, y, z)$) и $\psi(t, z) := f''(u_{z,1}(t, x, y)) = f''(\varphi(t, z))$.

Лемма 2.5. *Рассмотрим неоднородное параболическое уравнение*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} &= \mathcal{L}u(t, \cdot, y)(x) + \gamma(t)u(t, x, y) + f(t, x, y), \\ u(0, x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Тогда замены $u(t, x, y) = e^{\int_0^t \gamma(\tau) d\tau} v(t, x, y)$ и $\tilde{f}(t, x, y) = e^{-\int_0^t \gamma(\tau) d\tau} f(t, x, y)$ приводят к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(t, x, y)}{\partial t} &= \mathcal{L}v(t, \cdot, y)(x) + \tilde{f}(t, x, y), \\ v(0, x, y) &= 0\end{aligned} \quad (2.35)$$

и его решение дается формулой Дюамеля

$$v(t, x, y) = \int_0^t \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, w)\tilde{f}(s, w, y) \right] ds. \quad (2.36)$$

Доказательство. Применив преобразование Фурье к (2.35), получим:

$$\frac{\partial \hat{v}(t, \theta, y)}{\partial t} = \hat{\mathcal{L}}(\theta) \hat{v}(t, \theta, y) + \hat{f}(t, \theta, y),$$

его решение:

$$\hat{v}(t, \theta, y) = e^{t\hat{\mathcal{L}}(\theta)} \int_0^t \hat{f}(s, \theta, y) e^{-s\hat{\mathcal{L}}(\theta)} ds = \int_0^t \hat{f}(s, \theta, y) e^{(t-s)\hat{\mathcal{L}}(\theta)} ds.$$

Заметим, что

$$\hat{p}(t-s, \theta, 0) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, 0) e^{i\langle \theta, x \rangle} = e^{(t-s)\hat{\mathcal{L}}(\theta)},$$

тогда

$$\begin{aligned} \hat{v}(t, \theta, y) &= \int_0^t \hat{p}(t-s, \theta, 0) \hat{f}(s, \theta, y) ds, \\ v(t, x, y) &= \int_0^t \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, w) \tilde{f}(s, w, y) \right] ds. \end{aligned}$$

□

Применяя лемму 2.5 к (2.34) и используя представление первого факториального совместного момента (2.33), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2(t, x, y, z) &= e^{\int_0^t \gamma(\tau, z) d\tau} \int_0^t \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, w) e^{-\int_0^s \gamma(\tau, z) d\tau} \psi(s, z) \tilde{m}_1^2(s, w, y, z) \right] ds \\ &= e^{\int_0^t \gamma(\tau, z) d\tau} \int_0^t \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, w) e^{-\int_0^s \gamma(\tau, z) d\tau} \psi(s, z) z^2 p^2(s, w, y) e^{2 \int_0^s \gamma(\tau, z) d\tau} \right] ds \\ &= e^{\int_0^t \gamma(\tau, z) d\tau} z^2 \int_0^t \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, w) p^2(s, w, y) \right] \psi(s, z) e^{\int_0^s \gamma(\tau, z) d\tau} ds. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Рассмотрим критический случай деления частицы на 2 потомков. Решив (2.31), получим

$$\varphi(t, z) = 1 - \frac{1-z}{\beta t + 1 - \beta t z},$$

откуда следует

$$P\{n(t, x) = 0\} = \varphi(t, z) \Big|_{z=0} = 1 - \frac{1}{\beta t + 1},$$

$$P\{n(t, x) = k\} = \frac{1}{k!} \frac{\partial \varphi^k(t, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0} = \frac{(\beta t)^{k-1}}{(\beta t + 1)^{k+1}} \text{ при } k \geq 1.$$

Найдем явные представления:

$$\gamma(t, z) = f'(\varphi(t, z)) = 2\beta(\varphi(t, z) - 1) = \frac{2\beta(z - 1)}{\beta t + 1 - \beta t z},$$

$$\exp\left\{\int_0^r \gamma(\tau, z) d\tau\right\} = (\beta r + 1 - \beta r z)^{-2},$$

$$\psi(t, z) = f''(\varphi(t, z)) = 2\beta.$$

Представление второго совместного факториального момента (2.37) принимает следующий вид:

$$\tilde{m}_2(t, x, y, z) = \frac{2\beta z^2}{(\beta t + 1 - \beta t z)^2} \int_0^t \frac{\left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, w) p^2(s, w, y) \right] ds}{(\beta s + 1 - \beta s z)^2}$$

Представим подынтегральное выражение посредством ряда Тейлора. Поскольку

$$(\beta t + 1 - \beta t z)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(\beta t)^k z^k}{(\beta t + 1)^{k+2}},$$

мы получим равенство

$$\frac{1}{(\beta t + 1 - \beta t z)^2} \cdot \frac{1}{(\beta s + 1 - \beta s z)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\sum_{l=0}^n (n-l+1)(l+1) \frac{(\beta t)^{n-l}}{(1+\beta t)^{n-l+2}} \cdot \frac{(\beta s)^l}{(1+\beta s)^{l+2}} \right].$$

Подставляя $m = n + 2$, получим

$$\tilde{m}_2(t, x, y, z) = 2\beta \int_0^t ds \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, w) p^2(s, w, y) \cdot \sum_{m=2}^{\infty} z^m \frac{(\beta t)^{m-1}}{(1+\beta t)^{m+1}} \right.$$

$$\left. \times \left[\sum_{l=0}^{m-2} (m-l+1)(l+1) \left(\frac{\beta t}{\beta t + 1} \right)^{-l-1} \frac{(\beta s)^l}{(\beta s + 1)^{l+2}} \right] \right].$$

Определение 2.2. *Второй условный момент*

$$M_2(t, x, y, k) := \mathbf{E}[n(t, x, y)(n(t, x, y) - 1) | n(t, x) = k].$$

$$\begin{aligned} M_2(t, x, y, k) &= 2\beta \int_0^t \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} \frac{p(t-s, x, w)p^2(s, w, y)}{(\beta s + 1)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{l=0}^{k-2} (k-l+1)(l+1) \left(\frac{\beta s}{\beta s + 1} \right)^l \left(\frac{\beta t + 1}{\beta t} \right)^{l+1} \right] ds. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Как и в случае первого момента, наиболее важны для нас значения $k = t + o(t)$. В дальнейшем, будем писать $f(x) \asymp g(x)$ или $g \asymp f$, если найдутся такие константы $c > 0$ и $C < \infty$, что $c \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq C$ при всех достаточно больших значениях x .

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие (2.2) суперэкспоненциально легких хвостов, тогда при $|x - y| = O(\sqrt{t})$ и $t \rightarrow \infty$ справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &\asymp t && \text{при } d = 1; \\ M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &\asymp \ln t && \text{при } d = 2; \\ M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &\asymp t^{1-d/2} && \text{при } d \geq 3. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Доказательство. В доказательстве C и C_d – обозначение для некоторых констант (в случае C_d зависящих от размерности решетки), не обязательно равных внутри одной последовательности и в различных последовательности равенств. Переходную вероятность $p(t, x, y)$ обозначим через $p_d(t, x, y)$, указывая таким образом на ее зависимость от размерности решетки. С учетом (2.7) получим оценку

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p_d(t-s, x, w)p_d^2(s, w, y) &\leq p_d(s, 0) \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p_d(t-s, x, w)p_d(s, w, y) \\ &= p_d(s, 0)p_d(t, x, y). \end{aligned}$$

Вследствие локальной предельной теоремы (см. [18]) при $s \geq 0$

$$p_d(s, 0) \leq \frac{C_d}{(s+1)^{d/2}}.$$

При $t \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$\left(\frac{\beta t + 1}{\beta t} \right)^l \leq C, \text{ если } l \leq k = t + o(t).$$

При $t \rightarrow \infty$ и $s \geq 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{t+o(t)-2} (t+o(t)-l+1)(l+1) \left(\frac{\beta s}{\beta s+1} \right)^l \leq (t+1) \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \left(\frac{\beta s}{\beta s+1} \right)^l \\ & = (t+1) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\beta s}{\beta s+1} \right)^{l+1} \right)' \frac{(\beta s+1)^2}{\beta} = (t+1)(\beta s+1)^2. \end{aligned}$$

Формула (2.38) вместе с четырьмя вышеупомянутыми неравенствами дает

$$\begin{aligned} M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &= \mathbf{E}[n(t, x, y)(n(t, x, y) - 1) | n(t, x) = t + o(t)] \\ &\leq C p_d(t, x, y) (t+1) \int_0^t \frac{(\beta s+1)^2 ds}{(s+1)^{d/2} (\beta s+1)^2} \\ &\leq \frac{C_d}{t^{d/2-1}} \int_0^t \frac{ds}{(s+1)^{d/2}}, \end{aligned}$$

откуда получаем верхнюю оценку

$$\begin{aligned} M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &\leq C_1 t && \text{при } d = 1; \\ M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &\leq C_2 \ln t && \text{при } d = 2; \\ M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &\leq C_d t^{1-d/2} && \text{при } d \geq 3 \left(= \frac{C_3}{\sqrt{t}} \text{ при } d = 3 \right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Из [18] при $t \rightarrow \infty$ и $|x - y| = O(\sqrt{t})$ получим

$$p_d(t, x, y) = \frac{C_d}{t^{d/2}} + o(t^{-d/2}). \tag{2.41}$$

Заметим, что при $s \rightarrow \infty$ количество элементов решетки, находящихся внутри шара радиусом $R\sqrt{s}$, $R > 0$, равно $C_d s^{d/2} + o(s^{d/2})$. Используя (2.41), при $s \rightarrow \infty$ получим

