МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Кабанова Любовь Александровна

Метод структурных функций в решении квазистатических задач об изгибе неоднородных упругих пластин

Специальность 1.1.8 —
Механика деформируемого твёрдого тела

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Горбачев Владимир Иванович

Москва — 2025

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Разработка и развитие аналитических методов исследования поведения неоднородных материалов является одной из значимых задач механики деформируемого твердого тела. Важная часть разработки метода – описание арсенала его возможностей: качественных свойств приближенных решений, построенных изучаемым методом, количественное сопоставление таких приближенных решений с известными решениями и изучение влияния параметров настройки метода на конечное приближение. Диссертация посвящена исследованию метода структурных функций в приложении к квазистатическим задачам изгиба неоднородных пластин. Данный метод, разработанный в работах В. И. Горбачева [1; 2], позволяет получать приближенные решения квазистатических задач теории упругости в перемещениях для тел произвольной неоднородности (в терминологии метода такое тело называется исходным). При этом используется решение задачи, поставленной для однородного тела идентичной исходному геометрии, называемого сопутствующим. В ходе изучения метода проверена эквивалентность двух существующих способов вычисления структурных функций.

Метод структурных функций изучается в приложении к решению квазистатической задачи о нагружении пластины, составленной из линейно-упругих слоев. Для нее были построены все необходимые соотношения метода и приближенные решения, полученные методом структурных функций первого и второго порядка. Рассмотрены три подхода разной точности к построению приближенных решений сопутствующей задачи и описаны качественные свойства приближенных решений исходной задачи, полученных с их использованием. При этом получены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Было проведено численное сравнение разных приближеных решений рассматриваемой задачи, полученных методом структурных функций с решением исходной задачи в трехмерной постановке по известному методу Пагано [3], с приближенными решениями исходной задачи, построенными в рамках известных приближенных моделей, основанных на кинематических гипотезах, а также – между собой. Приближения отличаются порядком метода структурных функций, выбором приближения решения сопутствующей задачи и упругих свойств сопутствующего тела.

Далее все упоминаемые пластины предполагаются жесткими – такими, что поперечные перемещения пластин по порядку меньше их толщин. Под слоистыми пластинами подразумеваются конструкции, неоднородные по толщине и составленные из выраженно разных элементов – слоев. Контакт слоев при этом всегда предполагается идеальным, то есть на границе слоев все компоненты вектора перемещений и поперечные напряжения считаются непрерывными.

Степень разработанности темы. В настоящее время разработаны варианты метода структурных функций для нахождения эффективных свойств неоднородных материалов, некоторых одномерных и двумерных постановок задач теории упругости [4—6]. При помощи этих вариантов метода построены приближенные решения некоторых одномерных и двумерных задач [7—9]. Анализ, проделанный авторами таких решений, показывает, что дальнейшее изучение возможностей метода структурных функций целесообразно, поэтому в данной работе исследуется вопрос применения метода структурных функций к решению трехмерной задачи теории упругости – впервые для задачи о приближенном вычислении поля перемещений. Кроме того, в данной работе исследуется влияние параметров метода структурных функций на качество конечных приближений: в работе [9] отмечено, что вопрос выбора упругих свойств сопутствующего тела остается открытым даже для задач меньшей размерности. В данной работе получены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Для построенных в диссертации приближений решения трехмерной задачи теории упругости также рассматривается вопрос выбора точности решения сопутствующей задачи и влияния последнего на качество конечного приближения. Задача же о нагружении линейно-упругой слоистой пластины является многократно исследованной в рамках самых разнообразных подходов, скромная которых приведена в обзоре литературы, что делает её удобным примером для изучения возможностей исследуемого метода.

Целью данной работы является:

- построение приближенных решений задачи о нагружении неоднородной в поперечном направлении сильно ортотропной прямоугольной пластины при помощи метода структурных функций (МСФ)
  - различных порядков,
  - на основе различных приближенных решений вспомогательной (сопутствующей) задачи;

– сопоставление для набора тестовых задач построенных приближенных решений между собой, с известными классическими приближениями, с аналитическим и конечноэлементными решениями аналогичной задачи в трехмерной постановке;
– изучение простейших качественных свойств построенных приближенных решений в зависимости от параметров метода, в том числе – в зависимости от выбора упругих свойств сопутствующего тела.

Научная новизна:

1. Для пластины, составленной из слоев, ортотропных в осях координат, связанных с пластиной, в рамках МСФ получены аналитические выражения для структурных функций первого и второго порядка. На основе найденных структурных функций для задачи о нагружении свободно опертой на контуре прямоугольной пластины получены явные выражения для МСФ-приближений – впервые в рамках изучаемого метода для трехмерной задачи теории упругости. Построены МСФ-приближения первого и второго порядка, основанные на решении сопутствующей задачи в трехмерной постановке и на приближенных решениях сопутствующей задачи в рамках классических кинематических гипотез.
2. Проведен анализ свойств напряженно-деформированного состояния, характерных для МСФ-приближений с разными параметрами изучаемого метода. Показано, что МСФ-приближения учитывают зависимость перемещений от поперечной координаты в виде криволинейной ломаной и позволяют вычислить поперечные напряжения, удовлетворяющие граничным условиям.
3. Из требования выполнения МСФ-приближением граничных условий на лицевых поверхностях получены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела.
4. При фиксированном первом (или втором) порядке метода структурных функций параметром, влияющим на качество конечного приближения, является точность решения сопутствующей задачи. Показано, что повышение точности решения сопутствующей задачи позволяет уже при помощи метода структурных функций первого порядка приближенно вычислить поперечные напряжения в пластине.
5. Построенные МСФ-приближения решения вышеупомянутой задачи численно сопоставлены с аналитическим и конечноэлементным реше-

нием той же задачи в трехмерной постановке. При сопоставлениях варьировался выбор параметров метода, геометрия и упругие свойства пластин. Эти сопоставления подтверждают необходимость предложенного в работе выбора упругих свойств сопутствующего тела и сформулированные выводы о свойствах МСФ-приближений напряженно-деформированного состояния пластины.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Приближенные решения задачи о нагружении слоистой ортотропной линейно-упругой прямоугольной пластины, построенные методом структурных функций первого и второго порядка, основанные на решении сопутствующей задачи в рамках модели Тимошенко (или более точной), позволяют получить зависимость перемещений в пластине от поперечной координаты в виде криволинейной ломаной.
2. Приближенные решения задачи о нагружении слоистой ортотропной линейно-упругой прямоугольной пластины, построенные методом структурных функций первого порядка с использованием достаточно точного приближенного решения сопутствующей задачи, обеспечивают выполнение граничных условий на лицевых поверхностях пластины тогда и только тогда, когда модули сдвига сопутствующего тела совпадают с осредненными по Рейссу модулями сдвига исходного тела.
3. При фиксированном порядке метода структурных функций оправдано повышение порядка точности решения сопутствующей задачи: так, в рассмотренных в работе примерах уже при использовании метода первого порядка повышение точности решения сопутствующей задачи позволяет приближенно вычислять поперечные напряжения в исходной пластине.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты работы имеют теоретическое и прикладное значение в контексте дальнейшего исследования метода структурных функций; кроме того, результаты могут быть использованы в качестве методических материалов (учебного пособия) для изучения метода структурных функций и его применения к трехмерным задачам теории упругости.

Методология и методы исследования. Исследование свойств МСФ-приближений выполнено на примере трехмерной постановки задачи о квазистататическом нагружении прямоугольной пластины, составленной из линейно-упругих, ортотропных в связанных с пластиной осях координат слоев, свободно опертой на всех боковых гранях [10; 11]. Задачи с данным типом граничных условий часто используют для сравнения и исследования подходов к моделированию упругого поведения пластин. В работе реализован МСФ первого и второго порядка, построены соответствующие приближенные решения. Построение МСФ-приближений требует выбора трех параметров: порядка МСФ, упругих свойств сопутствующего тела и точности приближенного решения сопутствующей задачи. В рассматриваемом случае сопутствующее тело – однородная (возможно, толстая) пластина. В работе использованы три известных решения сопутствующей задачи – в рамках моделей, основанных на кинематических гипотезах Кирхгофа-Лява [12] и Тимошенко [13], и в трехмерной постановке – при помощи метода Пагано [3].

Качественные свойства приближений проверены на соответствие критериям качества, сформулированным в работе [14]. Количественно построенные приближения сопоставлены с приближениями, полученными методом конечных элементов и по методу Пагано для исходной задачи. Сравнения выполнены для достаточно толстых пластин (отношение продольного и поперечного размера – 1/4) из сильно ортотропных слоёв (отношение осевых модулей упругости в диапазоне $1 : 30 \ldots 1 : 70$), как для симметричных, так и для асимметричных укладок. Проверено, что МСФ-приближения решения приближаются к известным точным решениям при уменьшении отношения толщины пластины к её размеру в плане, а также при приближении структуры пластины к однородной.

Достоверность вытекает из использования классического аппарата механики сплошных сред и подтверждена строгими математическими выводами. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

– научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., профессора В. И. Горбачева (2020, 2021, 2022, 2023),
– научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., профессора Д. В. Георгиевского (2023),

– научно-исследовательском и аспирантском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством член-корреспондента РАН, профессора Е. В. Ломакина (2023, 2024),
– научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика РАН, профессора Р. И. Нигматулина (2024),
– семинаре МЕСМУС Института машиноведения РАН под руководством член-корреспондента РАН Н. А. Махутова (2025),
– Научно-техническом совете Института машиноведения РАН под руководством д.т.н., профессора Ю. Г. Матвиенко (2025),
– семинаре Института прикладной механики РАН под руководством д.т.н., профессора А. Н. Власова (2023),
– международной конференции «Математика в созвездии наук» к юбилею академика В. А. Садовничего (2024),
– XII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (2023),
– научных школах-конференциях по механике композитов имени Б. Е. Победри (2022, 2023),
– научной конференции «Ломоносовские чтения» (2022).

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Научный руководитель принимал участие в формулировке постановок задач, верификации и анализе результатов; при этом вклад соискателя является определяющим. Основные идеи и положения диссертации изложены в 4 научных работах общим объемом 7,37 п.л. Личный вклад автора составляет 6,49 п.л., или 22/25; в работах [15; 16] личный вклад равен 1, в работе [17] – 6/7; в работе [18] – 1/2.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях общим объемом 7,37 п. л., опубликованных в журналах Web of Science, Scopus [15—18].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 132 страницы, включая 14 рисунков и 12 таблиц. Список литературы содержит 156 наименований.

Глава 1 посвящена классическим теориям пластин, которые позволяют перейти от трехмерной постановки задачи теории упругости к упрощенным – двумерным – постановкам путём введения кинематических гипотез. Приведена общая форма записи кинематической гипотезы. Для теорий, основанных на кинематических гипотезах Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко, приведена процедура построения полной постановки задачи, основанная на применении вариационного принципа Лагранжа.

Глава 2 посвящена построению приближенных решений задачи о нагружении свободно опертой по всем боковым граням линейно-упругой слоистой пластины при помощи метода структурных функций. При помощи данного метода решение квазистатической задачи о нагружении линейно-упругого неоднородного тела (исходного) сводится к решению двух вспомогательных задач: задачи о нагружении линейно-упругого однородного тела той же геометрии, подвергнутого воздействию той же системы нагрузок (сопутствующего), и задачи о нахождении структурных функций неоднородного тела. В разделе 2.1. приведены предпосылки и общие соотношения метода структурных функций бесконечного порядка, описаны свойства структурных функций.

В разделе 2.2. рассмотрен вопрос практического применения метода структурных функций к решению трехмерной задачи теории упругости, которое для большинства задач связано с необходимостью ограничить порядок метода структурных функций и выбрать приближенное решение сопутствующей задачи, так как точное решение последней возможно построить только в некоторых частных случаях. Таким образом, порядок метода структурных функций и точность решения сопутствующей задачи являются параметрами настройки метода структурных функций. Помимо данных параметров для смешанной краевой задачи параметром метода является и выбор упругих свойств сопутствующего тела.

В разделе 2.3. методом структурных функций построены приближенные решения задачи о нагружении прямоугольной свободно опертой на контуре пластины, составленной из ортотропных в связанных с пластиной осях координат линейно-упругих слоев. Приведена трехмерная постановка такой задачи, постановка сопутствующей задачи, изложена процедура построения приближенных решений сопутствующей задачи, основанных на модели Кирхгофа-Лява, типа Тимошенко и методе Пагано. Получены аналитические выражения для структурных функций первого и второго порядка. Из граничных условий исходной задачи выведены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Для того, чтобы приближенные решения исходной задачи, построенные методом структурных функций, удовлетворяли граничным условиям на лицевых поверхностях, необходимо выбрать модули сдвига сопутствующей пластины совпадающими с осредненными по Рейссу модулями сдвига исходного тела. Получены аналитические выражения для приближений перемещений и напряжений, определенных по методу структурных функций. Охарактеризованы основные свойства построенных приближений перемещений и напряжений, показывающие хорошее совпадение с известными свойствами полей перемещений и напряжений в рассматриваемой задаче. В частности, при использовании метода структурных функций уже первого порядка в сочетании с моделью типа Тимошенко (или более точной) для решения сопутствуюшей задачи поле перемещений представляется в виде ломаных от поперечной координаты. Конкретный вид этих ломаных определяется упругими свойствами исходного тела, порядком метода структурных функций и решения сопутствующей задачи. При использовании метода структурных функций уже первого порядка в сочетании с решением сопутствующей задачи в трехмерной постановке становится возможным прямое вычисление поперечных напряжений (без постобработки продольных напряжений).

В главе 3 приведены результаты численных сопоставлений построенных приближений по методу структурных функций с известными решениями той же задачи. Вычисление приближений реализовано на языке Python 3. В качестве тестовых выбраны модельные пластины, скомпонованные из сильно ортотропных слоев (отношения осевых модулей упругости изменяются в диапазоне $1 : 30 \ldots 1 : 70$). В разделе 3.1. для асимметричной и симметричной пластины приводятся результаты сравнения приближенных решений, построенных методом структурных функций первого и второго порядка на основе решения сопутствующей задачи в трехмерной постановке, с конечноэлементным решением с использованием элементов типа $C3D8$ и $C3D20$, а также с известным решением исходной задачи в трехмерной постановке. В ходе этого сравнения проверено, что повышение порядка метода в данном случае улучшает конечное приближение, а также, что изложенный в работе способ выбора упругих свойств сопутствующего тела действительно является необходимым условием удовлетворения приближениями поперечных напряжений граничным условиям на лицевых поверхностях.

В разделе 3.2. приведены взаимные сопоставления приближенных решений, построенных методом структурных функций с варьируемым выбором параметров. Так, показано, что при фиксированном порядке метода структурных функций повышение точности решения сопутствующей задачи улучшает конечное приближение: уже при использовании метода первого порядка повышение точности решения сопутствующей задачи позволяет приближенно вычислять поперечные напряжения в пластине. Показано, что при фиксированной точности решения сопутствующей задачи повышение порядка метода структурных функций эффективно, если решение сопутствующей задачи достаточно точно для вычисления всех структурных функций, и не дает существенных улучшений в противном случае.

В разделах 3.3. и 3.4. показано, что приближенные решения, построенные методом структурных функций, приближаются к точному при уменьшении отношения толщины пластины к размеру в плане, а также при приближении структуры пластины к однородной.

Обзор литературы

Квазистатические задачи о нагружении пластин – один из наиболее изученных классов задач механики деформируемого тела. Многообразие разработанных подходов к моделированию поведения пластин (как упругого, так и различных типов неупругого) при статических и динамических нагрузках, в испытаниях на устойчивость и т.п. обусловлено широким использованием пластин разнообразной формы и конфигурации в конструкциях, применяемых в инженерной и строительной практике. Наличие разнообразных подходов, для которых в известных работах изложены достоинства и недостатки, построены требования к тому, какие качественные особенности необходимо моделировать в случае материала той или иной неоднородности, позволяет использовать класс задач о нагружении пластин для качественного и количественного тестирования свойств новых предлагаемых методик или дополнительного исследования существующих, что и проделано в данной работе.

Один из первоначальных подходов к моделированию упругого поведения пластин состоит в сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной постановке путем введения системы кинематических переменных, зависящих только от координат в базовой плоскости модели. В частности, именно такой подход лежит в основе построения теории пластин Кирхгофа-Лява [10; 12]. В ней трехмерная задача теории упругости в перемещениях сводится к нахождению перемещений в серединной (равноудаленной от лицевых поверхностей) поверхности пластины. При этом взаимосвязь перемещений во всей пластине и в серединной плоскости устанавливается как следствие из гипотезы Кирхгофа-Лява о поведении при деформации волокна, исходно прямого и ортогонального к недеформированной серединной поверхности. Изначально построенная для однородных материалов, данная теория была обобщена на неоднородный случай – путем простого осреднения свойств материала взвешенным интегрированием по толщине пластины – и была названа классической теорией пластин. Классическая теория пластин достаточно проста в построении, использовании и обобщении на случай неупругих материалов, поэтому по сей день используется в широком спектре случаев – для электромагнитоупругих [19], термоупругих [20], функционально-градиентных [21; 22], вязкоупругих [23] материалов, метаматериалов [24], для решения контактных задач [25], исследования проблем устойчивости [26] и задач стабилизации [27]. Также большинство авторов работ, посвященных построению и тестированию новых моделей пластин, использует классическую теорию пластин как один из ориентиров для качественного и количественного сопоставления полученных результатов: в частности, отметим работы [3; 28; 29] и другие.

Классическая теория пластин, однако, обладает рядом выраженных недостатков, описанных в литературе. В. В. Новожилов отмечает, что теорию Кирхгофа-Лява невозможно развить до точной теории [30]; плохие результаты описания пластин при помощи классической теории в случае, если отношение модуля Юнга к модулю сдвига материала велико, описаны в работе [31]; слабые результаты моделирования по теории Кирхгофа-Лява в случае сравнительно толстых (с отношением толщины к линейным размерам в диапазоне 1/4..1/15) пластин отмечены в работе [32]. Кроме того, поперечные напряжения в пластине, определенные по теории Кирхгофа-Лява без использования процедуры постобработки продольных напряжений, обращаются в тождественный ноль [10; 18; 33], а моделируемые поперечные прогибы имеют большую погрешность [34], как и деформации [35].

В качестве уточненной по сравнению с классической теорией в работе [13] была предложена модель, основанная на кинематической гипотезе, аналогичной гипотезе Тимошенко для балок (далее – гипотеза типа Тимошенко). В более поздних работах [36] показано, что использовать гипотезу типа Тимошенко более корректно в сочетании с множителями коррекции сдвига; развиты различные подходы к вычислению множителей коррекции [31; 37—42]: основанные на сопоставлении отклика пластины на нагрузку, вычисленного по модели типа Тимошенко, с откликом, вычисленным по трехмерной теории; на анализе при помощи метода конечных элементов; экспериментальных методах; технологии типа предиктор-корректор. Наиболее популярным можно назвать подход к определению множителей коррекции сдвига из энергетических соотношений – по силовым [43] и кинематическим переменным [44] модели. Нужно отметить, что модели, основанные на гипотезе типа Тимошенко с введенными различными способами множителями коррекции сдвига – не единственный возможный подход к построению модели первого порядка по поперечным деформациям [45]. Модели первого порядка, включая модель типа Тимошенко, как и классическая теория пластин, первично разработаны для однородных материалов, однако подход, связанный с взвешенным осреднением упругих свойств материалов по толщине пластины [18; 43; 46—48] и т.д. позволяет применять аналогичные модели и для неоднородных, в частности, слоистых пластин. Этот подход в классификации E. Carrera [28] моделей слоистых пластин назван ESL-подходом. Суть его состоит в сведении анализа неоднородного материала к анализу эквивалентного ему в некотором смысле монослоя (equivalent single layer). Построение ESL-моделей в перемещениях продолжено также на более высокие порядки точности. Среди таких моделей можно выделить полиномиальные и неполиномиальные – по заложенному в модель характеру зависимости перемещения от поперечной координаты [49]. Среди полиномиальных наиболее часто употребляемой можно назвать теорию третьего порядка [10; 50], не получившую большого распространения модель второго порядка [51], модель пятого порядка [52]. В качестве примеров неполиномиальных моделей можно привести модель тригонометрическую [53; 54]; основанную на комбинации тригонометрических функций [55]. В работе [56] приведены общие соотношения ESL-модели пластины в перемещениях. Ввиду дальнейшей концентрации на моделях в перемещениях выше перечислены только ESL-модели в перемещениях, которые предполагают введение кинематических переменных исключительно из предположений о виде компонент вектора перемещений в пластине. Уравнения для этих кинематических переменных выводятся из вариационного принципа Лагранжа. Однако возможно построение приближенных моделей и на основе предположений о виде приближений компонент напряжений, и смешанных моделей – в которых предполагается вид нескольких компонент напряжений и нескольких компонент перемещений, с использованием соответствующих вариационных принципов для вывода уравнений для переменных модели [57].

ESL-модели, хоть и являются достаточно простыми в построении, имеют существенный недостаток – за счёт осреднения механических свойств материала по толщине такие модели не позволяют моделировать ряд качественных эффектов, возникающих в неоднородных материалах. Например, в случае слоистых пластин оказывается необходимым моделировать зависимость перемещений от поперечной координаты в виде ломаной. В случае слоев с постоянными упругими свойствами точки излома данной ломаной принадлежат поверхностям контакта слоев [14]. ESL-модели не позволяют описывать такие эффекты.

Альтернативный подход к построению моделей слоистых пластин называют послойным (layer-wise, LW) [14; 58—61]. Суть такого подхода состоит в рассмотрении набора задач об изгибе пластины, каждая из которых поставлена для изолированного однородного слоя пластины и решена приближенно – с использованием фиксированного вида перемещений или напряжений. В качестве вида приближения могут выступать как полиномиальные модели общего вида, так и модели, использующие конечные наборы ортогональных многочленов [62], тригонометрические функции [33]. Также к LW-подходам можно отнести способы решения задачи об изгибе свободно опертой пластины в трехмерной постановке [3; 63; 64]; вариант послойного решения задачи определения физико-механических свойств полимерных композиционных материалов, изложенный в [65]. Среди несомненных достоинств LW-подхода – возможность более точно по сравнению с ESL-подходом моделировать напряженно-деформированное состояние внутри пластины. Ключевой недостаток LW-подхода – большое количество переменных, возрастающее с ростом числа слоев пластины, поэтому активное развитие таких подходов неразрывно связано с использованием метода конечных элементов [66; 67].

Третий класс моделей слоистых пластин содержит модели, представление перемещений в которых включает в себя функцию, позволяющую моделировать зависимость перемещений от поперечной координаты в виде ломаной – ESL-ZZ модели. Если соотношения модели таковы, что обеспечивают выполнение условия идеального контакта слоев – то есть, вычисленные в рамках этой модели вектор перемещений и вектор напряжений непрерывны на поверхностях контакта слоёв – их также называют удовлетворяющими C^0_z-требованиям [28; 58]. Они представляют собой расширение класса ESL-моделей: соотношения для перемещений, заданные одной из ESL-моделей, дополняются еще одним типом слагаемых – кусочно-непрерывными функциями, претерпевающими излом в зонах контакта слоев. Эти дополнительные слагаемые могут быть введены аналогичным – полиномиальным по поперечной координате – образом. К моделям такого типа относят [58; 68—74].

Ввиду большого многообразия моделей пластин существуют работы, в которых предложены подходы к классификации моделей пластин, и масштабные обзорные работы. Среди них можно отметить уже упомянутые работы [14; 28; 45], а также [75; 76]. В диссертации соотношения, приближенно описывающие напряженно-деформированное состояние слоистой пластины, получены методом структурных функций в трехмерном его варианте – они не являются самостоятельной моделью пластины, однако качественный анализ их произведен на соответствие критериям качества модели пластин по E. Carrera:

1. Представление перемещений в виде криволинейной ломаной от поперечной координаты, включая перемещение вдоль поперечной оси.
2. Выполнение условий межслойной непрерывности [идеального контакта] для поперечных напряжений на каждой границе слоёв.
3. Точное представление поперечных напряжений σ_{33}.
4. Возможность непосредственно вычислить поперечные напряжения σ_{I3} без постобработки других величин, в том числе – без интегрирования трехмерных уравнений равновесия теории упругости.
5. Наименьшее возможное для заданной точности число степеней свободы, в том числе, независимость числа переменных от количества слоёв в пластине.

В работе [14] критерии качества 1-3 выделяются, как приоритетные, а 4-5 – как второстепенные.

Помимо перечисленных классов моделей, разработанных для описания напряженно-деформированного состояния в слоистых пластинах (а также большого числа моделей, в этот обзор не вошедших), для приближенного моделирования отклика неоднородых пластин на квазистатические нагружения можно применить и общие методы механики композитов [77—81], в частности, методы инженерного послойного расчета слоистых конструкций [82—85].

Для осреднения композитов регулярной (периодической) структуры был разработан метод малого геометрического параметра [86], впоследствии в ряде источников названный методом Бахвалова-Победри. Он основан на введении малого параметра, равного отношению характерного размера ячейки периодичности и характерного линейного размера всего тела; компоненты напряженно-деформированного состояния неоднородного тела разлагаются в ряд по степеням данного малого параметра. Этот метод многократно подробно исследован [86—94]: разработаны варианты асимптотического метода и его модификации как для упругих, так и для неупругих материалов; разработаны различные подходы к обобщению метода малого параметра на случай материала непериодической структуры и альтернативные способы определения малого параметра в задаче, часть из которых будет упомянута ниже. Метод малого параметра был многократно и успешно применен и к задачам об изгибе пластин [95]; для пластин, толщина которых изменяется периодически [96—98]; для пластин, характерный размер толщины которых совпадает с характерным масштабом неоднородности (и является малым параметром в задаче) [99]; для пластин, которые армированы стержнями в плоскостях, параллельных базовой поверхности [100]. Применен асимптотический метод к анализу периодических в плане пластин [101; 102], пластин с двухпериодической структурой [103], к анализу сильно ортотропных пластин [104] – в последнем случае малым параметром служит параметр ортотропии. Особый интерес в контексте поставленной цели настоящей работы представляют труды, в которых асимптотический метод применён к анализу неоднородных в поперечном направлении пластин. В работах [105—107] построена теория пластин, основанная на асимптотическом разложении, малым параметром в котором служит толщина пластины (включая высокие порядки асимптотического разложения, [108]), а также показано, что аналитические соотношения ряда ESL-моделей можно получить при помощи асимптотического метода осреднения. В работах [109—112] разработана теория пластин, основанная на асимптотическом разложении, малым параметром в котором служит отношение толщины и размера пластины в плане, для которой верно ограничение для характерного масштаба нагрузки; в работе [113] асимптотический метод применен к анализу оболочек. В работах [114; 115] при помощи метода малого параметра построены решения задачи об изгибе нелинейно-упругих апериодических пластин. Разработка асимптотических теорий пластин продолжается и в данное время, в том числе, для связанной задачи электроупругости [116—118], микрополярной теории упругости [119], задачи термоупругости [120], пластин, контакт между слоями которых допускается не идеальным [121].

Метод структурных функций представляет собой одну из техник построения приближенных решений задачи о квазистатическом нагружении неоднородного тела произвольной неоднородности и восходит к методу тензоров Грина (методу интегральной формулы) – способу построения точного аналитического решения краевой задачи для уравнения в частных производных с коэффициентами, зависящими от координат. Интегральная формула – точное соотношение, связывающее решения двух квазистатических задач теории упругости с идентичными правыми частями и граничными условиями, поставленных для тел одинаковой геометрии, но разной неоднородности. Она была получена в работах [122; 123], и представляет собой способ решения краевой задачи для уравнения в частных производных. Применение интегральной формулы требует вычисления тензора Грина неоднородного тела. Примеры практического применения интегральной формулы приведены в работах [124—126]. Для вычисления функций Грина систем уравнений в частных производных предложено множество приближенных и экспериментальных подходов [126—133], однако в общем случае непосредственное вычисление фундаментальных решений остается сложной задачей. Для того, чтобы воспользоваться аналогичной методу интегральной формулы идеей поиска приближенного решения квазистатической задачи теории упругости на основе известного решения другой квазистатической задачи теории упругости, но без использования функций Грина, был разработан метод структурных функций [1; 2; 4; 6; 123] и др., кратко изложенный ниже в Главе 2. Этот метод основан на приближении интегральной формулы. Его основное соотношение позволяет записать перемещения в теле произвольной неоднородности в виде ряда по производным компонент тензора деформаций в однородном теле идентичной неоднородному геометрии, подвергнутом той же системе внешних нагрузок и кинематических закреплений, что и неоднородное тело. Коэффициенты этого ряда – функции пространственных (для линейно-упругого тела) координат – называют структурными функциями. В работах, посвященных методу структурных функций, изложены два подхода к вычислению структурных функций: их формально можно вычислить, как взвешенные моменты тензора Грина (что следует из условия приближения основным соотношением метода структурных функций интегральной формулы); также их можно подсчитать, как решение системы уравнений в частных производных (которая, в свою очередь, является достаточным условием совпадения правых частей уравнений равновесия для однородного и неоднородного тела). Эквивалентность этих подходов проверена ниже в Главе 2.

Соотношения метода структурных функций были обобщены на случай температурных задач теории упругости [134], динамической задачи теории упругости [135]; обобщены и детально исследованы в случае связанной задачи электромагнитоупругости, [136], моментной теории упругости [137; 138]. Кроме того, для различных двумерных задач теории упругости также разработаны варианты метода – [4—6; 139; 140]. В работе [4] метод структурных функций в сочетании с гипотезой Бернулли-Эйлера для сопутствующей балки применен для расчёта слоистой балки. В работе [6] при помощи совместного использования метода структурных функций и гипотезы Кирхгофа-Лява для сопутствующей пластины получены соотношения для эффективных жесткостей неоднородной пластины. В работе [9] построены структурные функции произвольного порядка для слоистой полосы. В работе [7] для задач о нагружении неоднородной анизотропной полосы показано, что аналог метода структурных функций, построенный в напряжениях, позволяет получить решения, демонстрирующие совпадение с классическими. Работы [8; 141; 142] посвящены применению соотношений метода структурных функций для отыскания эффективных характеристик неоднородного тела. В частности, в статье [8] рассмотрен материал со сферическими включениями и результат применения метода структурных функций сравнивается с вычислениями по методу Мори-Танака: показано, что эффективные свойства трехмерного тела, найденные методом структурных функций, хорошо согласуются с результатом применения метода Мори-Танака. Однако явное построение приближений поля перемещений в трехмерном линейно-упругом теле, полученных при помощи метода структурных функций, и сравнение этих приближений с известными решениями тех же задач на данный момент не выполнялось. Помимо такого построения приближенных решений и их сопоставления с известными, требует изучения вопрос влияния параметров метода структурных функций на качественные и количественные свойства полученных приближенных решений: формально соотношения метода допускают независимый выбор порядка самого метода[1], упругих свойств сопутствующего тела и точности решения сопутствующей задачи. В данной работе выполнено построение приближенных решений методом структурных функций и исследование влияния параметров метода на свойства получаемых приближенных решений.

[1]Понятие порядка метода структурных функций будет введено в Главе 2

Глава 1. Классические подходы к моделированию упругого поведения пластин, обобщенные на случай неоднородного анизотропного материала[2]

В данной главе приведены обобщенные на случай анизотропного материала произвольной неоднородности известные (основанные на кинематических гипотезах) подходы к решению квазистатической задачи теории упругости для пластины – тела, один из характерных размеров которого (толщина) много меньше двух других. Общая трехмерная постановка квазистатической задачи теории упругости для пластины имеет вид [18]

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij,j}(\overrightarrow{x}) + X_i(\overrightarrow{x}) = 0, \qquad (1.1)\\
\sigma_{ij}(\overrightarrow{x}) = C_{ijkl}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{kl}(\overrightarrow{x}), \quad \varepsilon_{ij}(\overrightarrow{x}) = J_{ijkl}(\overrightarrow{x})\sigma_{kl}(\overrightarrow{x})\\
\varepsilon_{ij}(\overrightarrow{x}) = [u_{i,j}(\overrightarrow{x}) + u_{j,i}(\overrightarrow{x})]/2,\\
\sigma_{ij}(x_1, x_2, \cdot) n_j\Big|_{x_3=\pm h/2} = q_i^{\pm}(x_1, x_2),\\
\sigma_{ij} n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i, \quad u_i\Big|_{\Sigma_u} = u_i^0.
\end{gathered}
$$

Здесь и далее рассматривается прямоугольная пластина линейными размерами $L_1 * L_2 * h$, причём допускается отношение $h/min(L_1, L_2) \leqslant 1/4$, в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3, ось x_3 совпадает с поперечной осью пластины. $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций, u_i – компоненты вектора перемещений в пластине, последняя предполагается жесткой, и задача (1.1) рассматривается в геометрически линейной постановке. Пластина занимает в пространстве объём V, ограниченный лицевыми плоскостями $\Sigma_\pm$, которые принадлежат плоскостям $x_3 = \pm h/2$, и боковой поверхностью $\Sigma_b = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma$. На частях боковой поверхности задано соответствующее граничное условие – кинематическое (на Σ_u) или статическое (на Σ_σ). На лицевых поверхностях распределены нагрузки $q_i^{\pm}(x_1, x_2)$. Серединную плоскость, равноудаленную от лицевых плоскостей пластины и совпадающую с координатной плоскостью Ox_1x_2, будем обозначать Σ_0. Общая схема обозначений приведена на рисунке 1.1.

[2] При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [18].

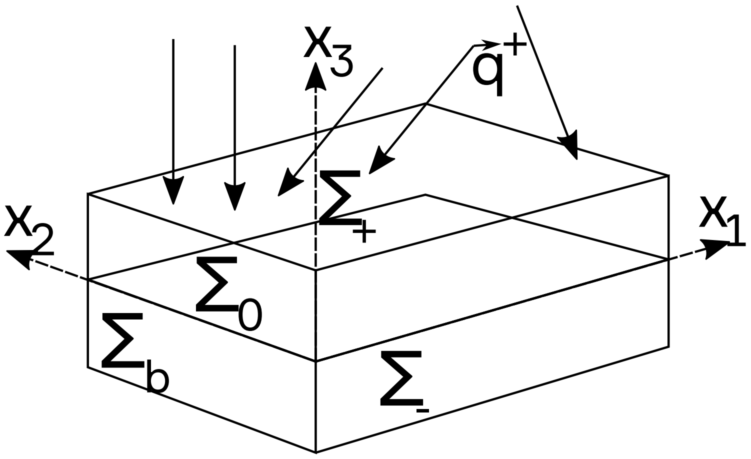

Рисунок 1.1 — Общая схема обозначений

В работе принята стандартная тензорная нотация и обозначения Энштейна: по повторяющимся латинским индексам производится суммирование, притом прописные индексы $I, J, \ldots = [1,2]$, а строчные – $i, j, \ldots = [1 \ldots 3]$; по греческим индексам суммирование не производится, присутствующие в формуле разные греческие индексы отвечают разным числовым значениям. Индекс после запятой обозначает производную по координате: $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$.

В главе 1 рассматривается материал произвольной неоднородности и анизотропии. В этом случае компоненты взаимно обратных тензоров упругих модулей $C_{ijkl}(\overrightarrow{x})$ и упругих податливостей $J_{ijkl}(\overrightarrow{x})$ представляют собой 21 независимую произвольную функцию координат, и эти функции таковы, что для материальных тензоров выполняются термодинамические ограничения [143] – условие положительной определенности. Приведены основные соотношения моделей пластин, основанных на кинематических гипотезах Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко. В частном случае материала, упругие свойства которого зависят только от поперечной координаты, отмечено их соответствие и несоответствие критериям качества КР1-5, приведенным во Введении. В качестве примера построены приближенные решения, основанные на обеих моделях, для задачи об изгибе свободно опертой по контуру слоистой пластины, составленной из ортотропных материалов, оси ортотропии которых совпадают с осями координат, а упругие свойства зависят только от поперечной координаты.

1.1 Общий принцип моделирования кинематики

Классический подход к решению задачи (1.1) состоит в сведении трехмерной постановки к упрощенной двумерной, конкретный вид которой зависит от выбранной приближенной модели пластины. Значительная доля моделей пластин строится на базе полуобратного метода, основанного на предположении общего для всей пластины полиномиального вида зависимости от поперечной координаты компонент поля перемещений. Запишем их аналогично работам [10; 144], как

$$u_i(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} x_3^r \varphi_i^{(r)}(x_1, x_2), \tag{1.2}$$

где $\varphi_i^{(r)}(x_1, x_2)$ – функции продольных координат, которые имеют смысл кинематических переменных модели[3]. Последние можно найти из уравнений модели, которые в общем случае получаются при использовании вариационного принципа Лагранжа. Конкретный вид представления (1.2) определяется требованиями к описанию деформации моделью; в частности, в примерах ниже – из физических предположений о характере деформирования пластины.

1.2 Внутренние силовые факторы пластины

Использование соотношения (1.2) приводит к введению новой системы кинематических переменных $\varphi_i^{(r)}(x_1, x_2)$, которую необходимо дополнить системой внутренних силовых факторов – распределенных в серединной плоскости результирующих сил и моментов [144; 145]:

$$T_{IJ}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{IJ}(\overrightarrow{x}) dx_3, \quad M_{IJ}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{IJ}(\overrightarrow{x}) dx_3, \tag{1.3}$$

$$Q_I(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{I3}(\overrightarrow{x}) dx_3.$$

[3] В разделе «Обзор литературы» такие модели названы полиномиальными ESL-моделями.

Здесь T_{IJ} – продольные силы, M_{IJ} – изгибающие моменты, Q_I – перерезывающие силы. Продольные напряжения на площадках, нормальных продольным координатным осям, статически эквивалентны продольным силам и изгибающим моментам, а поперечные касательные напряжения – перерезывающим силам. Уравнения равновесия пластины в терминах внутренних силовых факторов могут быть получены путем сведения внешних нагрузок к статически эквивалентной системе сил и моментов, действующих в серединной плоскости, и записи условий равновесия дифференциально малого элемента серединной плоскости [146; 147]. В работах [10; 18; 148] и других приводится способ получения дифференциальных уравнений для внутренних силовых факторов путем интегрирования по толщине пластины трехмерных уравнений равновесия, приведем аналогичные выкладки. Запишем уравнения равновесия задачи (1.1), выделяя производную по третьей координате:

$$\sigma_{I3,3}(\overrightarrow{x}) = -\sigma_{IJ,J}(\overrightarrow{x}) - X_I(\overrightarrow{x}), \quad \sigma_{33,3}(\overrightarrow{x}) = -\sigma_{3I,I}(\overrightarrow{x}) - X_3(\overrightarrow{x}). \tag{1.4}$$

Проинтегрируем первое уравнение (1.4) по x_3 с учётом граничного условия задачи (1.1) на нижней лицевой поверхности:

$$\sigma_{I3}(\overrightarrow{x}) = -\int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big[\sigma_{IJ,J}(x_1,x_2,y) + X_I(x_1,x_2,y)\Big] d\,y - q_I^-(x_1,x_2),$$

подставив данное выражение в граничное условие задачи (1.1) на верхней лицевой поверхности, имеем

$$\sigma_{I3}(x_1,x_2,h/2) = -\int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big[\sigma_{IJ,J}(x_1,x_2,y) + X_I(x_1,x_2,y)\Big] d\,y - q_I^-(x_1,x_2) =$$
$$= q_I^+(x_1,x_2),$$

или же, по определению (1.3), в терминах внутренних силовых факторов[4],

$$T_{IJ,J}(x_1,x_2) + q_I(x_1,x_2) = 0,$$
$$q_i(x_1,x_2) = h < X_i(x_1,x_2,x_3) > + q_i^-(x_1,x_2) + q_i^+(x_1,x_2).$$

[4]Здесь и далее применяется обозначение $< f > (x_1,x_2) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x_1,x_2,y)dy$.