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d: |x| \leq R\sqrt{s}} p_d^2(s, 0, x) = \frac{C_d s^{d/2}}{s^d} + o(s^{-d/2}) = \frac{C_d}{s^{d/2}} + o(s^{-d/2}).$$

Вследствие локальной предельной теоремы (см. [18]) с учетом ограниченности и непрерывности функции $p_d(s, 0, 0)$ при $s \geq 0$ получим оценку

$$p_d(s, 0, 0) \geq \frac{C_d}{(s+1)^{d/2}}.$$

Заметим, что при $t \rightarrow \infty$, $0 < s < t/2$ и $|x - y| \leq R\sqrt{t}$, $R > 0$,

$$\{w \in \mathbb{Z}^d : |w - x| < R\sqrt{s}\} \subset \{w \in \mathbb{Z}^d : |w - y| < 3R\sqrt{t-s}\} \subset \{w \in \mathbb{Z}^d\},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p_d^2(s, x, w) p_d(t-s, w, y) &\geq \sum_{w \in \mathbb{Z}^d : |w-y| < 3R\sqrt{t-s}} p_d^2(s, x, w) p_d(t-s, w, y) \\ &\geq \frac{C_d}{(t-s)^{d/2}} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d : |w-y| < 3R\sqrt{t-s}} p_d^2(s, x, w) > \frac{C_d}{t^{d/2}} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d : |w-x| < R\sqrt{s}} p_d^2(s, x, w) \\ &\geq \frac{C_d}{t^{d/2}(s+1)^{d/2}}. \end{aligned}$$

Обозначим $q := \frac{s(\beta t + 1)}{t(\beta s + 1)} < 1$, тогда при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-2} (k-l+1)(l+1) \left(\frac{\beta s}{\beta s + 1} \right)^l \left(\frac{\beta t + 1}{\beta t} \right)^l &= \sum_{l=0}^{k-2} (-l^2 + kl + k + 1) q^l \\ &= \frac{(k+1)q^2 - (k-2)q - 1}{(q-1)^3} = \frac{tq}{(q-1)^2} = \frac{t^2 s (\beta t + 1) (\beta s + 1)}{(t-s)^2}. \end{aligned}$$

Применив неравенства к (2.38), получим при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &= \frac{2(\beta t + 1)}{t} \int_0^t \left[\sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p_d^2(s, x-w) p_d(t-s, w-y) \right. \\ &\times \sum_{l=0}^{k-2} (-l^2 + kl + k + 1) \left(\frac{s(\beta t + 1)}{t(\beta s + 1)} \right)^l \left. \right] \frac{ds}{(\beta s + 1)^2} \geq \frac{C_d (\beta t + 1)^2}{t^{d/2+1}} \\ &\times \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{s ds}{(\beta s + 1)^{d/2} (\beta s + 1)} \geq C_d t^{1-d/2} \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\beta s ds}{(\beta s + 1)^{d/2+1}} \\ &= C_d t^{1-d/2} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{ds}{(\beta s + 1)^{d/2}} - \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{ds}{(\beta s + 1)^{d/2+1}} \right), \end{aligned}$$

откуда получаем нижнюю оценку

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \geq C_1 \sqrt{t} \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\beta s ds}{(\beta s + 1) \sqrt{\beta s + 1}} = C_1 t + o(t),$$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \geq C_2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\beta s ds}{(\beta s + 1)^2} = C_2 \ln t + o(\ln t),$$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \geq C_d t^{1-d/2} \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\beta s ds}{(\beta s + 1)^{1+d/2}} = C_d t^{1-d/2} + o(t^{1-d/2}).$$

Объединив неравенства с (2.40), получим утверждение теоремы. \square

Перейдем к рассмотрению асимптотического поведения условного второго момента в случае распределения скачков блуждания с тяжелыми хвостами

$$a(z) = \frac{a_0(\dot{z})}{|z|^{d+\alpha}}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \dot{z} = \frac{z}{|z|}, \quad a_0(\dot{z}) > \delta > 0, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (2.42)$$

Теорема 2.5. Пусть выполнено условие (2.42), тогда при $t \rightarrow \infty$ и $|x - y| = O(t^{1/\alpha})$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \asymp t^{2-2/\alpha} \quad \text{при } d = 1 \text{ и } \alpha > 1,$$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \asymp \ln t \quad \text{при } d = 1 \text{ и } \alpha = 1,$$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \asymp t^{1-d/\alpha} \quad \text{при } d = 1 \text{ и } \alpha < 1 \text{ и при } d \geq 2.$$

Доказательство. В доказательстве C и C_d – обозначение для некоторых констант (в случае C_d зависящих от размерности решетки), не обязательно равных внутри одной последовательности и в различных последовательности равенств. Переходную вероятность $p(t, x, y)$ обозначим через $p_d(t, x, y)$, указывая таким образом на ее зависимость от размерности решетки.

Заметим, что количество элементов множества $\{x \in \mathbb{Z}^d : |x| \leq R s^{1/\alpha}\}$, находящихся внутри шара радиусом $R s^{1/\alpha}$, $R > 0$, при $s \rightarrow \infty$ равно $C_d s^{d/\alpha} + o(s^{d/\alpha})$. Согласно локальной ЦПТ [1, (6)] при $t \rightarrow \infty$, $|x - y| = O(t^{1/\alpha})$

$$p_d(t, x, y) \sim \frac{1}{t^{d/\alpha}} S\left(\frac{|x - y|}{t^{1/\alpha}}\right), \quad (2.43)$$

где $S(y) = S_{\alpha, a_0}(y)$ – плотность устойчивого d -мерного распределения. Отсюда следует, что при каждом d и $s \rightarrow \infty$

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d: |x| \leq R s^{1/\alpha}} p_d^2(s, 0, x) \asymp \frac{s^{d/\alpha}}{s^{2d/\alpha}} = s^{-d/\alpha} = (s + 1)^{-d/\alpha} + o(s^{-d/\alpha}).$$

С учетом непрерывности и ограниченности при $s \geq 0$

$$0 < \sum_{x \in \mathbb{Z}^d: |x| \leq Rs^{1/\alpha}} p_d^2(s, 0, x) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p_d^2(s, 0, x) \leq p_d(2s, 0, 0) < 1,$$

откуда при каждом d имеет место соотношение при $s \geq 0$

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d: |x| \leq Rs^{1/\alpha}} p_d^2(s, 0, x) \asymp (s+1)^{-d/\alpha}.$$

При $s \rightarrow \infty$ и $|x - y| = O(s^{1/\alpha})$

$$p_d(s, x, y) = C_d s^{-d/\alpha} + o(s^{-d/\alpha}) = (s+1)^{-d/\alpha} + o(s^{-d/\alpha}),$$

что вследствие непрерывности и ограниченности $p_d(s, x, y)$ дает при каждом d , $s \geq 0$

$$p_d(s, x, y) \asymp (s+1)^{-d/\alpha}.$$

Заметим, что при $t \rightarrow \infty$, $0 \leq s \leq t/2$, $|x - y| \leq Rt^{1/\alpha}$ и $R' = R + (1/2)^{1/\alpha}$

$$\{w \in \mathbb{Z}^d : |w - x| \leq Rs^{1/\alpha}\} \subset \{w \in \mathbb{Z}^d : |w - y| \leq R'(t - s)^{1/\alpha}\} \subset \{w \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Таким образом, мы получим нижнюю оценку при $t \rightarrow \infty$, $0 \leq s \leq t/2$

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p_d^2(s, x, w) p_d(t - s, w, y) &\geq \sum_{w \in \mathbb{Z}^d: |w - y| \leq R'(t - s)^{1/\alpha}} p_d^2(s, x, w) p_d(t - s, w, y) \\ &\geq \frac{C_d}{(t - s + 1)^{d/\alpha}} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d: |w - y| \leq R'(t - s)^{1/\alpha}} p_d^2(s, x, w) \geq \frac{C_d}{t^{d/\alpha}} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d: |w - x| \leq Rs^{1/\alpha}} p_d^2(s, x, w) \\ &\geq \frac{C_d}{t^{d/\alpha} (s + 1)^{d/\alpha}} \end{aligned}$$

и с учетом (2.7) верхнюю оценку при $t \rightarrow \infty$, $s \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p_d(t - s, x, w) p_d^2(s, w, y) &\leq p_d(s, 0, 0) \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} p_d(t - s, x, w) p_d(s, w, y) \\ &= p_d(s, 0, 0) p_d(t, x, y) \leq \frac{C_d}{t^{d/\alpha} (s + 1)^{d/\alpha}}. \end{aligned}$$

Обозначив $q := \frac{s(\beta t + 1)}{t(\beta s + 1)} < 1$, при $t \rightarrow \infty$, $k = t + o(t)$ и $0 \leq s \leq t/2$ мы получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-2} (k - l + 1)(l + 1) \left(\frac{\beta s}{\beta s + 1} \right)^l \left(\frac{\beta t + 1}{\beta t} \right)^l &= \sum_{l=0}^{k-2} (-l^2 + kl + k + 1) q^l \\ &= \frac{(1 - 5k)q^{k+1} + 3(k - 1)q^{k+2} + 2kq^k + (k + 3)q^2 - (k + 1)q}{(q - 1)^3 q} \\ &= \frac{k + o(k)}{(q - 1)^2} = \frac{t^3(\beta s + 1)^2 + o(t^3)}{(t - s)^2} \geq (\beta s + 1)^2 (t + o(t)). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\beta t + 1}{\beta t}\right)^l < e^{1/\beta} \text{ при } l < k = t + o(t),$$