Аналогичным образом из третьего уравнения (1.4) и граничных условий на лицевых поверхностях можно получить дифференциальное соотношение на перерезывающие силы

$$Q_{I,I}(x_1, x_2) + q_3(x_1, x_2) = 0,$$

а из соотношения

$$x_3\, \sigma_{I3,3}(\overrightarrow{x}) = -x_3\, \sigma_{IJ,J}(\overrightarrow{x}) - x_3\, X_I(\overrightarrow{x})$$

– уравнение для изгибающих моментов

$$M_{IJ,J}(x_1, x_2) - Q_I(x_1, x_2) + m_I(x_1, x_2) = 0.$$

Итоговая система уравнений равновесия в терминах внутренних силовых факторов (1.3) состоит из 5 уравнений и имеет вид

$$\begin{gathered} T_{IJ,J}(x_1, x_2) + q_I(x_1, x_2) = 0, \quad Q_{I,I}(x_1, x_2) + q_3(x_1, x_2) = 0, \\ M_{IJ,J}(x_1, x_2) - Q_I(x_1, x_2) + m_I(x_1, x_2) = 0, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где правые части представляют собой систему сил и моментов, статически эквивалентную системе внешних нагрузок:

$$\begin{gathered} q_i(x_1, x_2) = h < X_i(\overrightarrow{x}) > +q_i^-(x_1, x_2) + q_i^+(x_1, x_2), \\ m_I(x_1, x_2) = h < x_3 X_I(\overrightarrow{x}) > +h/2[q_I^+(x_1, x_2) - q_I^-(x_1, x_2)], \\ q(x_1, x_2) = q_3(x_1, x_2) + m_{I,I}(x_1, x_2). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Дифференцируя уравнение для моментов – второе уравнение системы (1.5) – и подставляя в него значения $Q_{I,I}(x_1, x_2)$ из уравнения для перерезывающих сил (третье уравнение той же системы), получаем, что систему уравнений (1.5) можно свести к 3 уравнениям:

$$T_{IJ,J}(x_1, x_2) + q_I(x_1, x_2) = 0, \quad M_{IJ,IJ}(x_1, x_2) + q(x_1, x_2) = 0. \tag{1.7}$$

1.3 Классическая модель пластин, основанная на кинематической гипотезе Кирхгофа-Лява

1.3.1 Кинематическая гипотеза Кирхгофа-Лява

В этом и следующем разделе рассматриваются две классических модели пластин, основанные на представлении перемещений типа (1.2), конкретный вид которого определяется из физических предположений о характере деформирования нейтрального волокна пластины. Из этих предположений следует связь перемещений в пластине с кинематическими переменными, распределенными в серединной плоскости пластины и зависящими только от продольных координат. Верхние индексы Kir и Tim здесь и далее указывают на конкретную модель (в главе 2 диапазон индексов будет дополнен). Индексы, указывающие на конкретную модель – трехбуквенные во избежание путаницы с «обычными» верхними индексами. Кинематическая гипотеза Кирхгофа-Лява (в зарубежной литературе она называется, как правило, просто Кирхгофа) и её следствие – выражения для перемещений – приведена в большом количестве источников, часть из которых упомянута во Введении.

Нейтральным называют прямое волокно, нормальное к серединной плоскости пластины в недеформированном состоянии. Предположение гипотезы Кирхгофа-Лява состоит в том, что после деформации нейтральное волокно остаётся прямым, перпендикулярным к деформированной серединной поверхности и не изменяет свою длину. Записывая это предположение в терминах компонент тензора деформаций, имеем [18]

$$\varepsilon_{IJ}^{Kir} = \varepsilon_{IJ}^{Kir}(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{i3}^{Kir} \equiv 0. \tag{1.8}$$

Так как материал пластины предполагается геометрически линейным и деформации связаны с напряжениями соотношениями Коши [143], предположение (1.8) можно интерпретировать, как систему уравнений в частных производных для компонент $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$:

$$u_{3,3}^{Kir}(\overrightarrow{x}) = 0, \quad u_{I,3}^{Kir}(\overrightarrow{x}) + u_{3,I}^{Kir}(\overrightarrow{x}) = 0.$$

Дополним её граничным условием $u_i^{Kir}(x_1, x_2, 0) = w_i(x_1, x_2)$, где w_i – перемещения точек серединной плоскости пластины. Поочередно интегрируя данные уравнения в частных производных, получаем, что перемещения в пластине, рассматриваемой в модели Кирхгофа-Лява (далее – пластина Кирхгофа-Лява) связаны с перемещениями в серединной плоскости данной пластины соотношением

$$u_i^{Kir}(\overrightarrow{x}) = w_i(x_1, x_2) - \delta_{iL} x_3 w_{3,L}(x_1, x_2). \tag{1.9}$$

Таким образом, в модели Кирхгофа-Лява три независимых кинематических переменных $w_i(x_1, x_2)$ и деформации пластины Кирхгофа-Лява имеют вид

$$\varepsilon_{IJ}^{Kir}(\overrightarrow{x}) = \big[w_{I,J}(x_1, x_2) + w_{J,I}(x_1, x_2)\big]/2 - x_3 w_{3,IJ}(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{i3}^{Kir}(\overrightarrow{x}) \equiv 0.$$

1.3.2 Определяющие соотношения

Запишем определяющие соотношения пластины Кирхгофа-Лява, устанавливающие взаимосвязь внутренних силовых факторов (1.3) и кинематических переменных модели $w_i(x_1, x_2)$. Для этого введем статическую гипотезу: предположим, что в законе Гука (1.1) можно пренебречь поперечными напряжениями σ_{3i} [10; 18]:

$$\varepsilon_{ij}(\overrightarrow{x}) = J_{ijKL}(\overrightarrow{x})\sigma_{KL}(\overrightarrow{x}).$$

Данное соотношение можно обратить и получить выражение, связывающее продольные напряжения с кинематическими переменными:

$$\sigma_{IJ}(\overrightarrow{x}) = J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{KL}(\overrightarrow{x}) = J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x})\big(w_{K,L}(x_1, x_2) - x_3 w_{3,KL}(x_1, x_2)\big). \tag{1.10}$$

$J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x})$ здесь и далее – компоненты тензора, обратного к $J_{IJKL}(\overrightarrow{x})$. Подставляя выражение для продольных напряжений (1.10) в определение внутренних силовых факторов (1.3), мы получаем определяющие соотношения неоднородной анизотропной пластины Кирхгофа-Лява:

$$\begin{aligned} T_{IJ}^{Kir}(x_1, x_2) &= A_{IJKL}^{Kir}(x_1, x_2) w_{K,L}(x_1, x_2) - B_{IJKL}^{Kir}(x_1, x_2) w_{3,KL}(x_1, x_2), \\ M_{IJ}^{Kir}(x_1, x_2) &= B_{IJKL}^{Kir}(x_1, x_2) w_{K,L}(x_1, x_2) - D_{IJKL}^{Kir}(x_1, x_2) w_{3,KL}(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{1.11}$$

В соотношении (1.11) и далее

– $A^{Kir}_{IJKL}(x_1,x_2) = h < J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x}) >$ – компоненты тензора продольных жесткостей,
– $B^{Kir}_{IJKL}(x_1,x_2) = h < x_3 J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x}) >$ – компоненты тензора жесткостей взаимного влияния,
– $D^{Kir}_{IJKL}(x_1,x_2) = h < x_3^2 J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x}) >$ – компоненты тензора изгибных жесткостей пластины Кирхгофа-Лява.

В случае материала произвольной неоднородности каждый из тензоров содержит ненулевые компоненты. Определяющие соотношения (1.11) допускают обращение [18].

1.3.3 Уравнения модели Кирхгофа-Лява в перемещениях и граничные условия к ним

Дифференциальные уравнения для кинематических переменных модели $w_i(x_1,x_2)$ можно получить непосредственной подстановкой определяющих соотношений (1.11) в уравнения для внутренних силовых факторов (1.7). В работе использована процедура получения уравнений и граничных условий к ним при помощи вариационного принципа Лагранжа – для трехмерного упругого тела этот принцип сформулирован, например, в [149]. По заданным на боковой поверхности нагрузкам определим статически эквивалентную им систему

$$T^0_I(x_1,x_2) = h < P_I(\overrightarrow{x}) >; \quad Q^0(x_1,x_2) = h < P_3(\overrightarrow{x}) >; \qquad (1.12)$$
$$M^0_I(x_1,x_2) = h < x_3 P_I(\overrightarrow{x}) >,$$

и введём локальные координаты на граничном контуре серединной плоскости Σ_0: пусть s – координата вдоль граничного контура $\Gamma(s)$, а $\overrightarrow{n}(s)$ – внешняя единичная нормаль к нему. Обозначим[5]

$$M^0_{(n)} = M^0_I n_I, \quad H^0 = \varepsilon_{KI} M^0_I(s) n_K(s), \quad V^0 = Q^0 - m_I n_I + \frac{dH^0}{ds}.$$

[5] ε_{KI} – двумерный символ Леви-Чивиты, $\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0$, $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$. Аргументы некоторых функций в этом разделе опущены – для компактности выкладок.

Общий вид функционала Лагранжа для квазистатической задачи линейной теории упругости (1.1) –

$$\mathcal{L}[\overrightarrow{u}] = \int\limits_V \Big(\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2} - X_i u_i\Big) dV - \int\limits_{\Sigma_\pm} q_i^\pm u_i d\Sigma - \int\limits_{\Sigma\sigma} P_i u_i d\Sigma.$$

Подставим в него выражения для перемещений и деформаций, полученные для пластины Кирхгофа-Лява (1.9), определения приведённых нагрузок (1.6), вторичных величин T_I^0, Q^0, M_I^0, H^0, V^0 (1.12) и заметим, что

$$\int\limits_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \int\limits_V \sigma_{IJ}(w_{I,J} - x_3 w_{3,IJ}) dV = \int\limits_{\Sigma_0} (T_{IJ} w_{I,J} - M_{IJ} w_{3,IJ}) d\Sigma \tag{1.13}$$

в силу определения внутренних силовых факторов (1.3) и следствия из кинематической гипотезы (1.9). Заменим в интеграле (1.13) T_{IJ} и M_{IJ} определяющими соотношениями для них (1.11). В результате указанных подстановок функционал Лагранжа для пластины Кирхгофа-Лява имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L}[\overrightarrow{u}] = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_0} \Big(A_{IJKL}^{Kir} w_{I,J} w_{K,L} - 2B_{IJKL}^{Kir} w_{I,J} w_{3,KL} + D_{IJKL}^{Kir} w_{3,IJ} w_{3,KL}\Big) d\Sigma - \\ - \int\limits_{\Sigma_0} (q_i w_i + m_{I,I} w_3) d\Sigma - \int\limits_\Gamma (T_I^0 w_I + V^0 w_3 - M_{(n)}^0 \frac{dw_3}{dn}) d\Gamma.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Запишем вариационное уравнение для пластины Кирхгофа-Лява – приравняем нулю первую вариацию функционала Лагранжа (1.14):

$$\delta\mathcal{L}[\overrightarrow{u}] = -\int\limits_{\Sigma_0} (q_i \delta w_i + m_{I,I}\delta w_3) d\Sigma - \int\limits_\Gamma (T_I^0 \delta w_I + V^0 \delta w_3 - M_{(n)}^0 \frac{d\delta w_3}{dn}) d\Gamma +$$

$$\int\limits_{\Sigma_0} \Big((A_{IJKL}^{Kir} w_{K,L} - B_{IJKL}^{Kir} w_{3,KL})\delta w_{I,J} + (D_{IJKL}^{Kir} w_{3,IJ} - B_{IJKL}^{Kir} w_{I,J})\delta w_{3,KL}\Big) d\Sigma = 0.$$

Выделяя в вариационном уравнении слагаемые при независимых вариациях δw_i, $\frac{d\delta w_3}{dn}$, мы получаем уравнения равновесия в терминах кинематических переменных и граничные условия к ним для пластины Кирхгофа-Лява:

$$\begin{gathered}(A_{IJKL}^{Kir} w_{K,L} - B_{IJKL}^{Kir} w_{3,KL})_{,J} + q_I = 0, \\ (B_{IJKL}^{Kir} w_{K,L} - D_{IJKL}^{Kir} w_{3,KL})_{,IJ} + q = 0, \\ w_i\Big|_\Gamma = w_i^0, \quad \frac{dw_3}{dn}\Big|_\Gamma = \theta^0, \\ T_{IJ} n_J\Big|_\Gamma = T_I^0, \quad [M_{IJ,J} n_I + \frac{d}{ds}(\varepsilon_{KI} n_K M_{IJ} n_J)]\Big|_\Gamma = V^0, \quad M_{IJ} n_I n_J\Big|_\Gamma = M_{(n)}^0,\end{gathered} \tag{1.15}$$

здесь w^0 и θ^0 – заданные функции, уравнения системы (1.15) совпадают с соотношениями, получаемыми непосредственной подстановкой определяющих соотношений в уравнения равновесия в терминах внутренних силовых факторов (1.7). Механический смысл заключительной пары граничных условий – задание обобщенной поперечной силы на контуре пластины (V^0) и момента, вращающего вокруг касательной к контуру пластины ($M^0_{(n)} = M^0_I n_I$). Используя определяющие соотношения, силовые граничные условия можно также переписать в терминах кинематических переменных модели:

$$\begin{aligned}
(A^{Kir}_{IJKL} w_{K,L} - B^{Kir}_{IJKL} w_{3,KL}) n_J \Big|_\Gamma &= T^0_I, \\
(B^{Kir}_{IJKL} w_{K,L} - D^{Kir}_{IJKL} w_{3,KL}) n_I n_J \Big|_\Gamma &= M^0_{(n)}, \\
[(B^{Kir}_{IJKL} w_{K,L} - D^{Kir}_{IJKL} w_{3,KL})_{,J} n_I + & \\
+\frac{d}{ds}\big(\varepsilon_{KI} n_K (B^{Kir}_{IJMN} w_{M,N} - D^{Kir}_{IJMN} w_{3,MN}) n_J\big)]\Big|_\Gamma &= V^0.
\end{aligned}$$

В случае произвольной неоднородности материала система (1.15) представляет собой связанные уравнения на продольные и поперечные перемещения точек серединной плоскости пластины, однако в случае обращения в ноль всех компонент тензора жесткостей взаимного влияния $B^{Kir}_{IJKL} \equiv 0$ данная система теряет связанность и распадается на взаимонезависимые системы уравнений и граничных условий для продольных перемещений точек серединной плоскости пластины $w_I(x_1, x_2)$ и поперечного их перемещения $w_3(x_1, x_2)$. Уравнения и граничные условия для последнего составляют задачу изгиба. В частности, все компоненты B^{Kir}_{IJKL} обращаются в ноль, если компоненты $J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x})$ представляют собой чётные функции продольной координаты, то есть для любого $a \in [-h/2, h/2]$ $J^{-1}_{IJKL}(x_1, x_2, a) = J^{-1}_{IJKL}(x_1, x_2, -a)$ для любых значений x_1, x_2, принадлежащих пластине. Доказательство этого факта следует из определения жесткостей взаимного влияния (1.11): любая четная на отрезке $x_3 \in [-h/2, h/2]$ функция $J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x})$ обеспечивает $\int_{-h/2}^{h/2} x_3 J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x}) dx_3 = 0$; механически это соответствует таким важным частным случаям, как пластины, симметричные относительно серединной плоскости, в частности, сэндвич-панели.

Для материала, упругие свойства которого зависят только от поперечной координаты (в частности, слоистого пакета), компоненты тензоров жесткостей представляют собой константы, а уравнения системы (1.15) – уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами.

В случае однородного материала произвольной анизотропии, упругие свойства которого не зависят от координат, жесткости (1.11) можно вычислить явно. Тогда система (1.15) принимает вид

$$hJ^{-1}_{IJKL}w_{K,LJ}(x_1,x_2) = -q_I(x_1,x_2),$$
$$h^3J^{-1}_{IJKL}w_{3,KLIJ}(x_1,x_2)/12 = q(x_1,x_2), \tag{1.16}$$

используемый при дальнейшем изложении. Уравнение изгиба в системе (1.16) совпадает с известным уравнением Софи Жермен $D\Delta^2 w_3(x_1,x_2) = q(x_1,x_2)$ в случае изотропного материала, если учесть определение изгибной жесткости $D = Eh^3/12(1-\nu)$ [10].

1.3.4 Вычисление напряжений в пластине Кирхгофа-Лява, соответствие данной модели приведенным критериям качества

Продольные напряжения σ_{IJ} в пластине Кирхгофа-Лява можно вычислить напрямую по перемещениям в серединной плоскости, определяемым путем решения системы уравнений (1.15), при помощи соотношения (1.10). Значения поперечных напряжений, прямо вычисленных по закону Гука –

$$\sigma^{Kir}_{I3}(\overrightarrow{x}) = C_{I3KL}(\overrightarrow{x})\big(w_{K,L}(x_1,x_2) - x_3w_{3,KL}(x_1,x_2)\big).$$

В частности, если пластина составлена из материалов, для которых ось x_3 является осью симметрии упругих свойств, а следовательно, $C_{I3KL} \equiv 0$ [143], $\sigma^{Kir}_{I3} \equiv 0$. Для уточнения напряжений используется процедура постобработки продольных напряжений [10; 18] путём интегрирования трёхмерных уравнений равновесия задачи (1.1):

$$\sigma^{Kir}_{IJ}(\overrightarrow{x}) = J^{-1}_{IJKL}(\overrightarrow{x})(w_{K,L}(x_1,x_2) - x_3w_{3,KL}(x_1,x_2)),$$

$$\sigma^{Kir}_{I3}(\overrightarrow{x}) = -\int\limits_{-h/2}^{x_3}\Big[\Big(J^{-1}_{IJKL}(x_1,x_2,z)\big(w_{K,L}(x_1,x_2) - zw_{3,KL}(x_1,x_2)\big)\Big)_{,J} +$$
$$X_I(x_1,x_2,z)\Big]dz - q^-_I(x_1,x_2),$$

$$\sigma_{33}^{Kir}(\overrightarrow{x}) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big\{ \int\limits_{-h/2}^{z} \Big\{ \Big[J^{-1}_{IJKL}(x_1, x_2, \eta)\big(w_{K,L} - \eta w_{3,KL}\big)\Big]_{,IJ} + X_{I,I}(x_1, x_2, \eta)\Big\} d\eta -$$
$$- X_3(x_1, x_2, z)\Big\} dz + q^{-}_{I,I}(x_1, x_2) - q^{-}_3(x_1, x_2).$$

Отметим, что соотношения для компонент напряженно-деформированного состояния, полученные в рамках теории Кирхгофа-Лява, применительно к слоистой пластине удовлетворяют КР2 и КР5 – критериям качества по E. Carrera [28] (приведены во Введении) – перемещения и поперечные напряжения представляют собой непрерывные функции поперечной координаты и не претерпевают разрывов на границах слоев в слоистой пластине; остальные критерии качества не выполнены. Продольные перемещения (1.9) представляют собой функции первой степени от поперечной координаты с фиксированным тангенсом углом наклона к оси x_3, равным $w_{3,K}$, следовательно, теория не позволяет моделировать зависимость перемещений от поперечной координаты в виде ломаной. Для адекватного моделирования поперечных напряжений требуется постобработка продольных напряжений; однако для некоторых случаев, в частности, для достаточно тонких пластин, материалы которых не имеют выраженной анизотропии, результаты моделирования в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява могут быть удовлетворительными.

1.4 Теория пластин типа Тимошенко

Как было отмечено во Введении, классическая теория пластин, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява (см. раздел 1.3), в ряде важных практически случаев недостаточно точна – как с точки зрения количественого совпадения приближенного решения с точным, так и с точки зрения моделирования качественных эффектов, что привело к разработке теорий более высоких порядков точности. В работе [45] отмечено, что единый подход к построению теории первого порядка по поперечным деформациям не сформирован; в диссертационной работе выбран подход к построению такой теории, основанный на кинематической гипотезе типа Тимошенко [48]. Такая модель действительно является моделью первого порядка [150] – с введением множителей коррекции сдвига типа, изложенного в работе [43].

1.4.1 Кинематическая гипотеза

Аналогично предыдущему разделу, кинематическая гипотеза типа Тимошенко формулируется для описания характера деформирования нейтрального волокна – предполагается, что после деформации оно остаётся прямым и не изменяет свою длину, но угол в плоскости $Ox_I x_3$ между нейтральным волокном и серединной поверхностью после деформации может отличаться от исходного $\pi/2$ на изменение угла $\gamma_I(x_1, x_2)$. В терминах компонент тензора деформаций данная гипотеза означает, что

$$\varepsilon_{IJ}^{Tim} = \varepsilon_{IJ}(x_1, x_2)/2, \quad \varepsilon_{I3}^{Tim} = \gamma_I(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{33}^{Tim} \equiv 0. \tag{1.17}$$

Аналогично разделу 1.3 соотношения (1.17) можно интерпретировать, как дифференциальные уравнения на компоненты вектора перемещений $u_i^{Tim}(\overrightarrow{x})$ с граничным условием $u_i^{Tim}(x_1, x_2{,}0) = y_i(x_1, x_2)$; то есть

$$u_{3,3}^{Tim}(\overrightarrow{x}) = 0, \quad u_{I,3}^{Tim}(\overrightarrow{x}) = -u_{3,I}^{Tim}(\overrightarrow{x}) + \gamma_I(x_1, x_2), \quad u_i^{Tim}(x_1, x_2{,}0) = y_i(x_1, x_2).$$

Решение этой системы – выражения, связывающие перемещения в пластине с кинематическими переменными теории типа Тимошенко, то есть перемещениями в серединной плоскости y_i и изменениями углов γ_I:

$$u_i^{Tim}(\overrightarrow{x}) = y_i(x_1, x_2) - \delta_{iL} x_3 \big(y_{3,L}(x_1, x_2) - \gamma_L(x_1, x_2)\big). \tag{1.18}$$

Используя выражения (1.18), можно записать также деформации в пластине, моделируемой теорией типа Тимошенко

$$\varepsilon_{IJ}^{Tim} = \big(y_{I,J} + y_{J,I} - x_3(2y_{3,IJ} - \gamma_{I,J} - \gamma_{J,I})\big)/2, \quad \varepsilon_{I3}^{Tim} = \gamma_I, \quad \varepsilon_{33}^{Tim} = 0. \tag{1.19}$$

1.4.2 Определяющие соотношения

Для записи определяющих соотношений пластины типа Тимошенко исключим ε_{33} из общей формы закона Гука (1.1), аналогично проделанному в работе [48]:

$$\sigma_{ij}(\overrightarrow{x}) = C_{ijKL}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{KL}(\overrightarrow{x}) + 2C_{ij3L}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{3L}(\overrightarrow{x}) + C_{ij33}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{33}(\overrightarrow{x});$$
$$\varepsilon_{33}(\overrightarrow{x}) = -C^{-1}_{3333}(\overrightarrow{x})\big(C_{33KL}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{KL}(\overrightarrow{x}) + 2C_{333L}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{3L}(\overrightarrow{x}) - \sigma_{33}(\overrightarrow{x})\big),$$

тогда

$$\sigma_{iJ}(\overrightarrow{x}) = \big(C_{iJKL} - C_{iJ33}C^{-1}_{3333}C_{33KL}\big)(\overrightarrow{x})\varepsilon_{KL}(\overrightarrow{x}) +$$
$$2\big(C_{iJ3L} - C_{iJ33}C^{-1}_{3333}C_{333L}\big)(\overrightarrow{x})\varepsilon_{3L}(\overrightarrow{x}) + C_{iJ33}(\overrightarrow{x})C^{-1}_{3333}(\overrightarrow{x})\sigma_{33}(\overrightarrow{x}).$$

Предполагая, что $\sigma_{33}(\overrightarrow{x}) = 0$ [48], имеем

$$\sigma_{iJ} = (C_{iJKL} - C_{iJ33}C^{-1}_{3333}C_{33KL})\varepsilon_{KL} + 2(C_{iJ3L} - C_{iJ33}C^{-1}_{3333}C_{333L})\varepsilon_{3L}, \tag{1.20}$$
$$\varepsilon_{kL} = R_{kLIJ}\sigma_{IJ} + 2R_{kLI3}\sigma_{I3}, \tag{1.21}$$

соотношения (1.21) представляют собой обращение (1.20).

Подставляя данное выражение в определения внутренних силовых факторов (1.3), получаем определяющие соотношения пластины типа Тимошенко

$$\begin{aligned} T^{Tim}_{IJ} &= A^{Tim}_{IJKL}y_{K,L} - B^{Tim}_{IJKL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A^{Tim}_{IJK3}\gamma_K, \\ M^{Tim}_{IJ} &= B^{Tim}_{IJKL}y_{K,L} - D^{Tim}_{IJKL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + B^{Tim}_{IJK3}\gamma_K, \\ Q^{Tim}_{I} &= A^{Tim}_{I3KL}y_{K,L} - B^{Tim}_{I3KL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A^{Tim}_{I3K3}\gamma_K, \end{aligned} \tag{1.22}$$

где

– $A^{Tim}_{IJKL} = \big\langle(C_{IJKL} - C_{IJ33}C^{-1}_{3333}C_{33KL})\big\rangle$,
– $B^{Tim}_{IJKL} = \big\langle x_3(C_{IJKL} - C_{IJ33}C^{-1}_{3333}C_{33KL})\big\rangle$,
– $D^{Tim}_{IJKL} = \big\langle x_3^2(C_{IJKL} - C_{IJ33}C^{-1}_{3333}C_{33KL})\big\rangle$,
– $A_{\alpha 3\beta 3} = k_{\alpha\beta} < C_{\alpha 3\beta 3} >$.

Здесь $k_{\alpha\beta}$ – множители коррекции сдвига, греческие индексы принимают значения от 1 до 2, повторяющиеся значения допустимы, суммирование по повторяющимся индексам отсутствует. Первично модель на базе гипотезы типа Тимошенко для изотропной пластины была построена без множителей коррекции сдвига [13], однако было установлено, что построенная таким образом модель на тестовых решениях прогнозирует упругую энергию, которая существенно отличается от упругой энергии в том же теле, вычисленной по решению задачи в трехмерной постановке. Поэтому во многих работах проводились построения множителей коррекции сдвига, которые бы позволили нивелировать данные отличия, часть этих работ отмечена во Введении. Ниже мы запишем $k_{\alpha\beta}$

для ортотропной пластины, неоднородной только по поперечной координате, используя технику, изложенную в работе [43] для ортотропных функционально-градиентных материалов. Эта техника основана на сопоставлении упругой энергии, вычисленной по модели типа Тимошенко, с упругой энергией, вычисленной по напряжениям, полученным путем интегрирования трехмерных уравнений равновесия.

Утверждение. Если для материалов, из которых изготовлена пластина, поперечная ось x_3 является осью симметрии, то компоненты тензоров изгибных жесткостей, жесткостей взаимного влияния и продольных жесткостей, определённых при описании пластины в рамках моделей Кирхгофа-Лява 1.3 и первого порядка 1.4, совпадают: $A^{Tim}_{IJKL} = A^{Kir}_{IJKL}$, $B^{Tim}_{IJKL} = B^{Kir}_{IJKL}$, $D^{Tim}_{IJKL} = D^{Kir}_{IJKL}$.

Доказательство. В силу определений компонент тензоров жесткостей для проверки данного утверждения достаточно показать, что в таком материале

$$(J_{IJKL})^{-1} = (C_{IJKL} - C_{IJ33}C^{-1}_{3333}C_{33KL}).$$

Так как тензоры упругих жесткостей и упругих податливостей взаимно обратны,

$$C_{ijkl}J_{klmn} = \Delta_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

Δ_{ijmn} – единичный симметричный тензор четвёртого ранга. Покажем, что

$$J_{IJKL}(C_{KLMN} - C_{KL33}C^{-1}_{3333}C_{33MN}) = \Delta_{IJMN},$$

добавляя к коротким сверткам по $I = 1..2$ недостающие до полных сверток слагаемые и вычитая их же:

$$\begin{gathered}
J_{IJKL}(C_{KLMN} - C_{KL33}C^{-1}_{3333}C_{33MN}) = \\
= J_{IJkl}C_{klMN} - 2J_{IJK3}C_{K3MN} - J_{IJ33}C_{33MN} - \\
J_{IJkl}C_{kl33}C^{-1}_{3333}C_{33MN} + 2J_{IJ3L}C_{3LMN}C^{-1}_{3333}C_{33MN} + J_{IJ33}C_{3333}C^{-1}_{3333}C_{33MN} = \\
\Delta_{IJMN} - 2J_{IJK3}C_{K3MN} - \Delta_{IJ33}C^{-1}_{3333}C_{33MN} + 2J_{IJ3L}C_{3LMN}C^{-1}_{3333}C_{33MN} = \\
\Delta_{IJMN} - 2J_{IJK3}C_{K3MN} + 2J_{IJ3L}C_{3LMN}C^{-1}_{3333}C_{33MN}.
\end{gathered}$$

Компоненты тензора упругих модулей C_{I333} материалов, для которых ось x_3 является осью симметрии, обращаются в ноль [143]. Значит, добавочные слагаемые к Δ_{IJMN} в данном случае обращаются в ноль, следовательно, $J^{-1}_{IJKL} \equiv$

$(C_{IJKL} - C_{IJ33}C^{-1}_{3333}C_{33KL})$, и жесткости пластин, определенные различными моделями, совпадают, что и требовалось доказать.

Для нахождения множителей коррекции сдвига, используя соотношение (1.21), запишем обратные определяющие соотношения модели типа Тимошенко в виде

$$
\begin{gathered}
y_{K,L} = a^{Tim}_{IJKL}T^{Tim}_{IJ} + b^{Tim}_{IJKL}M^{Tim}_{IJ} + a^{Tim}_{I3KL}Q^{Tim}_{I}, \\
y_{3,KL} - \gamma_{K,L} = b^{Tim}_{IJKL}T^{Tim}_{IJ} + d^{Tim}_{IJKL}M^{Tim}_{IJ} + b^{Tim}_{I3KL}Q^{Tim}_{I}, \\
\gamma_I = a^{Tim}_{I3KL}T^{Tim}_{KL} + b^{Tim}_{I3KL}M^{Tim}_{KL} + a^{Tim}_{I3K3}Q^{Tim}_{K}.
\end{gathered}
$$

Запишем двумя способами составляющую упругой энергии, вычисленную по напряжениям σ_{I3}: с одной стороны, из определяющих соотношений (1.20)

$$
\int\limits_V \sigma_{13}\varepsilon_{13}dV = \int\limits_V \big(\sigma_{13}R_{13KJ}\sigma_{KJ} + 2\sigma_{13}R_{13K3}\sigma_{K3}\big)dV,
$$

с другой стороны,

$$
\int\limits_V \sigma_{13}\varepsilon_{13}dV = \int\limits_{\Sigma_0} Q^{Tim}_1\big(a^{Tim}_{13KL}T^{Tim}_{KL} + b^{Tim}_{13KL}M^{Tim}_{KL} + a^{Tim}_{13K3}Q^{Tim}_{K}\big)/2dV.
$$

Аналогично,

$$
\begin{gathered}
\int\limits_V \sigma_{23}\varepsilon_{23}dV = \int\limits_V \big(\sigma_{23}R_{23KJ}\sigma_{KJ} + 2\sigma_{23}R_{23K3}\sigma_{K3}\big)dV = \\
\int\limits_{\Sigma_0} Q^{Tim}_2\big(a^{Tim}_{23KL}T^{Tim}_{KL} + b^{Tim}_{23KL}M^{Tim}_{KL} + a^{Tim}_{23K3}Q^{Tim}_{K}\big)/2dV.
\end{gathered}
$$

Подставляя в данные выражения явный вид решения задачи о нагружении пластины типа Тимошенко в простых частных случаях (например, задачи о цилиндрическом изгибе [43]), можно получить выражения для множителей коррекции сдвига. В случае слоя однородного ортотропного материала с постоянными по поперечной координате упругими свойствами $k_{11} = k_{22} = 5/6$. Для ортотропной пластины, составленной из N слоев, лежащих в границах $\{x_3^{s-1}, x_3^s\}_{s=1}^N$, $x_3^0 = -h/2$, $x_3^N = h/2$ с постоянными внутри каждого слоя упругими свойствами $C_{ijkl}(x_3) = C^s_{ijkl}, x_3 \in [x_3^{s-1}, x_3^s]$

$$k_{11}^{-1} = \sum_{s=1}^{N} \Big[\Big(-\sum_{k=1}^{s} \big[\frac{C_{1111}^{k}}{2D_{1111}}((x_3^k)^2 - (x_3^{k-1})^2)\big] + \frac{C_{1111}^{s}}{2D_{1111}}(x_3^{s-1})^2 \Big)^2 (x_3^s - x_3^{s-1}) \big(C_{1313}^{s}\big)^{-1} -$$
$$\frac{C_{1111}^{s}}{D_{1111}} \Big(-\sum_{k=1}^{s} \big[\frac{C_{1111}^{k}}{2D_{1111}}((x_3^k)^2 - (x_3^{k-1})^2)\big] + \frac{C_{1111}^{s}}{2D_{1111}}(x_3^{s-1})^2 \Big) ((x_3^s)^3 - (x_3^{s-1})^3) \big(3C_{1313}^{s}\big)^{-1} +$$
$$\big(\frac{C_{1111}^{s}}{2D_{1111}}\big)^2 ((x_3^s)^5 - (x_3^{s-1})^5) \big(5C_{1313}^{s}\big)^{-1} \Big] \times < C_{1313} >,$$

$$k_{22}^{-1} = \sum_{s=1}^{N} \Big[\Big(-\sum_{k=1}^{s} \big[\frac{C_{2222}^{k}}{2D_{2222}}((x_3^k)^2 - (x_3^{k-1})^2)\big] + \frac{C_{2222}^{s}}{2D_{2222}}(x_3^{s})^2 \Big)^2 (x_3^s - x_3^{s-1}) \big(C_{2323}^{s}\big)^{-1} -$$
$$\frac{C_{2222}^{s}}{D_{2222}} \Big(-\sum_{k=1}^{s} \big[\frac{C_{2222}^{k}}{2D_{2222}}((x_3^k)^2 - (x_3^{k-1})^2)\big] + \frac{C_{2222}^{s}}{2D_{2222}}(x_3^{s})^2 \Big) ((x_3^s)^3 - (x_3^{s-1})^3) \big(3C_{2323}^{s}\big)^{-1} +$$
$$\big(\frac{C_{2222}^{s}}{2D_{2222}}\big)^2 ((x_3^s)^5 - (x_3^{s-1})^5) \big(5C_{2323}^{s}\big)^{-1} \Big] \times < C_{2323} >,$$

Данные формулы обобщают полученные в работе [43] для трехслойной пластины соотношения для множителей коррекции сдвига на случай N-слойной пластины.