при $s \geq 0$ и $t \rightarrow \infty$, $k = t + o(t)$ имеет место

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-2} (k-l+1)(l+1) \left(\frac{\beta s}{\beta s+1}\right)^l \left(\frac{\beta t+1}{\beta t}\right)^l &\leq e^{1/\beta} (k+1) \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \left(\frac{\beta s}{\beta s+1}\right)^l \\ &= C(\beta s+1)^2(t+o(t)). \end{aligned}$$

Применив полученные выше неравенства к (2.38), при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &> \frac{C_d}{t^{d/\alpha-1}} \int_0^{t/2} (s+1)^{-d/\alpha} ds, \\ M_2(t, x, y, k = t + o(t)) &< \frac{C_d}{t^{d/\alpha-1}} \int_0^t (s+1)^{-d/\alpha} ds, \end{aligned}$$

откуда при $d > \alpha$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \asymp t^{1-d/\alpha},$$

при $d = \alpha$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \asymp \ln t,$$

при $d < \alpha$

$$M_2(t, x, y, k = t + o(t)) \asymp t^{2-2d/\alpha}.$$

□

2.4 Надкритическая ветвящаяся среда

В данном разделе будет рассмотрено ВСБ с надкритическим ветвящимся процессом в каждой точке решетки, которое будем называть *ВСБ в надкритической ветвящейся среде*. Основным объектом исследования является структура поля частиц $n(t, x, y)$ при $t \rightarrow \infty$, порожденного одной частицей, находящейся в точке x при $t = 0$. Вначале для надкритической ветвящейся среды мы получим решения для первых двух моментов $m_1(t, x, y)$ и $m_2(t, x, y)$ случайной величины $n(t, x, y)$. Затем, на основе предельного поведения этих моментов, при различном совместном росте временной t и пространственной $|y - x|$ координат, будут так исследованы так называемые *зоны перемежаемости* поля частиц $n(t, x, y)$.

Определение 2.3. Зону поля частиц $n(t, x, y)$ на \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$, назовем перемежаемой, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_2(t, x, y)}{m_1^2(t, x, y)} = \infty,$$

где $|y - x| \in \Omega(t)$, $\Omega(t)$ некоторое неубывающее семейство множеств и $\cup_{t \geq 0} \Omega(t) = \mathbb{Z}^d$.

Будем предполагать, что в каждой точке решетки размножение и гибель частиц задается надкритическим ветвящимся процессом с одними и теми же интенсивностями деления частиц, т.е. в каждой точке решетки интенсивность источника ветвления равна $\beta > 0$. Мы уже установили ранее, что в силу (2.12) при $\beta > 0$ имеет место экспоненциальный рост первого момента

$$m_1(t, x, y) = p(t, x, y)e^{\beta t}. \quad (2.44)$$

Перейдем к исследованию второго момента. Напомним, что согласно (2.16)

$$m_2(t, x, y) = (\varsigma - \beta) \int_0^t \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} m_1(t - s, x, z) m_1^2(s, z, y) ds.$$

Начнем с рассмотрения зоны $|y - x| = O(\sqrt{t})$ в предположении (2.2) относительно интенсивностей $a(z)$ прыжков случайного блуждания. Далее в данном разделе мы будем использовать одно и то же обозначение C для целого ряда констант, которые не обязательно совпадают внутри одной последовательности равенств или в различных последовательности равенств. Надеемся, что такое упрощение в обозначениях не приведет к недоразумениям.

Теорема 2.6. Пусть $\beta > 0$. Тогда в случае выполнения условия (2.2) при $|x - y| = O(\sqrt{t})$ и $t \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{m_2(t, x, y)}{m_1^2(t, x, y)} \leq \frac{C}{\beta}.$$

Доказательство. Из [18, Eq. (4.7)] для $|x - y| = O(\sqrt{t})$ при $t \rightarrow \infty$ мы имеем

$$p(t, x, y) = \frac{e^{-(B^{-1}(x-y), (x-y))/(2t)}}{(2\pi t)^{d/2} \sqrt{\det B}} + o(t^{-d/2}), \quad (2.45)$$

где $B = (b^{(kj)})$ – матрица с элементами

$$b^{(kj)} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} z_k z_j a(z), \quad k, j = 1, \dots, d.$$

Заметим, что для всех $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $t > 0$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} p(t, x, y) &= \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{-i(\theta, y-x)} \hat{p}(t, \theta, 0) d\theta \\ &= \int_{[-\pi, \pi]^d} \cos \langle \theta, y-x \rangle \hat{p}(t, \theta, 0) d\theta \\ &\leq \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{p}(t, \theta, 0) d\theta = p(t, 0, 0) = \bar{p}(t, 0). \end{aligned}$$

Здесь, положив в (2.45) $x = y = 0$, получаем:

$$\bar{p}(t, 0) = p(t, 0, 0) = \frac{C}{t^{d/2}} + o(t^{-d/2}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.46)$$

и $0 < \bar{p}(t, 0) < 1$, то, немного изменив константу C , получаем

$$\bar{p}(t, 0) < \frac{C}{(t+1)^{d/2}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

При $|x-y| = O(\sqrt{t})$, где $t \rightarrow \infty$, и $\beta > 0$, подставив (2.44) в (2.14), получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{m_2(t, x, y)}{m_1^2(t, x, y)} &= \frac{(\varsigma - \beta) e^{\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, z) p^2(s, z, y) ds}{e^{2\beta t} p^2(t, x, y)} \\ &\leq \frac{(\varsigma - \beta) \int_0^t e^{\beta s} p(s, 0, 0) \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, z) p(s, z, y) ds}{e^{\beta t} p^2(t, x, y)}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p(t-s, x, z) p(s, z, y) \equiv p(t, x, y),$$

и поэтому

$$\frac{m_2(t, x, y)}{m_1^2(t, x, y)} \leq \frac{(\varsigma - \beta) \int_0^t e^{\beta s} p(s, 0, 0) p(t, x, y) ds}{e^{\beta t} p^2(t, x, y)} = \frac{(\varsigma - \beta) \int_0^t e^{\beta s} \bar{p}(s, 0) ds}{e^{\beta t} p(t, x, y)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int_0^t e^{\beta s} \bar{p}(s, 0) ds.$$

Произведя в нем замену переменных $s = \ln u$, получим

$$I(t) = \int_1^{e^t} \frac{u^\beta \bar{p}(\ln u, 0)}{u} du = \int_1^{e^t} u^{\beta-1} \bar{p}(\ln u, 0) du,$$

где в силу (2.46) для $\bar{p}(\ln t, 0)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\bar{p}(\ln t, 0) \sim C(\ln t)^{-d/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Как доказано в [38, лемма 5.1.1] и применено в [39, лемма 1], если непрерывная функция $\varphi(t) \geq 0$, $t \geq 0$, имеет асимптотику $\varphi(t) \sim \varphi_0 t^\mu (\ln t)^{\tilde{\mu}}$ при $t \rightarrow \infty$, причем $\int_0^\infty \varphi(s) ds = \infty$, т.е. $\mu > -1$ и $\tilde{\mu}$ — произвольно либо $\mu = -1$ и $\tilde{\mu} \geq -1$, то при $t \rightarrow \infty$ имеет место представление

$$\Phi(t) := \int_0^t \varphi(s) ds \sim \begin{cases} \varphi_0 \frac{1}{\mu+1} t^{\mu+1} (\ln t)^{\tilde{\mu}}, & \mu > -1, \\ \varphi_0 \frac{1}{\tilde{\mu}+1} (\ln t)^{\tilde{\mu}+1}, & \mu = -1, \tilde{\mu} > -1, \\ \varphi_0 \ln \ln t, & \mu = -1, \tilde{\mu} = -1. \end{cases}$$

Из этого представления, положив $\mu = \beta - 1 > -1$ и $\tilde{\mu} = -d/2$, получаем

$$I(t) \sim \frac{C}{\mu+1} (e^t)^{\mu+1} (\ln e^t)^{\tilde{\mu}} = \frac{C}{\beta} e^{\beta t} t^{-d/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ справедлива оценка сверху

$$\frac{m_2(t, x, y)}{m_1^2(t, x, y)} \leq \frac{C}{\beta} e^{\beta t} t^{-d/2} \frac{e^{-\beta t}}{p(t, x, y)} = \frac{C}{\beta} + o(1)$$

Последнее соотношение говорит о том, что для зоны $|x-y| = O(\sqrt{t})$, где $t \rightarrow \infty$, перемежаемости не выявлено. \square

Глава 3

Многотипные ветвящиеся случайные блуждания

Рассматривается непрерывное по времени симметричное ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке с частицами нескольких типов и марковским процессом ветвления в каждой точке решетки. Предполагается, что в начальный момент времени в каждой точке решетки находится по одной частице каждого из типов, в процессе ветвления частица может произвести произвольное число потомков каждого из типов. В случае возвратности случайного блуждания и критичности процесса ветвления исследуется эффект пространственной кластеризации популяции частиц.

3.1 Описание модели

Рассмотрим систему с частицами R типов. Пусть Ψ – множество R -мерных векторов $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_R)$ с целочисленными неотрицательными координатами. Транспорт по \mathbb{Z}^d частиц r -ого типа, $r = 1, \dots, R$, описывается случайным блужданием с генератором

$$(\mathcal{L}_r \psi)(x) = \kappa_r \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} [\psi(x+z) - \psi(x)] a_r(z), \quad (3.1)$$

действующим в каждом из пространств $l^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. Параметр $\kappa_r > 0$ – коэффициент диффузии. Без ограничения общности можно считать, что $a_r(z) \geq 0$ при $z \neq 0$ и $\sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a_r(z) = -a_r(0) = 1$. Кроме того, случайное блуждание предполагается симметричным: $a_r(z) = a_r(-z)$, и неразложимым: для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^k z_i$ и $a_r(z_i) > 0$ при $i = 1, \dots, k$.

Процесс размножения и гибели частиц предполагается марковским, превращения разных частиц в R типов являются независимыми, частицы эволюционируют независимо друг от друга. Обозначим интенсивность порождения частиц

типов $1, \dots, R$ частицей типа r через $b_r(\nu)$, где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_R)$. Введем производящие функции ветвления

$$F_r(z) := \sum_{\nu_1, \dots, \nu_R \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^R z_j^{\nu_j} b_r(\nu), \quad (3.2)$$

где $z = (z_1, \dots, z_R)$, где $0 \leq z_r \leq 1, r = 1, \dots, R$. Далее будем предполагать, что интенсивности таковы, что $\frac{\partial F_r(z)}{\partial z_r}, \frac{\partial^2 F_r(z)}{\partial z_r \partial z_j}, r, j = 1, \dots, R$, конечны в точке $z = (z_1, \dots, z_R) = (1, \dots, 1)$. Обозначим количество потомков j -ого типа в точке y в момент времени t от одной частицы r -ого типа, стартовавшей в точке x через $n_{rj}(t, x, y)$. Заметим, что $n_{rj}(t, x, y)$ является марковским процессом. Введем производящие функции

$$\Phi_r(t, x; y, z) := \mathbb{E} \prod_{j=1}^R z_j^{n_{rj}(t, x, y)}, \quad (3.3)$$

где $z = (z_1, \dots, z_R)$, где $0 \leq z_r \leq 1, r = 1, \dots, R$.

Лемма 3.1. *При каждом $z = (z_1, \dots, z_R)$, где $0 \leq z_r \leq 1, r = 1, \dots, R$, производящие функции (3.3) непрерывно дифференцируемы по переменной t равномерно по $x, y \in \mathbb{Z}^d$. Они удовлетворяют неравенствам $0 \leq \Phi_r(t, x; y, z) \leq 1$ и дифференциальным уравнениям*

$$\frac{\partial \Phi_r(t, x; y, z)}{\partial t} = \mathcal{L}_r \Phi_r(t, \cdot; y, z)(x) + \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \left(\prod_{j=1}^R \Phi_j^{\nu_j}(t, x; y, z) - \Phi_r(t, x; y, z) \right) \quad (3.4)$$

с начальными условиями

$$\Phi_r(0, x; y, z) = z_r^{\delta_y(x)}, \quad r = 1, \dots, R,$$

где $\delta_y(\cdot)$ – дискретная δ -функция Кронекера на \mathbb{Z}^d .

Доказательство. Из неотрицательности случайных величин $n_{rj}(t, x, y)$ и ограничений $0 \leq z_r \leq 1, r = 1, \dots, R$ следует неравенство $0 \leq \Phi_r(t, x; y, z) \leq 1$. При малом приращении dt с учетом возможных эволюций системы на интервале $[t; t + dt]$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \Phi_r(t + dt, x; y, z) &= (1 - \kappa_r dt - dt \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu)) \Phi_r(t, x; y, z) \\ &+ \kappa_r dt \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} \Phi_r(t, x + w; y, z) a_r(w) + dt \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \prod_{j=1}^R \Phi_j^{\nu_j}(t, x; y, z) + o(dt), \end{aligned}$$

где $e_r \in \Psi$ – вектор, у которого на r -м месте стоит 1, а на остальных 0. Путем предельного перехода при $dt \rightarrow 0$ отсюда можно получить обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial \Phi_r(t, x; y, z)}{\partial t} = \mathcal{L}_r \Phi_r(t, \cdot; y, z)(x) + \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \left(\prod_{j=1}^R \Phi_j^{\nu_j}(t, x; y, z) - \Phi_r(t, x; y, z) \right).$$

□

3.2 Первые моменты локальных численностей частиц

Определим первые моменты $m_{rj}(t, x; y) := \mathbf{E} n_{rj}(t, x, y)$, $r, j = 1, \dots, R$. Их можно получить, дифференцируя производящую функцию (3.3) по z_j и подставляя $z = (z_1, \dots, z_R) = (1, \dots, 1)$ согласно [38, Замечание 1.2.1] следующим образом:

$$m_{rj}(t, x; y) = \left. \frac{\partial \Phi_r(t, x; y, z)}{\partial z_j} \right|_{z=(1, \dots, 1)},$$

далее продифференцируем (3.4) по z_j с подстановкой $z = (z_1, \dots, z_R) = (1, \dots, 1)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Phi_r(t, x; y, z)}{\partial t \partial z_j} \right|_{z=(1, \dots, 1)} &= \left. \frac{\partial \mathcal{L}_r \Phi_r(t, \cdot; y, z)(x)}{\partial z_j} \right|_{z=(1, \dots, 1)} \\ &- \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \left. \frac{\partial \Phi_r(t, x; y, z)}{\partial z_j} \right|_{z=(1, \dots, 1)} \\ &+ \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \sum_{r=1}^R \left(\nu_r \frac{\partial \Phi_r(t, x; y, z)}{\partial z_j} \prod_{k=1}^R \Phi_k^{\nu_k - \delta_{kr}}(t, x; y, z) \right) \Big|_{z=(1, \dots, 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{rj}(t, x; y)}{\partial t} &= \mathcal{L}_r m_{rj}(t, \cdot; y)(x) - \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) m_{rj}(t, x; y) \\ &+ \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \sum_{r=1}^R \nu_r m_{rj}(t, x; y), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$m_{rj}(0, x; y) = \delta_y(x) \text{ при } r = j,$$

$$m_{rj}(0, x; y) = 0 \text{ при } r \neq j.$$

Введем преобразование Фурье:

$$\hat{\psi}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \psi(x) e^{i(\theta, x)}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d,$$

и обратное преобразование Фурье

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{\psi}(\theta) e^{-i(\theta, x)} d\theta.$$

Применим преобразование Фурье к переходным интенсивностям и получим

$$\begin{aligned} \hat{a}_r(\theta) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} a_r(z) e^{i(\theta, z)} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a_r(z) e^{i(\theta, z)} + a_r(0) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a_r(z) e^{i(\theta, z)} - \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a_r(z). \end{aligned}$$

Преобразование Фурье оператора (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}_r \psi}(\theta) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(\theta, x)} \mathcal{L}_r \psi(x) = \kappa_r \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(\theta, x)} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} [\psi(x+z) - \psi(x)] a_r(z) \\ &= \kappa_r \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \psi(x+z) e^{i(\theta, x+z)} \right) a_r(z) e^{i(\theta, -z)} \\ &\quad - \kappa_r \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \psi(x) e^{i(\theta, x)} \right) a_r(z) \\ &= \kappa_r \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a_r(z) e^{i(\theta, z)} - \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} a_r(z) \right) \hat{\psi}(\theta) = \hat{\mathcal{L}}_r(\theta) \hat{\psi}(\theta), \end{aligned}$$

где

$$\hat{\mathcal{L}}_r(\theta) = \kappa_r \hat{a}_r(\theta).$$

Выполним преобразование Фурье для (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{m}_{rj}(t, \theta; y)}{\partial t} &= \hat{\mathcal{L}}_r(\theta) \hat{m}_{rj}(t, \theta; y) - \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \hat{m}_{rj}(t, \theta; y) \\ &\quad + \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) \sum_{r=1}^R \nu_r \hat{m}_{rj}(t, \theta; y). \end{aligned}$$

Обозначим матрицы $M(t, x; y) = (m_{rj}(t, x; y))$, $\hat{M}(t, \theta; y) = (\hat{m}_{rj}(t, \theta; y))$ и $Q(\theta) = (q_{rj}(\theta))$, где $r, j = 1, \dots, R$,

$$q_{rj}(\theta) = \sum_{\nu \in \Psi: \nu \neq e_r} b_r(\nu) (\nu_j - 1) + \hat{\mathcal{L}}_r(\theta).$$

Уравнение может быть переписано в более компактном виде. Таким образом, получена задача Коши для однородной линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{M}(t, \theta; y)}{\partial t} &= Q(\theta) \hat{M}(t, \theta; y), \\ \hat{M}(0, \theta; y) &= e^{i\langle \theta, y \rangle} I.\end{aligned}$$

Ее решение принимает вид

$$\hat{M}(t, \theta; y) = e^{Q(\theta)t} e^{i\langle \theta, y \rangle}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим

$$M(t, x; y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{Q(\theta)t} e^{-i\langle \theta, x-y \rangle} d\theta.$$

3.3 Критическая ветвящаяся среда

Обозначим матрицу производных производящих функций ветвления (3.2) через $D = (d_{rj})$, где

$$d_{rj} := \left. \frac{\partial F_r(z)}{\partial z_j} \right|_{z=(1, \dots, 1)}, \quad r, j = 1, \dots, R;$$

вторые факториальные моменты

$$b_{rjk} := \left. \frac{\partial^2 F_r(z)}{\partial z_j \partial z_k} \right|_{z=(1, \dots, 1)}, \quad r, j, k = 1, \dots, R.$$

Напомним, что в силу предположения на интенсивности, первые и вторые факториальные моменты конечно. В силу идентичности процессов ветвления в каждой точке решетки, $\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_{rj}(t, x, y)$ идентичны для всех $x \in \mathbb{Z}^d$. Обозначим матрицу $K(t) = (k_{rj}(t))$,

$$k_{rj}(t) := \mathbb{E} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_{rj}(t, x, y), \quad r, j = 1, \dots, R. \quad (3.6)$$

Ветвящийся процесс, в котором все типы образуют один класс сообщающихся типов (для каждой пары типов r и j , $r, j = 1, \dots, R$, существует возможность перехода из r в j или из j в r), называется неразложимым [33, 4.6]. Из [33, Th.