1.4.3 Уравнения равновесия в терминах кинематических факторов модели типа Тимошенко и граничные условия к ним

Уравнения равновесия в терминах кинематических факторов модели типа Тимошенко получим при помощи вариационного принципа Лагранжа, используя аналогичные разделу 1.3.3 обозначения для приведённых нагрузок на граничном контуре (1.12) – $T_I^0, Q^0, M_I^0, M_{(n)}^0, H^0, V^0$. Запишем функционал Лагранжа

$$\mathcal{L}[\overrightarrow{u}] = \int\limits_{V} \Big(\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2} - X_i u_i\Big) dV - \int\limits_{\Sigma_\pm} q_i^{\pm} u_i d\Sigma - \int\limits_{\Sigma\sigma} P_i u_i d\Sigma$$

для модели типа Тимошенко, подставляя в него выражения для перемещений и деформаций, полученные для модели пластины типа Тимошенко (1.18), определения приведённых нагрузок (1.6), вторичных величин (1.12). В модели типа

Тимошенко в силу определения внутренних силовых факторов (1.3)

$$\int\limits_V \sigma_{ij}u_{i,j}dV = \int\limits_V \left[\sigma_{IJ}\big(y_{I,J} - x_3(y_{3,IJ} - \gamma_{I,J})\big) + \sigma_{I3}\gamma_I\right]dV =$$

$$\int\limits_{\Sigma_0} [T_{IJ}^{Tim} y_{I,J} - M_{IJ}^{Tim}(y_{3,IJ} - \gamma_{I,J}) + Q_I^{Tim}\gamma_I]d\Sigma.$$

Заменим в этом интеграле T_{IJ}^{Tim}, Q_I^{Tim} и M_{IJ}^{Tim} определяющими соотношениями для них (1.22). В результате указанной подстановки функционал Лагранжа для модели пластин типа Тимошенко принимает вид

$$\mathcal{L}[\overrightarrow{u}] = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_0} \Big(A_{IJKL}^{Tim} y_{I,J} y_{K,L} - 2B_{IJKL}^{Tim} y_{I,J}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) +$$

$$+ D_{IJKL}^{Tim}(y_{3,IJ} - \gamma_{I,J})(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) +$$

$$+ 2A_{I3KL}^{Tim} y_{K,L}\gamma_I - 2B_{I3KL}^{Tim}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L})\gamma_I + A_{I3K3}^{Tim}\gamma_K\gamma_I\Big)d\Sigma -$$

$$- \int\limits_{\Sigma_0} (q_i y_i + m_{I,I} y_3 + m_I\gamma_I)d\Sigma - \int\limits_{\Gamma} [T_I^0 y_I + V^0 y_3 - M_I^0\gamma_I - M_{(n)}^0\frac{dy_3}{dn}]d\Gamma.$$

Соответствующее вариационное уравнение для модели типа Тимошенко –

$$\delta\mathcal{L}[\overrightarrow{u}] = \int\limits_{\Sigma_0} \Big(\big[A_{IJKL}^{Tim} y_{K,L} - B_{IJKL}^{Tim}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A_{IJK3}^{Tim}\gamma_K\big]\delta y_{I,J} +$$

$$+ \big[-B_{IJKL}^{Tim} y_{I,J} + D_{IJKL}^{Tim}(y_{3,IJ} - \gamma_{I,J}) - B_{I3KL}^{Tim}\gamma_I\big]\left(\delta y_{3,KL} - \delta\gamma_{K,L}\right) +$$

$$+ \big[A_{I3KL}^{Tim} y_{K,L} - B_{I3KL}^{Tim}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A_{I3K3}^{Tim}\gamma_K\big]\delta\gamma_I\Big)d\Sigma -$$

$$- \int\limits_{\Sigma_0} (q_i\delta y_i + m_{I,I}\delta y_3 + m_I\delta\gamma_I)d\Sigma -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} [T_I^0\delta y_I + V^0\delta y_3 - M_I^0\delta\gamma_I - M_{(n)}^0\frac{d\delta y_3}{dn}]d\Gamma = 0.$$

Выделяя в вариационном уравнении слагаемые при независимых вариациях, получаем уравнения равновесия в терминах кинематических переменных и граничные условия для модели типа Тимошенко:

$$\big(A^{Tim}_{IJKL}y_{K,L} - B^{Tim}_{IJKL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A^{Tim}_{IJK3}\gamma_K\big)_{,J} + q_I = 0,$$
$$\big(B^{Tim}_{IJKL}y_{K,L} - D^{Tim}_{IJKL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + B^{Tim}_{IJK3}\gamma_K\big)_{,J} -$$
$$-\big(A^{Tim}_{I3KL}y_{K,L} - B^{Tim}_{I3KL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A^{Tim}_{I3K3}\gamma_K\big) + m_I = 0,$$
$$\big(B^{Tim}_{IJKL}y_{K,L} - D^{Tim}_{IJKL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + B^{Tim}_{IJK3}\gamma_K\big)_{,IJ} + q = 0,$$
$$y_i\Big|_\Gamma = w^0_i(s), \quad \frac{dy_3}{dn}\Big|_\Gamma = \theta^0, \quad \gamma_I\Big|_\Gamma = \eta^0(s), \quad M_{IJ}n_J\Big|_\Gamma = M^0_I,$$
$$T_{IJ}n_J\Big|_\Gamma = T^0_I, \quad \Big[M_{IJ,J}n_I + \frac{d}{ds}(\varepsilon_{KI}n_K M_{IJ}n_J)\Big]\Big|_\Gamma = V^0, \quad M_{IJ}n_I n_J\Big|_\Gamma = M^0_{(n)},$$

или, в эквивалентной форме,

$$\big(A^{Tim}_{IJKL}y_{K,L} - B^{Tim}_{IJKL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A^{Tim}_{IJK3}\gamma_K\big)_{,J} + q_I = 0, \tag{1.23}$$
$$\big(B^{Tim}_{IJKL}y_{K,L} - D^{Tim}_{IJKL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + B^{Tim}_{IJK3}\gamma_K\big)_{,J} -$$
$$-\big(A^{Tim}_{I3KL}y_{K,L} - B^{Tim}_{I3KL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A^{Tim}_{I3K3}\gamma_K\big) + m_I = 0,$$
$$\big(A^{Tim}_{I3KL}y_{K,L} - B^{Tim}_{I3KL}(y_{3,KL} - \gamma_{K,L}) + A^{Tim}_{I3K3}\gamma_K\big)_{,I} + q_3 = 0,$$
$$y_i\Big|_\Gamma = w^0_i(s), \quad \frac{dy_3}{dn}\Big|_\Gamma = \theta^0, \quad \gamma_I\Big|_\Gamma = \eta^0(s), \quad M_{IJ}n_J\Big|_\Gamma = M^0_I,$$
$$T_{IJ}n_J\Big|_\Gamma = T^0_I, \quad M_{IJ}n_I n_J\Big|_\Gamma = M^0_{(n)},$$
$$\Big[Q_I n_I + \frac{d}{ds}(\varepsilon_{KI}n_K M_{IJ}n_J)\Big]\Big|_\Gamma = Q^0 + \frac{d}{ds}\big(\varepsilon_{JI}M^0_I n_J\big),$$

где w^0_i, θ^0, η^0 – заданные функции. В случае однородного ортотропного материала, упругие свойства которого J_{ijkl} и C_{ijkl} – константы, множители коррекции сдвига $k_{11} = k_{22} = 5/6$ ([43] и др.), и уравнения системы (1.23) принимают вид

$$hJ^{-1}_{IJKL}y_{K,LJ}(x_1, x_2) = -q_I(x_1, x_2), \tag{1.24}$$
$$5hC_{I3K3}\gamma_{K,I}(x_1, x_2)/6 = -q_3(x_1, x_2),$$
$$h^3 J^{-1}_{IJKL}\big(y_{3,KLJ}(x_1, x_2) - \gamma_{K,LJ}(x_1, x_2)\big)/12 + 5hC_{I3K3}\gamma_K(x_1, x_2)/6 = m_I(x_1, x_2).$$

1.4.4 Вычисление напряжений в модели типа Тимошенко, соответствие модели приведенным критериям качества

Продольные напряжения в пластине, описываемой моделью типа Тимошенко, подлежат вычислению из соотношения (1.20). Поперечные напряжения

σ_{I3} можно аналогично вычислить из соотношения (1.20), однако в силу непрерывности поля деформаций (1.19) вычисленные таким образом поперечные напряжения

$$\sigma_{I3}(\overrightarrow{x}) = \left(C_{I3KL} - C_{I333}C^{-1}_{3333}C_{33KL}\right)\varepsilon_{KL}(\overrightarrow{x}) + 2\left(C_{I33L} - C_{I333}C^{-1}_{3333}C_{333L}\right)\varepsilon_{3L}(\overrightarrow{x})$$

в пластине, упругие свойства которой зависят от поперечной координаты кусочно-гладким образом и претерпевают разрыв в некотором наборе точек, не будут в общем случае удовлетворять условию идеального контакта фаз композиционного материала – например, если материал составлен из слоев с постоянными внутри слоя, но различными от слоя к слою свойствами, поперечные напряжения, вычисленные напрямую, претерпевают скачок на поверхности контакта слоев. Аналогично изложенному в разделе 1.3.4, мы можем вычислить поперечные напряжения путем постобработки продольных напряжений: из уравнений равновесия,

$$\sigma^{Tim}_{I3}(\overrightarrow{x}) = -\int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big[\Big(\big(y_{K,L}(x_1,x_2) - z(y_{3,KL}(x_1,x_2) - \gamma_{K,L}(x_1,x_2))\big)\times$$
$$\big(C_{I3KL}(x_1,x_2,z) - C_{I333}(x_1,x_2,z)C^{-1}_{3333}(x_1,x_2,z)C_{33KL}(x_1,x_2,z)\big) -$$
$$\big(C_{IJK3}(x_1,x_2,z) - C_{IJ33}(x_1,x_2,z)C^{-1}_{3333}(x_1,x_2,z)C_{33K3}(x_1,x_2,z)\big)\gamma_K(x_1,x_2)\Big)_{,J} -$$
$$X_I(x_1,x_2,z)\Big]dz - q^-_I(x_1,x_2),$$

$$\sigma^{Tim}_{33}(\overrightarrow{x}) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big\{ \int\limits_{-h/2}^{z} \Big\{\Big[\big(y_{K,L}(x_1,x_2) - \eta[y_{3,KL}(x_1,x_2) - \gamma_{K,L}(x_1,x_2)]\big)\times$$
$$\big(C_{I3KL}(x_1,x_2,\eta) - C_{I333}(x_1,x_2,\eta)C^{-1}_{3333}(x_1,x_2,\eta)C_{33KL}(x_1,x_2,\eta)\big) -$$
$$\big(C_{IJK3}(x_1,x_2,\eta) - C_{IJ33}(x_1,x_2,\eta)C^{-1}_{3333}(x_1,x_2,\eta)C_{33K3}(x_1,x_2,\eta)\big)\gamma_K(x_1,x_2)\Big]_{,IJ} +$$
$$X_{I,I}(x_1,x_2,\eta)\Big\}d\eta - X_3(x_1,x_2,z)\Big\}dz + q^-_{I,I}(x_1,x_2) - q^-_3(x_1,x_2).$$

Отметим также, что выражения для перемещений (1.18) не позволяют моделировать зависимость перемещений от поперечной координаты в виде ломаной. Таким образом, модель пластины типа Тимошенко, хоть и является более точной по сравнению с моделью Кирхгофа-Лява, но аналогично последней удовлетворяет только критерию качества КР5 и – при условии постобработки подсчитанных продольных напряжений – КР2.

1.5 Классические модели в решении задачи о нагружении свободно опертой по контуру пластины

Проиллюстрируем отмеченные качественные свойства моделей – построим приближения решения задачи о квазистатическом нагружении свободно опертой по контуру прямоугольной пластины, упругие свойства которой зависят только от поперечной координаты x_3 и ортотропны в осях координат x_1, x_2, x_3. Начало системы координат расположим в левом нижнем углу серединной плоскости пластины. Тогда

$$\sigma_{ij}(\overrightarrow{x}) = C_{ijkl}(x_3)\varepsilon_{kl}(\overrightarrow{x}), \quad \varepsilon_{ij}(\overrightarrow{x}) = J_{ijkl}(x_3)\sigma_{kl}(\overrightarrow{x})$$
$$C_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0, \quad C_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma.$$

Тензоры жёсткостей $A_{ijkl}, B_{ijkl}, D_{ijkl}$ обеих моделей в данном случае совпадают и представляют собой наборы констант, наследующих ортотропию тензора C_{ijkl} – т. е. $A_{\alpha\alpha\alpha\beta} = 0, B_{\alpha\alpha\alpha\beta} = 0, D_{\alpha\alpha\alpha\beta} = 0, A_{I3KL} = 0, B_{I3KL} = 0$. Приближенные решения задачи (1.1), основанные на обеих рассмотренных моделях, будем строить при помощи метода Навье [10; 53; 64; 151] (метода двойных тригонометрических рядов). Определим полную систему тригонометрических функций внутри серединной плоскости пластины – $\{\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2), \sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2), \cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2), \cos(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2)\}_{m,n=1}^{\infty}$, где $\lambda_m = \pi m/L_1, \mu_n = \pi n/L_2$, и введем обозначения для коэффициентов разложения внешних нагрузок и вторичных величин от них по данной системе:

$$[q_1, m_1, q_1^{\pm}](x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_1^{mn}, m_1^{mn}, q_1^{\pm|mn}] \cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2), \tag{1.25}$$
$$[q_2, m_2, q_2^{\pm}](x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_2^{mn}, m_2^{mn}, q_2^{\pm|mn}] \sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),$$
$$[q_3, q, q_3^{\pm}](x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} [q_3^{mn}, q^{mn}, q_3^{\pm|mn}] \sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

где $q(x_1, x_2), q_i(x_1, x_2), m_i(x_1, x_2)$ – вторичные величины, которые определяются по формулам (1.6), коэффициенты разложений (1.25) определяются по известным формулам для коэффициентов Фурье [152]:

$$[q_1^{mn}, m_1^{mn}, q_1^{\pm|mn}] = \frac{4}{L_1 L_2} \int\limits_0^{L_1} \int\limits_0^{L_2} [q_1, m_1, q_1^{\pm}](x_1, x_2) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) dx_1 dx_2,$$

$$[q_2^{mn}, m_2^{mn}, q_2^{\pm|mn}] = \frac{4}{L_1 L_2} \int\limits_0^{L_1} \int\limits_0^{L_2} [q_2, m_2, q_2^{\pm}](x_1, x_2) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) dx_1 dx_2,$$

$$[q_3^{mn}, q^{mn}, q_3^{\pm|mn}] = \frac{4}{L_1 L_2} \int\limits_0^{L_1} \int\limits_0^{L_2} [q_3, q, q_3^{\pm}](x_1, x_2) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) dx_1 dx_2.$$

1.5.1 Модель Кирхгофа-Лява

Граничные условия системы (1.15) в случае свободно опертой на контуре пластины имеют вид [10]

$$\begin{gathered} x_1 = 0, L_1: \quad w_2(\cdot, x_2) = 0, \quad w_3(\cdot, x_2) = 0, \quad M_{11}(\cdot, x_2) = 0, \\ x_2 = 0, L_2: \quad w_1(x_1, \cdot) = 0, \quad w_3(x_1, \cdot) = 0, \quad M_{22}(x_1, \cdot) = 0, \end{gathered} \tag{1.26}$$

и кинематические переменные модели $w_i(x_1, x_2)$ можно найти в виде

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} W_1^{mn} \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) = w_1(x_1, x_2),$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} W_2^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) = w_2(x_1, x_2),$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} W_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) = w_3(x_1, x_2),$$

автоматически удовлетворяющем граничным условиям (1.26) с учётом определяющих соотношений (1.11), W_i^{mn} – счётные наборы констант. Конкретные значения данных констант определяются из систем линейных алгебраических уравнений для различных значений m и n, полученных путем подстановки вида решения в уравнения системы (1.15).

$$\begin{gathered} \big(\lambda_m^2 A_{1111} + \mu_n^2 A_{1212}\big) W_1^{mn} + \big(A_{1122} + A_{1212}\big) \lambda_m \mu_n W_2^{mn} - \\ - \big(\lambda_m^3 B_{1111} + \lambda_m \mu_n^2 (B_{1122} + 2B_{1212})\big) W_3^{mn} = q_1^{mn}, \end{gathered}$$

$$\big(\lambda_m^2 A_{1212} + \mu_n^2 A_{2222}\big) W_2^{mn} + \big(A_{1122} + A_{1212}\big)\lambda_m \mu_n W_1^{mn} -$$
$$-\big(\mu_n^3 B_{2222} + \lambda_m^2 \mu_n (B_{1122} + 2B_{1212})\big) W_3^{mn} = q_2^{mn},$$

$$\big(\lambda_m^3 B_{1111} + \lambda_m \mu_n^2 (B_{1122} + 2B_{1212})\big) W_1^{mn} + \big(\mu_n^3 B_{2222} + \lambda_m^2 \mu_n (B_{1122} + 2B_{1212})\big) W_2^{mn} -$$
$$-\big(\lambda_m^4 D_{1111} + \mu_n^4 D_{2222} + 2\lambda_m^2 \mu_n^2 (D_{1122} + 2D_{1212})\big) W_3^{mn} = -q^{mn}$$

1.5.2 Модель типа Тимошенко

Граничные условия системы (1.23) в случае свободно опертой на контуре пластины имеют вид [10]

$$x_1 = 0, L_1: \quad y_2(\cdot, x_2) = 0,\ y_3(\cdot, x_2) = 0,\ \gamma_2(\cdot, x_2) = 0,\ \ M_{11}(\cdot, x_2) = 0. \tag{1.27}$$
$$x_2 = 0, L_2: \quad y_1(x_1, \cdot) = 0,\ y_3(x_1, \cdot) = 0,\ \gamma_1(x_1, \cdot) = 0,\ M_{22}(x_1, \cdot) = 0.$$

Кинематические переменные модели $\gamma_I(x_1, x_2), y_i(x_1, x_2)$ будем искать в виде

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_1^{mn}, \Gamma_1^{mn}] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) = [y_1, \gamma_1](x_1, x_2),$$
$$\sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_2^{mn}, \Gamma_2^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) = [y_2, \gamma_2](x_1, x_2),$$
$$\sum_{m,n=0}^{\infty} Y_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) = y_3(x_1, x_2).$$

Выбранные таким образом кинематические переменные автоматически удовлетворяют граничным условиям (1.27), а подстановка выражений для кинематических переменных в уравнения равновесия модели типа Тимошенко (1.23) позволяет записать систему линейных алгебраических уравнений на подлежащие определению константы Y_i^{mn}, Γ_I^{mn}:

$$\big(\lambda_m^2 A_{1111} + \mu_n^2 A_{1212}\big) Y_1^{mn} + \big(A_{1122} + A_{1212}\big)\lambda_m \mu_n Y_2^{mn} -$$
$$-\big(\lambda_m^3 B_{1111} + \lambda_m \mu_n^2 (B_{1122} + 2B_{1212})\big) Y_3^{mn} +$$
$$+\big(\lambda_m^2 B_{1111} + \mu^2 B_{1212}\big)\Gamma_1^{mn} + \lambda\mu\big(B_{1212} + B_{1122}\big)\Gamma_2^{mn} = q_1^{mn},$$

$$
\begin{gathered}
\left(\lambda_m^2 A_{1212} + \mu_n^2 A_{2222}\right) Y_2^{mn} + \left(A_{1122} + A_{1212}\right) \lambda_m \mu_n Y_1^{mn} - \\
- \left(\mu_n^3 B_{2222} + \lambda_m^2 \mu_n (B_{1122} + 2B_{1212})\right) Y_3^{mn} + \\
+ \left(\lambda_m^2 B_{1212} + \mu^2 B_{2222}\right) \Gamma_2^{mn} + \lambda\mu \left(B_{1212} + B_{1122}\right) \Gamma_1^{mn} = q_2^{mn},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\lambda_m^2 B_{1111} + \mu_n^2 B_{1212}\right) Y_1^{mn} + \left(B_{1122} + B_{1212}\right) \lambda_m \mu_n Y_2^{mn} - \\
- \left(\lambda_m^3 D_{1111} + \lambda_m \mu_n^2 (D_{1122} + 2D_{1212})\right) Y_3^{mn} + \\
+ \left(\lambda_m^2 D_{1111} + \mu^2 D_{1212} + A_{1313}\right) \Gamma_1^{mn} + \lambda\mu \left(D_{1212} + D_{1122} + A_{1323}\right) \Gamma_2^{mn} = m_1^{mn},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\lambda_m^2 B_{1212} + \mu_n^2 B_{2222}\right) Y_2^{mn} + \left(B_{1122} + B_{1212}\right) \lambda_m \mu_n Y_1^{mn} - \\
- \left(\mu_n^3 D_{2222} + \lambda_m^2 \mu_n (D_{1122} + 2D_{1212})\right) Y_3^{mn} + \\
+ \left(\lambda_m^2 D_{1111} + \mu^2 D_{1212} + A_{2323}\right) \Gamma_2^{mn} + \lambda\mu \left(D_{1212} + D_{1122} + A_{2313}\right) \Gamma_1^{mn} = m_2^{mn},
\end{gathered}
$$

$$
(-\lambda_m A_{1313} + \mu_n A_{2313}) \Gamma_1^{mn} + (\lambda_m A_{1323} - \mu_n A_{2323}) \Gamma_2^{mn} + q_3^{mn} = 0.
$$

Ниже (в главе 1 и главе 3) данная система решается численно.

1.5.3 Примеры

Приведём графики приближенных решений задачи (1.1) с граничными условиями (1.26)-(1.27), нагруженной только нормальной нагрузкой на верхней лицевой поверхности – $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin \lambda_1 x_1 \sin \mu_1 x_2$, $q_I^\pm(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$, в рамках приближенных моделей Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко. В качестве тестовых взяты трехслойные пластины 1-1, 1-2 и 1-3, свойства которых приведены в таблицах 1, 2, 3. На иллюстрациях 1.2 приведены результаты вычисления нормализованных значений приближений перемещений $\hat{u}_1 = 100H^3 E_T u_1 / L_1^4$, $\hat{u}_3 = 100H^3 E_T u_3 / L_1^4$, и напряжения $\hat{\sigma}_{11} = H\sigma_{11}/q_0 L_1^2$ в пластинах 1-1, 1-2 и 1-3 в рамках модели Кирхгофа-Лява (левые графики, темно-зелёные кривые соответствуют пластинам 1-1 и 1-3, светло-зелёные – 1-2) и типа Тимошенко (правые графики, темно-оранжевые кривые соответствуют пластине 1-1, светло-оранжевые – 1-2, коричневые – 1-3). Пластины 1-1 и 1-3 отличаются только модулями сдвига слоёв, поэтому из общих соотношений модели Кирхгофа-Лява приближенные решения, основанные на этой модели, тождественно совпадают.

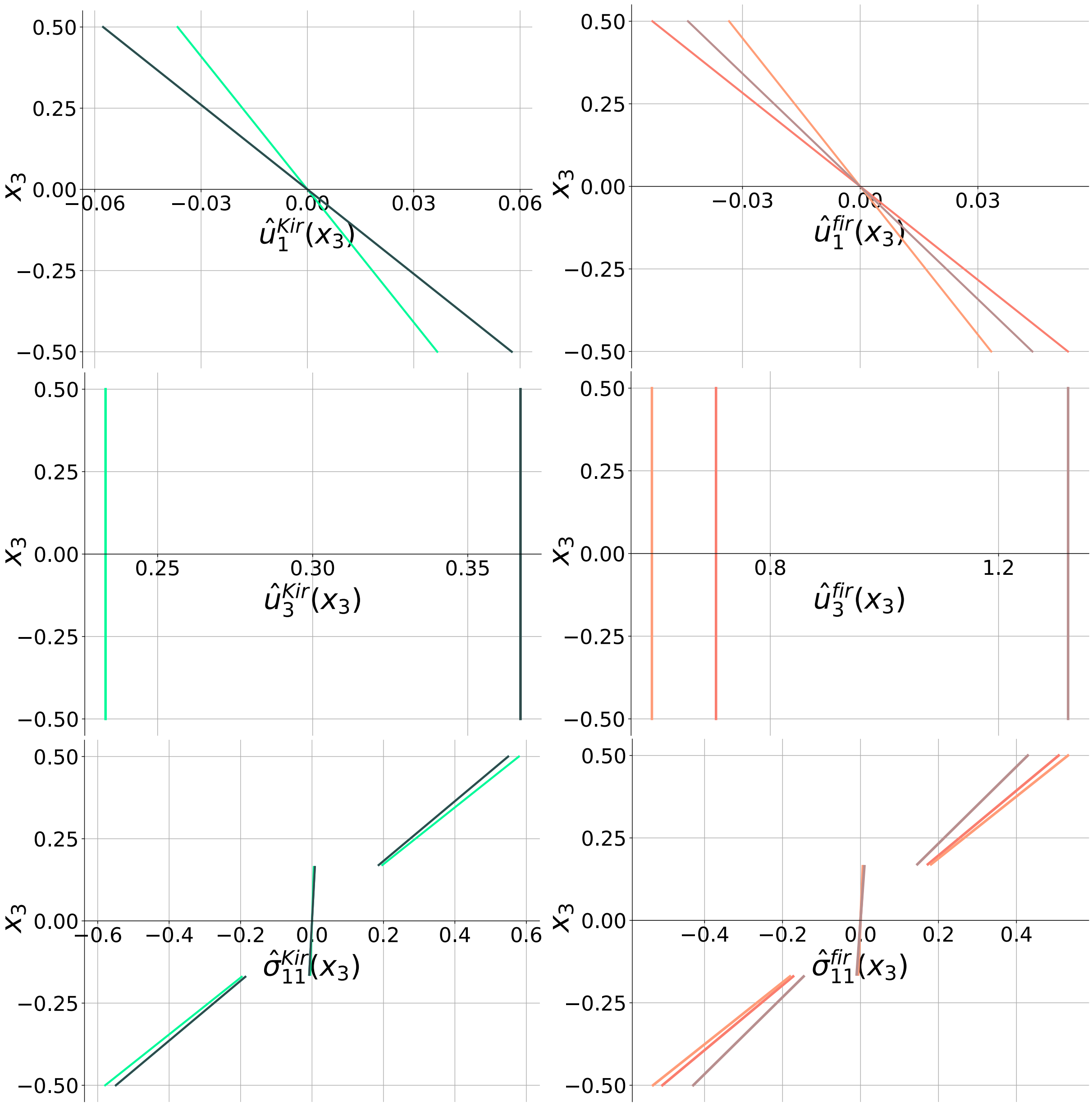

Рисунок 1.2 — основанные на моделях Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко приближения продольного перемещения $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$ (верхняя пара иллюстраций), поперечного перемещения $\hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3)$ (средняя пара) и продольного напряжения $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ (нижняя пара) при нагружении нормальной нагрузкой $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin \lambda_1 x_1 \sin \mu_1 x_2$, $q_I^{\pm}(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$ свободно опертых прямоугольных пластин 1-1 – 1-3

Таблица 1 — технические постоянные модельной пластины 1-1, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/10$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2, -H/6]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[H/6, H/2]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.2

Таблица 2 — технические постоянные модельной пластины 1-2, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/10$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2, -H/6]$	70	1	1	0.25	0.25/70	0.25/70	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	70	1	0.25/70	0.25	0.25/70	0.5	0.2	0.5
$[H/6, H/2]$	70	1	1	0.25	0.25/70	0.25/70	0.5	0.5	0.2

Таблица 3 — технические постоянные модельной пластины 1-3, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/10$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2, -H/6]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.05
$[-H/6, H/6]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.05	0.5
$[H/6, H/2]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.05

В Главе 1 приведены соотношения теорий пластин, основанных на кинематических гипотезах Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко, для неоднородной анизотропной линейно-упругой пластины. Для задачи о нагружении толстой слоистой пластины, которая в данной работе рассматривается в качестве основной, приближенные решения, построенные в рамках упомянутых гипотез, имеют ряд известных недостатков. В терминах критериев качества, приведённых во Введении, такие приближения удовлетворяют только двум из пяти критериев. Данные приближения позволяют описывать непрерывные по толщине поля перемещений и поперечных напряжений; число переменных, подлежащих определению, не зависит от количества слоёв материала. Однако качественные эффекты поля перемещений для слоистой пластины (в частности, изломы продольных перемещений в точках контакта слоев) данными моделями не описываются, что заложено в самой структуре моделей.

Глава 2. Построение решения задачи о нагружении свободно опертой по всем боковым сторонам линейно-упругой пластины методом структурных функций[6]

Общую постановку задачи о нагружении неоднородной пластины (1.1) можно рассмотреть как задачу определения напряжённо-деформированного состояния в теле произвольной неоднородности – квазистатическую задачу механики композитов. В данной работе строятся приближенные решения такой задачи при помощи метода структурных функций.

2.1 Метод структурных функций бесконечного порядка

Метод структурных функций – способ построения приближенного решения задачи механики композитов, основанный на установленной в работах [122] взаимосвязи решения квазистатической задачи в перемещениях для неоднородного тела, в наиболее общей постановке имеющей вид

$$[C_{ijkl}(\overrightarrow{x})u_{k,l}(\overrightarrow{x})]_{,j} + X_i(\overrightarrow{x}) = 0, \tag{2.1}$$
$$\sigma_{ij}(\overrightarrow{x}) = C_{ijkl}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{kl}(\overrightarrow{x}), \quad \varepsilon_{ij}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}[u_{i,j}(\overrightarrow{x}) + u_{j,i}(\overrightarrow{x})],$$
$$u_i\Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0,$$

и решения аналогичной с точки зрения внешних нагрузок и граничных условий квазистатической задачи в перемещениях для однородного тела той же формы,

$$C^0_{ijkl}v_{k,lj}(\overrightarrow{x}) + X_i(\overrightarrow{x}) = 0, \tag{2.2}$$
$$s_{ij}(\overrightarrow{x}) = C^0_{ijkl}e_{kl}(\overrightarrow{x}), \quad e_{ij}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}[v_{i,j}(\overrightarrow{x}) + v_{j,i}(\overrightarrow{x})], \tag{2.3}$$
$$v_i\Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad s_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0.$$

[6]При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [15—17].

Задачу (2.1) и неоднородное тело называют исходной задачей и исходным телом, задачу (2.2) и однородное тело – сопутствующей задачей и сопутствующим телом. Здесь Σ_u и Σ_σ – части границы с кинематическими и статическими граничными условиями, их объединение совпадает с полной границей Σ каждого из рассматриваемых тел; v_k, e_{ij}, s_{ij} – компоненты вектора перемещений, тензоров малых деформаций и напряжений в сопутствующем теле соответственно. В общем случае произвольной смешанной краевой задачи (2.1) упругие свойства сопутствующего тела C^0_{ijkl} – произвольные допустимые упругие постоянные с точки зрения термодинамических ограничений [143]. Контакт фаз композиционного материала в исходном теле предположим идеальным [143], не конкретизируя пока геометрию данного контакта.

Обозначим $G^{(t)}_m(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})$ компоненты тензора Грина исходного тела, то есть решение задачи в перемещениях о нагружении исходного тела сосредоточенной объемной силой единичной интенсивности [153]:

$$[C_{ijkl}G^{(t)}_{k,l}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})]_{,j} = -\delta_{it}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3), \tag{2.4}$$
$$G^{(t)}_i\Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad C_{ijkl}G^{(t)}_{k,l}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0.$$

Тогда формула

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + \int\limits_V G^{(i)}_{m|n}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x})[C^0_{mnkl} - C_{mnkl}(\overrightarrow{\xi})]e_{kl}(\overrightarrow{\xi})dV_\xi \tag{2.5}$$

задаёт решение задачи (2.1) [122], вертикальной чертой здесь обозначена производная по ξ_n. Соотношение (2.5) называют интегральной формулой. Непосредственной подстановкой (2.5) в соотношения исходной задачи (2.1) можно убедиться в том, что поле $u_i(\overrightarrow{x})$, заданное интегральной формулой (2.5), удовлетворяет уравнениям и граничным условиям задачи (2.1). Поскольку прямое вычисление компонент тензора Грина $G^{(i)}_m(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})$ для тела, упругие свойства которого произвольным образом зависят от координат, затруднительно, в работах ([1] и др.) построен и развит метод структурных функций.

2.1.1 Общие соотношения метода

Основное соотношение метода структурных функций – приближение интегральной формулы (2.5), основанное на представлении деформаций $e_{kl}(\overrightarrow{\xi})$

в виде ряда Тейлора $e_{kl}(\overrightarrow{\xi}) = \sum\limits_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} e_{kl,i_1 \ldots i_q}(x)(x_{i_1} - \xi_{i_1}) \ldots (x_{i_q} - \xi_{i_q})$:

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1 \ldots i_q}(\overrightarrow{x}) e_{kl,i_1 \ldots i_q}(\overrightarrow{x}). \tag{2.6}$$

Коэффициенты $N_{ikli_1 \ldots i_q}(\overrightarrow{x})$ называют структурными функциями, на них накладывается условие симметрии по второму и третьему индексу: $N_{ikli_1 \ldots i_q}(\overrightarrow{x}) \equiv N_{ilki_1 \ldots i_q}(\overrightarrow{x})$. В работах [1; 9] приведены выражения для структурных функций:

$$N_{ikli_1 \ldots i_q}(\overrightarrow{x}) = \int\limits_V \frac{1}{q!} G^{(i)}_{m|n}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x}) [C^0_{mnkl} - C_{mnkl}(\overrightarrow{\xi})](\xi_{i_1} - x_{i_1}) \ldots (\xi_{i_q} - x_{i_q}) \, dV_{\xi}. \tag{2.7}$$

Согласно формулам (2.7), структурные функции представляют собой взвешенные моменты тензора Грина. Из (2.7) напрямую следуют три свойства структурных функций:

1. структурные функции зависят от упругих свойств сопутствующего тела, но не от решения сопутствующей задачи, в том числе, не зависят от выбора приближенного решения сопутствующей задачи, его точности, характера приближения и т. п.,
2. структурные функции зависят от типа граничных условий исходной задачи (2.1), поскольку включают в себя компоненты тензора Грина исходной задачи, зависящие от типа граничных условий, но не зависят от объемных сил, приложенных к исходному телу.
3. в тривиальном случае $C^0_{ijkl} \equiv C_{ijkl}$ структурные функции тождественно обращаются в нуль.

Определение структурных функций по формулам (2.7) по-прежнему требует предварительного вычисления компонент тензора Грина, поэтому для вычисления структурных функций в работах [4; 9] и др. предлагается следующий подход.

Заметим, что в силу совпадения правых частей уравнений равновесия исходной (2.1) и сопутствующей (2.2) задач, имеем

$$[C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) u_{k,l}(\overrightarrow{x})]_{,j} = C^0_{ijkl} v_{k,lj}(\overrightarrow{x}). \tag{2.8}$$

Подставим в соотношение (2.8) формулу (2.6) для перемещений u_i[7]:

$$C^0_{ijkl}v_{k,lj} = C_{ijkl,j}v_{k,l} + C_{ijkl}v_{k,lj} + \sum_{q=0}^{\infty}\Big[[C_{ijkl}N_{kmni_1\dots i_q,l}]_{,j}e_{mn,i_1\dots i_q} + \tag{2.9}$$

$$+C_{ijkl}N_{kmni_1\dots i_q,l}e_{mn,i_1\dots i_qj} + [C_{ijkl}N_{kmni_1\dots i_q}]_{,j}e_{mn,i_1\dots i_ql} + C_{ijkl}N_{kmni_1\dots i_q}e_{mn,i_1\dots i_qlj}\Big]$$

Достаточное условие выполнения равенства (2.9) – совпадение коэффициентов при производных компонент тензора деформаций в сопутствующем теле e_{mn} соответствующего порядка – представляет собой рекуррентную систему уравнений в частных производных для нахождения структурных функций неоднородного тела [1]:

$$\begin{gathered}
[C_{ijkl}N_{kmn,l} + C_{ijmn}]_{,j} = 0, \\
[C_{ijmn}N_{mkli_1,n} + C_{ijmi_1}N_{mkl}]_{,j} = C^0_{ii_1kl} - [C_{ii_1mn}N_{mkl,n} + C_{ii_1kl}], \\
[C_{ijmn}N_{mkli_1\dots i_q,n} + C_{ijmi_q}N_{mkli_1\dots i_{q-1}}]_{,j} = \\
= -[C_{ii_qmn}N_{mkli_1\dots i_{q-1},n} + C_{ii_qmi_{q-1}}N_{mkli_1\dots i_{q-2}}],\ q \geqslant 2.
\end{gathered}\tag{2.10}$$

Общий вид граничных условий для системы уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (2.10) следует из соображений совпадения граничных условий исходной (2.1) и сопутствующей (2.2) задач,

$$u_i\Big|_{\Sigma_u} = v_i\Big|_{\Sigma_u}, \quad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = s_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma}. \tag{2.11}$$

Подставляя в кинематическое и статическое условие (2.11) основное соотношение метода структурных функций для перемещений (2.6), получаем

$$\sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1\dots i_q}v_{k,li_1\dots i_q}\Big|_{\Sigma_u} = 0,$$

$$\Big[C_{ijkl}v_{k,l} + \sum_{q=0}^{\infty}\Big(C_{ijmn}N_{mkli_1\dots i_q,n}e_{kl,i_1\dots i_q} + \quad C_{ijmn}N_{mkli_1\dots i_q}e_{kl,i_1\dots i_qn}\Big)\Big]n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} =$$

$$= C^0_{ijkl}v_{k,l}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma},$$

или, в рекуррентной по порядку производной v форме,

$$N_{ikli_1\dots i_q}v_{k,li_1\dots i_q}\Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad q \geqslant 0 \tag{2.12}$$

$$\Big[C_{ijkl}v_{k,l} + C_{ijmn}N_{mkl,n}v_{k,l}\Big]n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = C^0_{ijkl}v_{k,l}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma}, \quad q = 0 \tag{2.13}$$

$$\Big[C_{ijmn}N_{mkli_1\dots i_{q-1}}v_{k,li_1\dots i_{q-1}n} + C_{ijmn}N_{mkli_1\dots i_q,n}v_{k,li_1\dots i_q}\Big]n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \quad q \geqslant 1.$$

[7]Аргументы функций опущены для краткости там, где это возможно

Выше изложены два существующих подхода к вычислению структурных функций – прямое вычисление по формулам (2.7) и интегрирование системы (2.10), (2.12) и (2.13). Покажем, что они эквивалентны.

Утверждение. Структурные функции, определённые соотношениями (2.7), удовлетворяют соотношениям (2.10), (2.12) и (2.13).

Убедимся в истинности этого утверждения непосредственной проверкой: подставим структурные функции первого порядка, определённые соотношением (2.7) в первое уравнение системы (2.10). Тогда

$$[C_{ijkl}N_{kmn,l} + C_{ijmn}]_{,j} =$$
$$= \int\limits_V \Big[C_{ijkl}(\overrightarrow{x})G^{(k)}_{s|t,l}(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{x})[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]\Big]_{,j} dV_\xi + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = I_1,$$

а поскольку $[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]$ не зависит от $\overrightarrow{x}$, то

$$I_1 = \int\limits_V \Big[C_{ijkl}(\overrightarrow{x})G^{(k)}_{s|t,l}(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{x})\Big]_{,j}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]dV_\xi + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = I_2.$$

В силу теоремы Максвелла для компонент тензора Грина [153], $G^{(k)}_s(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{x}) = G^{(s)}_k(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\xi})$, и

$$I_2 = \int\limits_V \Big[C_{ijkl}(\overrightarrow{x})G^{(s)}_{k,l}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\xi})\Big]_{,j|t}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]dV_\xi + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = I_3.$$

В силу формулы производной произведения

$$I_3 = \int\limits_V \Big[\Big(C_{ijkl}(\overrightarrow{x})G^{(s)}_{k,l}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\xi})\Big)_{,j}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]\Big]_{|t} dV_\xi -$$
$$\int\limits_V \Big(C_{ijkl}(\overrightarrow{x})G^{(s)}_{k,l}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\xi})\Big)_{,j}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]_{|t} dV_\xi + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) =$$
$$-C_{itmn,t}(\overrightarrow{x}) + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = 0,$$

К слагаемому

$$\int\limits_V \Big[\Big(C_{ijkl}(\overrightarrow{x})G^{(s)}_{k,l}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\xi})\Big)_{,j}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]\Big]_{|t} dV_\xi$$

здесь применена теорема Гаусса-Остроградского, а также учтены уравнения и граничные условия для тензора Грина (2.4). Таким образом, проверено и выполнено первое уравнение системы (2.10) для N-функций, определенных соотношениями (2.7).

Преобразуем выражение для производной N-функции второго порядка, пользуясь тем, что координаты x_i – декартовы, и $x_{i,j} = \delta_{ij}$:

$$N_{kmni_1,l}(\overrightarrow{x}) = \int\limits_V [G^{(k)}_{s|t}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x})(\xi_{i_1} - x_{i_1})]_{,l}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\xi)]dV_\xi =$$

$$= \int\limits_V G^{(k)}_{s|t,l}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x})(\xi_{i_1} - x_{i_1})[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\xi)]dV_\xi -$$

$$- \int\limits_V G^{(k)}_{s|t}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\xi)]\delta_{i_1 l}dV_\xi$$

$$= \int\limits_V G^{(s)}_{k,l|t}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})(\xi_{i_1} - x_{i_1})[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\xi)]dV_\xi - N_{kmn}(\overrightarrow{x})\delta_{i_1 l},$$

и подставим его в левую часть второго уравнения системы (2.10):

$$[C_{ijkl}N_{kmni_1,l} + C_{ijki_1}N_{kmn}]_{,j} = [-C_{ijkl}N_{kmn}\delta_{i_1 l} + C_{ijki_1}N_{kmn}]_{,j} +$$

$$+ \int\limits_V [C_{ijkl}G^{(s)}_{k,l|t}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})]_{,j}[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\xi)](\xi_{i_1} - x_{i_1})dV_\xi -$$

$$- \int\limits_V C_{ijkl}G^{(k)}_{s|t,l}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x})[C^0_{stmn} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]\delta_{i_1 j}dV_\xi =$$

$$= [C^0_{itmn} - C_{itmn}(\overrightarrow{x})]\delta_{i_1 t} - C_{ii_1kl}N_{kmn,l}(\overrightarrow{x}).$$

Полученное выражение совпадает с правой частью второго уравнения системы (2.10).