4.6.2] следует, что ветвящийся процесс является неразложимым тогда и только тогда, когда матрица D неразложима. В таком случае в соответствии с [33, Th. 4.7.5] при $t \rightarrow \infty$

$$k_{rj}(t) = u^r v_j e^{ht} + o(e^{h_1 t}), \quad (3.7)$$

где $h_1 < h$, h – Перронов корень (старшее собственное значение) матрицы D , u^r и v_j – компоненты соответствующих h правого и левого собственных векторов. В [33] неразложимый ветвящийся процесс называется критическим, если $h = 0$ и

$$\sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^R \sum_{k=1}^R v_r b_{rjk} u^j u^k > 0.$$

Пусть $n_r(t, x)$ – число частиц в субпопуляции в момент времени t , являющихся прямыми и непрямыми потомками частицы r -ого типа, которая была в положении x в начальный момент времени, тогда

$$n_r(t, x) = \sum_{j=1}^R \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y). \quad (3.8)$$

Мы рассматриваем критический неразложимый процесс ветвления. Из [33, Th. 6.3.4] следует, что при конечности b_{rjk} и $t \rightarrow \infty$ вероятность невырождения субпопуляции из любой $x \in \mathbb{Z}^d$ имеет следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n_r(t, x) > 0) &= \frac{c_r}{t} + o(1/t) \rightarrow 0, \\ \mathbb{P}(n_r(t, x) = 0) &= 1 - \frac{c_r}{t} + o(1/t) \rightarrow 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где c_r – константа.

Перейдем к оценке математического ожидания численности субпопуляции при условии ее невырождения.

Теорема 3.1. *В ВСБ при условии неразложимости процесса ветвления в каждой точке решетки для каждого n_{rj} , $r, j = 1, \dots, R$, существует константа C_{rj} , такая что при $t \rightarrow \infty$ имеет место равенство*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \middle| n_r(t, x) > 0\right) = C_{rj} t + o(t). \quad (3.10)$$

Доказательство. По определению условного математического ожидания

$$\mathbb{E}\left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \middle| n_r(t, x) > 0\right) = \frac{\mathbb{E}\left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \mathbb{I}\{n_r(t, x) > 0\}\right)}{\mathbb{P}(n_r(t, x) > 0)}, \quad (3.11)$$

где $\mathbb{I}\{A\}$ – индикатор множества A . Заметим, что из (3.8) следует, что если $n_r(t, x) = 0$, то $\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) = 0$ при $j = 1, \dots, R$. Тогда в силу аддитивности математического ожидания имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) &= \mathbb{E} \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) (\mathbb{I}\{n_r(t, x) > 0\} + \mathbb{I}\{n_r(t, x) = 0\}) \right) \\ &= \mathbb{E} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \mathbb{I}\{n_r(t, x) > 0\} \\ &\quad + \mathbb{E} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \mathbb{I}\{n_r(t, x) = 0\} \\ &= \mathbb{E} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \mathbb{I}\{n_r(t, x) > 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (3.6) и предыдущего равенства получаем

$$k_{rj}(t) = \mathbb{E} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) = \mathbb{E} \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \Big| n_r(t, x) > 0 \right) \mathbb{P}(n_r(t, x) > 0).$$

Подставляя $h = 0$ в (3.7), получаем $k_{rj}(t) = u^r v_j + o(1)$, откуда, обозначая константу $C_{rj} := \frac{u^r v_j}{c_r}$ и используя (3.9), получим при $t \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} n_{rj}(t, x, y) \Big| n_r(t, x) > 0 \right) = \frac{u^r v_j + o(1)}{c_r/t + o(1/t)} = C_{rj} t + o(t). \quad (3.12)$$

В силу (3.9) при $t \rightarrow \infty$ вероятность вырождения субпопуляции $\mathbb{P}(n_r(t, x) = 0)$ стремится к 1. В то же время в силу (3.12) те субпопуляции, которые не вырождены, имеют линейный рост при $t \rightarrow \infty$. \square

3.3.1 Пространственная кластеризация частиц в размерностях $d = 1, 2$

В данном разделе будет объяснен эффект кластеризации частиц (в случае неразложимого критического процесса ветвления в каждой точке) при условии суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания: для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $r = 1, \dots, R$,

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} e^{\langle \lambda, z \rangle} a_r(z) < \infty. \quad (3.13)$$

Пусть в момент времени $t = 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ находится одна частица типа $r \in \{1, \dots, R\}$. Согласно аксиоматике из [24, гл. III, §2], вероятности $p_r(h, x, y)$

перехода частицы, находящейся в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, в произвольную точку $y \in \mathbb{Z}^d$ за малое время h можно представить в виде

$$\begin{aligned} p_r(h, x, y) &= a_r(x, y)h + o(h), \\ p_r(h, x, x) &= 1 + a_r(x, x)h + o(h). \end{aligned}$$

В соответствии с [24, гл. III] переходные вероятности удовлетворяют обратным уравнениям Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_r(t, x, y)}{\partial t} = \mathcal{L}_r p_r(t, x, y); \\ p_r(0, x, y) = \delta_x(y). \end{cases}$$

Заметим, что $p_r(t, x, y) = p_r(t, x - y, 0)$. Пусть $x - y = s$, из [18, (4.7)] имеем для $s = O(\sqrt{t})$

$$p_r(t, 0, s) = \frac{e^{-(U_r^{-1}s, s)/(2t)}}{(2\pi t)^{d/2} \sqrt{\det U_r}} + o(t^{-d/2}),$$

где матрица $U_r = (u_{r,i,j})$, $r = 1, \dots, R$, $i, j = 1, \dots, d$, имеет элементы

$$u_{r,i,j} = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} z_i z_j a_r(z).$$

Для $d = 1$, обозначая $u_{r,1,1}$ через u_r , получим

$$p_r(t, 0, s) = \frac{e^{-s^2/(2u_r t)}}{\sqrt{2\pi u_r t}} + o(1/\sqrt{t})$$

Рассмотрим $\sum_{y: |y-x| < C\sqrt{t}} p_r(t, x, y) = \sum_{|s| < C\sqrt{t}} p_r(t, 0, s)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} p_r(t, 0, s) &= p_r(t, 0, 0) + 2 \sum_{s \in \mathbb{N}, s < C\sqrt{t}} p_r(t, 0, s) \\ &> p_r(t, 0, 0) + 2 \int_1^{C\sqrt{t}} \frac{e^{-\tau^2/(2u_r t)} d\tau}{\sqrt{2\pi u_r t}} + o(1) = \int_{-C\sqrt{t}}^{C\sqrt{t}} \frac{e^{-\tau^2/(2u_r t)} d\tau}{\sqrt{2\pi u_r t}} + o(1). \end{aligned}$$

Заметим, что случайная величина с функцией плотности

$$f(\tau) = \frac{e^{-\tau^2/(2u_r t)}}{\sqrt{2\pi u_r t}}$$

имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $u_r t$. Следовательно, выбирая постоянную C , получаем

$$\int_{-C\sqrt{t}}^{C\sqrt{t}} \frac{e^{-\tau^2/(2u_r t)} d\tau}{\sqrt{2\pi u_r t}}$$

сколь угодно близким к 1. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$:

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} p_r(t, x, y) > 1 - \varepsilon. \quad (3.14)$$

Для $d = 2$

$$p_r(t, 0, s) = \frac{e^{-(U_r^{-1}s, s)/(2t)}}{2\pi t \sqrt{\det U_r}} + o(1/t).$$

Поскольку для любых $x, y \in \mathbb{Z}^2$ и $t > 0$ верно

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} p_r(t, x, y) = \sum_{|s| < C\sqrt{t}} p_r(t, 0, s),$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{|s| < C\sqrt{t}} p_r(t, 0, s) &= p_r(t, 0, 0) + 4 \sum_{s_1 \in \mathbb{N}, s_2 \in \mathbb{Z}_+, \sqrt{s_1^2 + s_2^2} < C\sqrt{t}} p_r(t, 0, s) \\ &> p_r(t, 0, 0) + 4 \int_{\tau_1 \geq 1, \tau_2 \geq 0, \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} < C\sqrt{t}} \frac{e^{-(U_r^{-1}\tau, \tau)/(2t)} d\tau}{2\pi t \sqrt{\det U_r}} + o(1) \\ &= \int_{-C\sqrt{t}}^{C\sqrt{t}} \frac{e^{-(U_r^{-1}\tau, \tau)/(2t)} d\tau}{2\pi t \sqrt{\det U_r}} + o(1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Заметим, что двумерная случайная величина с функцией плотности

$$f(\tau) = \frac{e^{-(U_r^{-1}\tau, \tau)/(2t)}}{2\pi t \sqrt{\det U_r}}$$

имеет двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $(0, 0)$ и ковариационной матрицей $U_r t$.