Для проверки выполнения уравнений старших порядков преобразуем свёртку $[C_{ijmn}N_{mkli_1\ldots i_q,n}]_{,j}$:

$$
\begin{gathered}
[C_{ijmn}N_{mkli_1\ldots i_q,n}]_{,j} = \\
\int\limits_V \left[C_{ijmn}(\vec{x})G^{(m)}_{s|t,n}(\vec{\xi},\vec{x})[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_q}-x_{i_q})}{q!}\right]_{,j} dV_\xi - \\
-\int\limits_V \left[C_{ijmn}(\vec{x})G^{(m)}_{s|t}(\vec{\xi},\vec{x})[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\delta_{i_q n}\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_{q-1}}-x_{i_{q-1}})}{(q-1)!}\right]_{,j} dV_\xi = \\
= \int\limits_V \left[C_{ijmn}(\vec{x})G^{(m)}_{s|t,n}(\vec{\xi},\vec{x})\right]_{,j}[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_q}-x_{i_q})}{q!} dV_\xi + \\
+\int\limits_V \left[C_{ijmn}(\vec{x})G^{(m)}_{s|t,n}(\vec{\xi},\vec{x})[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\delta_{i_q j}\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_{q-1}}-x_{i_{q-1}})}{(q-1)!}\right] dV_\xi - \\
-[C_{ijmi_q}N_{mkli_1\ldots i_{q-1}}]_{,j} = -[C_{ijmi_q}N_{mkli_1\ldots i_{q-1}}]_{,j} - \\
-\int\limits_V \delta_{is}\left[\delta(\vec{x}-\vec{\xi})[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_q}-x_{i_q})}{q!}\right]_{|t} dV_\xi + \\
+\int\limits_V \delta_{is}\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\left[[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_q}-x_{i_q})}{q!}\right]_{|t} dV_\xi + \\
+\int\limits_V \left[C_{ijmn}(\vec{x})\left[G^{(m)}_{s|t}(\vec{\xi},\vec{x})[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\delta_{i_q j}\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_{q-1}}-x_{i_{q-1}})}{(q-1)!}\right]_{,n} dV_\xi - \\
-\int\limits_V \left[C_{ijmn}(\vec{x})G^{(m)}_{s|t}(\vec{\xi},\vec{x})[C^0_{stkl} - C_{stkl}(\vec{\xi})]\delta_{i_q j}\delta_{i_{q-1} n}\frac{(\xi_{i_1}-x_{i_1})\ldots(\xi_{i_{q-2}}-x_{i_{q-2}})}{(q-2)!}\right] dV_\xi .
\end{gathered}
$$

Здесь использовано правило дифференцирования произведения, а также подставлена правая часть уравнений для компонент тензора Грина (2.4) и применена теорема Максвелла. Учитывая свойства δ-функции и формулы для N-функций (2.7), получаем

$$
\begin{aligned}
&[C_{ijmn}N_{mkli_1\ldots i_q,n}]_{,j} = \\
&\qquad = -[C_{ijmi_q}N_{mkli_1\ldots i_{q-1}}]_{,j} - [C_{ii_qmn}N_{mkli_1\ldots i_{q-1},n} + C_{ii_qmi_{q-1}}N_{mkli_1\ldots i_{q-2}}],
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

что совпадает с заключительным уравнением системы (2.10) и завершает доказательство утверждения: выражения для структурных функций, полученные из интегральной формулы, действительно удовлетворяют рекуррентной системе. Удовлетворение граничным условиям проверяется аналогично.

Утверждение. Решение системы уравнений в частных производных (2.10) с граничными условиями (2.12)-(2.13) единственно.

Данное утверждение следует из единственности решения уравнений типа $[C_{ijkl}A_{kj_1\ldots j_q,l}]_{,j} + B_{ij_1\ldots j_q} = 0$, где $B_{ij_1\ldots j_q}$ – произвольное тензорное поле, так как уравнения системы (2.10), разрешенные относительно старших по порядку структурных функций, имеют такой вид.

Следствие 1. Функции, удовлетворяющие системе (2.10) с граничными условиями (2.12)-(2.13), совпадают со структурными функциями (2.7), определенными из интегральной формулы (2.5). Два приведённых подхода к вычислению структурных функций (как взвешенных моментов тензора Грина и как решение системы уравнений в частных производных) эквивалентны. В дальнейших выкладках мы используем только второй подход.

Следствие 2. Свойства 1-3, отмеченные выше для структурных функций, вычисленных по формуле (2.7), – общие свойства структурных функций.

2.2 Соотношения метода структурных функций конечного порядка для пластины в предположении о приближенном решении сопутствующей задачи

Рассмотрим теперь общую постановку задачи о нагружении неоднородной пластины, описанную в Главе 1 (1.1), как частный случай постановки задачи механики композитов (2.1), и отметим особенности применения метода структурных функций к этой задаче. Постановка сопутствующей задачи в данном случае принимает вид

$$\begin{gathered} C^0_{ijkl} v_{k,lj}(\overrightarrow{x}) + X_i(\overrightarrow{x}) = 0, \\ s_{ij}(\overrightarrow{x}) = C^0_{ijkl} e_{kl}(\overrightarrow{x}), \quad e_{ij}(\overrightarrow{x}) = J^0_{ijkl} s_{kl}(\overrightarrow{x}), \\ e_{ij}(\overrightarrow{x}) = [v_{i,j}(\overrightarrow{x}) + v_{j,i}(\overrightarrow{x})]/2, \\ s_{ij}(x_1, x_2, \cdot) n_j \Big|_{x_3 = \pm h/2} = q_i^{\pm}(x_1, x_2), \quad s_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i, \quad v_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0. \end{gathered}$$

Для применения метода структурных функций необходимо ограничиться частичной суммой ряда в соотношении (2.6). Будем называть методом структурных функций конечного порядка $Q+1$ вариант метода, основанный на приближении перемещений в исходном теле частичной суммой ряда (2.6),

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{Q} N_{ikli_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}) e_{kl,i_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}), \quad 0 \leqslant Q < \infty. \tag{2.15}$$

Предположим, что решение сопутствующей задачи (2.2) найдено в общей полиномиальной форме приближенного решения задачи о нагружении однородной пластины (1.2):

$$v_i(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} x_3^r \varphi_i^{(r)}(x_1, x_2), \tag{2.16}$$

где $\{\varphi_i^{(r)}(x_1, x_2)\}_{r=0}^R$ образуют систему кинематических переменных в приближенной модели, выбранной для решения сопутствующей задачи. Подставим вид решения (2.16) в соотношения метода структурных функций конечного порядка (2.15), запишем уравнения и получим общий вид граничных условий для отыскания структурных функций пластины.

С учётом вида решения сопутствующей задачи (2.15) представление (2.16) принимает вид

$$\begin{gathered}
u_i(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} \Bigg[x_3^r \varphi_i^{(r)}(x_1, x_2) + \sum_{q=0}^{Q} \Bigg(x_3^r N_{ikLI_1\ldots I_q} \varphi_{k,LI_1\ldots I_q}^{(r)}(x_1, x_2) + \\
r x_3^{r-1} \big[N_{ik3I_1\ldots I_q} \varphi_{k,I_1\ldots I_q}^{(r)}(x_1, x_2) + q N_{ikLI_1\ldots I_{q-1}3} \varphi_{k,I_1\ldots I_{q-1}L}^{(r)}(x_1, x_2) \big] + \\
r(r-1) x_3^{r-2} \big[q N_{ik3I_1\ldots I_{q-1}3} \varphi_{k,I_1\ldots I_{q-1}}^{(r)} + q(q-1) N_{ikLI_1\ldots I_{q-2}33} \varphi_{k,I_1\ldots I_{q-2}L}^{(r)}/2 \big] + \\
+ \cdots + r(r-1)\ldots(r-q) x_3^{r-q-1} N_{ik3\ldots3} \varphi_k^{(r)}(x_1, x_2) \Bigg) \Bigg].
\end{gathered} \tag{2.17}$$

С учётом (2.17) граничные условия для структурных функций (2.12), (2.13) принимают вид

$$\begin{gathered}
\Bigg[N_{ikLI_1\ldots I_q} \sum_{r=0}^{R} x_3^r \varphi_{k,LI_1\ldots I_q}^{(r)} + N_{ik3I_1\ldots I_q} \sum_{r=0}^{R} r x_3^{r-1} \varphi_{k,I_1\ldots I_q}^{(r)} + \cdots + \\
+ N_{ik\underbrace{3\ldots3}_{q+1}} \sum_{r=0}^{R} r(r-1)\ldots(r-q) x_3^{r-q-1} \varphi_k^{(r)} \Bigg] \Bigg|_{\Sigma_u} = 0, \quad q = 0..Q;
\end{gathered} \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered}
\Bigg[\Big(C_{ijkL} + C_{ijmn} N_{mkL,n} - C_{ijkL}^0 \Big) \sum_{r=0}^{R} x_3^r \varphi_{k,L}^{(r)} + \\
+ \Big(C_{ijk3} + C_{ijmn} N_{mk3,n} - C_{ijk3}^0 \Big) \sum_{r=0}^{R} r x_3^{r-1} \varphi_k^{(r)} \Bigg] n_j \Bigg|_{\Sigma_\sigma} = 0,
\end{gathered}$$

$$\Big[\Big(C_{ijmI_q}N_{mkLI_1\ldots I_{q-1}}+C_{ijmn}N_{mkLI_1\ldots I_q,n}\Big)\sum_{r=0}^{R}x_3^r\varphi_{k,LI_1\ldots I_q}^{(r)}+\dots+$$

$$+\Big(C_{ijm3}N_{mk\underbrace{3\ldots3}_{q}}+C_{ijmn}N_{mk\underbrace{3\ldots3}_{q+1},n}\Big)\sum_{r=0}^{R}r\ldots(r-q)x_3^{r-q-1}\varphi_k^{(r)}\Big]n_j\Big|_{\Sigma_\sigma}=0,$$

$$q=1..Q-1,$$

$$\Big[C_{ijmN}N_{mkLI_1\ldots I_Q}\sum_{r=0}^{R}x_3^r\varphi_{k,LI_1\ldots I_QN}^{(r)}+\dots+$$

$$+C_{ijm3}N_{mk\underbrace{3\ldots3}_{Q+1}}\sum_{r=0}^{R}r\ldots(r-Q-1)x_3^{r-Q-2}\varphi_k^{(r)}\Big]n_j\Big|_{\Sigma_\sigma}=0.$$

Назовём **тривиальным** условие (2.12) для функции $N_{ikli_1\ldots i_q}$, если соответствующая производная $v_{k,li_1\ldots i_q}(\overrightarrow{x})\equiv 0\,\forall\,\overrightarrow{x}\in\Sigma_u$, и **нетривиальным** для соответствующей функции в противном случае. Из нетривиального условия на границе Σ_u автоматически следует условие $N_{ikli_1\ldots i_q}|_{\Sigma_u}=0$ для соответствующих значений индексов. Для того, чтобы корректно вычислить все структурные функции, необходимы нетривиальные условия на каждую из функций. Если порядок модели, используемой для решения сопутствующей задачи $R<Q+2$, это требование заведомо нарушается, так как часть $v_{k,li_1\ldots i_q}(\overrightarrow{x})\equiv 0\,\forall\,\overrightarrow{x}$. В этом случае система условий на структурные функции оказывается недоопределенной. Однако в случае $R<Q+2$ структурные функции, которые не допускают определения из системы уравнений и граничных условий, не входят в приближенное решения исходной задачи (2.15) [из тех же соображений], поэтому приближенное решение в принципе построить возможно – ниже подобные приближения построены и рассмотрены. Применительно к терминологии моделей пластин, необходимо, чтобы порядок по деформациям полиномиальной модели пластины, используемой для решения сопутствующей задачи, был не ниже, чем порядок метода структурных функций. Таким образом, алгоритм совместного использования метода структурных функций и полиномиальных моделей для сопутствующей пластины можно изложить так.

1. Выбрать параметры R и Q с учетом рекомендуемого соотношения $R\geqslant Q+2$.
2. Поставить исходную и сопутствующую задачи.

3. Выделить нетривиальные граничные условия для структурных функций.
4. Определить общий вид структурных функций, отличных от тождественно нулевых. Выбрать упругие свойства сопутствующего тела.
5. Построить итоговые приближенные решения исходной задачи.

Поскольку метод структурных функций и асимптотический метод (метод малого геометрического параметра) родственны, при определенных значениях параметров метода структурных функций кинематические соотношения, полученные методом структурных функций, совпадают с известными кинематическими соотношениями, построенными асимптотическим методом. Так, соотношения, подобные построенным в работе [112], можно получить, выбрав первый порядок метода структурных функций, основанное на модели Тимошенко приближение решения сопутствующей задачи, и свойства сопутствующей пластины – такими, что соответствующие жесткости совпадают с определенными формулами [112, соотн. (44)]. Соотношения, подобные построенным в работе [107] для приближения третьего порядка для изотропной пластины, можно получить, выбрав третий порядок МСФ, основанное на модели Кирхгофа-Лява решение сопутствующей задачи и жесткости сопутствующей пластины в соответствии с формулой [107, соотн. (31)].

2.3 Решение задачи о квазистатическом нагружении линейно-упругой ортотропной пластины

2.3.1 Постановка исходной и сопутствующей задачи

Рассмотрим прямоугольную пластину с линейными размерами $L_1 * L_2 * H$ в декартовых координатах x_1, x_2, x_3, начало которых расположено в левом нижнем углу серединной плоскости пластины, а оси параллельны её сторонам. Пластина составлена из N ортотропных в осях координат слоёв, компоненты тензора C_{ijkl} зависят только от поперечной координаты. Пластина свободно оперта на контуре, объемные силы отсутствуют[8], а лицевые поверхности подвергнуты воздействию распределенных нагрузок $q_i^{\pm}(x_1, x_2)$, где верхний индекс $\pm$ указывает на верхнюю или нижнюю лицевую поверхность, а нижний индекс i – направление воздействия нагрузки (эти обозначения аналогичны Главе 1). Схема задачи приведена на рис. 2.1. Постановка задачи о нагружении неоднородной пластины (1.1) в описанном случае принимает вид [3; 10; 11]

$$
\begin{gathered}
[C_{ijkl}(x_3)\, u_{k,l}(\overrightarrow{x})]_{,j} = 0, \\
\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) = q_i^{\pm}(x_1, x_2), \\
x_1 = 0, L_1: \quad \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0,\ u_2(\cdot, x_2, x_3) = 0,\ u_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\
x_2 = 0, L_2: \quad \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0,\ u_1(x_1, \cdot, x_3) = 0,\ u_3(x_1, \cdot, x_3) = 0.
\end{gathered}
\tag{2.19}
$$

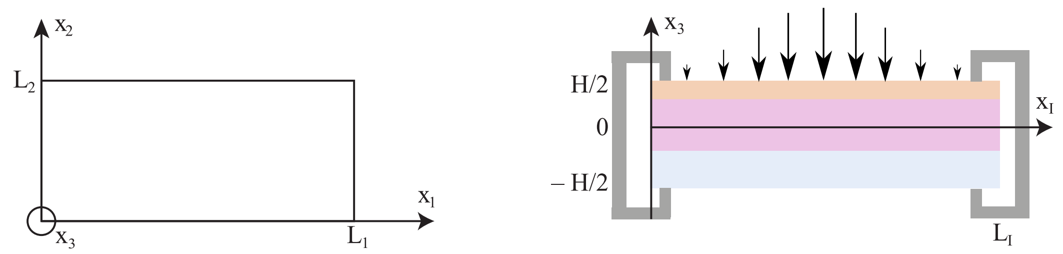

Рисунок 2.1 — Вид сверху на серединную плоскость и поперечное сечение плоскостью, параллельной координатной плоскости Ox_Ix_3, пластины (показан вариант реализации закрепления)

Сопутствующей для (2.19) является аналогичная с точки зрения геометрии, граничных условий и внешних нагрузок задача об изгибе однородной пластины:

$$
\begin{gathered}
C^0_{ijkl}\, v_{k,lj}(\overrightarrow{x}) = 0, \\
s_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) = q_i^{\pm}(x_1, x_2), \\
x_1 = 0, L_1: \quad s_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0,\ v_2(\cdot, x_2, x_3) = 0,\ v_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\
x_2 = 0, L_2: \quad s_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0,\ v_1(x_1, \cdot, x_3) = 0,\ v_3(x_1, \cdot, x_3) = 0.
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

Упругие свойства сопутствующего тела предполагаются постоянными, удовлетворяющими только термодинамическим ограничениям на компоненты тензора

[8]Случай отсутствия объемных сил рассматривается в силу отмеченного в разделе 2.1. свойства структурных функций не зависеть от приложенных объемных сил

упругих модулей ортотропного материала, оси ортотропии которого совпадают с координатными осями – тензор C^0_{ijkl} предполагается положительно определенным. В силу ортотропии $C_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0, C_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0,\ C^0_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0, C^0_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0$; далее будут выбраны конкретные значения C^0_{ijkl}. Тензору упругих свойств сопутствующего тела обратен тензор упругих податливостей J^0_{ijkl}. Сопутствующую задачу можно рассматривать в рамках известных подходов к моделированию поля перемещений в упругих пластинах, каждый из которых позволяет получить приближение решения задачи (2.20) с некоторой точностью. Ниже применены три из них – построены приближенные решения сопутствующей задачи, основанные на изложенных в Главе 1 теории Кирхгофа-Лява и теории типа Тимошенко; также применен подход Пагано, позволяющий построить приближенное решение сопутствующей задачи в трехмерной постановке. Все три упомянутых подхода позволяют получить решение задачи (2.20) методом Навье [10; 53; 64; 151] и др., в виде

$$v_1(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_1^{mn}(x_3)\cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2), \tag{2.21}$$

$$v_2(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_2^{mn}(x_3)\sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),$$

$$v_3(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_3^{mn}(x_3)\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2), \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{L_1}, \mu_n = \frac{\pi n}{L_2}.$$

Конкретный вид функций V_i^{mn} зависит от выбранного приближенного решения сопутствующей задачи и будет приведен ниже. Все три подхода также предполагают использование разложения распределенных на лицевых поверхностях нагрузок в ряд по тем же системам тригонометрических функций (1.25).

2.3.1.1 Приближенное решение сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява

Конкретизируем вид приближенного решения (2.21) сопутствующей задачи, основанного на модели Кирхгофа-Лява (раздел 1.3). В этом случае вид зависимости перемещений от поперечной координаты определяется соотношением (1.9), и разложения (2.21) принимают вид

$$v_1^{Kir}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(W_1^{mn} - x_3\lambda_m W_3^{mn}\right)\cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2), \tag{2.22}$$
$$v_2^{Kir}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(W_2^{mn} - x_3\mu_n W_3^{mn}\right)\sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),$$
$$v_3^{Kir}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} W_3^{mn}\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

здесь W_i^{mn} – наборы констант, которые необходимо определить; причём

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} W_1^{mn}\cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2) = w_1(x_1, x_2), \tag{2.23}$$
$$\sum_{m,n=0}^{\infty} W_2^{mn}\sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2) = w_2(x_1, x_2),$$
$$\sum_{m,n=0}^{\infty} W_3^{mn}\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2) = w_3(x_1, x_2)$$

– компоненты вектора перемещений в серединной плоскости сопутствующей пластины [см. раздел 1.3]. Вычисление W_i^{mn} для сопутствующего тела представляет собой частный случай задачи, рассмотренной в разделе 1.5: в силу однородности материала уравнения равновесия сопутствующей пластины в модели Кирхгофа-Лява имеют вид (1.16), а уравнения для нахождения констант W_i^{mn}, полученные подстановкой вида решения (2.23) в уравнения (1.16) –

$$\left[\lambda_m^2 h(J^0)^{-1}_{1111} + \mu_n^2 h(J^0)^{-1}_{1212}\right)W_1^{mn} + h[(J^0)^{-1}_{1122} + (J^0)^{-1}_{1212}]\lambda_m\mu_n W_2^{mn} = q_1^{mn},$$
$$\left[\lambda_m^2 h(J^0)^{-1}_{1212} + \mu_n^2 h(J^0)^{-1}_{2222}\right]W_2^{mn} + h[(J^0)^{-1}_{1122} + (J^0)^{-1}_{1212}]\lambda_m\mu_n W_1^{mn} = q_2^{mn},$$
$$h^3\left[(J^0)^{-1}_{1111}\lambda_m^4 + (J^0)^{-1}_{2222}\mu_n^4 + 2\big((J^0)^{-1}_{1122} + 2(J^0)^{-1}_{1212}\big)\lambda_m^2\mu_n^2\right]/12 = q^{mn}. \tag{2.24}$$

2.3.1.2 Приближенное решение сопутствующей задачи в рамках модели типа Тимошенко

Построим приближенное решение сопутствующей задачи (2.21), основанные на теории типа Тимошенко [раздел 1.4]. Тогда зависимость перемещений

v_i от поперечной координаты определяется соотношением (1.18), и (2.21) принимает вид

$$v_1^{Tim}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \big(Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - \Gamma_1^{mn})\big) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \tag{2.25}$$

$$v_2^{Tim}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \big(Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - \Gamma_2^{mn})\big) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$v_3^{Tim}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} Y_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2).$$

Наборы констант Y_i^{mn}, Γ_i^{mn} подлежат определению из уравнений равновесия пластины типа Тимошенко (1.24), причём

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_1^{mn}, \Gamma_1^{mn}] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) = [y_1, \gamma_1](x_1, x_2), \tag{2.26}$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} [Y_2^{mn}, \Gamma_2^{mn}] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2) = [y_2, \gamma_2](x_1, x_2),$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} Y_3^{mn} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2) = y_3(x_1, x_2)$$

– разложения по тригонометрическому базису кинематических переменных теории типа Тимошенко (разд. 1.4). Система линейных алгебраических уравнений (2.27) для вычисления наборов констант Y_i^{mn}, Γ_i^{mn} получена подстановкой выражений (2.26) в уравнения равновесия теории типа Тимошенко для однородной пластины (1.24):

$$\big[\lambda_m^2 h (J^0)^{-1}_{1111} + \mu_n^2 h (J^0)^{-1}_{1212}\big] Y_1^{mn} + h\big[(J^0)^{-1}_{1122} + (J^0)^{-1}_{1212}\big] \lambda_m \mu_n Y_2^{mn} = q_1^{mn}, \tag{2.27}$$

$$\big[\lambda_m^2 h (J^0)^{-1}_{1212} + \mu_n^2 h (J^0)^{-1}_{2222}\big] Y_2^{mn} + h\big[(J^0)^{-1}_{1122} + (J^0)^{-1}_{1212}\big] \lambda_m \mu_n Y_1^{mn} = q_2^{mn},$$

$$5\big[\lambda_m H C^0_{1313} \Gamma_1^{mn} + \mu_n h C^0_{2323} \Gamma_2^{mn}\big]/6 = q_3^{mn},$$

$$h^3\Big[\big(-(J^0)^{-1}_{1111}\lambda_m^3 - \big[(J^0)^{-1}_{1122} + 2(J^0)^{-1}_{1212}\big]\lambda_m \mu_n^2\big) Y_3^{mn}\Big]/12 + 5hC^0_{1313}\Gamma_1^{mn}/6+$$
$$h^3\Big[\big[(J^0)^{-1}_{1111}\lambda_m^2 + (J^0)^{-1}_{1212}\mu_n^2\big]\Gamma_1^{mn} + \big[(J^0)^{-1}_{1122} + (J^0)^{-1}_{1212}\big]\lambda_m \mu_n \Gamma_2^{mn}\Big]/12 = m_1^{mn},$$

$$h^3\Big[\big(-(J^0)^{-1}_{2222}\mu_n^3 - \big[(J^0)^{-1}_{1122} + 2(J^0)^{-1}_{1212}\big]\lambda_m^2 \mu_n\big) Y_3^{mn}\Big] + 5hC^0_{2323}\Gamma_2^{mn}/6+$$
$$h^3\Big[\big[(J^0)^{-1}_{1212}\lambda_m^2 + (J^0)^{-1}_{2222}\mu_n^2\big]\Gamma_2^{mn} + \big[(J^0)^{-1}_{1122} + (J^0)^{-1}_{1212}\big]\lambda_m \mu_n \Gamma_1^{mn}\Big]/12 = m_2^{mn}.$$

2.3.1.3 Решение сопутствующей задачи по методу Пагано

Метод Пагано построен в статье [3] для решения в трехмерной постановке задачи о пластине, нагруженной только нормальной поверхностной силой на верхней лицевой поверхности, то есть $q_I^{\pm}(x_1, x_2) = 0, q_3^{-}(x_1, x_2) = 0$, и не нагруженной объемными силами. Позже этот метод был обобщен на случай динамической и связанной задачи для функционально-градиентных материалов [154; 155]. Ниже мы опишем основные шаги данного метода, обобщенные на случай произвольных нагружений $q_i^{\pm}(x_1, x_2)$. В представлении (2.21) функции $V_i^{mn}(x_3)$ изначально принимаются равными $V_i^{mn*}e^{sx_3}$, где V_i^{mn*} – константы. Произведения $\{\sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2)e^{sx_3}\}_{m,n,s}$, $\{\cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)e^{sx_3}\}_{m,n,s}$, $\{\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)e^{sx_3}\}_{m,n,s}$ внутри каждого из наборов линейно независимы. Поэтому подстановка формы решения

$$v_1(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_1^{mn*} e^{sx_3} \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

$$v_2(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_2^{mn*} e^{sx_3} \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$v_3(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_3^{mn*} e^{sx_3} \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2)$$

в уравнения равновесия в перемещениях (2.20) приводит к набору однородных за счёт отсутствия объемных сил систем линейных алгебраических уравнений 3*3 для определения V_i^{mn*} с параметром s; значения m, n для каждой системы фиксированы. В силу их физического смысла нас интересуют нетривиальные наборы констант V_i^{mn*}, следовательно, значения параметра s подбираются из соображений обращения в ноль определителя упомянутых систем – путем решения бикубического уравнения. Это бикубическое уравнение сводится к кубическому, которое для ортотропных материалов имеет 3 вещественных корня s_r^2, $r = 1..3$, во всех нижеследующих формулах этого раздела нижний индекс $_r$ указывает порядковый номер корня уравнения. Численный критерий вещественности корней в терминах упругих свойств материала приведен в исходной работе [3]. В результате всех вычислений приближение перемещений и поперечных напряжений в сопутствующей задаче (2.20) определяется выражениями

$$v_1^{Pag}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[F_r^{mn} C_r^{mn}(x_3) + G_r^{mn} S_r^{mn}(x_3)\right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \tag{2.28}$$

$$v_2^{Pag}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} L_r^{mn}\left[F_r^{mn} C_r^{mn}(x_3) + G_r^{mn} S_r^{mn}(x_3)\right] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$v_3^{Pag}(\overrightarrow{x}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} R_r^{mn}\left[\alpha_r^{mn} F_r^{mn} S_r^{mn}(x_3) + G_r^{mn} C_r^{mn}(x_3)\right] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

$$s_{13}^{Pag} = C_{1313}^0 \sum_{m,n=0}^{\infty} (m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn})\times \tag{2.29}$$
$$\left[\alpha_r^{mn} F_r^{mn} S_r^{mn}(x_3) + G_r^{mn} C_r^{mn}(x_3)\right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

$$s_{23}^{Pag} = C_{2323}^0 \sum_{m,n=0}^{\infty} (m_r^{mn} L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn})\times$$
$$\left[\alpha_r F_r^{mn} S_r^{mn}(x_3) + G_r^{mn} C_r^{mn}(x_3)\right] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$s_{33}^{Pag} = \sum_{m,n=0}^{\infty} (F_r^{mn} C_r^{mn} + G_r^{mn} S_r^{mn})\times$$
$$(-\lambda_m C_{1133}^0 - \mu_n L_r^{mn} C_{2233}^0 + \alpha_r^{mn} m_r^{mn} R_r^{mn} C_{3333}^0) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2)$$

здесь $m_r^{mn} = |s_r^{mn}|, \alpha_r^{mn} = \operatorname{sgn} s_r^{mn}$. В зависимости от значения α_r^{mn}

$$\alpha_r^{mn} = -1: \quad C_r^{mn}(x_3) = \cos(m_r^{mn} x_3), \quad S_r^{mn}(x_3) = \sin(m_r^{mn} x_3),$$

$$\alpha_r^{mn} = 1: \quad C_r^{mn}(x_3) = \cosh(m_r^{mn} x_3), \quad S_r^{mn}(x_3) = \sinh(m_r^{mn} x_3).$$

$L_r^{mn}, R_r^{mn}, J_r^{mn}$ – вторичные величины от α_r^{mn}, m_r^{mn} и упругих свойств сопутствующей пластины, а F_r^{mn}, G_r^{mn} – константы, которые определяются из системы линейных алгебраических уравнений, образованной граничными условиями в терминах компонент разложений по тригонометрическим базисам поперечных напряжений (2.29) на лицевых поверхностях:

$$C_{1313}^0(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn})\left[\alpha_r^{mn} F_r^{mn} S_r^{mn}(\pm h/2) + G_r^{mn} C_r^{mn}(\pm h/2)\right] = q_1^{\pm|mn},$$

$$C^0_{2323}(m^{mn}_r L^{mn}_r + \mu_n R^{mn}_r)\big[\alpha_r F^{mn}_r S^{mn}_r(\pm h/2) + G^{mn}_r C^{mn}_r(\pm h/2)\big] = q_2^{\pm|mn},$$

$$\big[F^{mn}_r C^{mn}_r(\pm h/2) + G^{mn}_r S^{mn}_r(\pm h/2)\big]\times$$
$$\big[-\lambda_m C^0_{1133} - \mu_n L^{mn}_r C^0_{2233} + \alpha^{mn}_r m^{mn}_r R^{mn}_r C^0_{3333}\big] = q_3^{\pm|mn}.$$

2.3.2 Приближенные решения задачи о квазистатическом нагружении линейно-упругой ортотропной пластины при помощи метода структурных функций первого порядка

Построим приближенные решения задачи (2.19) методом структурных функций первого порядка: будем искать перемещения в исходной пластине в виде

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + N_{ikl}(x_3)v_{k,l}(\overrightarrow{x}), \tag{2.30}$$

предполагая, что перемещения в сопутствующем теле имеют форму (2.21). Найдём структурные функции пластины, построим их графики для тестовых пластин, запишем явные формулы для искомых приближенных решений.

2.3.2.1 Структурные функции первого порядка

Для нахождения структурных функций первого порядка необходимо дополнить первое уравнение рекуррентной системы (2.10) граничными условиями, которые следуют из совпадения граничных условий исходной и сопутствующей задач (2.19), (2.20). Последовательно конкретизируем имеющиеся условия для структурных функций первого порядка

1. Первое уравнение рекуррентной системы (2.10) принимает следующий вид, если учесть, что упругие свойства исходной пластины зависят только от x_3 :

   $$C_{ijkl}(x_3)N_{kmn,lj}(x_1, x_2, x_3) + C_{i3kl,3}(x_3)N_{kmn,l}(x_1, x_2, x_3) + C_{i3mn,3}(x_3) = 0,$$

   следовательно, $N_{kmn,lj}$ зависят только от x_3.

2. Совпадение граничных условий в напряжениях на верхней и нижней лицевых поверхностях $x_3 = \pm h/2$:

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm\, h/2) = s_{i3}(x_1, x_2, \pm\, h/2)$$

приводит к условиям совпадения коэффициентов при производных первого порядка – $v_{m,n}$:

$$\begin{gathered}\big[C_{i3mn}(\pm h/2) + C_{i3kl}(\pm h/2) N_{kmn,l}(x_1, x_2, \pm\, h/2)\big] \times \\ v_{m,n}(x_1, x_2, \pm\, h/2) = C^0_{i3mn} v_{m,n}(x_1, x_2, \pm\, h/2),\end{gathered}$$

и к условиям совпадения коэффициентов при производных второго порядка – $v_{m,nl}$:

$$C_{i3kl}(\pm h/2) N_{kmn}(x_1, x_2, \pm\, h/2) v_{m,nl}(x_1, x_2, \pm\, h/2) = 0.$$

Поскольку $v_{m,n}(x_1, x_2, \pm h/2)$, заданные формой (2.21) – в общем случае отличные от тождественно нулевой функции, можно заключить, что N_{kmn} зависят только от x_3.

3. Совпадение кинематических граничных условий на торцах $x_1 = 0, x_1 = L_1$ приводит к условиям

$$\begin{aligned}v_2(\cdot, x_2, x_3) + N_{2kl}(x_3) v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) &= v_2(\cdot, x_2, x_3),\\ v_3(\cdot, x_2, x_3) + N_{3kl}(x_3) v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) &= v_3(\cdot, x_2, x_3),\end{aligned}$$

а следовательно, необходимо, чтобы на этих торцах обращались в ноль суммы

$$N_{2kl}(x_3) v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad N_{3kl}(x_3) v_{k,l}(\cdot, x_2, x_3) = 0.$$

Некоторые слагаемые в этих суммах – заведомо нулевые на этих торцах в силу вида решения сопутствующей задачи (2.21): раскроем сумму в первом из равенств.

$$N_{2kl}(x_3)v_{k,l}(x_1,x_2,x_3)\Big|_{x_1=0,\,L_1} =$$
$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\Big[\Big(-\lambda_m N_{211}(x_3)V_1^{mn}(x_3)-\mu_n N_{222}(x_3)V_2^{mn}+$$
$$N_{233}(x_3)V_{3,3}^{mn}(x_3)\Big)\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)+$$
$$N_{213}(x_3)\Big(\lambda_m V_3^{mn}(x_3)+V_{1,3}^{mn}(x_3)\Big)\cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)+$$
$$N_{223}(x_3)\Big(\mu_n V_3^{mn}(x_3)+V_{2,3}^{mn}(x_3)\Big)\sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2)+$$
$$N_{212}(x_3)\Big(\mu_n V_1^{mn}(x_3)+\lambda_m V_2^{mn}(x_3)\Big)\cos(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2)\Big]\Big|_{x_1=0,\,L_1}=0,$$

первое и третье слагаемые обращаются в ноль за счёт сомножителей, содержащих $\sin(\lambda_m * 0)=0$ и $\sin(\lambda_m L_1)=\sin\pi m=0$, в результате чего из пары кинематических граничных условий
$u_2\Big|_{x_1=0,\,L_1}(\cdot,x_2,x_3)=0$, $v_2\Big|_{x_1=0,\,L_1}(\cdot,x_2,x_3)=0$ следует пара условий

$$N_{212}(x_3)\big(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn}\big)=0,\quad N_{213}(x_3)\big(\lambda_m V_3^{mn}+V_{1,3}^{mn}\big)=0.$$

Аналогично можно раскрыть условие $N_{3kl}(x_3)v_{k,l}(\cdot,x_2,x_3)=0$, из которого следует, что

$$N_{312}(x_3)\big(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn}\big)=0,\quad N_{313}(x_3)\big(\lambda_m V_3^{mn}+V_{1,3}^{mn}\big)=0.$$

4. Совпадение кинематических граничных условий на торцах $x_2=0, x_2=L_2$ приводит к условиям

$$v_1(x_1,\,\cdot\,,x_3)+N_{1kl}(x_3)v_{k,l}(x_1,\,\cdot\,,x_3)=v_1(x_1,\,\cdot\,,x_3),$$
$$v_3(x_1,\,\cdot\,,x_3)+N_{3kl}(x_3)v_{k,l}(x_1,\,\cdot\,,x_3)=v_3(x_1,\,\cdot\,,x_3),$$

которые можно преобразовать так же, как и рассмотренные выше, что приводит к парам условий

$$N_{112}(x_3)\big(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn}\big)=0,\quad N_{123}(x_3)\big(\mu_n V_3^{mn}+V_{2,3}^{mn}\big)=0,$$
$$N_{312}(x_3)\big(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn}\big)=0,\quad N_{323}(x_3)\big(\mu_n V_3^{mn}+V_{2,3}^{mn}\big)=0.$$

5. Таким же образом можно получить условия на N-функции, которые следуют из совпадения напряжений

$$\sigma_{11}\Big|_{x_1=0,\,L_1}(\cdot,x_2,x_3)=s_{11}\Big|_{x_1=0,\,L_1}(\cdot,x_2,x_3).$$

Опуская заведомо нулевые (содержащие множитель $\sin(\lambda_m x_1)$, $C_{\alpha\alpha\alpha\beta}$, $C^0_{\alpha\alpha\alpha\beta}$ $C_{\alpha\alpha\beta\gamma}$, $C^0_{\alpha\alpha\beta\gamma}$ и структурные функции, ранее установленные нулевыми) слагаемые в выражениях для напряжений в исходном и сопутствующем (2.3) теле, получаем условие

$$C_{1111}\sum_{m,n=0}^{\infty}\big[-\lambda_m^2 V_1^{mn}(x_3)N_{111}(x_3)-\lambda_m\mu_n V_2^{mn}(x_3)N_{122}(x_3)+$$
$$+\lambda_m V_3^{mn}(x_3)N_{133}(x_3)\big]\cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)\Big|_{x_1=0,\,L_1}=0,$$

из которого следует, что

$$N_{111}(x_3)V_1^{mn}=0,\quad N_{122}(x_3)V_2^{mn}=0,\quad N_{133}(x_3)V_{3,3}^{mn}=0.$$

6. Аналогично предыдущему, из условия совпадения напряжений

$$\sigma_{22}\Big|_{x_2=0,\,L_2}(x_1,\,\cdot\,,x_3)=s_{22}\Big|_{x_2=0,\,L_2}(x_1,\,\cdot\,,x_3)$$

следует требование равенства

$$C_{2222}\sum_{m,n=0}^{\infty}\big[-\lambda_m\mu_n V_1^{mn}(x_3)N_{211}(x_3)-\mu_n^2 V_2^{mn}(x_3)N_{222}(x_3)+$$
$$+\mu_n V_3^{mn}(x_3)N_{233}(x_3)\big]\sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2)\Big|_{x_2=0,\,L_2}=0,$$

из которого $N_{211}(x_3)V_1^{mn}=0, N_{222}(x_3)V_2^{mn}=0, N_{233}(x_3)V_{3,3}^{mn}=0.$

Таким образом, для ортотропного слоистого пакета отличны от тождественно нулевых только пять структурных функций: $N_{\alpha\alpha3}(x_3)$ и $N_{3\alpha\alpha}(x_3)$. Для того, чтобы перемещения в исходной пластине, заданные соотношением (2.30), удовлетворяли условиям идеального контакта, потребуем, чтобы зависимость структурных функций от поперечной координаты x_3 была непрерывной. Ненулевые структурные функции – это непрерывные функции x_3, которые удовлетворяют системе

$$[C_{i3mn}(x_3)+C_{i3k3}(x_3)N_{kmn,3}(x_3)]_{,3}=0, \tag{2.31}$$
$$\big(C_{i3mn}(\pm h/2)+C_{i3k3}(\pm h/2)N_{kmn,3}(\pm h/2)\big)=C^0_{i3mn},$$
$$C_{i3kl}(\pm h/2)N_{kmn}(\pm h/2)=0. \tag{2.32}$$

С учётом $C_{\alpha\alpha\alpha\beta}=0, C_{\alpha\alpha\beta\gamma}=0$ в силу ортотропии соотношения (2.31) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на N-функции:

$$C_{33\alpha\alpha}(x_3) + C_{3333}(x_3)N_{3\alpha\alpha,3}(x_3) = C^0_{33\alpha\alpha},$$
$$C_{\alpha3\alpha3}(x_3) + C_{\alpha3\alpha3}(x_3)N_{\alpha\alpha3,3}(x_3) = C^0_{\alpha3\alpha3}, \quad \alpha = 1..3,$$
$$C_{i3kl}(\pm h/2)N_{kmn}(\pm h/2) = 0,$$

общее решение которой [15; 16] –

$$N_{3\alpha\alpha}(x_3) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \big(C^0_{33\alpha\alpha} - C_{33\alpha\alpha}(y)\big)/C_{3333}(y)dy + k_{3\alpha\alpha}, \tag{2.33}$$
$$N_{\alpha\alpha3}(x_3) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \big(C^0_{\alpha3\alpha3} - C_{\alpha3\alpha3}(y)\big)/C_{\alpha3\alpha3}(y)dy + k_{\alpha\alpha3}.$$

Граничное условие при производных второго порядка (2.32) в силу произвольности $C_{ijkl}(x_3)$ и C^0_{ijkl} сводится к условиям $N_{3\alpha\alpha}(\pm h/2) = 0, N_{\alpha\alpha3}(\pm h/2) = 0$. Эти условия можно удовлетворить точно, только зафиксировав в выражениях (2.33) $k_{\alpha\alpha3} = 0, k_{3\alpha\alpha} = 0$ (это обеспечивает выполнение граничного условия (2.32) на нижней лицевой поверхности $N_{3\alpha\alpha}(-h/2) = 0$, $N_{\alpha\alpha3}(-h/2) = 0$), и выбрав компоненты тензора C^0_{ijkl} такими, что

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \big(C^0_{33\alpha\alpha} - C_{33\alpha\alpha}(y)\big)/C_{3333}(y)dy = 0, \int\limits_{-h/2}^{h/2} \big(C^0_{\alpha3\alpha3} - C_{\alpha3\alpha3}(y)\big)/C_{\alpha3\alpha3}(y)dy = 0,$$

то есть

$$C^0_{\alpha3\alpha3} = \frac{1}{\big\langle 1/C_{\alpha3\alpha3}\big\rangle}, \quad C^0_{33\alpha\alpha} = \frac{\big\langle C_{33\alpha\alpha}/C_{3333}\big\rangle}{\big\langle 1/C_{3333}\big\rangle}. \tag{2.34}$$

Таким образом, приближение решения задачи (2.19), построенное методом структурных функций первого порядка, удовлетворяет всем граничным условиям, если и только если упругие модули сопутствующего тела выбраны в соответствии с формулами (2.34) и решение сопутствующей задачи таково, что $s_{i3}\Big|_{\pm h/2} = q_i^{\pm}$. Заметим, что модули сдвига сопутствующего тела, предписанные соотношениями (2.34), совпадают с осреднёнными по Рейссу [82; 156] модулями сдвига исходного тела. Условие (2.34) накладывает ограничение только на 5 компонент тензора модулей упругости сопутствующего тела, что в случае ортотропного сопутствующего тела недостаточно. Таким образом, остаётся неоднозначность в выборе механических свойств сопутствующего тела. Компоненты C^0_{IJKL} могут быть произвольными постоянными, такими, что тензор модулей упругости, составленный из них и компонент, определенных (2.34), будет положительно определенным. Отметим также, что в силу положительной определенности тензора упругих свойств исходного тела C_{ijkl} соотношения (2.34) корректны и задают ненулевые C^0_{ijkl}, так как средние значения C_{ijkl} отличны от нуля.