Следовательно, выбирая постоянную C , можем получить

$$\int_{-C\sqrt{t}}^{C\sqrt{t}} \frac{e^{-(U_r^{-1}\tau, \tau)/(2t)} d\tau}{2\pi t \sqrt{\det U_r}}$$

сколь угодно близким к 1. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$:

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} p_r(t, x, y) > 1 - \varepsilon. \quad (3.16)$$

вероятности $p_r(h, x, y)$ перехода частицы, находящейся в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, в произвольную точку $y \in \mathbb{Z}^d$

Рассмотрим частицу типа $r \in \{1, \dots, R\}$, которая в момент времени t находится в точке $y \in \mathbb{Z}^d$. Ее историю вместе с историей предков можно проследить от начального времени вплоть до времени t . Процесс переключения типов можно представить в виде последовательности интервалов $\tau = \{\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \dots, \tau_{(K+1)R} \geq 0\}$, где K – количество переключений с одного типа на другой, $\sum_{r=1}^{(K+1)R} \tau_r = t$. Обозначим вероятность для частицы, которая стартовала из точки x и прошла процесс переключения типов τ , в момент времени t оказаться в точке y через $p(\tau, x, y)$. Обозначив $x = x_1$ и $y = x_{(K+1)R+1}$, напомним уравнение Колмогорова-Чепмена:

$$p(\tau, x, y) = \sum_{\substack{x_i \in \mathbb{Z}^d \\ 2 \leq i \leq (K+1)R}} \prod_{k=0}^K \prod_{r=1}^R p_r(\tau_{kR+r}, x_{kR+r}, x_{kR+r+1}).$$

В описанных предположениях верна следующая лемма.

Лемма 3.2. *Для некоторой последовательности интервалов смен типов частиц τ рассмотрим общее время t_r , проведенное частицей и ее предками в каждом из $r \in \{1, \dots, R\}$ состояний. Имеет место следующее представление:*

$$p(\tau, x, y) = \sum_{\substack{x_i \in \mathbb{Z}^d \\ 1 \leq i \leq R}} \prod_{r=1}^R p_r(t_r, x_r, x_{r+1}), \quad \text{где } x_1 = x, \quad x_{R+1} = y.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $p(\tau, x, y)$, в котором присутствует $(K+1)R$ множителей. Пусть N – номер последнего множителя. Проведем преобразование, объединяющее множитель под номером N с множителем под номером $N - R$. Обозначим $\tilde{x}_r = x_r + x_{N+1} - x_N$ для $r > N - R$, $\tilde{x}_r = x_i$ для

$r \leq N - R$. Перейдем к преобразованию:

$$\begin{aligned}
p(\tau, x, y) &= \sum_{\substack{x_n \in \mathbb{Z}^d \\ 2 \leq n \leq N}} \prod_{k=0}^{K-1} \prod_{r=1}^R p_r(\tau_{kR+r}, x_{kR+r}, x_{kR+r+1}) \\
&= \sum_{\substack{\tilde{x}_n \in \mathbb{Z}^d \\ 2 \leq n \leq N-1}} \prod_{k=0}^{K-1} \prod_{r=1}^R p_r(\tau_{kR+r}, \tilde{x}_{kR+r}, \tilde{x}_{kR+r+1}) \\
&\quad * \prod_{r=1}^{R-1} p_r(\tau_{KR+r}, \tilde{x}_{KR+r}, \tilde{x}_{KR+r+1}) \\
&= p(\tau_1, \dots, \tau_{N-R} + \tau_N, \dots, \tau_{N-1}, x, y).
\end{aligned}$$

Далее, производя указанное преобразование, то есть перемножение последнего множителя со стоящим на R позиций впереди него, ещё $KR - 1$ раз, получим утверждение леммы. \square

Введем понятие кластера. На одномерной решетке \mathbb{Z} назовем кластером группу потомков частиц типа r , находящихся друг от друга на расстоянии не большем $O(\sqrt{t})$. На двумерной решетке \mathbb{Z}^2 назовем вырожденным кластером квадрат со сторонами $O(\sqrt{t \times \ln t})$, внутри которого отсутствуют потомки частиц типа r . Имеет место следующая теорема о кластеризации в пространствах размерностей $d = 1, 2$ при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 3.2. *Для $d = 1$ вероятность, что кластеры размера $O(\sqrt{t})$ находятся на расстоянии не менее $O(t^{2/3})$ стремится к 1 при $t \rightarrow \infty$. Для $d = 2$ и c_r из (3.9) вероятность нахождения внутри квадрата со стороной $O(\sqrt{t \times \ln t \times t^{c_r+1}})$ квадрата со стороной $O(\sqrt{t \times \ln t})$ без частиц типа r стремится к 1 при $t \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим $t = \sum_{r=1, \dots, R} t_r$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда из утверждений (3.14) и (3.16) для $d = 1$ и $d = 2$ соответственно при $t_r \rightarrow \infty$ получим, что $\forall \varepsilon > 0$ существует константа $C > 0$:

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} p_r(t_r, x, y) > \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t_r}}} p_r(t_r, x, y) > 1 - \varepsilon,$$

и при $t_r < \infty$ получим:

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} p_r(t_r, x, y) = 1.$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \tau : \sum_{r=1}^N \tau_r = t$, существует константа $C > 0$:

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} p(\tau, x, y) = \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x| < C\sqrt{t}}} \prod_{r=1}^R p_r(t_r, x_r, x_{r+1}) > (1 - \varepsilon)^R. \quad (3.17)$$

Для $d = 1$ рассмотрим начальную позицию частицы типа r , субпопуляция которой не выродилась к моменту времени $t \rightarrow \infty$, далее движемся вдоль прямой в поисках позиции старта другой невыродившейся субпопуляции. Поскольку вероятность невырождения субпопуляции, стартовавшей из частицы типа r , равно $c_r/t + o(1/t)$, то число выродившихся субпопуляций до нахождения первой невыродившейся имеет геометрическое распределение. Другими словами, расстояние между начальными точками субпопуляций частиц типа r , которые не выродились к моменту $t \rightarrow \infty$, имеет геометрическое распределение со средним значением t/c_r (3.9). Предел вероятности нахождения старта из частицы типа r ближайшей невырожденной популяции на расстоянии, не превосходящем $t^{2/3}$, равен

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x=1}^{t^{2/3}} \left(1 - \frac{c_r}{t}\right)^x / t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{c_r}{t}\right)^{t^{2/3}}}{c_r} = 0.$$

В силу (3.17) невырожденные субпопуляции имеют частицы на расстоянии от начальной частицы не более $C\sqrt{t}$ с вероятностью $(1 - \varepsilon)^R$. Таким образом, кластеры частиц длиной $C\sqrt{t}$ разделены пустыми интервалами длины не менее $O(t^{2/3})$.

Для $d = 2$ рассмотрим квадраты со сторонами $A_{1,r} = \sqrt{t \times \ln t}$, $A_{2,r} = \sqrt{t \times \ln t \times t^{c_r+1}}$. Назовем квадрат вырожденным, если все стартовавшие с частиц типа r внутри него субпопуляции вырождены. Вероятность вырождения квадрата со стороной $A_{1,r}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{1,r} \text{ вырожденный}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c_r}{t}\right)^{t \ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-c_r \ln t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{1,r} \text{ невырожденный}) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - e^{-c_r \ln t}$$

Вероятность того, что все квадраты размера $A_{1,r}$ внутри $A_{2,r}$ невырожденные

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{все } A_{1,r} \text{ в } A_{2,r} \text{ невырожденные}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-c_r \ln t})^{t^{c_r+1}} = 0$$

Таким образом, доказано, что вероятность существования вырожденного квадрата со стороной $A_{1,r}$ внутри квадрата со стороной $A_{2,r}$ стремится к 1 при

$t \rightarrow \infty$. Невырожденные субпопуляции имеют частицы на расстоянии от исходной частицы порядка не более $\sqrt{t} \ll \sqrt{t \times \ln t}$. Следовательно, к моменту времени $t \rightarrow \infty$ получаем квадраты без частиц со сторонами $\sqrt{t \times \ln t}$ внутри квадратов со сторонами $\sqrt{t \times \ln t} \times t^{c_r+1}$.

Таким образом, доказано, что в размерностях $d = 1$ и $d = 2$ имеет место эффект кластеризации субпопуляций частиц. \square

3.3.2 Численное моделирование

Рассмотрим состояние системы как массив, элементами которого являются списки вида $[i, x, t_1, t_2]$, где i , $i = 1, 2, \dots, R$, характеризует тип частицы, $x = (x_1, \dots, x_d)$ - ее пространственную координату, t_1 - момент времени ее перехода в данную позицию (частица родился в этот момент времени в точке x или совершила скачок в этот момент времени в точку x), t_2 - это момент времени выхода частицы из позиции x (она умерла или выпрыгнула из x в этот момент времени). Напомним, что все события, связанные с воспроизводством потомства, включая перерождение из одного типа в другой, мы воспринимаем как смерть родительской частицы с рождением k и l потомков первого и второго типа соответственно.

Инициализация. Введем характеристики ВСБ, $i = 1, 2, \dots, R$:

1. d – размерность решетки;
2. R – массив, состоящий из конечного числа списков $[i, x, 0, 0]$, характеризующий типы i и позиции $x = (x_1, \dots, x_d)$ частиц в начальный момент времени;
3. \varkappa_i – коэффициент диффузии;
4. $A_i = (a_i(x, y))$ – матрица интенсивности случайного блуждания, через которую определяется генератор (3.1);
5. $\mu_i \geq 0$ – интенсивность смерти;
6. $\beta_i(k, l) \geq 0$ – интенсивность рождения;
7. $r_{ij} \geq 0$ – интенсивность перерождения из типа i в тип $j \neq i$;
8. $T > 0$ – продолжительность рассматриваемой эволюции.

Шаг алгоритма. Выберем один из элементов $[i, x, t_1, t_2]$ массива R такой, что $t_2 < T$. Частица проводит экспоненциальное время dt в текущей позиции x , после чего выполняет одно из следующих действий:

1. с вероятностью $\mu_i / (\varkappa_i + \mu_i + \sum_{k+l \geq 2} \beta_i(k, l) + r_i)$ умирает;
2. с вероятностью $\beta_i(k, l) / (\varkappa_i + \mu_i + \sum_{k+l \geq 2} \beta_i(k, l) + r_i)$ делится на $k + l$ частиц, тогда мы добавляем k списков $[1, x, t_2, t_2 + dt]$ и l списков $[2, x, t_2, t_2 + dt]$ в массив;
3. с вероятностью $\varkappa_i a(z) / (\varkappa_i + \mu_i + \sum_{k+l \geq 2} \beta_i(k, l) + r_i)$ совершает прыжок из позиции x в позицию $x + z \neq x$, тогда мы добавляем $[i, x, t_2, t_2 + dt]$ в массив;
4. с вероятностью $r_{ij} / (\varkappa_i + \mu_i + \sum_{k+l \geq 2} \beta_i(k, l) + r_{ij})$ перерождается в частицу типа j , тогда мы добавляем $[j, x, t_2, t_2 + dt]$ в массив.

Рассмотренная $[i, x, t_1, t_2]$ частица перемещается из массива R (процесс) в массив H (история).

Условие остановки. Шаги алгоритма выполняются до тех пор, пока в массиве R есть элементы $[i, x, t_1, t_2]$, такие что $t_2 < T$.

После завершения процесса вся история частиц в разных состояниях помещается в массивы R и H . Чтобы узнать количество, тип и пространственную конфигурацию частиц в момент времени t , мы выбираем те элементы $[i, x, t_1, t_2]$ массива H , для которых $t_1 \leq t < t_2$.

Анализ данных. После завершения процесса вся история частиц в разных состояниях находится в массивах R и H . Чтобы узнать количество, тип и пространственную конфигурацию частиц в момент времени t , мы выбираем те элементы $[i, x, t_1, t_2]$ массива H , для которых $t_1 \leq t < t_2$.

Моделирование. Пусть $d = 1$ и в начальный момент времени $t = 0$ существует 300 частиц первого типа на отрезке $[0, 300] \in \mathbb{Z}$. Случайное блуждание для частиц первого типа имеет интенсивности $a_1(z) = 1/2$ при $|z| = 1$ и $\varkappa_1 = 1$, для второго типа $a_2(z) = 1/6$ при $|z| = 1, 2, 3$ и $\varkappa_2 = 4$. На графике 3.1 представлены результаты моделирования с параметрами $\mu_1 = 0.25$, $\beta_1(2, 0) = 0.125$, $\beta_1(1, 1) = 0.125$, $\mu_2 = 0.375$, $\beta_2(0, 2) = 0.125$, $\beta_2(1, 1) = 0.25$, другие интенсивности рождения и смерти равны 0. Данный пример демонстрирует эффект кластеризации в случае критического закона ветвления.

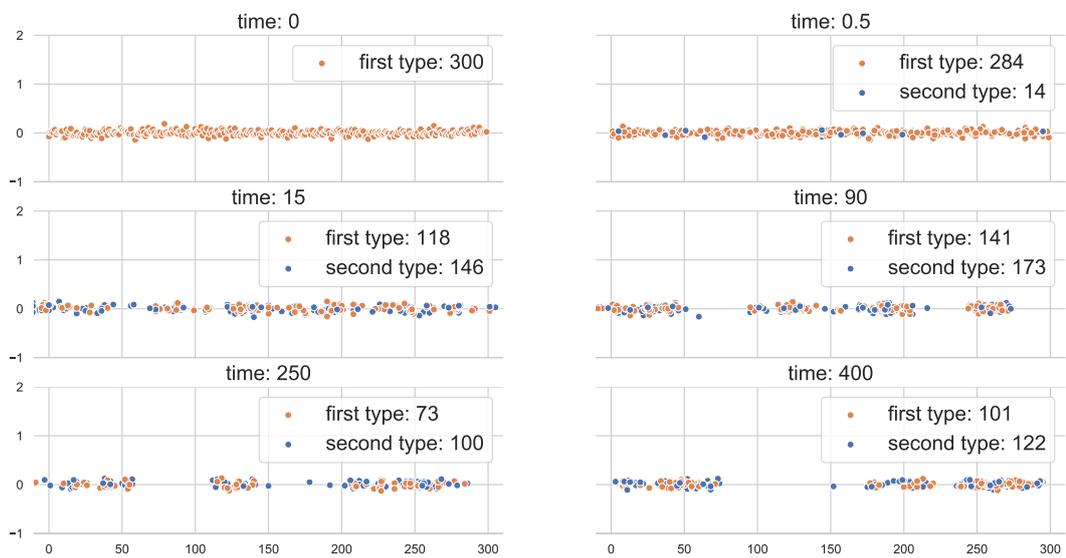


Рис. 3.1: Популяция частиц на \mathbb{Z}^1

Заключение

В диссертации изучались ВСБ с нарушением симметрии случайного блуждания в конечном числе точек решетки и знакопеременными интенсивностями источников. Для этого случая описаны фазовые переходы в надкритическом случае. Другим направлением исследований стало ВСБ с бесконечным количеством источников генерации частиц на решетке и бесконечным числом начальных частиц. Для случая критического ветвящегося процесса в каждой точке решетки при возвратном случайном блуждании и однородных начальных условиях описан эффект кластеризации частиц. Изучена структура популяции частиц для ВСБ в однородной среде. Переход к исследованию многотипных ВСБ и получение предельных теорем для популяций и субпопуляций частиц различных типов является новым направлением в теории стохастических процессов.

Основные результаты:

- доказана теорема о собственных значениях эволюционного оператора для ВСБ со знакопеременными источниками ветвления, находящимися в симплициальной конфигурации
- доказана теорема об экспоненциальном росте числа частиц без предположений о дисперсии скачков случайного блуждания для ВСБ со знакопеременными источниками и псевдо-источниками ветвления;
- доказана теорема о нерегулярности роста субпопуляций частиц в случае критического закона ветвления в каждой точке решетки с бесконечным числом начальных частиц;
- доказана теорема о наличии зоны регулярного роста моментов в предположении суперэкспоненциально легких хвостов случайного блуждания и надкритичности ветвящегося процесса в точках решетки;
- доказаны теоремы об асимптотике второго условного момента численности субпопуляции в случаях суперэкспоненциально легких и тяжелых хво-

стов случайного блуждания;

- доказана теорема об асимптотике численности субпопуляции частиц при условии ее невырождения для многотипного ВСБ с критическим ветвящимся процессом в каждой точке решетки;
- доказана теорема о нерегулярности предельного поведения поля частиц на одно- и двумерных решетках при условии конечности дисперсии скачков случайного блуждания, лежащего в основе процесса.

Литература

- [1] Agbor A., Molchanov S., Vainberg B. Global limit theorems on the convergence of multidimensional random walks to stable processes // *Stoch. Dyn.* 2015. Vol. 15, no. 3. P. 1550024, 14.
- [2] Antonenko E., Yarovaya E. On the number of positive eigenvalues of the evolutionary operator of branching random walk // *Branching processes and their applications*. Springer, [Cham], 2016. Vol. 219 of *Lect. Notes Stat.* P. 41–55.
- [3] Balashova D., Yarovaya E. Branching random walks applied to modeling of germinal center reaction // *Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress*. 2021.
- [4] Balelli I., Milišić V., Wainrib G. Random walks on binary strings applied to the somatic hypermutation of B-cells // *Math. Biosci.* 2018. Vol. 300. P. 168–186.
- [5] Balelli I., Milišić V., Wainrib G. Multi-type Galton-Watson processes with affinity-dependent selection applied to antibody affinity maturation // *Bull. Math. Biol.* 2019. Vol. 81, no. 3. P. 830–868.
- [6] Bulinskaya E. V. Complete classification of catalytic branching processes // *Theory Probab. Appl.* 2015. Vol. 59, no. 4. P. 545–566.
- [7] Chernousova E., Feng Y., Hryniv O. et al. Steady states of lattice population models with immigration // *Math. Popul. Stud.* 2021. Vol. 28, no. 2. P. 63–80.
- [8] Chernousova E., Hryniv O., Molchanov S. Population model with immigration in continuous space // *Math. Popul. Stud.* 2020. Vol. 27, no. 4. P. 199–215.
- [9] Chernousova E., Molchanov S. Steady state and intermittency in the critical branching random walk with arbitrary total number of offspring // *Math. Popul. Stud.* 2019. Vol. 26, no. 1. P. 47–63.