В численных примерах рассматриваются два случая выбора C^0_{ijkl} [17]:

1. тензор модулей упругости сопутствующего тела удовлетворяет условиям (2.34), компоненты $C^0_{IJKL} =< C_{IJKL} + C_{IJmn}N_{mKL,n} >$, произвольные постоянные в решении (2.33) $k_{\alpha\alpha 3} = 0, k_{3\alpha\alpha} = 0$, то есть

$$C^0_{IJKL} =< C_{IJKL} + C_{IJmn}N_{mKL,n} > , \tag{2.35}$$
$$C^0_{\alpha 3\alpha 3} = \frac{1}{\langle 1/C_{\alpha 3\alpha 3}\rangle}, \quad C^0_{33\alpha\alpha} = \frac{\langle C_{33\alpha\alpha}/C_{3333}\rangle}{\langle 1/C_{3333}\rangle};$$

2. тензор модулей упругости сопутствующего тела

$$C^0_{ijkl} =< C_{ijkl} >, \tag{2.36}$$

что не обеспечивает выполнения условия (2.34). Постоянные в решении (2.33) $k_{\alpha\alpha 3}, k_{3\alpha\alpha}$ выбраны так, что $< N_{ikl} >= 0$. Данный способ выбора тензора модулей упругости сопутствующего тела предложен в работе [9] для метода структурных функций неограниченного порядка, а подобный способ выбора аддитивных постоянных $k_{\alpha\alpha 3}, k_{3\alpha\alpha}$ – в работе [6] для одномерной задачи.

Общий вид перемещений в исходной пластине (2.19), приближенно определенных методом структурных функций на базе решения сопутствующей задачи вида (2.21), находится подстановкой в соотношение для перемещений в исходном теле (2.30) данных о структурных функциях, которые тождественно равны нулю [15]:

$$\begin{gathered} u_1(\overrightarrow{x}) = v_1(\overrightarrow{x}) + N_{113}(x_3)(v_{1,3}(\overrightarrow{x}) + v_{3,1}(\overrightarrow{x})), \\ u_2(\overrightarrow{x}) = v_2(\overrightarrow{x}) + N_{223}(x_3)(v_{2,3}(\overrightarrow{x}) + v_{3,2}(\overrightarrow{x})), \\ u_3(\overrightarrow{x}) = v_3(\overrightarrow{x}) + N_{311}(x_3)v_{1,1}(\overrightarrow{x}) + N_{322}(x_3)v_{2,2}(\overrightarrow{x}) + N_{333}(x_3)v_{3,3}(\overrightarrow{x}). \end{gathered} \tag{2.37}$$

Решение (2.33) построено в предположении о том, что $v_{m,n} \neq 0$, и все условия пунктов списка 2-6 нетривиальны в смысле определения нетривиального условия, введенного в разделе 2.2. Как было отмечено в разделе 2.2, в случае использования для решения сопутствующей задачи полиномиальных моделей, порядок которых ниже порядка метода структурных функций, система соотношений на N может оказаться недоопределенной. Так, при применении к решению сопутствующей задачи модели Кирхгофа-Лява некоторые условия для структурных функций становятся тривиальными за счёт того, что $v_{3,3}^{Kir}=0, v_{I,3}^{Kir}+v_{3,I}^{Kir}=0$. Нетривиальными остаются условия

$$
\begin{gathered}
C_{33\alpha\alpha}(x_3)+C_{3333}(x_3)N_{3\alpha\alpha,3}(x_3)=C^0_{33\alpha\alpha}, \quad \alpha=1{,}2,\\
N_{212}(x_3)(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn})=0,\ N_{312}(x_3)(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn})=0,\\
N_{112}(x_3)(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn})=0,\\
N_{111}(x_3)V_1^{mn}=0,\ N_{122}(x_3)V_2^{mn}=0,\ N_{211}(x_3)V_1^{mn}=0,\ N_{222}(x_3)V_2^{mn}=0.
\end{gathered}
$$

Используя модель Кирхгофа-Лява для сопутствующего тела, мы можем определить только две отличных от нуля структурных функции первого порядка ортотропного пакета – $N_{311}(x_3), N_{322}(x_3)$, совпадающие с определенными в общем случае (2.33), а условия для определения функций $N_{113}, N_{223}, N_{123}, N_{213}, N_{323}$ тривиальны, поэтому оснований для определения этих функций при использовании гипотезы Кирхгофа-Лява для сопутствующего тела нет.

В случае применения к решению сопутствующей задачи соотношений модели типа Тимошенко нетривиальные условия на структурные функции записываются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
C_{33\alpha\alpha}(x_3)+C_{3333}(x_3)N_{3\alpha\alpha,3}(x_3)=C^0_{33\alpha\alpha}, \quad \alpha=1{,}2,\\
C_{\alpha3\alpha3}(x_3)+C_{\alpha3\alpha3}(x_3)N_{\alpha\alpha3,3}(x_3)=C^0_{\alpha3\alpha3}, \quad \alpha=1{,}2,\\
N_{212}(x_3)(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn})=0,\ N_{312}(x_3)(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn})=0,\\
N_{112}(x_3)(\mu_n V_1^{mn}+\lambda_m V_2^{mn})=0,\ N_{213}(x_3)(\lambda_m V_3^{mn}+V_{1,3}^{mn})=0,\\
N_{313}(x_3)(\lambda_m V_3^{mn}+V_{1,3}^{mn})=0,\ N_{123}(x_3)(\mu_n V_3^{mn}+V_{2,3}^{mn})=0,\\
N_{323}(x_3)(\mu_n V_3^{mn}+V_{2,3}^{mn})=0,\\
N_{111}(x_3)V_1^{mn}=0,\ N_{122}(x_3)V_2^{mn}=0,\ N_{211}(x_3)V_1^{mn}=0,\ N_{222}(x_3)V_2^{mn}=0.
\end{gathered}
$$

Так, можно определить четыре ненулевых структурных функции – совпадающие с (2.33), за исключением $N_{333}(x_3)$. Используя терминологию предыдущего раздела, это можно объяснить тем, что модель типа Тимошенко с точки зрения представления вида (1.2) имеет первый порядок по поперечным деформациям e_{I3} (достаточный для отыскания структурных функций первого порядка) и нулевой – по e_{33} (недостаточный для отыскания структурных функций первого порядка).

Отметим, что структурные функции, найденные по формулам (2.33) – непрерывные функции поперечной координаты, претерпевающие излом в точках контакта слоев, если $C_{ijkl}(x_3)$ претерпевают в соответствующих точках разрыв. В случае кусочно-постоянных функций $C_{ijkl}(x_3)$ структурные функции кусочно-линейны по координате x_3. Удовлетворение приближений, построенных методом структурных функций, остальным критериям E. Carrera будет проверено ниже, однако отметим сразу, что соотношения для структурных функций не зависят от числа слоев. Увеличение числа слоев не повышает число переменных в задаче.

2.3.2.2 Пример

Приведем графики структурных функций для тестовой пластины, составленной из слоев материалов с постоянными упругими свойствами[9]. Упругие свойства сопутствующего тела выбраны так, что $C^0_{\alpha 3\alpha 3}$ и $C^0_{33\alpha\alpha}$ определены по формулам (2.34). Модельные пластины здесь и далее описываются наборами технических постоянных, которые впоследствии пересчитываются в упругие постоянные по известным формулам [82]. Приводятся отношения основных физических и геометрических параметров пластины; вычисления производятся в нормализованной форме, E_T – характерный масштаб осевого модуля упругости.

Пластина 2-1 составлена из трех слоев одинаковой толщины $H/3$, свойства материалов которых приведены в таблице 4. Результаты вычисления структурных функций по формулам (2.33) приведены на Рисунке 2.2.

[9]Графики структурных функций приводятся только для одной геометрической конфигурации, так как геометрическая конфигурация влияет на положение точек излома структурных функций и количественные значения максимумов/минимумов, но не на качественные свойства структурных функций. При построении приближений решения исходной задачи рассматривается большее разнообразие геометрических конфигураций

Таблица 4 — технические постоянные модельной пластины 2-1, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2, -H/6]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[H/6, H/2]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.2

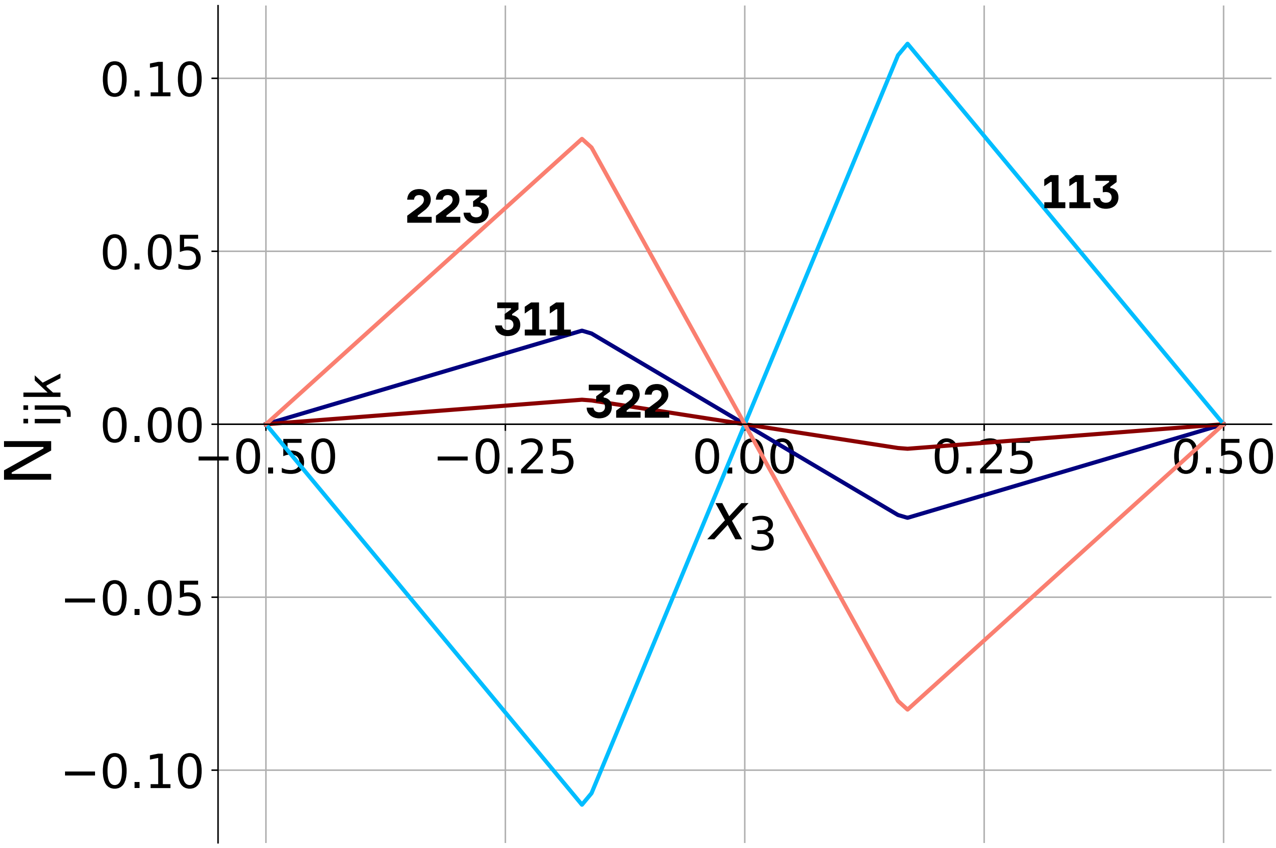

Рисунок 2.2 — структурные функции первого порядка для пластины 2-1. Кривые соответствуют выбору свойств сопутствующего тела по формулам (2.35) из соображений точного удовлетворения граничных условий в напряжениях на лицевых поверхностях. Индексы конкретных изображенных функций указаны на кривых. Нормализованные технические постоянные пластины приведены в таблице (4)

2.3.2.3 Приближенное решение исходной задачи методом структурных функций первого порядка, основанное на приближении решения сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява

Запишем явный вид приближенного решения исходной задачи, использующего основанное на теории Кирхгофа-Лява решение сопутствующей задачи. Подставляя вид перемещений в сопутствующей пластине (1.9) в основное соотношение метода структурных функций первого порядка (2.30), получим представление перемещений в исходной пластине через перемещения точек серединной плоскости сопутствующей пластины[10] [16]:

$$
\begin{gathered}
u_I^{Kir+1} \equiv v_I^{Kir} = w_I - x_3 w_{3,I}, \\
u_3^{Kir+1} = v_3^{Kir} + N_{311}(x_3) v_{1,1}^{Kir} + N_{322}(x_3) v_{2,2}^{Kir} = \\
w_3 + N_{311}(x_3)(w_{1,1} - x_3 w_{3,11}) + N_{322}(x_3)(w_{2,2} - x_3 w_{3,22}).
\end{gathered}
$$

С учётом произведенных ранее выкладок приближенное решение исходной задачи, основанное на приближенном решении сопутствующей задачи в рамках теории Кирхгофа-Лява (2.22), можно записать явно,

$$
\begin{gathered}
u_1^{Kir+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} (W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \qquad (2.38) \\
u_2^{Kir+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn}\right) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\
u_3^{Kir+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big(W_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3)(W_1^{mn} - x_3 \lambda_m W_3^{mn}) - \\
- \mu_n N_{322}(x_3)(W_2^{mn} - x_3 \mu_n W_3^{mn})\Big) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2).
\end{gathered}
$$

[10] В Главе 2 принята следующая система верхних индексов, характеризующих построенное приближение – u^{Kir+1} – приближение методом структурных функций 1 порядка, основанное на решении сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява, аналогично u^{Tim+1}, u^{Pag+1} и т.п.

Запишем также приближенные выражения для деформаций и напряжений в исходной пластине:

$$\varepsilon_{IJ}^{Kir+1} \equiv e_{IJ}^{Kir} = (w_{I,J} + w_{J,I})/2 - x_3 w_{3,IJ}, \tag{2.39}$$

$$\varepsilon_{13}^{Kir+1} = N_{311}(x_3)\big(w_{1,11} - x_3 w_{3,111}\big)/2 + N_{322}(x_3)\big(w_{2,12} - x_3 w_{3,122}\big)/2,$$

$$\varepsilon_{23}^{Kir+1} = N_{311}(x_3)\big(w_{1,12} - x_3 w_{3,112}\big)/2 + N_{322}(x_3)\big(w_{2,22} - x_3 w_{3,222}\big)/2,$$

$$\varepsilon_{33}^{Kir+1} = N_{3IJ,3}(x_3) w_{I,J} - \big(x_3 N_{3IJ,3}(x_3) + N_{3IJ}(x_3)\big) w_{3,IJ},.$$

Приближения продольных перемещений u_I^{Kir+1} и деформаций в плоскости ε_{IJ}^{Kir+1} тождественно совпадают с продольными перемещениями и деформациями в плоскости сопутствующей пластины, что в случае произвольных C_{ijkl}^0, вообще говоря, не является приближенным решением исходной задачи. Соотношения для приближенного вычисления напряжений имют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{Kir+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[-C_{\alpha\alpha11}\lambda_m(W_1^{mn} - x_3\lambda_m W_3^{mn}) - \tag{2.40}$$

$$-C_{\alpha\alpha22}\mu_n(W_2^{mn} - x_3\mu_n W_3^{mn}) -$$

$$-C_{\alpha\alpha33}\Big(N_{311,3}(x_3)\lambda_m W_1^{mn} - [N_{311,3}(x_3)x_3 + N_{311}(x_3)]\lambda_m^2 W_3^{mn} +$$

$$+N_{322,3}(x_3)\mu_n W_2^{mn} - [N_{322,3}(x_3)x_3 + N_{322}(x_3)]\mu_n^2 W_3^{mn}\Big)\Big] \sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{12}^{Kir+1} = C_{1212} \sum_{m,n=0}^{\infty} [\mu_n W_1^{mn} + \lambda_m W_2^{mn} - 2\lambda_m\mu_n x_3 W_3^{mn}] \cos(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{13}^{Kir+1} = -C_{1313} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\lambda_m^2 N_{311}(x_3)\Big(W_1^{mn} - x_3\lambda_m W_3^{mn}\Big) +$$

$$+\lambda_m\mu_n N_{322}(x_3)\Big(W_2^{mn} - x_3\mu_n W_3^{mn}\Big)\Big] * \cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{23}^{Kir+1} = -C_{2323} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\lambda_m\mu_n N_{311}(x_3)\Big(W_1^{mn} - x_3\lambda_m W_3^{mn}\Big) +$$

$$+\mu_n^2 N_{322}(x_3)\Big(W_2^{mn} - x_3\mu_n W_3^{mn}\Big)\Big] * \sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2).$$

Соотношения (2.38)-(2.40) составляют приближение решения исходной задачи (2.19), полученное методом структурных функций на базе приближения решения сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява. Отметим следующие свойства данного приближения.

1. Приближение перемещений (2.38) формально моделирует сжимаемую в поперечном направлении пластину – перемещение u_3 зависит от поперечной координаты за счёт зависимости от поперечной координаты структурных функций $N_{3\alpha\alpha}, \alpha = 1..2$, однако соответствующие слагаемые по порядку существенно меньше самого перемещения v_3.
2. Так как $u_I^{Kir+1} \equiv v_I^{Kir}$, критерий качества КР1 не выполнен для продольных перемещений в данном приближении. Это соответствует выводам раздела 2.2.: порядок модели Кирхгофа-Лява меньше необходимого для построения МСФ-приближения I-го порядка, а также – свойствам нулевого приближения в теории Шешенина-Скопцова и Димитриенко-Юрина. Критерии качества 2-4 также не выполняются в данном приближении; поперечные напряжения напрямую не вычисляются.

2.3.2.4 Приближенное решение исходной задачи методом структурных функций первого порядка, основанное на приближении решения сопутствующей задачи в рамках модели типа Тимошенко

Подставляя вид перемещений в сопутствующей пластине, рассматриваемой в рамках теории типа Тимошенко (1.18), в соотношение (2.30) с учётом полученных в разделе 2.3.2.1 данных о структурных функциях, тождественно обращающихся в ноль, запишем явный вид приближенного решения исходной задачи на базе решения сопутствующей задачи (2.25) [16]:

$$u_I^{Tim+1} = v_I^{Tim} + N_{IJ3}(x_3)(v_{J,3}^{Tim} + v_{3,J}^{Tim}) = y_I - x_3(y_{3,I} - \gamma_I) + N_{IJ3}(x_3)\gamma_J,$$

$$u_3^{Tim+1} = v_3^{Tim} + N_{311}v_{1,1}^{Tim} + N_{322}v_{2,2}^{Tim} =$$
$$y_3 + N_{311}(x_3)(y_{1,1} - x_3(y_{3,11} - \gamma_{1,1})) + N_{322}(x_3)(y_{2,2} - x_3(y_{3,22} - \gamma_{2,2})),$$

или, в терминах тригонометрических рядов,

$$u_1^{Tim+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - \Gamma_1^{mn}) + N_{113}(x_3)\Gamma_1^{mn}\right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \tag{2.41}$$

$$u_2^{Tim+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - \Gamma_2^{mn}) + N_{223}(x_3)\Gamma_2^{mn}\right] \sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),$$

$$u_3^{Tim+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \big(Y_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3)\big[Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - \Gamma_1^{mn})\big] -$$
$$-\mu_n N_{322}(x_3)\big[Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - \Gamma_2^{mn})\big]\big) \sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

Приближение деформаций в исходной пластине в данном случае имеет вид

$$\varepsilon_{IJ}^{Tim+1} = \big[y_{I,J} + y_{J,I} - x_3(2y_{3,IJ} - \gamma_{I,J} - \gamma_{J,I})\big]/2+ \tag{2.42}$$
$$+\big[N_{IK3}(x_3)\gamma_{K,J} + N_{JK3}(x_3)\gamma_{K,I}\big]/2,.$$

$$\varepsilon_{I3}^{Tim+1} = \gamma_I + N_{IJ3,3}(x_3)\gamma_J + N_{3JK}(x_3)\big[y_{J,KI} - x_3(y_{3,JKI} - \gamma_{J,KI})\big],$$

$$\varepsilon_{33}^{Tim+1} = N_{3IJ,3}(x_3)\big[y_{I,J} - x_3(y_{3,IJ} - \gamma_{I,J})\big] - N_{3IJ}(x_3)\big[y_{3,IJ} - \gamma_{I,J}\big],$$

а напряжений –

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{Tim+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[- C_{\alpha\alpha11}\lambda_m\big[Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - \Gamma_1^{mn}) + N_{113}(x_3)\Gamma_1^{mn}\big] - \tag{2.43}$$
$$-C_{\alpha\alpha22}\mu_n\big[Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - \Gamma_2^{mn}) + N_{223}(x_3)\Gamma_2^{mn}\big] -$$
$$-C_{\alpha\alpha33}\big[N_{311,3}(x_3)\lambda_m Y_1^{mn} - [N_{311,3}(x_3)x_3 + N_{311}(x_3)]\lambda_m(\lambda_m Y_3^{mn} - \Gamma_1^{mn}) +$$
$$+N_{322,3}(x_3)\mu_n Y_2^{mn} - (N_{322,3}(x_3)x_3 + N_{322}(x_3))\mu_n(\mu_n Y_3^{mn} - \Gamma_2^{mn})\big]\Big] \times$$
$$\times \sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{12}^{Tim+1} = C_{1212} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\mu_n\big[Y_1^{mn} + \big(x_3 + N_{113}(x_3)\big)\Gamma_1^{mn}\big] +$$
$$+\lambda_m\big[Y_2^{mn} + \big(x_3 + N_{223}(x_3)\big)\Gamma_2^{mn}\big] - 2\lambda_m\mu_n x_3 Y_3^{mn}\Big] \cos(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{13}^{Tim+1} = C_{1313} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Gamma_1^{mn}(1 + N_{113,3}(x_3)) -$$
$$-\lambda_m^2 N_{311}(x_3)(Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - \Gamma_1^{mn})) -$$
$$-\lambda_m\mu_n N_{322}(x_3)(Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - \Gamma_2^{mn}))\Big] \cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)$$

$$\sigma_{23}^{Tim+1} = C_{2323} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Gamma_2^{mn}(1 + N_{223,3}(x_3)) -$$
$$-\lambda_m \mu_n N_{311}(x_3)(Y_1^{mn} - x_3(\lambda_m Y_3^{mn} - \Gamma_1^{mn})) -$$
$$-\mu_n^2 N_{322}(x_3)(Y_2^{mn} - x_3(\mu_n Y_3^{mn} - \Gamma_2^{mn}))\Big] \sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2).$$

Соотношения (2.41)-(2.43) составляют приближенное решение исходной задачи, построенное методом структурных функций первого порядка на базе приближенного решения сопутствующей задачи в рамках модели типа Тимошенко. Отметим его основные свойства.

1. Приближенные соотношения, полученные для перемещений в сопутствующем теле (2.41), позволяют моделировать зависимость перемещений от поперечной координаты в виде ломаной от поперечной координаты, точки излома которой по x_3 совпадают с границами слоев. Следовательно, данное приближение выполняет критерий качества КР1. Данное свойство остается верным и для более точных решений сопутствующей задачи: модель типа Тимошенко дает начальную аппроксимацию сдвиговой поперечной деформации в сопутствующем теле, $e_{I3} = \gamma_I(x_1, x_2) \neq 0$. Более точное решение сопутствующей задачи с $e_{I3} \neq 0$ и $e_{I3,3} \neq 0$ позволит получить соотношения, подобные (2.41), возможно – с более сложным характером зависимости звеньев ломаной от поперечной координаты. В случае слоистого материала с кусочно-постоянными свойствами эта ломаная задается многочленами первой степени по поперечной координате, так как γ_I не зависят от x_3, а $N_{ijk}(x_3)$ – функции первой степени по поперечной координате.
2. Критерии КР2-4 не выполняются. В частности, соотношения (2.43) не дают приемлемого приближения для поперечных напряжений в силу неточного описания напряжений в сопутствующем теле s_{i3}.

2.3.2.5 Приближенное решение исходной задачи методом структурных функций первого порядка, основанное на приближении решения сопутствующей задачи в рамках метода Пагано

Решение сопутствующей задачи в трехмерной постановке по методу Пагано, построенное в работе [3] и коротко описанное в разделе 2.3.1.3, моделирует напряжённо-деформированное состояние сопутствующей пластины (2.20) так, что все компоненты тензора деформаций и их пространственные производные в общем случае отличны от нуля, поэтому в приближенное решение исходной задачи входят все структурные функции, вычисленные выше. С учётом выражений (2.28) для перемещений в сопутствующей пластине, построенных по методу Пагано, приближенное решение исходной задачи имеет вид

$$u_1^{Pag+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\Big(F_r^{mn} + N_{113}(x_3)(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn}) G_r^{mn} \Big) C_r^{mn}(x_3) + \right. \tag{2.44}$$

$$\left. + \Big(G_r^{mn} + N_{113}(x_3)(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn}) \alpha_r^{mn} F_r^{mn} \Big) S_r^{mn}(x_3) \right] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

$$u_2^{Pag+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\Big(L_r^{mn} F_r^{mn} + N_{223}(x_3)(m_r^{mn} L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}) G_r^{mn} \Big) C_r^{mn}(x_3) + \right.$$

$$\left. + \Big(L_r^{mn} G_r^{mn} + N_{223}(x_3)(m_r^{mn} L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}) \alpha_r^{mn} F_r^{mn} \Big) S_r^{mn}(x_3) \right] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$u_3^{Pag+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\Big(R_r^{mn} G_r^{mn} - N_{311}(x_3) \lambda_m F_r^{mn} - N_{322}(x_3) \mu_n L_r^{mn} F_r^{mn} + \right.$$

$$+ N_{333}(x_3) m_r^{mn} R_r^{mn} F_r^{mn} \Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$+ \Big(R_r^{mn} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} - N_{311}(x_3) \lambda_m G_r^{mn} - N_{322}(x_3) \mu_n L_r^{mn} G_r^{mn} +$$

$$\left. + N_{333}(x_3) m_r^{mn} R_r^{mn} G_r^{mn} \Big) S_r^{mn}(x_3) \right] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2).$$

Приведём также явные формулы для напряжений в исходном теле:

$$\sigma_{12}^{Pag+1} = C_{1212} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Big(\big[\mu_n + \lambda_n L_r^{mn}\big] F_r^{mn} + \big[N_{113}(x_3)\mu_n\big(m_r^{mn} + \lambda_n R_r^{mn}\big) + \tag{2.45}$$

$$N_{223}(x_3)\lambda_m\big(m_r^{mn}L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}\big)\big] G_r^{mn}\Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$\Big(\big[N_{113}(x_3)\mu_n\big(m_r^{mn} + \lambda_n R_r^{mn}\big) + N_{223}(x_3)\lambda_m\big(m_r^{mn}L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}\big)\big]\alpha_r^{mn}F_r^{mn} +$$

$$\big[\mu_n + \lambda_m L_r^{mn}\big] G_r^{mn}\Big) S_r^{mn}(x_3)\Big] \cos(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{13}^{Pag+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Big(\big[\big(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn}\big)\big(1 + N_{113,3}(x_3)\big)\big] G_r^{mn}\Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$\Big(\big[\big(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn}\big)\big(1 + N_{113,3}(x_3)\big)\big]\alpha_r^{mn}F_r^{mn}\Big) S_r^{mn}(x_3)\Big] \cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{23}^{Pag+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Big(\big[\big(m_r^{mn}L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}\big)\big(1 + N_{223,3}(x_3)\big)\big] G_r^{mn}\Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$\Big(\big[\big(m_r^{mn}L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}\big)\big(1 + N_{223,3}(x_3)\big)\big] F_r^{mn}\alpha_r^{mn}\Big) S_r^{mn}(x_3)\Big] \cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{Pag+1} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Big(-\lambda_m C_{11\alpha\alpha}\big\{F_r^{mn} + N_{113}(x_3)G_r^{mn}\big(R_r^{mn}\lambda_m + m_r^{mn}\big)\big\}$$

$$-\mu_n C_{22\alpha\alpha}\big\{L_r^{mn}F_r^{mn} + N_{223}(x_3)G_r^{mn}\big(L_r^{mn}m_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}\big)\big\} +$$

$$C_{\alpha\alpha 33}\big\{F_r^{mn}\big[m_r^{mn}R_r^{mn}\alpha_r^{mn} - \mu_n N_{322,3}(x_3)L_r^{mn} + m_r^{mn}N_{333,3}(x_3)R_r^{mn}\alpha_r^{mn} -$$

$$\lambda_m N_{311,3}(x_3)\big\}\Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$\Big(-\lambda_m C_{11\alpha\alpha}\big\{G_r^{mn} + N_{113}(x_3)\alpha_r^{mn}F_r^{mn}\big(m_r^{mn} + R_r^{mn}\lambda_m\big)\big\}$$

$$-\mu_n C_{\alpha\alpha 22}\big\{L_r^{mn}G_r^{mn} + N_{223}(x_3)\alpha_r^{mn}F_r^{mn}\big(L_r^{mn}m_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}\big)\big\} +$$

$$C_{\alpha\alpha 33}\big\{G_r^{mn}\big[m_r^{mn}R_r^{mn}\alpha_r^{mn} - \mu_n N_{322,3}(x_3)L_r^{mn} + m_r^{mn}N_{333,3}(x_3)R_r^{mn}\alpha_r^{mn} -$$

$$\lambda_m N_{311,3}(x_3)\big\}\Big) S_r^{mn}(x_3)\Big] \sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2).$$

Отметим, что приближенное решение исходной задачи, задаваемое формулами (2.44)-(2.45), полностью удовлетворяет критерию качества КР1, позволяя описывать в том числе нелинейную зависимость перемещений от поперечной координаты. В приближение (2.45) входят соотношения, позволяющие приближенно вычислить поперечные напряжения уже методом структурных функций первого порядка.

Подводя итог построения приближенных решений исходной задачи при помощи метода структурных функций (МСФ) первого порядка, опишем свойства полученных приближений.

- Использование МСФ I-го порядка и модели Кирхгофа-Лява для решения сопутствующей задачи (СЗ) дает наименее точное приближенное решение исходной задачи: в этом случае $u_I \equiv v_I$, $\varepsilon_{IJ} \equiv e_{IJ}$. Это соответствует выводам раздела 2.2.: порядок модели Кирхгофа-Лява меньше необходимого для построения МСФ-приближения I-го порядка, а также – свойствам нулевого приближения в теориях Шешенина-Скопцова и Димитриенко-Юрина.
- Использование модели типа Тимошенко (или высшего порядка по поперечным деформациям) или метода Пагано для решения СЗ и МСФ I-го порядка позволяет моделировать перемещения u_i в виде криволинейных ломаных по поперечной координате. Таким образом, такие приближенные решения исходной задачи удовлетворяют KP1, KP2 и KP5 по E. Carrera.
- Использование приближенного решения СЗ в трехмерной постановке (по методу Пагано) и МСФ I-го порядка позволяет приближенно вычислить напряжения σ_{i3}, удовлетворяющие граничным условиям исходной задачи, если свойства сопутствующего тела выбраны по формулам (2.36).
- При использовании модели Кирхгофа-Лява для СЗ в итоговое решение входят 2 ненулевых структурных функции $N_{3\alpha\alpha}, \alpha = 1,2$, модели типа Тимошенко – 4 функции $N_{3\alpha\alpha}, N_{\alpha\alpha 3}, \alpha = 1,2$. Для пластин с кусочно-постоянными упругими свойствами структурные функции – кусочно-линейные.

2.3.3 Приближенные решения задачи о квазистатическом нагружении линейно-упругой ортотропной пластины при помощи метода структурных функций второго порядка

Применим метод структурных функций второго порядка для нахождения приближенного решения задачи (2.19): примем теперь, что приближенное решение исходной задачи имеет вид

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + N_{ikl}(x_3)v_{k,l}(\overrightarrow{x}) + N_{ikli_1}(x_3)v_{k,li_1}(\overrightarrow{x}). \tag{2.46}$$

Вновь проделаем шаги, связанные с вычислением структурных функций, выбором свойств сопутствующего тела и построением явных формул для приближения решения исходной задачи.

2.3.3.1 Структурные функции второго порядка

Общие соображения, которые используются для нахождения структурных функций второго порядка, идентичны изложенным выше, поэтому для краткости далее приводятся только основные выводы. Дифференциальные уравнения для нахождения структурных функций первого и второго порядка – первые два уравнения рекуррентной системы (2.10):

$$\begin{gathered}[C_{ijkl}(x_3) + C_{ijmn}(x_3)N_{kmn,l}(x_3)]_{,j} = 0 \\ [C_{ijmn}(x_3)N_{mkli_1,n}(x_3) + C_{ijmi_1}(x_3)N_{mkl}(x_3)]_{,j} = \\ C^0_{ii_1kl} - [C_{ii_1mn}(x_3)N_{mkl,n}(x_3) + C_{ii_1kl}(x_3)].\end{gathered} \tag{2.47}$$

В силу аналогичных предыдущему разделу соображений, уравнения (2.47) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}[C_{i3k3}(x_3) + C_{i3mn}(x_3)N_{kmn,3}(x_3)]_{,3} = 0 \\ [C_{i3m3}(x_3)N_{mkli_1,3}(x_3) + C_{i3mi_1}(x_3)N_{mkl}(x_3)]_{,3} = \\ C^0_{ii_1kl} - [C_{ii_1m3}(x_3)N_{mkl,3}(x_3) + C_{ii_1kl}(x_3)].\end{gathered} \tag{2.48}$$

Из совпадения кинематических граничных условий в исходной и сопутствующей задаче на торцах $x_1 = 0, L_1$ следуют условия[11]

$$
\begin{gathered}
N_{213}(V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_3^{mn}) = 0, \quad N_{212}(\lambda_m V_1^{mn} + \mu_n V_2^{mn}) = 0,\\
N_{313}(V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_3^{mn}) = 0, \quad N_{312}(\lambda_m V_1^{mn} + \mu_n V_2^{mn}) = 0,\\
N_{2111} V_1^{mn} = 0, \quad N_{3111} V_1^{mn} = 0, \quad N_{2221} V_2^{mn} = 0,\\
N_{3221} V_2^{mn} = 0, \quad N_{2331} V_{3,3}^{mn} = 0, \quad N_{3331} V_{3,3}^{mn} = 0,\\
N_{2122}(\mu V_1^{mn} + \lambda_m V_2^{mn}) = 0, \quad N_{3122}(\mu V_1^{mn} + \lambda_m V_2^{mn}) = 0,\\
N_{2123}(\mu V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_{2,3}^{mn}) = 0, \quad N_{3123}(\mu V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_{2,3}^{mn}) = 0,\\
N_{2132}(V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_3^{mn}) = 0, \quad N_{3132}(V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_3^{mn}) = 0,\\
N_{2231}(V_{2,3}^{mn} + \mu_n V_3^{mn}) = 0, \quad N_{3231}(V_{2,3}^{mn} + \mu_n V_3^{mn}) = 0,\\
N_{2133}(V_{1,33}^{mn} + \lambda_m V_{3,3}^{mn}) = 0, \quad N_{3133}(V_{1,33}^{mn} + \lambda_m V_{3,3}^{mn}) = 0;
\end{gathered}
$$

из совпадения кинематических граничных условий на торцах $x_2 = 0, L_2$ –

$$
\begin{gathered}
N_{123}(V_{2,3}^{mn} + \mu_n V_3^{mn}) = 0, \quad N_{323}(V_{2,3}^{mn} + \mu_n V_3^{mn}) = 0,\\
N_{112}(\lambda_m V_1^{mn} + \mu_n V_2^{mn}) = 0, \quad N_{312}(\lambda_m V_1^{mn} + \mu_n V_2^{mn}) = 0,\\
N_{1112} V_1^{mn} = 0, \quad N_{3112} V_1^{mn} = 0, \quad N_{1222} V_2^{mn} = 0,\\
N_{3222} V_2^{mn} = 0, \quad N_{1332} V_{3,3}^{mn} = 0, \quad N_{3332} V_{3,3}^{mn} = 0,\\
N_{1121}(\mu V_1^{mn} + \lambda_m V_2^{mn}) = 0, \quad N_{3121}(\mu V_1^{mn} + \lambda_m V_2^{mn}) = 0,\\
N_{1123}(\mu V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_{2,3}^{mn}) = 0, \quad N_{3123}(\mu V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_{2,3}^{mn}) = 0\\
N_{1132}(V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_3^{mn}) = 0, \quad N_{3132}(V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_3^{mn}) = 0,\\
N_{1231}(V_{2,3}^{mn} + \mu_n V_3^{mn}) = 0, \quad N_{3231}(V_{2,3}^{mn} + \mu_n V_3^{mn}) = 0,\\
N_{1233}(V_{2,33}^{mn} + \mu_n V_{3,3}^{mn}) = 0, \quad N_{3233}(V_{2,33}^{mn} + \mu_n V_{3,3}^{mn}) = 0.
\end{gathered}
$$

В дополнение к приведенным условиям, из совпадения статических граничных условий на торцах $x_1 = 0, L_1$ следует, что

$$
\begin{gathered}
C_{1111} N_{1113} V_{1,3}^{mn} = 0, \quad C_{1111} N_{1223} V_{2,3}^{mn} = 0, \quad C_{1111} N_{1333} V_{3,33}^{mn} = 0,\\
C_{1111} N_{111} V_1^{mn} = 0, \quad C_{1111} N_{112} V_2^{mn} = 0, \quad C_{1111} N_{133} V_{3,3}^{mn} = 0,\\
C_{1111} N_{1131}(V_{1,3}^{mn} + \lambda_m V_3^{mn}) = 0, \quad C_{1111} N_{1322}(V_{2,3}^{mn} + \mu_n V_3^{mn}) = 0.
\end{gathered}
$$

[11]для краткости множители λ_m, μ_n сокращены там, где это возможно, а также опущены тригонометрические сомножители, отличные от нуля на текущем торце, и аргументы функций

Из совпадения статических граничных условий на торцах $x_2 = 0, L_2$ –

$$C_{2222}N_{2113}V^{mn}_{1,3} = 0, \quad C_{2222}N_{2223}V^{mn}_{2,3} = 0, \quad C_{2222}N_{2333}V^{mn}_{3,33} = 0,$$
$$C_{2222}N_{211}V^{mn}_{1} = 0, \quad C_{2222}N_{222}V^{mn}_{2} = 0, \quad C_{2222}N_{233}V^{mn}_{3,3} = 0,$$
$$C_{2222}N_{2131}(V^{mn}_{1,3} + \lambda_m V^{mn}_3) = 0, \quad C_{2222}N_{2322}(V^{mn}_{2,3} + \mu_n V^{mn}_3) = 0.$$

Следовательно, все структурные функции типа $N_{\alpha\alpha\beta\gamma}, N_{\alpha\beta\gamma\alpha}, N_{\beta\alpha\alpha\gamma}, N_{\beta\gamma\alpha\alpha}, N_{\alpha\alpha\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, тождественно равны нулю. Иначе говоря, отличны от нуля только те структурные функции второго порядка, значения индексов которых повторяются дважды или четырежды.

Из совпадения статических граничных условий на лицевых поверхностях исходной и сопутствующей пластин в терминах производных порядка $v_{m,n}$ следует условие, аналогичное второму соотношению системы (2.31)

$$\big(C_{i3mn}(\pm h/2) + C_{i3k3}(\pm h/2)N_{kmn,3}(\pm h/2)\big) = C^0_{i3mn},$$

следовательно, структурные функции N_{ikl} имеют вид, аналогичный (2.33).

Из совпадения статических граничных условий на лицевых поверхностях исходной и сопутствующей пластин в терминах производных порядка $v_{m,nl}$ следуют граничные условия для структурных функций, отличных от нуля в общем случае приближенного решения сопутствующей задачи вида (2.21):

$$\begin{gathered} N_{1\alpha\alpha1,3}(\pm h/2) = N_{2\alpha\alpha2,3}(\pm h/2) = N_{3\alpha\alpha3,3}(\pm h/2) = -N_{3\alpha\alpha}(\pm h/2), \quad \alpha = 1..3, \\ N_{\beta\beta33,3}(\pm h/2) = -N_{\beta\beta3}(\pm h/2), \quad \beta = 1..2 \\ N_{1122,3}(\pm h/2) = 0, \quad N_{2211,3}(\pm h/2) = 0, \\ -C_{3333}(\pm h/2)N_{33\gamma\gamma,3}(\pm h/2) = C_{33\gamma\gamma}(\pm h/2)N_{\gamma\gamma3}(\pm h/2), \quad \gamma = 1..2. \end{gathered} \tag{2.49}$$

Из совпадения статических граничных условий на лицевых поверхностях исходной и сопутствующей пластин в терминах производных порядка v_{m,nli_1} следуют условия

$$N_{ikli_1}(x_3)\Big|_{x_3=\pm h/2} = 0. \tag{2.50}$$

Интегрируя уравнения (2.48) с граничными условиями (2.49), можно записать ненулевые структурные функции второго порядка:

$$N_{\alpha\beta\beta\alpha}(x_3) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big[\frac{1}{C_{\alpha3\alpha3}(z)} \int\limits_{-h/2}^{z} \Big(C^0_{\alpha\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) - \tag{2.51}$$
$$-C_{\alpha\alpha33}(y)N_{3\beta\beta,3}(y)\Big)d\,y - N_{3\beta\beta}(z)\Big]d\,z + k_{\alpha\beta\beta\alpha},$$

$$N_{\alpha\alpha\beta\beta}(x_3) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int\limits_{-h/2}^{z} \Big(C^0_{\alpha\beta\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)\Big)d\,y\Big]d\,z +$$

$$+k_{\alpha\alpha\beta\beta}, \quad \alpha = 1..2,$$

$$N_{\alpha\alpha 33}(x_3) = -\int\limits_{-h/2}^{x_3} N_{\alpha\alpha 3}(y)dy + k_{\alpha\alpha 33},$$

$$N_{33\alpha\alpha}(x_3) = -\int\limits_{-h/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} N_{\alpha\alpha 3}(y)dy + k_{33\alpha\alpha}.$$

Или, подставляя ранее определённые значения структурных функций первого порядка (2.33),

$$N_{\alpha\beta\beta\alpha}(x_3) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int\limits_{-h/2}^{z} \Big(C^0_{\alpha\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) - \tag{2.52}$$

$$-C_{\alpha\alpha 33}(y)\frac{C^0_{\beta\beta 33} - C_{\beta\beta 33}(y)}{C_{3333}(y)}\Big)d\,y - \int\limits_{-h/2}^{z} \frac{C^0_{\beta\beta 33} - C_{\beta\beta 33}(y)}{C_{3333}(y)}d\,y - k_{3\beta\beta}\Big]d\,z + k_{\alpha\beta\beta\alpha},$$

$$N_{\alpha\alpha\beta\beta}(x_3) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int\limits_{-h/2}^{z} \Big(C^0_{\alpha\beta\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)\Big)d\,y\Big]d\,z +$$

$$+k_{\alpha\alpha\beta\beta}, \quad \alpha = 1..2,$$

$$N_{\alpha\alpha 33}(x_3) = -\int\limits_{-h/2}^{x_3} \Big[\int\limits_{-h/2}^{y} \frac{C^0_{\alpha 3\alpha 3} - C_{\alpha 3\alpha 3}(z)}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)}dz + k_{\alpha\alpha 3}\Big]dy + k_{\alpha\alpha 33},$$

$$N_{33\alpha\alpha}(x_3) = -\int\limits_{-h/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)}\Big[\int\limits_{-h/2}^{y} \frac{C^0_{\alpha 3\alpha 3} - C_{\alpha 3\alpha 3}(z)}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)}dz + k_{\alpha\alpha 3}\Big]dy + k_{33\alpha\alpha}.$$

Подстановка вида решения (2.52) в граничные условия (2.49) и (2.50) позволяет аналогично случаю первого порядка получить ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Условие (2.50) на нижней лицевой поверхности $x_3 = -h/2$ приводит к требованию $k_{\alpha\alpha\beta\beta} = 0, k_{\alpha\beta\beta\alpha} = 0$, а на верхней лицевой поверхности –

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int\limits_{-h/2}^{z} \Big(C^0_{\alpha\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) - \tag{2.53}$$

$$-C_{\alpha\alpha 33}(y)\frac{C^0_{\beta\beta 33} - C_{\beta\beta 33}(y)}{C_{3333}(y)}\Big)d\,y - \int\limits_{-H/2}^{z} \frac{C^0_{\beta\beta 33} - C_{\beta\beta 33}(y)}{C_{3333}(y)} d\,y - k_{3\beta\beta}\Big] d\,z = 0,$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int\limits_{-h/2}^{z} \Big(C^0_{\alpha\beta\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)\Big)d\,y\Big] d\,z = 0, \quad \alpha = 1..2,$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big[\int\limits_{-h/2}^{y} \frac{C^0_{\alpha 3\alpha 3} - C_{\alpha 3\alpha 3}(z)}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} dz + k_{\alpha\alpha 3}\Big] dy = 0,$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} \Big[\int\limits_{-h/2}^{y} \frac{C^0_{\alpha 3\alpha 3} - C_{\alpha 3\alpha 3}(z)}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} dz + k_{\alpha\alpha 3}\Big] dy = 0.$$

Из условий (2.49) же следует, что

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big(C^0_{\alpha\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) - C_{\alpha\alpha 33}(y)\frac{C^0_{\beta\beta 33} - C_{\beta\beta 33}(y)}{C_{3333}(y)}\Big)d\,y = 0, \tag{2.54}$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big(C^0_{\alpha\beta\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)\Big)d\,y = 0.$$

Соотношения (2.53)-(2.54) задают условия на все компоненты тензора упругих модулей сопутствующего тела и аддитивные постоянные k_{ijk}, k_{ijkl}.

В численных примерах будут рассмотрены следующие подходы к выбору упругих свойств сопутствующего тела.

1. Компоненты тензора модулей упругости сопутствующего тела выбираются удовлетворяющими соотношениям (2.53)-(2.54), аддитивные постоянные для структурных функций второго порядка в решении (2.52) – $k_{\alpha\alpha\beta\beta} = 0$. Такая комбинация упругих свойств сопутствующего тела и аддитивных постоянных позволяет удовлетворить граничные условия на лицевых поверхностях.
2. Компоненты тензора модулей упругости сопутствующего тела –

$$C^0_{ijkl} =< C_{ijkl} >, \tag{2.55}$$

аддитивные постоянные для структурных функций первого порядка $k_{3\alpha\alpha}, k_{\alpha\alpha 3}$ в решении (2.33) вычислены так, что $< N_{ikl} >= 0$, для структурных функций второго порядка в решении (2.52) – $k_{\alpha\alpha\beta\beta}, k_{\alpha\beta\beta\alpha}$ – так, что $< N_{ikli_1} >= 0$.

Общий вид приближения перемещений в исходном теле (2.19), построенного методом структурных функций второго порядка –

$$\begin{gathered}
u_1(\overrightarrow{x}) = v_1(\overrightarrow{x}) + N_{113}(x_3)\big[v_{1,3}(\overrightarrow{x}) + v_{3,1}(\overrightarrow{x})\big]+ \\
+N_{1111}(x_3)v_{1,11}(\overrightarrow{x}) + N_{1221}(x_3)v_{2,21}(\overrightarrow{x}) + N_{1331}(x_3)v_{3,31}(\overrightarrow{x})+ \\
+N_{1122}(x_3)\big[v_{1,22}(\overrightarrow{x}) + v_{2,12}(\overrightarrow{x})\big] + N_{1133}(x_3)\big[v_{1,33}(\overrightarrow{x}) + v_{3,31}(\overrightarrow{x})\big],
\end{gathered} \tag{2.56}$$

$$\begin{gathered}
u_2(\overrightarrow{x}) = v_2(\overrightarrow{x}) + N_{223}(x_3)\big[v_{2,3}(\overrightarrow{x}) + v_{3,2}(\overrightarrow{x})\big]+ \\
+N_{2112}(x_3)v_{1,12}(\overrightarrow{x}) + N_{2222}(x_3)v_{2,22}(\overrightarrow{x}) + N_{2332}(x_3)v_{3,32}(\overrightarrow{x})+ \\
+N_{2211}(x_3)\big[v_{1,12}(\overrightarrow{x}) + v_{2,11}(\overrightarrow{x})\big] + N_{2233}(x_3)\big[v_{2,33}(\overrightarrow{x}) + v_{3,32}(\overrightarrow{x})\big],
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
u_3(\overrightarrow{x}) = v_3(\overrightarrow{x}) + N_{311}(x_3)v_{1,1}(\overrightarrow{x}) + N_{322}(x_3)v_{2,2}(\overrightarrow{x}) + N_{333}(x_3)v_{3,3}(\overrightarrow{x})+ \\
+N_{3113}(x_3)v_{1,13}(\overrightarrow{x}) + N_{3223}(x_3)v_{2,23}(\overrightarrow{x}) + N_{3333}(x_3)v_{3,33}(\overrightarrow{x})+ \\
+N_{3311}(x_3)\big[v_{1,13}(\overrightarrow{x}) + v_{3,11}(\overrightarrow{x})\big] + N_{3322}(x_3)\big[v_{2,23}(\overrightarrow{x}) + v_{3,22}(\overrightarrow{x})\big].
\end{gathered}$$

Как следует из результатов раздела 2.2, второй порядок метода структурных функций избыточен при использовании приближенного решения сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява или модели типа Тимошенко. В случае использования приближенных решений (2.22), (2.25) нетривиальные условия ставятся не на все структурные функции.

При использовании приближенного решения сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява, поскольку порядок метода превышает порядок гипотезы, система условий на структурные функции оказывается недоопределенной – нетривиальными остаются только условия на функции $N_{2111}, N_{3111}, N_{2221}, N_{3221}, N_{1112}, N_{3112}, N_{1222}, N_{3222}, N_{2122}, N_{3122}, N_{1121}, N_{3121}, N_{1123}, N_{2123}, N_{3123}, N_{1113}, N_{1223}, N_{2113}, N_{2223}, N_{\gamma\alpha\alpha\gamma}, N_{\alpha\alpha\beta\beta}, \alpha, \beta = 1{,}2, \gamma = 1..3$; здесь допускаются $\alpha = \gamma$. Корректно вычисляются только 8 отличных от тождественного нуля структурных функций – $N_{\beta\alpha\alpha\beta}, N_{1122}, N_{2211}$, они совпадают с определенными в общем случае (2.52).

При использовании приближенного решения сопутствующей задачи в рамках модели типа Тимошенко система условий на структурные функции также оказывается недоопределенной, но позволяет вычислить все структурные функции, кроме $N_{2133}, N_{3133}, N_{1233}, N_{3233}, N_{1333}, N_{2333}, N_{3333}$, N_{1331}, N_{2332} – корректно вычисляются 10 отличных от тождественно нулевых структурных функций.

Отметим, что структурные функции, найденные по формулам (2.52) – непрерывные функции поперечной координаты, претерпевающие изменение кривизны в точках контакта слоев, если $C_{ijkl}(x_3)$ претерпевают в соответствующих точках разрыв. В случае, если упругие свойства каждого из слоев постоянны, структурные функции составлены из параболических по координате x_3 участков.

2.3.3.2 Пример

Аналогично разделу 2.3.2.1, приведём примеры графиков структурных функций. Для пластины 2-1, технические постоянные которой приведены в таблице 4, приведем графики структурных функций второго порядка (2.52), соответствующие выбору упругих свойств сопутствующего тела и произвольных постоянных для структурных функций (2.53) (Рис. 2.3, верхняя иллюстрация). На нижней иллюстрации Рис. 2.3 для модельной пластины 2-1 представлены одновременно структурные функции первого и второго порядка, что позволяет сопоставить их масштаб для данного тела.

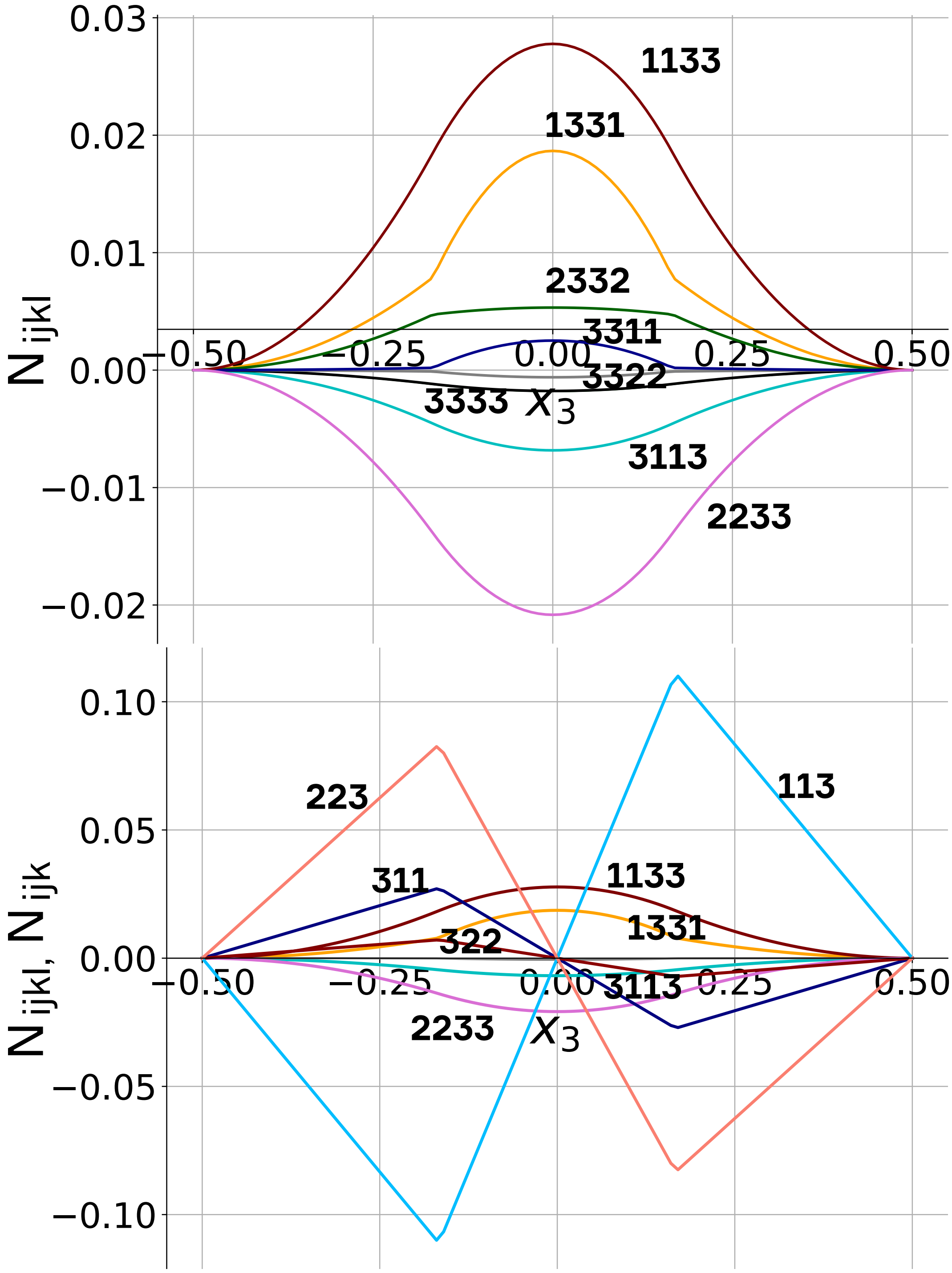

Рисунок 2.3 — Структурные функции второго порядка (верхняя иллюстрация), первого и второго порядка (нижняя иллюстрация) для пластины 2-1. Кривые соответствуют выбору свойств сопутствующего тела по формулам (2.53) из соображений точного удовлетворения граничных условий в напряжениях на лицевых поверхностях. Нормализованные технические постоянные пластины приведены в таблице (4)

2.3.3.3 Приближенное решение исходной задачи методом структурных функций второго порядка, основанное на приближенном решении сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява

Приведем явные формулы для приближенного решения исходной задачи методом структурных функций второго порядка, построенного на базе решения сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява. Подставим сведения о нулевых структурных функциях первого и второго порядка в соотношение для перемещений (2.46) и учтём вид перемещений в сопутствующем теле, продиктованный гипотезой (1.9). Приведём выражения сразу в терминах кинематических переменных сопутствующего тела –

$$
\begin{aligned}
u_1^{Kir+2} &= w_1 - x_3 w_{3,1} + N_{1111}(w_{1,11} - x_3 w_{3,111}) + \\
&\quad + N_{1221}(w_{2,21} - x_3 w_{3,122}) + N_{1122}(w_{1,22} + w_{2,21} - 2x_3 w_{3,122}), \\
u_2^{Kir+2} &= w_2 - x_3 w_{3,2} + N_{2222}(w_{2,22} - x_3 w_{3,222}) + \\
&\quad + N_{2112}(w_{1,12} - x_3 w_{3,112}) + N_{2211}(w_{1,12} + w_{2,11} - 2x_3 w_{3,112}), \\
u_3^{Kir+2} &= w_3 + N_{311}(w_{1,1} - x_3 w_{3,11}) + \\
&\quad N_{322}(w_{2,2} - x_3 w_{3,22}) - N_{3113} w_{3,11} - N_{3223} w_{3,22},
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

а также, с учётом вида решения сопутствующей задачи (2.23), в явном виде:

$$
\begin{aligned}
u_1^{Kir+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[& W_1^{mn}\Big(1 - \lambda_m^2 N_{1111} - \mu_n^2 N_{1122}\Big) - W_2^{mn}\lambda_m\mu_n(N_{1221} + N_{1122}) - \\
& - x_3 W_3^{mn}\lambda_m\Big(1 - \lambda_m^2 N_{1111} - \mu_n^2(N_{1221} + 2N_{1122})\Big)\Big] \cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2),
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2^{Kir+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[& - W_1^{mn}\lambda_m\mu_n(N_{2112} + N_{2211}) + W_2^{mn}\Big(1 - \mu_n^2 N_{2222} - \lambda_m^2 N_{2211}\Big) - \\
& - x_3 W_3^{mn}\mu_n\Big(1 - \mu_n^2 N_{2222} - \lambda_m^2(N_{2112} + 2N_{2211})\Big)\Big] \sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_3^{Kir+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[& W_3^{mn} - \lambda_m N_{311}(W_1^{mn} - x_3\lambda_m W_3^{mn}) - \mu_n N_{322}(W_2^{mn} - x_3\mu_n W_3^{mn}) \\
& + \lambda_m^2 W_3^{mn} N_{3113} + \mu_n^2 W_3^{mn} N_{3223}\Big] \sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2).
\end{aligned}
$$

Для краткости при описании приближенных решений исходной задачи, полученных методом структурных функций второго порядка, выражения для деформаций опущены. Приведем выражения для продольных и поперечных напряжений – в случае второго порядка более удобна для анализа форма записи напряжений в терминах w_k.

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{Kir+2} = C_{\alpha\alpha11}\Big(w_{1,1} - x_3 w_{3,11} + N_{1111}(w_{1,111} - x_3 w_{3,1111}) + \tag{2.59}$$
$$+N_{1221}(w_{2,112} - x_3 w_{3,1122}) + N_{1122}(w_{1,122} + w_{2,112} - 2x_3 w_{3,1122})\Big) +$$
$$+C_{\alpha\alpha22}\Big(w_{2,2} - x_3 w_{3,22} + N_{2112}(w_{1,122} - x_3 w_{3,1122}) +$$
$$+N_{2222}(w_{2,222} - x_3 w_{3,2222}) + N_{2211}(w_{1,122} + w_{2,112} - 2x_3 w_{3,1122})\Big) +$$
$$+C_{\alpha\alpha33}\Big(- (N_{311} + N_{3113,3})w_{3,11} - (N_{322} + N_{3223,3})w_{3,22} +$$
$$+N_{311,3}(w_{1,1} - x_3 w_{3,11}) + N_{322,3}(w_{2,2} - x_3 w_{3,22})\Big), \quad \alpha = 1..3.$$

$$\sigma_{12}^{Kir+2} = C_{1212}\Big(w_{1,2} + w_{2,1} - 2x_3 w_{3,12} +$$
$$+(N_{1111} + N_{2112})(w_{1,112} - x_3 w_{3,1112}) + (N_{1221} + N_{2222})(w_{2,122} - x_3 w_{3,1222}) +$$
$$+N_{1122}(w_{1,222} + w_{2,122} - 2x_3 w_{3,1222}) + N_{2211}(w_{1,112} + w_{2,111} - 2x_3 w_{3,1112})\Big)$$

$$\sigma_{13}^{Kir+2} = C_{1313}\Big((N_{311} + N_{1111,3})(w_{1,11} - x_3 w_{3,111}) +$$
$$+(N_{322} + N_{1221,3})(w_{2,12} - x_3 w_{3,122}) + N_{1122,3}(w_{1,22} + w_{2,12} - 2x_3 w_{3,122}) -$$
$$-(N_{1111} + N_{3113})w_{3,111} - (N_{1221} + 2N_{1122} + N_{3223})w_{3,122}\Big)$$

$$\sigma_{23}^{Kir+2} = C_{2323}\Big((N_{311} + N_{2112,3})(w_{1,12} - x_3 w_{3,112}) +$$
$$+(N_{322} + N_{2222,3})(w_{2,22} - x_3 w_{3,222}) + N_{2211,3}(w_{1,12} + w_{2,11} - 2x_3 w_{3,112}) -$$
$$-(N_{2112} + 2N_{2211} + N_{3113})w_{3,112} - (N_{1221} + N_{3223})w_{3,222}\Big)$$

Заметим, что в приближенные решения исходной задачи (2.57)-(2.59) вошли только структурные функции, корректно определяемые в случае использования гипотезы Кирхгофа-Лява для сопутствующей пластины, а структурные функции, условия для которых тривиальны, в решение и не входят, поэтому факт неопределенности системы условий на структурные функции не создает неоднозначности приближения решения исходной задачи. Перечислим свойства построенных приближений (2.57).

– В отличие от приближения первого порядка (2.38) приближение второго порядка, основанное на гипотезе Кирхгофа-Лява для сопутствующей пластины (2.57) уже не обладает свойством $u_I^{Kir+1} \equiv v_I^{Kir}$ и формально выполняет критерий качества КР1, однако уточнения, вносимые повышением порядка метода структурных функций, малы по сравнению с v_I.
– Критерии качества 2-4 не выполняются в данном приближении; поперечные напряжения корректно не вычисляются в силу малости всех слагаемых, входящих в соответствующие выражения.

2.3.3.4 Приближенное решение исходной задачи методом структурных функций второго порядка, основанное на приближенном решении сопутствующей задачи в рамках модели типа Тимошенко

Теперь подставим выражения для перемещений в сопутствующем теле, описываемом моделью типа Тимошенко (1.18), и структурные функции первого и второго порядка, вычисленные ранее по формулам (2.33), (2.52), в соотношения метода структурных функций второго порядка (2.46). Тогда, в терминах кинематических переменных в сопутствующей пластине

$$u_1^{Tim+2} = y_1 - x_3(y_{3,1} - \gamma_1) + N_{113}\gamma_1 + N_{1111}[y_{1,11} - x_3(y_{3,111} - \gamma_{1,11})] + \tag{2.60}$$
$$+N_{1221}[y_{2,12} - x_3(y_{3,122} - \gamma_{2,12})] + N_{1122}[y_{1,22} + y_{2,12} - x_3(2y_{3,122} - \gamma_{1,22} - \gamma_{2,12})],$$

$$u_2^{Tim+2} = y_2 - x_3(y_{3,2} - \gamma_2) + N_{223}\gamma_2 + N_{2222}[y_{2,22} - x_3(y_{3,222} - \gamma_{2,22})] +$$
$$+N_{2112}[y_{1,12} - x_3(y_{3,112} - \gamma_{1,12})] + N_{2211}[y_{1,12} + y_{2,11} - x_3(2y_{3,112} - \gamma_{1,21} - \gamma_{2,11})],$$

$$u_3^{Tim+2} = y_3 + N_{311}[y_{1,1} - x_3(y_{3,11} - \gamma_{1,1})] + N_{322}[y_{2,2} - x_3(y_{3,22} - \gamma_{2,2})] +$$
$$+(N_{3311} + N_{3113})\gamma_{1,1} - N_{3113}y_{3,11} + (N_{3322} + N_{3223})\gamma_{2,2} - N_{3223}y_{3,22}.$$

С учётом вида решения сопутствующей задачи (2.25) соотношения (2.60) принимают вид

$$u_1^{Tim+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[Y_1^{mn} \Big(1 - \lambda_m^2 N_{1111} - \mu_n^2 N_{1122}\Big) - \tag{2.61}$$

$$-Y_2^{mn} \lambda_m \mu_n (N_{1221} + N_{1122}) - x_3 Y_3^{mn} \lambda_m \Big(1 - \lambda_m^2 N_{1111} - \mu_n^2 (N_{1221} + N_{1122})\Big) +$$

$$+\Gamma_1^{mn} \Big(x_3 + N_{113} - \lambda_m^2 x_3 N_{1111} - \mu_n^2 x_3 N_{1122}\Big) -$$

$$-x_3 \lambda_m \mu_n \Gamma_2^{mn} (N_{1221} + N_{1122}) \Big] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

$$u_2^{Tim+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[- Y_1^{mn} \lambda_m \mu_n (N_{2112} + N_{2211}) +$$

$$+Y_2^{mn} \Big(1 - \lambda_m^2 N_{2211} - \mu_n^2 N_{2222}\Big) - x_3 Y_3^{mn} \mu_n \Big(1 - \mu_n^2 N_{2222} - \lambda_m^2 (N_{2112} + 2N_{2211})\Big) -$$

$$-x_3 \Gamma_1^{mn} \lambda_m \mu_n (N_{2112} + N_{2211}) +$$

$$+\Gamma_2^{mn} \Big(x_3 + N_{223} - \lambda_m^2 x_3 N_{2211} - \mu_n^2 x_3 N_{2222}\Big) \Big] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$u_3^{Tim+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big(Y_3^{mn} - \lambda_m N_{311} (Y_1^{mn} - x_3 \lambda_m Y_3^{mn}) - \mu_n N_{322} (Y_2^{mn} - x_3 \mu_n Y_3^{mn}) +$$

$$+\lambda_m^2 Y_3^{mn} N_{3113} + \mu_n^2 Y_3^{mn} N_{3223} - \lambda_m \Gamma_1^{mn} (x_3 N_{311} + N_{3311} + N_{3113}) -$$

$$-\mu_n \Gamma_2^{mn} (x_3 N_{322} + N_{3322} + N_{3223}) \Big) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2).$$

Выражения для приближенного определения деформаций в рассматриваемом случае опустим, и приведем сразу выражения для напряжений:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{Tim+2} = C_{\alpha\alpha 11} \Big(y_{1,1} - x_3 (y_{3,11} - \gamma_{1,1}) + N_{113} \gamma_{1,1} + \tag{2.62}$$

$$N_{1111} (y_{1,111} - x_3 [y_{3,1111} - \gamma_{1,111}]) + N_{1221} (y_{2,112} - x_3 [y_{3,1122} - \gamma_{2,112}]) +$$

$$+N_{1122} (y_{1,122} + y_{2,112} - x_3 [2 y_{3,1122} - \gamma_{1,122} - \gamma_{2,112}]) \Big) +$$

$$+C_{\alpha\alpha 22} \Big(y_{2,2} - x_3 (y_{3,22} - \gamma_{2,2}) + N_{223} \gamma_{2,2} +$$

$$+N_{2112} (y_{1,122} - x_3 [y_{3,1122} - \gamma_{1,122}]) + N_{2222} (y_{2,222} - x_3 [y_{3,2222} - \gamma_{2,222}]) +$$

$$+N_{2211} (y_{1,122} + y_{2,112} - x_3 [2 y_{3,1122} - \gamma_{1,122} - \gamma_{2,112}]) \Big) +$$

$$+C_{\alpha\alpha 33} \Big(- (N_{311} + N_{3113,3}) [y_{3,11} - \gamma_{1,1}] - (N_{322} + N_{3223,3}) [y_{3,22} - \gamma_{2,2}] +$$

$$+N_{311,3} (y_{1,1} - x_3 [y_{3,11} - \gamma_{1,1}]) + N_{322,3} (y_{2,2} - x_3 [y_{3,22} - \gamma_{2,2}]) -$$

$$-N_{3311,3} \gamma_{1,1} - N_{3322,3} \gamma_{2,2} \Big), \quad \alpha = 1..3.$$

$$\sigma_{12}^{Tim+2} = C_{1212}\Big(y_{1,2} + y_{2,1} - x_3[2y_{3,12} - \gamma_{1,2} - \gamma_{2,1}] + N_{113}\gamma_{1,2} + N_{223}\gamma_{2,1}$$
$$+(N_{1111} + N_{2112})(y_{1,112} - x_3[y_{3,1112} - \gamma_{1,112}])+$$
$$+(N_{1221} + N_{2222})(y_{2,122} - x_3[y_{3,1222} - \gamma_{2,122}])+$$
$$+N_{1122}(y_{1,222} + y_{2,122} - x_3[2y_{3,1222} - \gamma_{1,222} - \gamma_{2,122}])+$$
$$+N_{2211}(y_{1,112} + y_{2,111} - x_3[2y_{3,1112} - \gamma_{1,112} - \gamma_{2,111}])\Big),$$

$$\sigma_{13}^{Tim+2} = C_{1313}\Big([1 + N_{113,3}]\gamma_1 + (N_{311} + N_{1111,3})(y_{1,11} - x_3[y_{3,111} - \gamma_{1,11}])+$$
$$+(N_{322} + N_{1221,3})(y_{2,12} - x_3[y_{3,122} - \gamma_{2,12}])+$$
$$+N_{1122,3}(y_{1,22} + y_{2,12} - x_3[2y_{3,122} - \gamma_{1,22} - \gamma_{2,12}])-$$
$$-(N_{1111} + N_{3113})[y_{3,111} - \gamma_{1,11}] - (N_{1221} + N_{3223})[y_{3,122} - \gamma_{2,12}]-$$
$$-N_{1122}[2y_{3,122} - \gamma_{1,22} - \gamma_{2,12}] + N_{3311}\gamma_{1,11} + N_{3322}\gamma_{2,12}\Big),$$

$$\sigma_{23}^{Tim+2} = C_{2323}\Big([1 + N_{223,3}]\gamma_2 + (N_{311} + N_{2112,3})(y_{1,12} - x_3[y_{3,112} - \gamma_{1,12}])+$$
$$+(N_{322} + N_{2222,3})(y_{2,22} - x_3[y_{3,222} - \gamma_{2,22}])+$$
$$+N_{2211,3}(y_{1,12} + y_{2,11} - x_3[2y_{3,112} - \gamma_{1,12} - \gamma_{2,11}])-$$
$$-(N_{2112} + N_{3113})[y_{3,112} - \gamma_{1,12}] - (N_{2222} + N_{3223})[y_{3,222} - \gamma_{2,22}]-$$
$$-N_{2211}[2y_{3,112} - \gamma_{1,12} - \gamma_{2,11}] + N_{3311}\gamma_{1,12} + N_{3322}\gamma_{2,22}\Big),$$

Аналогично случаю выбора приближенного решения сопутствующей задачи, основанного на модели Кирхгофа-Лява, структурные функции, не определенные корректно при выборе приближенного решения сопутствующей задачи в рамках теории типа Тимошенко в разделе 2.3.3.1, в приближение (2.61)-(2.62) не входят. Качественные свойства построенных приближений подобны свойствам приближений, построенных в разделе 2.3.2.4 с использованием метода структурных функций первого порядка и приближенного решения сопутствующей задачи в модели типа Тимошенко.

1. Приближения перемещений описывают зависимость перемещений от поперечной координаты в виде ломаной, тем самым выполняя критерий качества КР1 (в случае приближений второго порядка приближения перемещений представляют собой нелинейные по поперечной координате ломаные даже в случае слоев пластины, упругие свойства которых постоянны).

2. Критерии КР2-4 не выполняются. Поперечные напряжения отличны от тождественно нулевых или близких к нулю, но описываются не точно в силу аналогичных разделу 2.3.2.4 соображений.