- [10] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg B. Continuous model for homopolymers // *J. Funct. Anal.* 2009. Vol. 256, no. 8. P. 2656–2696.
- [11] Gärtner J., Molchanov S. A. Parabolic problems for the Anderson model. I. Intermittency and related topics // *Comm. Math. Phys.* 1990. Vol. 132, no. 3. P. 613–655.
- [12] Gärtner J., Molchanov S. A. Parabolic problems for the Anderson model. II. Second-order asymptotics and structure of high peaks // *Probab. Theory Related Fields.* 1998. Vol. 111, no. 1. P. 17–55.
- [13] Getan A., Molchanov S., Vainberg B. Intermittency for branching walks with heavy tails // *Stoch. Dyn.* 2017. Vol. 17, no. 6. P. 1750044, 14.
- [14] Halmos P. R. A Hilbert space problem book. Second edition. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. Vol. 17 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. P. xvii+369. ISBN: 0-387-90685-1.
- [15] Kato T. Perturbation theory for linear operators. *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1995. P. xxii+619. ISBN: 3-540-58661-X. Reprint of the 1980 edition.
- [16] Makarova Yu., Han D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with immigration. Lyapunov stability // *Markov Process. Related Fields.* 2019. Vol. 25, no. 4. P. 683–708.
- [17] Molchanov S., Whitmeyer J. Stationary distributions in Kolmogorov-Petrovski-Piskunov-type models with an infinite number of particles // *Math. Popul. Stud.* 2017. Vol. 24, no. 3. P. 147–160.
- [18] Molchanov S. A., Yarovaya E. B. Large deviations for a symmetric branching random walk on a multidimensional lattice // *Tr. Mat. Inst. Steklova.* 2013. Vol. 282, no. *Vetvyashchiesya Protsessy, Sluchainye Bluzhdaniya, i Smezhnye Voprosy*. P. 195–211.
- [19] Shohat J. A., Tamarkin J. D. *The Problem of Moments*. American Mathematical Society Mathematical Surveys, Vol. I. American Mathematical Society, New York, 1943. P. xiv+140.

- [20] Shohat J. A., Tamarkin J. D. The Problem of Moments. American Mathematical Society Mathematical Surveys, Vol. I. American Mathematical Society, New York, 1943. P. xiv+140.
- [21] Yarovaya E. Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails // Methodol. Comput. Appl. Probab. 2017. Vol. 19, no. 4. P. 1151–1167.
- [22] Yarovaya E. B. Branching random walks with several sources // Math. Popul. Stud. 2013. Vol. 20, no. 1. P. 14–26.
- [23] Zel'dovich Ya. B., Molchanov S. A., Ruzmaïkin A. A., Sokoloff D. D. Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium // Mathematical physics reviews, Vol. 7. Harwood Academic Publ., Chur, 1988. Vol. 7 of Soviet Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev. P. 3–110.
- [24] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, Т. 2. М.: Наука, 1973.
- [25] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
- [26] Жижина Е. А., Минлос Р. А. Локальная предельная теорема для неоднородного случайного блуждания по решетке // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39, № 4. С. 513–529.
- [27] Минлос Р. А., Жижина Е. А. Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке // УМН. 1997. Т. 52, № 2(314). С. 87–100.
- [28] Молчанов С. А., Яровая Е. Б. Предельные теоремы для функции Грина решетчатого лапласиана при больших отклонениях случайного блуждания // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 6. С. 123–152.
- [29] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке \mathbb{Z}^d с периодическими источниками ветвления // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 466. С. 234–256. URL: <http://mi.mathnet.ru/zns1655>.

- [30] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Ветвящиеся случайные блуждания на \mathbb{Z}^d с периодически расположенными источниками ветвления // Теория вероятн. и ее примен. 2019. Т. 64, № 2. С. 283–307.
- [31] Рытова А. И., Яровая Е. Б. Моменты численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании с тяжелыми хвостами // УМН. 2019. Т. 74, № 6(450). С. 165–166.
- [32] Севастьянов Б. Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами // Теория вероятн. и примен. 1958. Т. 3, № 2. С. 121–136. URL: <http://mi.mathnet.ru/tvp4924>.
- [33] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. Наука, 1971.
- [34] Скороход А. В. Ветвящиеся диффузионные процессы // Теория вероятн. и ее примен. 1964.
- [35] Феллер У. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
- [36] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [37] Христолюбов И. И., Яровая Е. Б. Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности // Теория вероятн. и ее примен. 2019. Т. 64, № 3.
- [38] Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. ISBN: 978-5-211-05431-8.
- [39] Яровая Е. Б. Модели ветвящихся блужданий и их применение в теории надежности // Автоматика и телемеханика. 2010. Т. 7. С. 29–46.
- [40] Яровая Е. Б. Монотонность вероятности возвращения в источник в моделях ветвящихся случайных блужданий // Вестн. Моск. университета. Серия 1: математика, механика. 2010. № 2. С. 44–47.
- [41] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // Математические заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 123–140.

- [42] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 123–140.
- [43] Яровая Е. Б. Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения. 2017. Т. 62, № 3. С. 518–541.
- [44] Яровая Е. Б., Стоянов Й. Б., Костяшин К. К. Об условиях, при которых вероятностное распределение однозначно определяется своими моментами // Теория вероятн. и ее примен. 2019. Т. 64, № 4. С. 725–745.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

- [1] Балашова Д. М. Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными интенсивностями источников ветвления // Фундаментальная и прикладная математика. — 2020. — Т. 23, № 1. — С. 75–88.
Balashova D. M. Branching random walks with alternating sign intensities of branching sources // Fundamental and Applied Mathematics. — 2020. — Vol. 23, no. 1. — P. 75–88.
- [2] Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Structure of the particle population for a branching random walk with a critical reproduction law // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2021. — Vol. 23. — P. 85–102.
Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой и С. А. Молчанову, все результаты получены Д. М. Балашовой самостоятельно.
- [3] Yarovaya E., Balashova D., Khristolubov I. Branching walks with a finite set of branching sources and pseudo-sources // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. ICSM-5 2020. — 2021. — Vol. 371. — P. 144–163.
Д. М. Балашовой принадлежит обобщение результатов на знакопеременные источники (раздел 3, теорема 7).
- [4] Балашова Д. М., Яровая Е. Б. Структура популяции частиц для ветвящегося случайного блуждания в однородной среде // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. — 2022. — Т. 316. — С. 64–78.
Balashova D. M., Yarovaya E. B. Structure of the population of particles for a

branching random walk in a homogeneous environment // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2022. — Vol. 316. — P. 57–71.

Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой, все результаты получены Д. М. Балашовой самостоятельно.

- [5] I. Makarova I., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with two types of particles on multidimensional lattices // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 6. — P. 867.

Д. М. Балашовой принадлежат результаты разделов о кластеризации (раздел 5) и численном моделировании (раздел 7).

- [6] Балашова Д. М. Эффект кластеризации для многотипного ветвящегося случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения. — 2022. — Т. 67, № 3. — С. 443–455.

Статьи в трудах научных конференций

- [7] Balashova D. Numerical analysis of phase transitions in supercritical branching random walks // Proceedings of the International Conference Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications. — RUDN Moscow, 2017. — P. 674–677.

- [8] Balashova D. Simulation of branching random walks with different intensity of branching sources // Proceedings of the 62th World Statistics Congress of the International Statistical Institute, ISI2019. — 2019.

- [9] Balashova D., Makarova Y., Molchanov S., Yarovaya E. Clustering conditions in branching random walks // Proceedings of the international scientific conference. The 5th international conference on stochastic methods (ICSM-5). — 2020. — P. 24–28.

- [10] Makarova Y., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Branching random walks with two types of particles // Proceedings of the international scientific conference. The 5th international conference on stochastic methods (ICSM-5). — 2020. — P. 97–101.

В [9] и [10] Д. М. Балашовой принадлежат результаты о кластеризации.

- [11] Balashova D., Yarovaya E. Branching random walks applied to modeling of germinal center reaction // Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress. — 2021. — P. 1220–1223.
Постановки задач принадлежат Е. Б. Яровой, все результаты получены Д. М. Балашовой самостоятельно.
- Тезисы докладов в материалах научных конференций*
- [12] Балашова Д. М. Численный анализ фазовых переходов в надкритическом ветвящемся случайном блуждании // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов-2017. — Москва: Москва, 2017.
- [13] Balashova D. Phase transitions in supercritical branching random walks // Abstracts of the 9-th International Workshop on Applied Probability 18-21 June 2018, Budapest, Hungary. — Eotvos Lorand University Budapest, 2018.
- [14] Balashova D. Evolutionary operator for supercritical branching random walk with different branching sources // IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM 2018). — Vol. 1. — Москва: Москва, 2018.
- [15] Yarovaya E., Balashova D., Molchanov S. The formation of particle clusters in branching random walks on lattices // 10th International Workshop on Simulation and Statistics (workshop booklet). — Universitat Salzburg Salzburg, Austria, 2019. — P. 30–31.
- [16] Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E. Structure of the particle field for a branching random walk with a critical branching process at every point // Book of abstracts. Applied Stochastic Models and Data Analysis ASMDA 2019 and Demographics 2019. — 2019. — P. 27–27.
- [17] Makarova Y., Balashova D., Yarovaya E. Multi-type branching random walks on multidimensional lattices // Abstracts. 14th International Conference on Computational and Financial Econometrics and 13th International Conference on Computational and Methodological Statistics (EcoSta), 2020. — P. 149–149.
- [18] Balashova D. Structure of the particle field in branching walks with generation centers of particles at every lattice point // Book of abstracts. ASMDA 2021 and Demographics 2021 Workshop. — 2021. — P. 22–22.