2.3.3.5 Приближенное решение исходной задачи методом структурных функций второго порядка, основанное на приближенном решении сопутствующей задачи по методу Пагано

Приведём также явные формулы для приближенного решения исходной задачи по методу структурных функций второго порядка, основанного на приближенном решении сопутствующей задачи по методу Пагано. В силу аналогичных описанным в разделе 2.3.2.5 соображений вид приближений перемещений в исходном теле, определенных методом структурных функций второго порядка на базе решения сопутствующей задачи по методу Пагано, совпадает с общими соотношениями (2.56) – не повторяя общие соотношения, конкретизируем их вид с учётом соотношений (2.28) для перемещений в сопутствующем теле:

$$u_1^{Pag+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Big(F_r^{mn} + N_{113}(x_3) G_r^{mn} \big(R_r^{mn} \lambda_m + m_r^{mn} \big) - \tag{2.63}$$

$$-\lambda_m^2 N_{1111}(x_3) F_r^{mn} \lambda_m \mu_n N_{1221}(x_3) L_r^{mn} F_r^{mn} + \lambda_m N_{1331}(x_3) R_r^{mn} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} m_r^{mn} -$$

$$-\mu_n N_{1122}(x_3)(\mu_n + \lambda_m L_r^{mn}) F_r^{mn} +$$

$$+N_{1133}(x_3) m_r^{mn} F_r^{mn} \alpha_r^{mn} \big(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn} \big) \Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$+\Big(G_r^{mn} + N_{113}(x_3) \alpha_r^{mn} F_r^{mn} \big(m_r^{mn} + R_r^{mn} \lambda_m \big) - \lambda_m^2 N_{1111}(x_3) G_r^{mn} -$$

$$-\mu_n N_{1122}(x_3)(\mu_n + \lambda_m L_r^{mn}) G_r^{mn} \lambda_m \mu_n N_{1221}(x_3) L_r^{mn} G_r^{mn} +$$

$$+\lambda_m N_{1331}(x_3) R_r^{mn} \alpha_r^{mn} G_r^{mn} m_r^{mn} +$$

$$+N_{1133}(x_3) m_r^{mn} \alpha_r^{mn} G_r^{mn} \big(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn} \big) \Big) S_r^{mn}(x_3) \Big] \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

$$u_2^{Pag+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Big(L_r^{mn} F_r^{mn} + N_{223}(x_3) G_r^{mn} \big(L_r^{mn} m_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn} \big) -$$

$$-\mu_n^2 N_{2222}(x_3) L_r^{mn} F_r^{mn} - \lambda_m \mu_n N_{2112}(x_3) F_r^{mn} + \mu_n N_{2332}(x_3) R_r^{mn} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} -$$

$$-\lambda_m N_{2211}(\lambda_m L_r^{mn} + \mu_n) F_r^{mn} + N_{2233}(x_3) \alpha_r^{mn} F_r^{mn} \big(L_r^{mn} m_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn} \big) \Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$+\Big(L_r^{mn} G_r^{mn} + N_{223}(x_3) \alpha_r^{mn} F_r^{mn} \big(L_r^{mn} m_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn} \big) - \mu_n^2 N_{2222}(x_3) L_r^{mn} G_r^{mn} -$$

$$-\lambda_m N_{2211}(\lambda_m L_r^{mn} + \mu_n) G_r^{mn} - \lambda_m \mu_n N_{2112}(x_3) G_r^{mn} +$$

$$+\mu_n N_{2332}(x_3) R_r^{mn} \alpha_r^{mn} G_r^{mn} m_r^{mn} +$$

$$+N_{2233}(x_3) m_r^{mn} \alpha_r^{mn} G_r^{mn} (L_r^{mn} m_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn}) \Big) S_r^{mn}(x_3) \Big] \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2),$$

$$u_3^{Pag+2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Big[\Big(R_r^{mn} G_r^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3) F_r^{mn} + N_{333}(x_3) m_r^{mn} R_r^{mn} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} -$$

$$-\mu_n N_{322} L_r^{mn} F_r^{mn} + N_{3333}(x_3) (m_r^{mn})^2 R_r^{mn} \alpha_r^{mn} G_r^{mn} - \lambda_m N_{3223}(x_3) m_r^{mn} L_r^{mn} G_r^{mn} -$$

$$-\lambda_m N_{3311}(x_3) G_r^{mn} \big(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn} \big) -$$

$$-\mu_n N_{3322}(x_3) G_r^{mn} \big(m_r^{mn} L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn} \big) \Big) C_r^{mn}(x_3) +$$

$$\Big(R_r^{mn} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} - \lambda_m N_{311}(x_3) G_r^{mn} -$$

$$-\mu_n N_{322}(x_3) G_r^{mn} L_r^{mn} + N_{333}(x_3) m_r^{mn} R_r^{mn} \alpha_r^{mn} G_r^{mn} +$$

$$N_{3333}(x_3) (m_r^{mn})^2 R_r^{mn} (\alpha_r^{mn})^2 F_r^{mn} - \lambda_m N_{3113} m_r^{mn} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} -$$

$$\mu_n N_{3223}(x_3) m_r^{mn} \alpha_r^{mn} L_r^{mn} F_r^{mn} - \lambda_m N_{3311} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} \big(m_r^{mn} + \lambda_m R_r^{mn} \big) -$$

$$\mu_n N_{3322} \alpha_r^{mn} F_r^{mn} \big(m_r^{mn} L_r^{mn} + \mu_n R_r^{mn} \big) \Big) S_r^{mn}(x_3) \Big] \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2),$$

Напряжения имеют следующий вид.

$$\sigma_{12}^{Pag+2} = C_{1212} \Big(v_{1,2} + v_{2,1} + N_{113}(v_{1,23} + v_{3,12}) + N_{223}(v_{2,13} + v_{3,12}) + \tag{2.64}$$

$$+(N_{1111} + N_{2112}) v_{1,112} + (N_{1221} + N_{2222}) v_{2,122} + (N_{1331} + N_{2332}) v_{3,123} +$$

$$+N_{1122}(v_{1,222} + v_{2,122}) + N_{1133}(v_{1,233} + v_{3,123}) +$$

$$+N_{2211}(v_{1,112} + v_{2,111}) + N_{2233}(v_{2,133} + v_{3,123}) \Big),$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{13}^{Pag+2}=C_{1313}\Big((v_{1,3}+v_{3,1})(1+N_{113,3})+(N_{113}+N_{1133,3})(v_{1,33}+v_{3,13})+\\
+N_{311}v_{1,11}+N_{322}v_{2,12}+N_{333}v_{3,13}+\\
+N_{1111,3}v_{1,11}+N_{1122,3}(v_{1,22}+v_{2,12})+N_{1221,3}v_{2,21}+N_{1331,3}v_{3,31}+\\
+(N_{1111}+N_{3113})v_{1,113}+(N_{1221}+N_{3223})v_{2,123}+(N_{1331}+N_{3333})v_{3,133}+\\
+N_{1122}(v_{1,223}+v_{2,123})+N_{1133}(v_{1,333}+v_{3,133})+\\
+N_{3311}(v_{1,113}+v_{3,111})+N_{3322}(v_{2,123}+v_{3,122})\Big)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{23}^{Pag+2}=C_{2323}\Big((v_{2,3}+v_{3,2})(1+N_{223,3})+(N_{223}+N_{2233,3})(v_{2,33}+v_{3,23})+\\
+N_{311}v_{1,12}+N_{322}v_{2,22}+N_{333}v_{3,23}+\\
+N_{2112,3}v_{1,12}+N_{2211,3}(v_{1,12}+v_{2,11})+N_{2222,3}v_{2,22}+N_{2332,3}v_{3,32}+\\
+(N_{2112}+N_{3113})v_{1,123}+(N_{2222}+N_{3223})v_{2,223}+(N_{2332}+N_{3333})v_{3,233}+\\
+N_{2211}(v_{1,123}+v_{2,113})+N_{2233}(v_{2,333}+v_{3,233})+\\
+N_{3311}(v_{1,123}+v_{3,112})+N_{3322}(v_{2,223}+v_{3,222})\Big)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\alpha}^{Pag+2}=C_{\alpha\alpha 11}\Big(v_{1,1}+N_{113}(v_{1,13}+v_{3,11})+N_{1111}v_{1,111}+N_{1221}v_{2,112}+N_{1331}v_{3,113}+\\
+N_{1122}(v_{1,122}+v_{2,112})+N_{1133}(v_{1,133}+v_{3,113})\Big)+\\
+C_{\alpha\alpha 22}\Big(v_{2,2}+N_{223}(v_{2,23}+v_{3,22})+N_{2112}v_{1,122}+N_{2222}v_{2,222}+N_{2332}v_{3,223}+\\
+N_{2211}(v_{1,122}+v_{2,112})+N_{2233}(v_{2,233}+v_{3,223})\Big)+\\
+C_{\alpha\alpha 33}\Big(v_{3,3}+N_{311,3}v_{1,1}+N_{322,3}v_{2,2}+N_{333,3}v_{3,3}+\\
+(N_{311}+N_{3113,3})v_{1,13}+(N_{322}+N_{3223,3})v_{2,23}+(N_{333}+N_{3333,3})v_{3,33}+\\
+N_{3311}(v_{1,133}+v_{3,113})+N_{3322}(v_{2,233}+v_{3,223})+\\
+N_{3113}v_{1,133}+N_{3223}v_{2,233}+N_{3333}v_{3,333}+\\
+N_{3311,3}(v_{1,13}+v_{3,11})+N_{3322,3}(v_{2,23}+v_{3,22})\Big).
\end{gathered}
$$

Соотношения (2.64) вновь, как и в случае метода структурных функций первого порядка, позволяют приближенно вычислять поперечные напряжения.

Подводя итог рассмотрения приближенных решений исходной задачи при помощи метода структурных функций второго порядка, опишем свойства полученных приближений.

- МСФ-приближения II порядка при использовании модели Кирхгофа-Лява для решения сопутствующей задачи уже не обладают свойством $u_I \equiv v_I$, однако слагаемые $N_{ikli_1} v_{k,li_1}$ при использовании для решения сопутствующей задачи модели Кирхгофа-Лява и модели типа Тимошенко малы, поэтому уточнение, вносимое повышением порядка МСФ, незначительно в этих случаях.
- В приближение, основанное на решении сопутствующей задачи по методу Пагано, слагаемые $N_{ikli_1} v_{k,li_1}$ вносят более существенный вклад.
- МСФ-приближения II порядка при использовании модели типа Тимошенко и метода Пагано для решения сопутствующей задачи удовлетворяют КР1, КР2 и КР5 по E. Carrera. МСФ-приближение II порядка, использующее решение по методу Пагано для сопутствующей задачи, удовлетворяет и КР3 по E. Carrera при выборе упругих свойств сопутствующего тела, изложенном в диссертации.
- При использовании модели Кирхгофа-Лява для сопутствующей задачи в итоговое решение входят 8 ненулевых СФ; при использовании модели типа Тимошенко – 10 ненулевых СФ. В случае композита с кусочно-постоянными свойствами СФ – кусочно-параболические функции.

В Главе 2 методом стуктурных функций построены приближенные решения задачи о нагружении линейно-упругой пластины, составленной из слоев, ортотропных в осях координат, параллельных сторонам пластины, и свободно опертой на торцах. Получены аналитические выражения для коэффициентов метода – структурных функций I-го и II-го порядка. Построены соотношения для приближенных решений данной задачи методом структурных функций первого и второго порядка, основанных на приближенных решениях сопутствующей задачи в рамках модели Кирхгофа-Лява, типа Тимошенко, в трехмерной постановке (по методу Пагано). Точность решения сопутствующей задачи – важный параметр метода структурных функций: уже метод I-го порядка позволяет описывать поле перемещений в слоистой пластине в виде ломаных (при выборе приближенного решения сопутствующей задачи, основанного на модели типа Тимошенко, или более точного); приближенно вычислять поперечные напряжения (при выборе приближенного решения сопутствующей задачи по методу Пагано). Получены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела, необходимые для выполнения построенными приближенными решениями граничных условий на лицевых поверхностях.

Глава 3. Численные сопоставления приближенных решений задачи о нагружении свободно опертой линейно-упругой пластины, построенных методом структурных функций, с известными решениями[12]

В данной главе приводятся результаты численного сопоставления приближенных решений задачи о нагружении свободно опертой линейно-упругой пластины (2.19), построенных методом структурных функций (далее – МСФ-приближений). Явные соотношения МСФ-приближений получены в Главе 2. МСФ-приближения с разным выбором параметров метода сопоставляются между собой и с известными решениями той же задачи; иллюстрируются отмеченные выше качественные свойства МСФ-приближений. Результаты сопоставлений приводятся для нормализованных аналогично [29] компонент напряженно-деформированного состояния,

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(0, L_2/2, x_3) &= 100 H^3 E_T u_1(0, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^4), \\ \hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3) &= 100 H^3 E_T u_3(L_1/2, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^4), \\ \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(L_1/2, L_2/2, x_3) &= H \sigma_{\alpha\alpha}(L_1/2, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^2), \\ \hat{\sigma}_{13}(0, L_2/2, x_3) &= H \sigma_{13}(0, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Перечень сопоставлений, а также цветовая индикация иллюстраций к данной главе приведены в Таблице 5. МСФ-приближения вычислены при помощи скрипта на языке Python 3; толщина пластины разбита равномерной сеткой из 100 точек; конечноэлементные решения построены в ABAQUS с использованием элементов типа $C3D8$, $C3D20$; по толщине пластины распределено 100 элементов. Разные варианты выбора упругих свойств сопутствующего тела приведены для того, чтобы проиллюстрировать необходимость выбора последних в соответствии с (2.35), (2.53).

[12]При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [15—17].

Таблица 5 — приближенные решения исходной задачи и цветовые обозначения Рис. 3.1-3.9

Порядок метода	Выбор свойств сопутствующего тела	Приближение решения сопутствующей задачи	Цвет графика
Первый	(2.35)	модель Кирхгофа-Лява	светло-зеленый
Первый	(2.36)	модель Кирхгофа-Лява	зеленый
Первый	(2.35)	модель типа Тимошенко	оранжевый
Первый	(2.36)	модель типа Тимошенко	коричневый
Первый	(2.35)	метод Пагано	сиреневый
Первый	(2.36)	метод Пагано	синий
Второй	(2.53)	модель Кирхгофа-Лява	голубой
Второй	(2.55)	модель Кирхгофа-Лява	бирюзовый
Второй	(2.53)	модель типа Тимошенко	розовый
Второй	(2.55)	модель типа Тимошенко	малиновый
Второй	(2.53)	метод Пагано	серый
Второй	(2.55)	метод Пагано	черный
–	–	Метод Пагано для исходной пластины	красный
–	–	Модель типа Тимошенко для исходной пластины	темно-синий
–	–	МКЭ C3D8 (треугольные маркеры)	зеленый
–	–	МКЭ C3D20 (квадратные маркеры)	оливковый

3.1 Сопоставление МСФ-приближений с решениями методом конечных элементов

Стандартным способом верификации новых решений задач механики деформируемого твердого тела служит сопоставление с решениями, построенными методом конечных элементов. Поскольку МСФ-приближения строились для трехмерной постановки задачи (2.19), выбраны призматические элементы типа $C3D8$ и $C3D20$ (первые не обеспечивают выполнения граничных условий на лицевых поверхностях; с учетом того, что ряд рассматриваемых МСФ-приближений также не обеспечивает этого удовлетворения, представляет интерес сопоставление таких решений). Для того, чтобы сравнить с конечно-элементными решениями МСФ-приближения всех основных типов компонент напряженно-деформированного состояния (продольные и поперечные перемещения, продольные напряжения, поперечные касательные и нормальные напряжения), в этом разделе выбраны только МСФ-приближения решения исходной задачи, основанные на решении Пагано для сопутствующей задачи. Как отмечено выше, МСФ-приближения, основанные на решении сопутствующей задачи по гипотезе Кирхгофа-Лява и гипотезе Тимошенко, не позволяют точно описать поперечные напряжения. Заведомо более грубые МСФ-приближения будут рассмотрены ниже, в разделе 3.2.

3.1.1 Случай асимметричной относительно серединной плоскости пластины

Первым рассмотрим сопоставление

- МСФ-приближений первого порядка (2.44)-(2.45) с выбором упругих свойств сопутствующего тела (2.35),(2.36);
- МСФ-приближений второго порядка (2.63)-(2.64) с выбором упругих свойств сопутствующего тела (2.53);
- конечноэлементных решений;
- решения по методу Пагано (в трехмерной постановке)

для задачи о нагружении асимметричной относительно $x_3 = 0$ пластины 3-1 только нормальной нагрузкой $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin\lambda_m x_1 \sin\mu_n x_2, q_I^+ \equiv 0, q_i^- \equiv 0$. Нормализованные технические постоянные пластины 3-1 приведены в Таблице 6. Результаты данного сопоставления приведены на иллюстрациях 3.1, 3.2. Приведен вид зависимости от x_3 нормализованных по формулам (3.1) значений продольных и поперечных напряжений, продольных перемещений.

Таблица 6 — технические постоянные пластины 3-1, соотношение линейных размеров – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/12, H/2]$	70	1	1	0.25	0.25/70	0.25/70	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/12]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

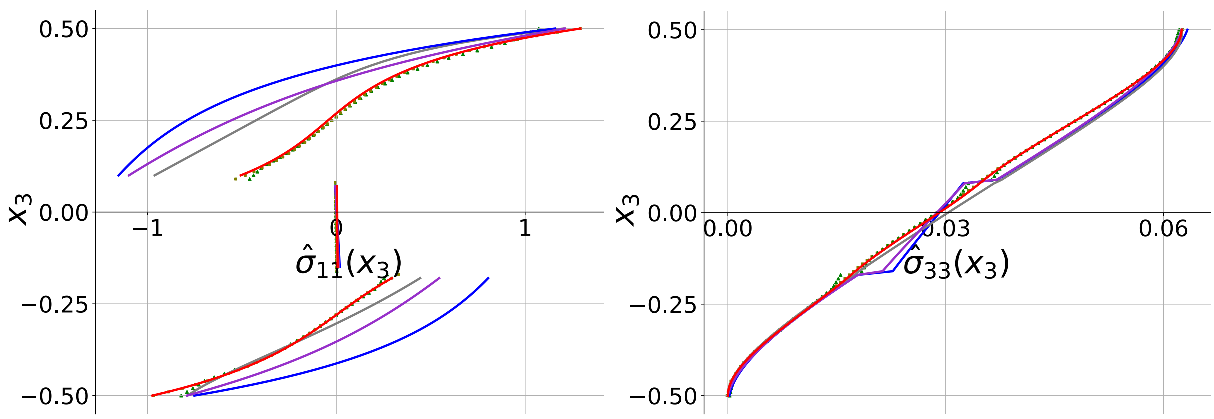

Рисунок 3.1 — Сопоставление между собой и с конечноэлементным решением приближений напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, $\hat{\sigma}_{33}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, полученных методом структурных функций I и II порядка в сочетании с решением сопутствующей задачи в трехмерной постановке. Конечноэлементные решения, использующие элементы C3D8, показаны зелеными маркерами, элементы C3D20 – оливковыми; известное решение исходной задачи в трехмерной постановке – красной кривой. МСФ-приближения, использующие предложенные в диссертации свойства сопутствующего тела, показаны розовыми (I порядок МСФ) и серыми (II порядок МСФ) кривыми. МСФ-приближение, использующее ранее предложенный выбор сопутствующих свойств – синие кривые. Технические постоянные пластины приведены в таблице 6

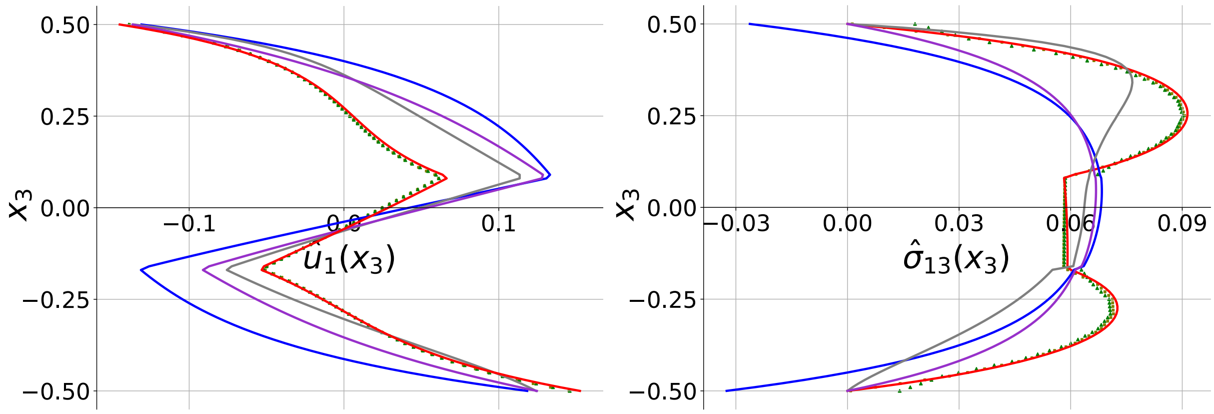

Рисунок 3.2 — Сопоставление между собой и с конечноэлементным решением приближений напряжения $\hat{\sigma}_{13}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и перемещения $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$, полученных методом структурных функций I и II порядка в сочетании с решением сопутствующей задачи в трехмерной постановке. Конечноэлементные решения, использующие элементы C3D8, показаны зелеными маркерами, элементы C3D20 – оливковыми; известное решение исходной задачи в трехмерной постановке – красной кривой. МСФ-приближения, использующие предложенные в диссертации свойства сопутствующего тела, показаны розовыми (I порядок МСФ) и серыми (II порядок МСФ) кривыми. МСФ-приближение, использующее ранее предложенный выбор сопутствующих свойств – синие кривые. Технические постоянные пластины приведены в таблице 6.

3.1.2 Случай симметричной относительно серединной плоскости пластины

Аналогичное предыдущему (раздел 3.1.1) сопоставление приведем для симметричной относительно $x_3 = 0$ пластины 3-2, нагруженной только нормальной нагрузкой $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2, q_I^+ \equiv 0, q_i^- \equiv 0$. Нормализованные технические постоянные пластины 3-2 приведены в Таблице 7. Результаты данного сопоставления приведены на иллюстрации 3.3.

Таблица 7 — технические постоянные пластины 3-2, соотношение линейных размеров – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/6, H/2]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[-H/6, H/6]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.2
$[-H/2, -H/6]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5

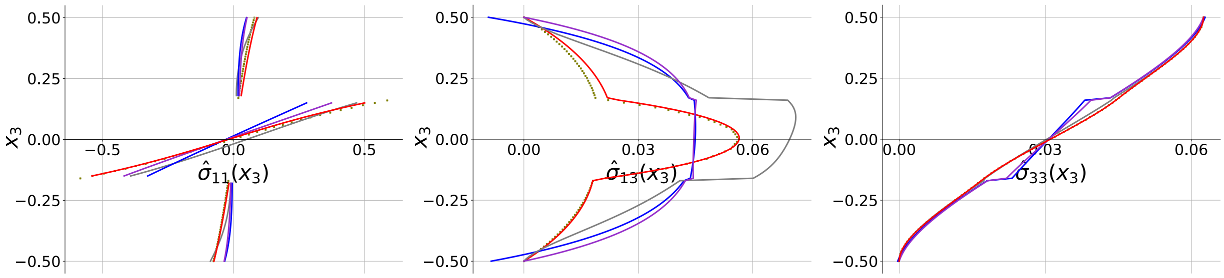

Рисунок 3.3 — Сравнение между собой и с конечноэлементным решением приближений напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, $\hat{\sigma}_{33}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{\sigma}_{13}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, полученных методом структурных функций I и II порядка в сочетании с решением сопутствующей задачи в трехмерной постановке. Конечноэлементные решения, использующие элементы C3D20 – оливковыми; решение исходной задачи в трехмерной постановке – красной кривой. МСФ-приближения, использующие предложенные в диссертации свойства сопутствующего тела, показаны розовыми (I порядок МСФ) и серыми (II порядок МСФ) кривыми. МСФ-приближение, использующее ранее предложенный выбор сопутствующих свойств – синие кривые. Технические постоянные пластины приведены в таблице 7

Сопоставления 3.1-3.3 позволяют проиллюстрировать необходимость выбора упругих свойств сопутствующего тела в соответствии с (2.35), (2.53) для выполнения граничных условий: соответствующие МСФ-приближения даны розовыми и серыми кривыми, поперечные напряжения, вычисленные соответствующим образом, выполняют граничные условия на лицевых поверхностях. Синие же кривые, соответствующие альтернативному выбору упругих свойств сопутствующего тела, показывают невыполнение граничных условий. Кроме того, можно отметить, что конечноэлементное решение, основанное на использовании элементов типа $C3D20$ (оливковые маркеры), достаточно точно совпадает с решением Пагано для исходной задачи (красные линии), поэтому дальше в качестве верификационного будет использоваться только последнее. Наиболее близким к верификационным решениям является МСФ-приближение второго порядка (серые кривые).

3.2 Сопоставление МСФ-приближений, полученных на базе решений сопутствующей задачи разной точности

Одна из целей данной работы – сопоставление между собой МСФ-приближений, в которых выбраны разные параметры настройки метода. В разделе 3.2.1 показано влияние повышения точности решения сопутствующей задачи на построенные приближения; в разделе 3.2.2 – результат повышения порядка точности метода структурных функций без повышения порядка точности решения сопутствующей задачи.

3.2.1 Случай фиксированного порядка МСФ

3.2.1.1 Первый порядок МСФ

Приведем иллюстрации, объединяющие все приближения решения исходной задачи, полученные методом структурных функций первого порядка (Рис. 3.4)); на этих иллюстрациях приведены все рассмотренные в диссертации варианты выбора приближенного решения сопутствующей задачи, несмотря на изложенные в Главе 2 соображения о невысокой эффективности использования приближения решения в модели Кирхгофа-Лява. Иллюстрации построены для пластины 3-3, подвергнутой нагружению $q_3^+(x_1,x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1)\sin(\mu_1 x_2)$, $q_I^\pm(x_1,x_2) = 0$, $q_3^-(x_1,x_2) = 0$. Нормализованные технические постоянные пластины 3-3 приведены в таблице 8.

Таблица 8 — технические постоянные пластины 3-3, соотношение линейных размеров – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/6, H/2]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

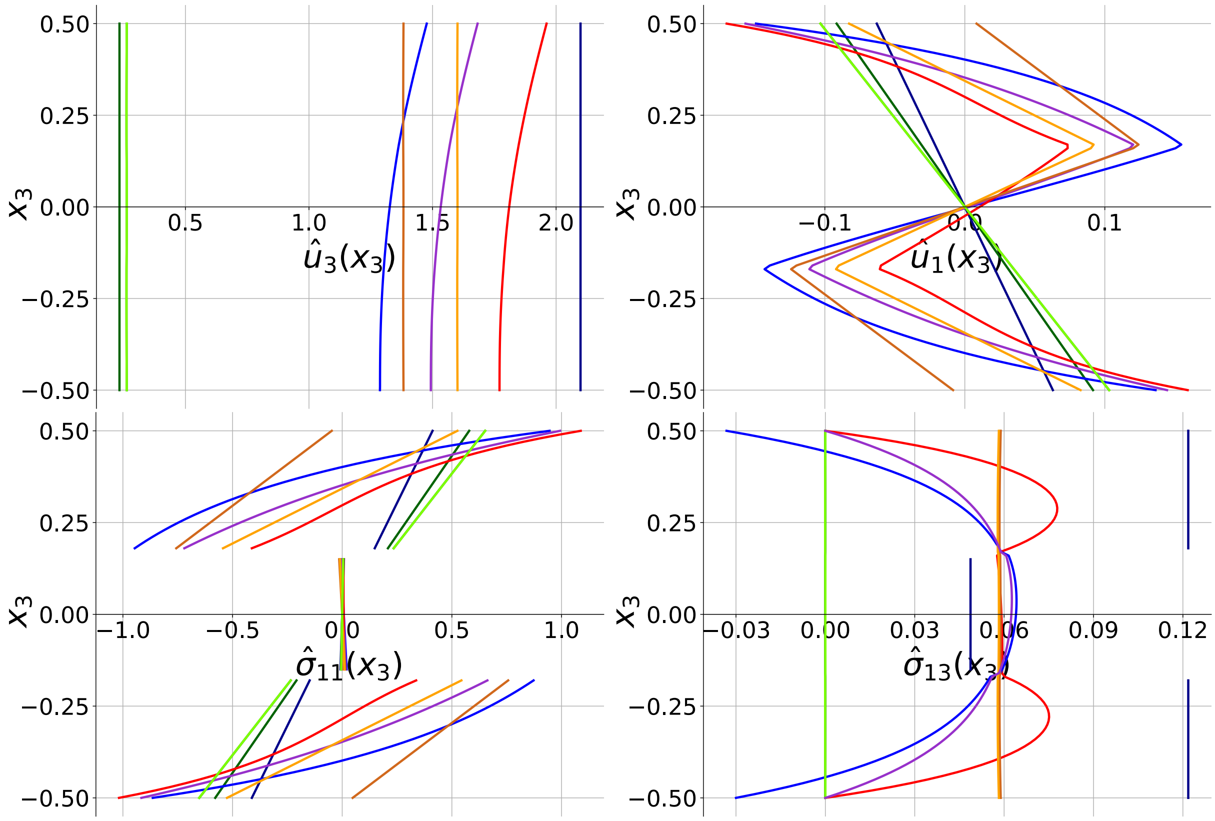

Рисунок 3.4 — Сопоставление результатов моделирования МСФ-приближений первого порядка в сочетании с разными приближенными решениями сопутствующей задачи. Приведены нормализованные значения перемещений $\hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$; напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{\sigma}_{13}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ для пластины с техническими постоянными, приведенными в таблице 8, нагруженной поверхностными силами $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2)$, $q_I^{\pm}(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$. Темно-синие прямые – результат приближенного решения задачи о нагружении той же пластины, основанного на гипотезе Тимошенко, без МСФ

3.2.1.2 Второй порядок МСФ

Приведем аналогичные представленным выше сопоставления приближенных решений, построенных МСФ второго порядка. Опустим в них иллюстрацию для напряжения σ_{13}: на иллюстрации 3.4 можно убедиться в теоретическом выводе о том, что МСФ-приближения, задействующие решения сопутствующей задачи, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява и Тимошенко, напряжения σ_{i3} не описывают, вместо неё добавим иллюстрацию для σ_{33}.

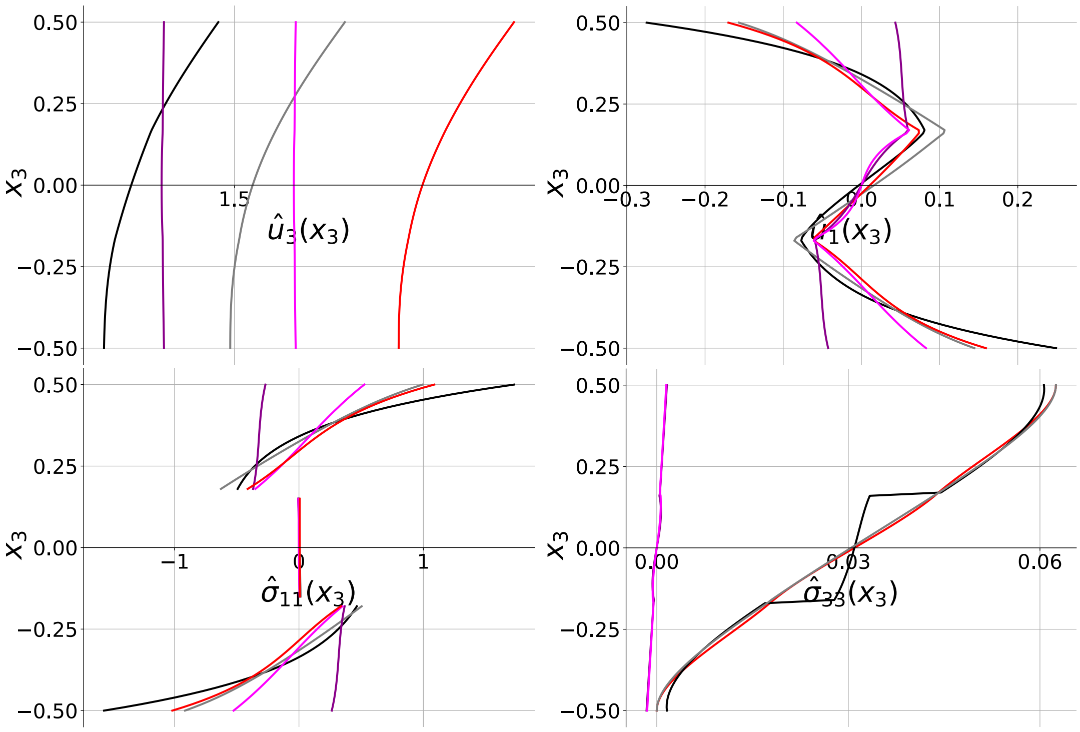

Рисунок 3.5 — Сопоставление результатов моделирования МСФ-приближений второго порядка в сочетании с разными приближенными решениями сопутствующей задачи. Сопоставлены нормализованные значения перемещений $\hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$; напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, $\hat{\sigma}_{33}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ для пластины с техническими постоянными, приведенными в таблице 8, нагруженной поверхностными силами $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2)$, $q_I^\pm(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$

Сопоставления 3.4-3.5 позволяют убедиться, что повышение точности решения сопутствующей задачи улучшает МСФ-приближение. В первую очередь отметим способность МСФ-приближений, основанных на решении Пагано для сопутствующей задачи (розовые и серые кривые), моделировать поперечные напряжения, в отличие от МСФ-приближений, основанных на решениях сопутствующей задачи по модели Кирхгофа-Лява (зеленые кривые) и Тимошенко (желтые и коричневые). Кроме того, на этих иллюстрациях можно убедиться в том, что МСФ-приближения, основанные на модели Кирхгофа-Лява для сопутствующей задачи (зеленые линии), не представляют большого интереса в дальнейшем сравнении. МСФ-приближения, основанные на приближенном решении сопутствующей задачи в модели Тимошенко (желтые и коричневые кривые) занимают в этом отношении промежуточное положение: точнее основанных на модели Кирхгофа-Лява для сопутствующей пластины, но грубее основанных на решении Пагано для сопутствующей пластины. Во всех случаях МСФ-приближения, в которых свойства сопутствующего тела выбраны предложенным в работе образом, показывают лучший результат.

3.2.2 Случай фиксированного решения сопутствующей задачи...

Интерес представляет также сопоставление приближений, полученных методом структурных функций разного порядка при фиксированном приближении решения сопутстсвующей задачи. Как отмечено выше, рассмотрение сопутстсвующей пластины в модели Кирхгофа-Лява не представляет большого интереса с этой точки зрения, мы ограничимся рассмотрением в рамках модели типа Тимошенко и решением по методу Пагано. Сравнение проводится для нагружения той же пластины, что и в предыдущем подразделе 3.2.1, упругие свойства которой приведены в таблице 8.

3.2.2.1 ...основанного на модели Тимошенко

Результат сопоставления МСФ-приближений первого и второго порядка, которые задействуют приближенное решение сопутствующей задачи, основанное на модели Тимошенко, приведен на графиках 3.6. Цветовая индикация на данных графиках соответствует приведенной в таблице 5, добавлены темно-синие кривые – результат приближенного решения исходной задачи, основанного на модели типа Тимошенко без метода структурных функций, из соотношений раздела 1.5.2. Можно отметить, что повышение порядка МСФ ожидаемо не даёт стабильного улучшения приближений, так как порядок точности модели Тимошенко ниже оптимального для метода структурных функций второго порядка.

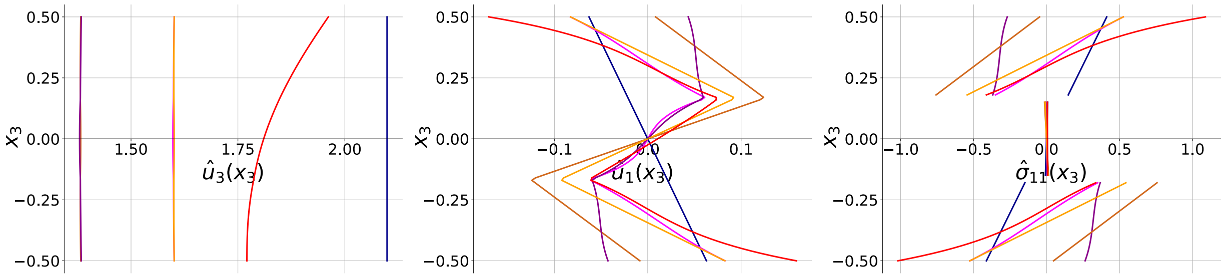

Рисунок 3.6 — Сравнение результатов моделирования МСФ-приближений первого и второго порядка в сочетании с приближенным решением сопутствующей задачи в модели типа Тимошенко. Сопоставлены нормализованные значения перемещений $\hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$; напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ для пластины с техническими постоянными, указанными в таблице 8, нагруженной поверхностными силами $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2)$, $q_I^{\pm}(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$

3.2.2.2 ...по методу Пагано

Приведем также (Рис. 3.7) результат сопоставления приближений решения исходной задачи, полученных методом структурных функций первого и второго порядка, основанных на решении сопутствующей задачи по методу Пагано. В отличие от предыдущего случая, можно пронаблюдать, что повышение порядка метода структурных функций улучшает конечный результат; кроме того, такие МСФ-приближения удовлетворительно описывают и поперечные напряжения.

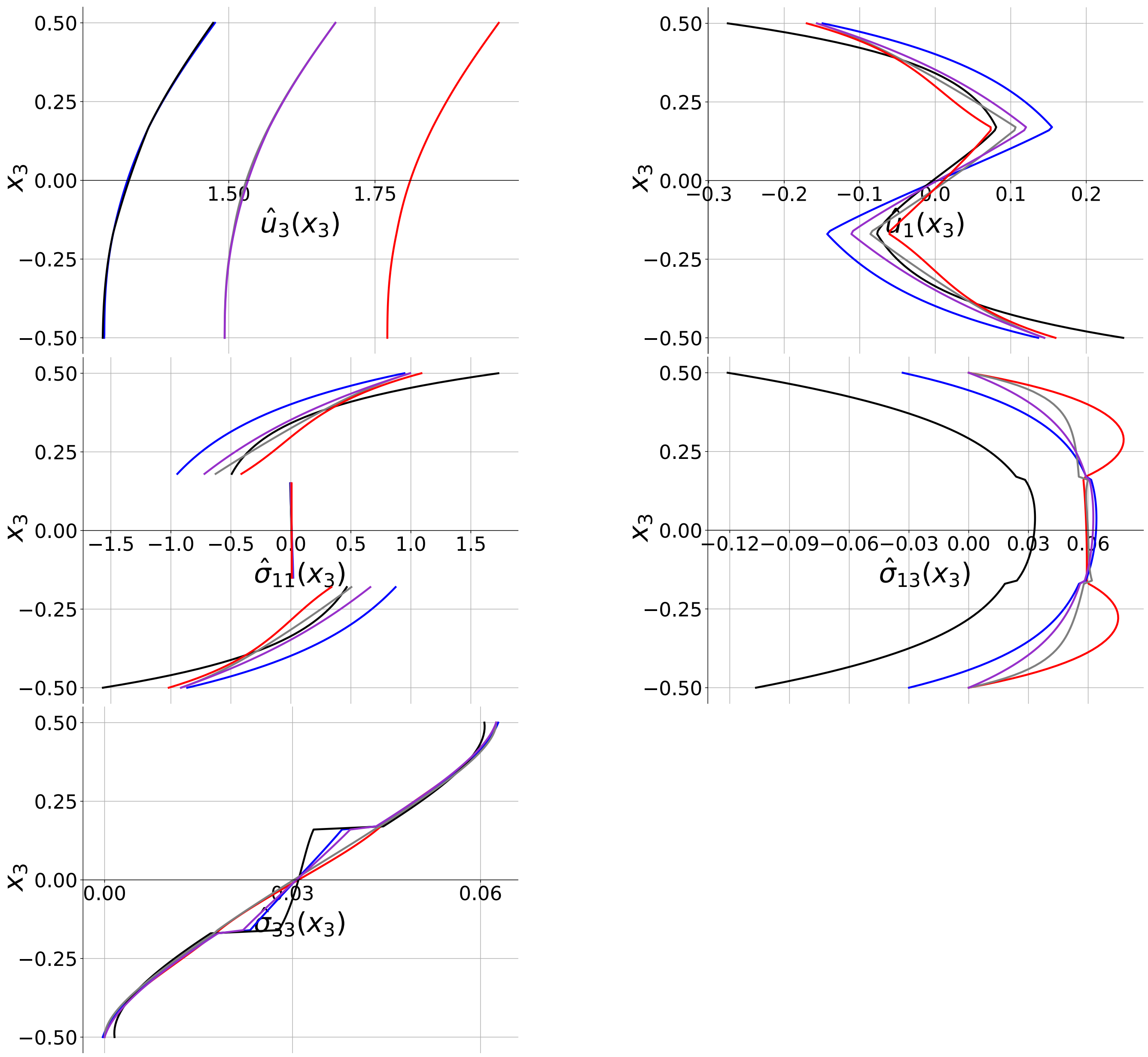

Рисунок 3.7 — Сопоставление результатов моделирования МСФ-приближений первого и второго порядка в сочетании с приближенным решением сопутствующей задачи по методу Пагано. Сопоставлены нормализованные значения перемещений $\hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$, напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, $\hat{\sigma}_{13}(0, L_2/2, x_3)$ и $\hat{\sigma}_{33}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ для пластины с техническими постоянными, указанными в таблице 8, нагруженной поверхностными силами $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2)$, $q_I^\pm(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$

3.3 Серия сопоставлений наиболее точных МСФ-приближений с решением задачи в трехмерной постановке для пластин, структура которых приближается к однородной

Убедимся, что при приближении структуры пластины к однородной разница МСФ-приближений и решения задачи (2.19) в трехмерной постановке нивелируется, а в предельном – однородном – случае вовсе отсутствует (как следует из свойств структурных функций и подходов к выбору свойств сопутствующего тела). Рассмотрим для этого серию пластин, упругие свойства которых приведены в табл. 9, 10, 11. Сопоставим только МСФ-приближения I-го и II-го порядка, основанные на решении сопутствующей задачи по методу Пагано, свойства сопутствующего тела совпадают с построенными в диссертации – такие приближения наиболее точны из всех рассмотренных. Нагружение: $q_i^- \equiv 0$, $q_1^+(x_1,x_2) = 0$, $q_2^+ \equiv 0$, $q_3(x_1,x_2) = q_0 \sin\lambda_m x_1 \sin\mu_n x_2$. Результаты вычислений для пластин серии 3-А приведены на иллюстрации 3.8.

Таблица 9 — технические постоянные пластины 3-А-1, соотношение размеров – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/12, H/2]$	70	1	1	0.25	0.25/70	0.25/70	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/12]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

Таблица 10 — технические постоянные пластины 3-А-2, соотношение размеров – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/12, H/2]$	70	1	1	0.25	0.25/70	0.25/70	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/12]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

Таблица 11 — технические постоянные пластины 3-А-3,
соотношение размеров – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2,H/2]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

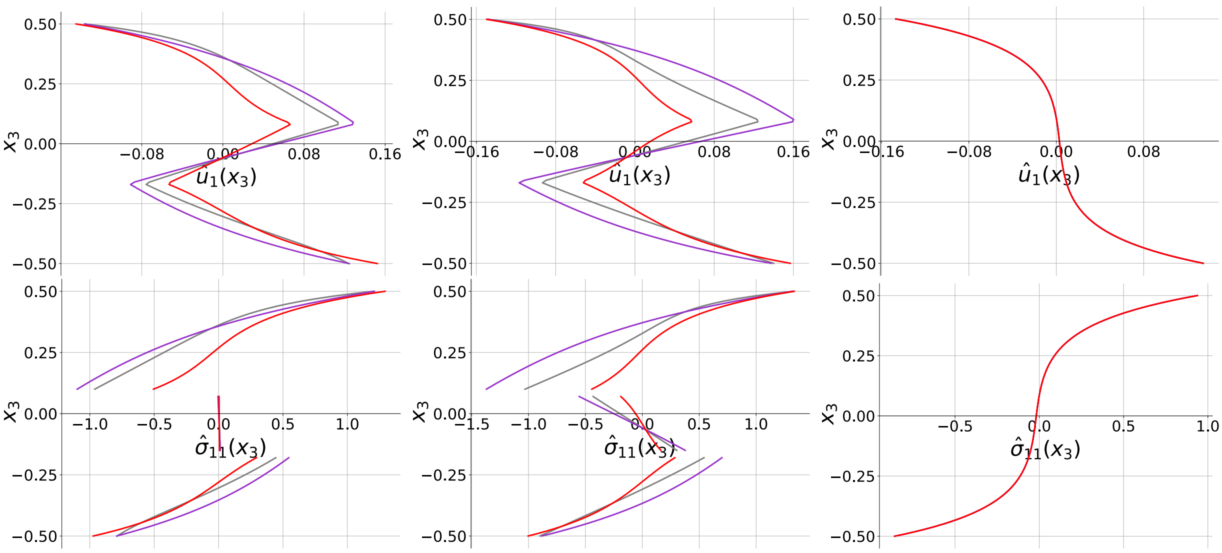

Рисунок 3.8 — Сравнение результатов моделирования МСФ-приближений первого и второго порядка в сочетании с приближенным решением сопутствующей задачи по методу Пагано. Сопоставлены нормализованные значения перемещений $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$ (верхняя строка), напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ (нижняя строка). Вычисления проведены для пластин 3-А-1 (левый столбец), 3-А-2 (средний столбец), однородной пластины 3-А-3 (правый столбец)

3.4 Серия сопоставлений наиболее точных МСФ-приближений с решением задачи в трехмерной постановке для пластин, соотношение H/L_I которых убывает

Помимо приведенных выше сопоставлений, необходимо проверить, что с уменьшением соотношения H/L_I разница МСФ-приближений и точного решения нивелируется. Покажем это, сравнивая МСФ-приближения, основанные на решении Пагано для сопутствующей задачи, с решением Пагано для исходной задачи, для серии пластин, упругие свойства которых одинаковы и приведены в таблице 12, а толщина убывает.

Таблица 12 — технические постоянные пластин серии 3-Б, соотношение размеров пластины 3-Б-1 – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$, 3-Б-2 – $H/L_1 = H/L_2 = 1/6$, 3-Б-3 –$H/L_1 = H/L_2 = 1/16$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/6, H/2]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	50	1	0.25/50	0.25	0.25/50	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

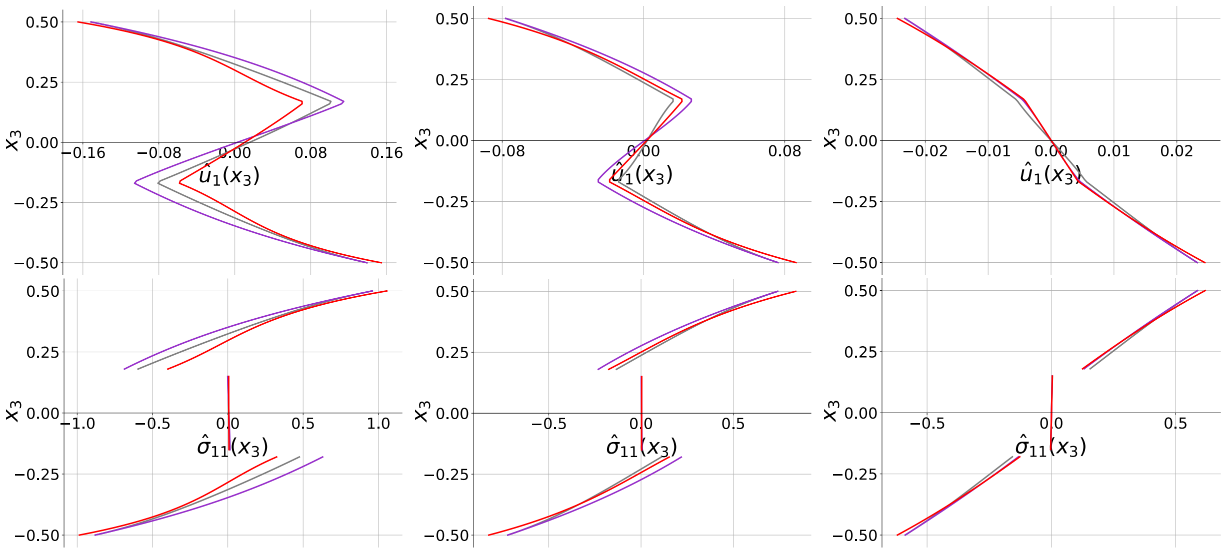

Рисунок 3.9 — Сравнение результатов моделирования МСФ-приближений первого и второго порядка в сочетании с приближенным решением сопутствующей задачи по методу Пагано. Сопоставлены нормализованные значения перемещений $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$ (верхняя строка), напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ (нижняя строка). Вычисления проведены для пластин 3-Б-1 (левый столбец), 3-Б-2 (средний столбец), 3-Б-3 (правый столбец)

Результат вычисления приближенных решений этих задач приведен на иллюстрации 3.9. В этих сопоставлениях сравниваются только МСФ-приближения первого и второго порядка, основанные на решении сопутствующей задачи по методу Пагано, свойства сопутствующего тела совпадают с построенными в диссертации – такие приближения наиболее точны из всех рассмотренных.

В главе 3 проведены численные сопоставления построенных методом структурных функций приближенных решений задачи о нагружении свободно опертой на всех боковых гранях пластины, составленной из ортотропных в осях координат, параллельных сторонам пластины, линейно-упругих слоев. В качестве контрольных выбраны решения той же задачи методом конечных элементов с использованием элементов типа $C3D8$ и $C3D20$, и в трехмерной постановке – по методу Пагано. Вычислены все построенные в работе МСФ-приближения. Показано, что представленный в работе способ выбора упругих свойств сопутствующего тела действительно является необходимым для выполнения приближенными решениями граничных условий на лицевых поверхностях. Показано, что МСФ-приближения, основанные на приближенных решениях сопутствующей задачи в рамках модели типа Тимошенко и в трехмерной постановке, описывают зависимость продольных перемещений от поперечной координаты в виде ломаных. Уже при выборе первого порядка МСФ выбор приближенного решения сопутствующей задачи в трехмерной постановке позволяет приближенно вычислять поперечные напряжения в пластине, не прибегая к постобработке продольных напряжений. Наилучший результат из всех сопоставленных приближений позволяют получить МСФ-приближения второго порядка, основанные на решении сопутствующей задачи в трехмерной постановке и выборе упругих свойств сопутствующего тела, предложенном в данной диссертационной работе.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.
При помощи метода структурных функций построены и исследованы приближенные решения задачи о нагружении прямоугольной свободно опертой по контуру пластины, составленной из линейно-упругих слоев, ортотропных в осях координат. Рассмотрен метод структурных функций I-го и II-го порядка; приближенные решения сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява, модели типа Тимошенко, трехмерной теории упругости (по методу Пагано); получены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Сформулированы следующие выводы.

- Совместное использование метода структурных функций I-го порядка, модели типа Тимошенко (или высшего порядка) или метода Пагано для решения сопутствующей задачи позволяет моделировать перемещения u_i в виде криволинейных ломаных от поперечной координаты. Аналогичное верно и для II-го порядка метода структурных функций.
- Использование метода структурных функций в сочетании с решением сопутствующей задачи в трехмерной постановке позволяет приближенно вычислить поперечные напряжения в пластине.
- Повышение точности приближенного решения сопутствующей задачи при фиксированном порядке метода структурных функций позволяет улучшить построенное методом приближение. Повышение порядка метода структурных функций при фиксированном порядке решения сопутствующей задачи целесообразно, только если точность решения сопутствующей задачи позволяет записать нужное количество граничных условий для структурных функций соответствующего порядка.
- При выборе упругих свойств сопутствующего тела в соответствии с представленными в диссертации соотношениями поперечные напряжения, вычисленные по методу структурных функций, удовлетворяют граничным условиям на лицевых плоскостях. Для метода первого порядка необходимо выбрать модули сдвига сопутствующего тела совпадающими с осредненными по Рейссу модулями сдвига исходного тела.

Список литературы

1. *Горбачев, В. И.* Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости: дис. ... докт. физико-математических наук: 01.02.04 / В. И. Горбачев. — Москва, 1991. — 395 с.
2. *Горбачев, В. И.* О представлении решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / В. И. Горбачев // Вестник Московского университета. — 2000. — № 6. — С. 68—71.
3. *Pagano, N. J.* Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates / N. J. Pagano // Journal of composite materials. — 1970. — Vol. 4, no. 1. — P. 20—34.
4. *Горбачев, В. И.* Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов / В. И. Горбачев // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». — 2016. — № 6. — С. 56—72.
5. *Горбачев, В. И.* О распространении тепла в неоднородном стержне с переменным поперечным сечением / В. И. Горбачев // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2017. — № 2. — С. 48—54.
6. *Горбачев, В. И.* Инженерная теория деформирования неоднородных пластин из композиционных материалов / В. И. Горбачев // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2016. — Т. 22, № 4. — С. 585—601.
7. *Горбачев, В. И.* Точные решения некоторых задач теории упругости о равновесии неоднородной по ширине, анизотропной полосы / В. И. Горбачев, В. В. Гулин // Композиты и наноструктуры. — 2021. — Т. 13, № 3/4. — С. 120—126.
8. *Соляев, Ю. О.* Сопоставление методов Мори-Танака и Горбачева-Победри в задаче определения эффективных свойств композитов с пьезоактивными сферическими включениями / Ю. О. Соляев, В. И. Горбачев // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 57—75.

9. *Горбачев, В. И.* Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в механике неоднородных тел / В. И. Горбачев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2020. — № 3. — С. 114—121.

10. *Reddy, J. N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells / J. N. Reddy. — Boca Raton : CRC press, 2006. — 568 p.

11. *Васильев, В. В.* Теория тонких упругих пластин – история и современное состояние проблемы / В. В. Васильев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2024. — № 2. — С. 3—39.

12. *Kirchoff, G.* Vorlesungen Über Mathematische Physik: Mechanik. / G. Kirchoff. — 1877.

13. *Hencky, H.* Über die Beriicksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten / H. Hencky // Ing. — 1947. — S. 72–76.

14. *Carrera, E.* An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates / E. Carrera // Composite structures. — 2002. — Vol. 50, no. 2. — P. 183—198.

15. *Kabanova, L. A.* The First-Order Structural Functions Method Solution to the Simply Supported Layered Plate Bending Problem / L. A. Kabanova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 7. — P. 1866—1877.

16. *Кабанова, Л. А.* Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций / Л. А. Кабанова // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 4. — С. 211—232.

17. *Кабанова, Л. А.* Сопоставление решений квазистатической задачи о нагружении пластины, построенных методом структурных функций и методом конечных элементов / Л. А. Кабанова, А. В. Романов // Чебышевский сборник. — 2024. — Т. 25, 4 (95). — С. 175—196.

18. *Горбачев, В. И.* О постановке задач в общей теории пластин Кирхгофа-Лява / В. И. Горбачев, Л. А. Кабанова // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 3. — С. 43—50.

19. A Transversely Isotropic Magneto-Electro-Elastic Circular Kirchhoff Plate Model Incorporating Microstructure Effect / S. Wei [et al.] // Acta Mechanica Solida Sinica. — 2022. — Vol. 35, no. 2. — P. 185—197.

20. *Лазарев, Н. П.* Разрешимость задачи о равновесии для термоупругой пластины Кирхгофа - Лява с наклонной трещиной / Н. П. Лазарев // Математические заметки СВФУ. — 2022. — № 2.

21. A microstructure-dependent Kirchhoff plate model based on a reformulated strain gradient elasticity theory / G. Zhang [et al.] // Mechanics of Advanced Materials and Structures. — 2022. — No. 29. — P. 2521—2530.

22. Numerical solutions of a gradient-elastic Kirchhoff plate model on convex and concave geometries using isogeometric analysis / L. Yu [et al.] // Journal of Mechanics. — 2022. — Vol. 38. — P. 238—249.

23. *Aköz, A. Y.* Quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic plates / A. Y. Aköz, F. Kadıoğlu, G. Tekin // Mechanics of Time-Dependent Materials. — 2015. — No. 19. — P. 483—503.

24. *Аженеза, О.* Анализ ударного воздействия на вязкоупругую пластинку, материал которой обладает отрицательным коэффициентом Пуассона: дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / О. Аженеза. — Воронеж, 2021. — 116 с.

25. *Петраков, И. Е.* Контактная задача изгиба многослойной композитной пластины с учётом различных модулей упругости при растяжении и сжатии / И. Е. Петраков // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2022. — Т. 35, № 4. — С. 153—163.

26. *Guminiaka, M.* Stability of rectangular Kirchhoff plates using the Stochastic Boundary Element Methods / M. Guminiaka, M. Kamiński // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2022. — Vol. 144. — P. 441—455.

27. *Tyszka, G. F.* Indirect stabilization on Kirchhoff plates by memory effects / G. F. Tyszka, M. R. Astudillo, H. P. Oquendo // J. Evol. Equ. — 2023. — Vol. 23:6.

28. *Carrera, E.* Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells: A Unified Compact Formulation with Numerical Assessment and Benchmarking / E. Carrera // Arch. Comput. Meth. Engng. — 2003. — Vol. 10, no. 3. — P. 215—296.

29. *Lezgy-Nazargah, M.* A new mixed-field theory for bending and vibration analysis of multi-layered composite plate / M. Lezgy-Nazargah, S. Salahshuran // Archives of Civil and Mechanical Engineering. — 2018. — Vol. 18, no. 3. — P. 818—832.

30. *Новожилов, В. В.* Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. — Л. : Политехника, 1991. — 656 с.

31. *Di Sciuva, M.* An Improved Shear-Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates / M. Di Sciuva // J. Appl. Mech. — 1987. — P. 589—596.

32. *Тимошенко, С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М. : Наука, 1966.

33. *Lee, J. W.* Stress constraint topology optimization using layerwise theory for composite laminates / J. W. Lee, J. J. Kim, G. H. Yoon // Composite Structures. — 2019. — Vol. 226. — P. 111184.

34. *Toorani, M. H.* General equations of anisotropic plates and shells including transverse shear deformations, rotary inertia and initial curvature effects / M. H. Toorani, A. A. Lakis // Journal of Sound and Vibration. — 2000. — Vol. 237, no. 4. — P. 561—615.

35. *Бондарь, В. С.* Численное моделирование подкрепленных шпангоутами стеклопластиковых цилиндрических оболочек при действии локальных нагрузок / В. С. Бондарь, М. В. Шиврин // Машиностроение и инженерное образование. — 2022. — № 1. — С. 24—32.

36. *Levinson, M.* Thick rectangular plates—I: The generalized Navier solution / M. Levinson, D. W. Cooke // International journal of mechanical sciences. — 1983. — Vol. 25, no. 3. — P. 199—205.

37. *Wang, C. M.* Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories / C. M. Wang, a. et al. // Engineering Structures. — 2001. — No. 23. — P. 838—849.

38. *Dong, S. B.* Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory / S. B. Dong, a. et al. // International Journal of Solids and Structures. — 2010. — No. 47. — P. 1651—1665.

39. *Chow, T. S.* On the Propagation of FlexuralWaves in an Orthotropic Laminated Plate and its Response to a Repulsive Load / T. S. Chow // Journal of Composite Materials. — 1971. — Vol. 5, no. 3. — P. 306—319.

40. *Bert, C. W.* Simplified Analysis of Static Shear Factors for Beams of Nonhomogeneous Cross Section / C. W. Bert // Journal of Composite Materials. — 1973. — Vol. 7, no. 4. — P. 525—529.

41. *Stephen, N. G.* Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity / N. G. Stephen // Journal of Sound and Vibration. — 1997. — Vol. 202, no. 4. — P. 539—553.

42. *Mei, Y.* Elastic buckling of simply supported bimetallic steel plates / Y. Mei, H. Ban, Y. Shi // Journal of Constructional Steel Research. — 2022. — Vol. 198. — P. 107581.

43. Deriving Shear Correction Factor for Thick Laminated Plates Using the Energy Equivalence Method / H. Hadavinia [et al.] // Structural Durability & Health Monitoring. — 2006. — Vol. 2, no. 4. — P. 197.

44. *Pai, P. F.* A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates / P. F. Pai // International Journal of Solids and Structures. — 1995. — Vol. 32, no. 16. — P. 2295—2313.

45. *Schneider, P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second-order approximation / P. Schneider, R. Kienzler // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2015. — Vol. 20, no. 7. — P. 871—882.

46. *Altenbach, H.* On the bending of viscoelastic plates made of polymer foams / H. Altenbach, V. A. Eremeyev // Acta Mechanica. — 2009. — Vol. 204. — P. 137—154.

47. Revisiting Kirchhoff–Love plate theories for thin laminated configurations and the role of transverse loads / X. Zhao [et al.] // Journal of Composite Materials. — 2022. — Vol. 56, no. 9. — P. 1363—1377.

48. *Товстик, П. Е.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала / П. Е. Товстик // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 425, № 4. — С. 487—491.

49. *Zenkour, A. M.* A refined quasi-3D theory for the bending of functionally graded porous sandwich plates resting on elastic foundations / A. M. Zenkour, R. A. Alghanmi // Thin-Walled Structures. — 2022. — No. 181. — P. 110047.

50. *Власов, Б.* Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты / Б. Власов // Вестн. МГУ. — 1957. — № 2. — С. 25—34.

51. *Nelson, R. B.* A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates / R. B. Nelson, D. R. Lorch // J. Appl. Mech. — 1974. — P. 177—183.

52. *Parida, S. P.* Selective layer-by-layer fillering and its effect on the dynamic response of laminated composite plates using higher-order theory / S. P. Parida, P. C. Jena // Journal of Vibration and Control. — 2023. — Т. 29, № 11/12. — С. 2473—2488.

53. *Zenkour, A. M.* Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores / A. M. Zenkour, H. F. El-Mekawy // Journal of Vibroengineering. — 2014. — Vol. 16, no. 7. — P. 3260—3272.

54. *Idlbi, A.* Comparison of various laminated plate theories / A. Idlbi, M. Karama, M. Touratier // Composite Structures. — 1997. — Vol. 37, no. 2. — P. 173—184.

55. *Mechab, B.* Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory by the new function under thermo-mechanical loading / B. Mechab, I. Mechab, S. Benaissa // Composites Part B: Engineering. — 2012. — Vol. 43, no. 3. — P. 1453—1458.

56. *Vasiliev, V. V.* On refined theories of beams, plates, and shells / V. V. Vasiliev, S. A. Lurie // Journal of composite materials. — 1992. — Vol. 26, no. 4. — P. 546—557.

57. *Амбарцумян, С. А.* Локализованные планарные колебания упругой прямоугольной пластинки с учетом микровращений / С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян // National Academy of Sciences of Armenia Reports/Doklady Nacionalnaâ Akademiâ Nauk Armenii. — 2018. — Т. 118, № 2. — С. 119—124.

58. A family of higher-order single layer plate models meeting Cz0-requirements for arbitrary laminates / A. Loredo [et al.] // Composite Structures. — 2019. — Vol. 225. — P. 111146.

59. *Григолюк, Э. И.* Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов // Механика композитных материалов. — 1988. — № 4. — С. 698—704.

60. *Григолюк, Э. И.* Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов // Вестник Тамбовского государственного технического университета. — 2005. — Т. 11, № 2. — С. 439—448.

61. Mathematical model of a three-layer micro-and nano-beams based on the hypotheses of the Grigolyuk–Chulkov and the modified couple stress theory / J. Awrejcewicz [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — No. 117. — P. 39—50.

62. *Carrera, E.* Layer-wise mixed models for accurate vibrations analysis of multilayered plates / E. Carrera // Journal of Applied Mechanics. — 1998. — Vol. 65. — P. 820—828.

63. *Noor, A. K.* Mixed finite-difference scheme for analysis of simply supported thick plates / A. K. Noor // Computers & Structures. — 1973. — Vol. 3, no. 5. — P. 967—982.

64. *Levinson, M.* The simply supported rectangular plate: An exact, three dimensional, linear elasticity solution / M. Levinson // Journal of Elasticity. — 1985. — Vol. 15, no. 3. — P. 283—291.

65. Определение упругих и прочностных параметров полимерных композиционных материалов и изготовленных из них цилиндрических оболочек / Д. Абашев [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. — 2024. — Т. 86, № 1. — С. 47—59.

66. Refined multilayered beam, plate and shell elements based on Jacobi polynomials / E. Carrera [et al.] // Composite Structures. — 2023. — Vol. 304. — P. 116275.

67. *Cetkovic, M.* Influence of initial geometrical imperfections on thermal stability of laminated composite plates using layerwise finite element / M. Cetkovic // Composite Structures. — 2022. — Vol. 291. — P. 115547.

68. *Лехницкий, С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. — М. : Гостехиздат, 1957. — 463 с.

69. *Ren, J.* Bending theory of laminated plate / J. Ren // Composites science and technology. — 1986. — Vol. 27, no. 3. — P. 225—248.

70. *Murakami, H.* Laminated composite plate theory with improved in-plane responses / H. Murakami // Journal of Applied Mechanics. — 1986. — Vol. 53. — P. 661—666.

71. *Амбарцумян, С. А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания / С. А. Амбарцумян. — М. : Наука, 1967. — 268 с.

72. *Si, J.* An enhanced higher order zigzag theory for laminated composite plates under mechanical/thermal loading / J. Si, Y. Zhang // Composite Structures. — 2022. — Vol. 282. — P. 115074.

73. Assessment of the refined zigzag theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories / L. Iurlaro [et al.] // Composite Structures. — 2013. — Vol. 106. — P. 777—792.

74. *Sarangan, S.* Non-polynomial zigzag theories with C0 finite element formulation for buckling analysis of laminated composite and sandwich plates / S. Sarangan, B. Singh // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. — 2022. — Vol. 236, no. 1. — P. 397—411.

75. The development of laminated composite plate theories: a review / R. Khandan [et al.] // Journal of Materials Science. — 2012. — Vol. 47. — P. 5901—5910.

76. *Vedrtnam, A.* Laminated plate theories and fracture of laminated glass plate – A review / A. Vedrtnam, S. Pawar // Engineering Fracture Mechanics. — 2017. — Vol. 186. — P. 316—330.

77. *Shen, H.-S.* Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates / H.-S. Shen, Z.-X. Wang // Composite Structures. — 2012. — Vol. 94, no. 7. — P. 2197—2208.

78. *Tahouneh, V.* Influence of equivalent continuum model based on the Eshelby-Mori-Tanaka scheme on the vibrational response of elastically supported thick continuously graded carbon nanotube-reinforced annular plates / V. Tahouneh, M. Yas // Polymer Composites. — 2014. — Vol. 35, no. 8. — P. 1644—1661.

79. *Kamarian, S.* Eshelby-Mori-Tanaka approach for vibrational behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced plate resting on elastic foundation / S. Kamarian, A. Pourasghar, M. Yas // Journal of Mechanical Science and Technology. — 2013. — Vol. 27. — P. 3395—3401.

80. *Mohammadimehr, M.* Eshelby-Mori-Tanaka and the extended mixture rule approaches for nonlocal vibration of piezoelectric nanocomposite plate with considering surface stress and magnetic field effects / M. Mohammadimehr, N. B. Rousta, A. A. Ghorbanpour // Journal of nanostructures. — 2014. — Vol. 4. — P. 347—367.

81. *Котин, Ю. В.* «Метод Ван Фо Фы» в микромеханике однонаправленных волокнистых композитов - научное наследие Г. А. Ванина / Ю. В. Котин, А. Н. Полилов, Д. Д. Власов // КОМПОЗИТЫ И НАНОСТРУКТУРЫ. — 2023. — Т. 15, № 1. — С. 13—32.

82. *Полилов, А. Н.* Биомеханика прочности волокнистых композитов / А. Н. Полилов, Н. А. Татусь. — М. : Общество с ограниченной ответственностью Издательская фирма Физико-математическая литература, 2018. — 328 с.

83. Оценка прочности композитного баллона для сжатого газа / А. Н. Полилов [и др.] // Проблемы машиностроения и надёжности машин (Машиноведение). — 2022. — № 1. — С. 57—67.

84. Нелинейные задачи изгиба (от балки Галилея до композитной панели) / Д. Д. Власов [и др.]. — М.: АСВ, 2024. — С. 388.

85. *Власов, Д. Д.* Анализ применимости упрощенных методов послойного расчета композитных конструкций / Д. Д. Власов, А. Н. Полилов // Машиностроение и инженерное образование. — 2024. — № 3/4. — С. 20—30.

86. *Бахвалов, Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами / Н. С. Бахвалов // Доклады Академии наук. — 1975. — Т. 221, № 3. — С. 516—519.

87. *Бахвалов, Н. С.* Осреднение процессов в периодических средах / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. — М. : Наука, 1984. — 352 с.

88. *Победря, Б. Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости / Б. Е. Победря, С. Е. Омаров // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2007. — № 3. — С. 56—58.

89. Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method / R. Rodríguez-Ramos [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2020. — Vol. 190. — P. 281—290.

90. *Власов*, *А. Н.* Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости / А. Н. Власов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 309—322.

91. *Димитриенко*, *Ю. И.* Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей An и метода асимптотического осреднения / Ю. И. Димитриенко, С. Б. Каримов, А. Ю. Димитриенко // Математическое моделирование и численные методы. — 2024. — 2 (42). — С. 17—34.

92. *Cai*, *Y.* Novel numerical implementation of asymptotic homogenization method for periodic plate structures / Y. Cai, L. Xu, G. Cheng // International Journal of Solids and Structures. — 2014. — Vol. 51, no. 1. — P. 284—292.

93. Hybrid analysis and optimization of hierarchical stiffened plates based on asymptotic homogenization method / B. Wang [et al.] // Composite Structures. — 2015. — Vol. 132. — P. 136—147.

94. Study on equivalent mechanical properties of U-shaped bellows based on novel implementation of asymptotic homogenization method / X. Ying [et al.] // Marine Structures. — 2024. — Vol. 96. — P. 103622.

95. *Lewinski*, *T.* Plates, laminates and shells: asymptotic analysis and homogenization. Vol. 52 / T. Lewinski, J. J. Telega. — World Scientific, 2000.

96. *Kohn*, *R. V.* A new model for thin plates with rapidly varying thickness / R. V. Kohn, M. Vogelius // International Journal of Solids and Structures. — 1984. — Vol. 20, no. 4. — P. 333—350.

97. *Kohn*, *R. V.* A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II. A convergence proof / R. V. Kohn, M. Vogelius // Quarterly of applied mathematics. — 1985. — Vol. 43, no. 1. — P. 1—22.

98. *Kohn, R. V.* A new model for thin plates with rapidly varying thickness. III. Comparison of different scalings / R. V. Kohn, M. Vogelius // Quarterly of applied mathematics. — 1986. — Vol. 44, no. 1. — P. 35—48.

99. *Панасенко, Г. П.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине / Г. П. Панасенко, М. В. Резцов // Доклады Академии наук. Т. 294. — Российская академия наук. 1987. — С. 1061—1065.

100. *Назаров, С. А.* Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней / С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий // Математический сборник. — 2011. — Т. 202, № 8. — С. 41—80.

101. *Шешенин, С. В.* Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане / С. В. Шешенин // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — М., 2006. — № 1. — С. 47—51.

102. *Шешенин, С. В.* Асимптотический анализ периодических в плане пластин / С. В. Шешенин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2006. — № 6. — С. 71—79.

103. *Димитриенко, Ю. И.* Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой / Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева, С. В. Сборщиков // Математическое моделирование и численные методы. — 2014. — 1 (1). — С. 36—56.

104. *Шешенин, С. В.* Асимптотическое исследование изгиба пластины для сильно ортотропного материала / С. В. Шешенин, Р. Р. Мурадханов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2023. — № 3. — С. 36—57.

105. *Скопцов, К. А.* Асимптотический анализ слоистых пластин и пологих оболочек / К. А. Скопцов, С. В. Шешенин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2011. — № 1. — С. 161—171.

106. *Скопцов, К. А.* Асимптотический метод получения уравнений теории пластин Рейсснера-Миндлина / К. А. Скопцов, С. В. Шешенин // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — М., 2013. — № 2. — С. 65—67.

107. *Шешенин, С. В.* Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений / С. В. Шешенин, К. А. Скопцов // Математическое моделирование и численные методы. — 2014. — 2 (2). — С. 49—61.

108. *Шешенин, С. В.* Высшие асимптотические приближения в задаче о поперечном изгибе пластины / С. В. Шешенин, М. А. Кузьмин, Н. Б. Артамонова // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2024. — Т. 30, № 2. — С. 222—236.

109. *Димитриенко, Ю. И.* Асимптотическая теория многослойных тонких пластин / Ю. И. Димитриенко // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». — 2012. — № 3. — С. 86—99.

110. *Димитриенко, Ю. И.* Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости / Ю. И. Димитриенко, Д. О. Яковлев // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — 7 (19). — С. 17.

111. *Димитриенко, Ю. И.* Сравнительный анализ напряжений в несимметричных многослойных композитных пластинах на основе асимптотической теории и трехмерного конечно-элементного расчета / Ю. И. Димитриенко, Ю. В. Юрин // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2017. — 10 (70). — С. 12.

112. *Димитриенко, Ю. И.* Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин / Ю. И. Димитриенко, Ю. В. Юрин // Математическое моделирование и численные методы. — 2018. — 1 (17). — С. 16—40.

113. *Dimitrienko, Y. I.* Theory of the multilayer thin anisotropic shells, based on the asymptotic analysis of the general equations for the elasticity theory / Y. I. Dimitrienko, E. Gubareva, A. Pichugina // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1141. — IOP Publishing. 2018. — P. 012097.

114. *Савенкова, М. И.* Сравнение результатов конечно-элементного анализа с результатами асимптотического метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины / М. И. Савенкова, С. В. Шешенин, И. М. Закалюкина // Вестник МГСУ. — 2013. — № 8. — С. 42—50.

115. *Савенкова, М. И.* Применение метода осреденения к материалам с физически нелинейными свойствами: дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / М. И. Савенкова. — Москва, 2013. — 131 с.

116. *Димитриенко, Ю. И.* Моделирование пьезоупругих свойств композитов на основе метода асимптотического осреднения / Ю. И. Димитриенко, К. М. Зубарев, А. В. Крылов // Будущее машиностроения России. Всероссийская конференция молодых учёных и специалистов (с международным участием), 16-я, Москва, 19-22 сентября 2023 года : сборник докладов : в 2 т. — М., 2024. — Т. 2. — С. 356—362.

117. Asymptotic homogenization of flexoelectric composite plates with periodically varying thickness / A. L. Kalamkarov [et al.] // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2024. — Vol. 29, no. 12. — P. 2490—2522.

118. Electro-mechanical coupling isogeometric analysis of static characteristics in piezoelectric composite materials based on asymptotic homogenization method / L. Zhou [et al.] // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2024. — Vol. 35, no. 14. — P. 1178—1197.

119. *Димитриенко, Ю. И.* Асимптотическая теория тонких многослойных микрополярных упругих пластин / Ю. И. Димитриенко, С. В. Бойко // Математическое моделирование и численные методы. — 2023. — 2 (38). — С. 33—66.

120. *Faraci, D.* Homogenization of Thermal Properties in Metaplates / D. Faraci, C. Comi // Materials. — 2024. — Vol. 17, no. 18. — P. 4557.

121. *Димитриенко, Ю. И.* Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев / Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева // Математическое моделирование и численные методы. — 2022. — 2 (34). — С. 28—62.

122. *Горбачев, В. И.* Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных тел / В. И. Горбачев // Вычислительная механика. — 1991. — № 2. — С. 61—76.

123. *Горбачев, В. И.* Интегральные формулы в симметричной и несимметричной упругости / В. И. Горбачев // Вестник Московского университета. — 2009. — № 6. — С. 57—60.

124. *Gorbachev, V. I.* About one Approach to a Solution of Linear Differential Equations with Variable Coefficients / V. I. Gorbachev // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, no. 7.

125. *Gorbachev, V. I.* About a Problem of Sturm–Liuvill / V. I. Gorbachev // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, no. 8.

126. *Горбачев, В. И.* Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой / В. И. Горбачев, О. Б. Москаленко // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2012. — № 1. — С. 41—47.

127. *Мокин, Ю. И.* Вычисление функций Грина для эллиптических уравнений / Ю. И. Мокин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1986. — Т. 26, № 9. — С. 1362—1369.

128. *Ибрагимов, А. И.* Построение квазианалитического решения задачи о фильтрации однородной жидкости в пористой среде и его применение для получения формулы притока к горизонтальной скважине в ограниченном пласте / А. И. Ибрагимов, А. А. Некрасов // Вычислительные технологии. — 1997. — Т. 2, № 6. — С. 36—41.

129. *Александрова, А. А.* Фундаментальное решение уравнений линейной магнитной гидродинамики в движущейся среде / А. А. Александрова, Ю. Н. Александров // Журнал технической физики. — 2001. — Т. 71, № 7. — С. 1—6.

130. *Ибрагимов, А. И.* Аналог метода Шварца для решения задачи Зарембы и его применение в подземной гидромеханике / А. И. Ибрагимов, А. А. Некрасов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998. — Т. 38, № 1. — С. 150—156.

131. *Панфилов, М. Б.* Структурное осреднение фильтрационных процессов в неоднородных средах / М. Б. Панфилов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 1992. — № 6. — С. 103—116.

132. *Alexeyeva, L.* Green tensor and regular solutions of equations of rods thermodynamics and their properties / L. Alexeyeva, A. Dadayeva, N. Ainakeyeva // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. — 2021. — Vol. 59.

133. *Бредихин, В. В.* Реконструкция функции Грина в задачах резонансной акустической спектроскопии / В. В. Бредихин, А. В. Лебедев // Акустический журнал. — 2009. — Т. 55, № 3. — С. 283—291.

134. *Горбачев, В. И.* Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов / В. И. Горбачев // Прикладная математика и механика. — 2014. — Т. 78, № 2. — С. 277—299.

135. *Горбачев, В. И.* Динамические задачи механики композитов / В. И. Горбачев // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2011. — Т. 75, № 1. — С. 117—122.

136. *Gorbachev, V. I.* Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. Application in the mechanics of composite materials / V. I. Gorbachev // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. — 2017. — Vol. 8, no. 2. — P. 147—170.

137. *Горбачев, В. И.* Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела / В. И. Горбачев, А. Н. Емельянов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2014. — № 1. — С. 95—107.

138. *Емельянов, А. Н.* Эффективные характеристики в моментной теории упругости: дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / А. Н. Емельянов. — Москва, 2016. — 155 с.

139. *Горбачев, В. И.* Эффективные свойства при кручении неоднородного стержня / В. И. Горбачев, Л. В. Олехова // Вестник Московского университета. — 2007. — № 5. — С. 41—48.

140. *Олехова, Л. В.* Кручение неоднородного анизотропного стержня: дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / Л. В. Олехова. — Москва, 2009. — 115 с.

141. *Горбачев, В. И.* Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов / В. И. Горбачев // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 3. — С. 194—206.

142. *Горбачев, В. И.* Об эффективных коэффициентах упругости неодородного тела / В. И. Горбачев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2018. — № 4. — С. 114—125.

143. *Победря, Б. Е.* Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. — М. : Издательство Московского университета, 1984. — 335 с.

144. *Basset, A. B.* On the Extension and Flexure of Cylindrical and Spherical Thin Elastic / A. B. Basset // Philos Trans R Soc London. — 1890. — No. 181. — P. 433—480.

145. *Васильев, В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. — М. : Машиностроение, 1998. — 271 с.

146. *Зубчанинов, В. Г.* Основы теории упругости и пластичности / В. Г. Зубчанинов. — М. : Высшая школа, 1990. — 367 с.

147. *Огибалов, П. М.* Оболочки и пластины / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. — М. : Моск. ун-т, 1969. — 696 с.

148. *Гольденвейзер, А. Л.* Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. — М. : Наука, 1976. — 512 с.

149. *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. — М. : Наука, 1988. — 712 с.

150. *Schreiber, P.* Buckling of shear-deformable unsymmetrically laminated plates / P. Schreiber, C. Mittelstedt // International Journal of Mechanical Sciences. — 2022. — No. 218. — P. 106995.

151. *Allam, M. N. M.* Bending response of inhomogeneous fiber-reinforced viscoelastic sandwich plates / M. N. M. Allam, A. M. Zenkour, H. F. El-Mekawy // Acta Mechanica. — 2010. — Vol. 209, no. 3/4. — P. 231—248.

152. *Алимов, Ш. А.* Кратные ряды и интегралы Фурье / Ш. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, А. К. Пулатов // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1989. — Т. 42, № 0. — С. 7—104.

153. *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий. — Москва : Издательство "Мир", 1975. — 872 с.

154. *Wu, C.-P.* Three-dimensional static behavior of functionally graded magneto-electro-elastic plates using the modified Pagano method / C.-P. Wu, S.-J. Chen, K.-H. Chiu // Mechanics Research Communications. — 2010. — Vol. 37, no. 1. — P. 54—60.

155. *Vel, S. S.* Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates / S. S. Vel, R. C. Batra // Journal of Sound and Vibration. — 2004. — Vol. 272, no. 3—5. — P. 703—730.

156. *Reuß, A.* Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. / A. Reuß // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1929. — Jg. 9, Nr. 1. — S. 49–58.