МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Тихонов Юрий Андреевич

Исследование операторных моделей Кельвина-Фойгхта, возникающих в теории вязкоупругости

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Власов Виктор Валентинович** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В.Ломоносова»
Официальные оппоненты:	**Закора Дмитрий Александрович,** доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ имени В.И.Вернадского» **Россовский Леонид Ефимович,** доктор физико-математических наук, доцент, профессор математического института имени С.М. Никольского ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» **Шамаев Алексей Станиславович,** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Лаборатории механики управляемых систем ФГБУН «ИПМех РАН имени А.Ю.Ишлинского»

Защита диссертации состоится «16» декабря 2022 года в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3(01.07) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 12-25.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова(Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: http://istina.msu.ru/dissertations/507229766/

Автореферат разослан «15» ноября 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.011.3(01.07),
к.ф.-м.н., доцент **Раутиан Н.А.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве получили широкое распространение во многих областях механики и физики. Задачи, приводящие к таким уравнениям, возникают в теории теплопроводности в средах с памятью, теории вязкоупругости, теории усреднения, кинетической теории газов и др. Работа посвящена исследованию задачи Коши одного из таких интегро-дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}(t) + \alpha A\dot{u}(t) + (A + C)u(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \ \dot{u}(0) = u_1. \tag{2}$$

Неизвестная функция $u(t)$ определена на луче $[0, +\infty)$ и принимает значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H; A и C — линейные операторы в H такие, что оператор A самосопряжённый, положительно определённый, имеющий компактный обратный, а оператор C — симметрический оператор, компактно подчинённый оператору A. Параметр α — положительная постоянная.

Прежде всего следует упомянуть об обширной литературе, касающейся исследований указанного уравнения в случае, когда параметр α равен нулю. Хотя этот случай имеет ряд принципиальных отличий от рассматриваемого в настоящей работе, именно для него разработаны и развиты методы, применяемые при изучении задачи (1) – (2). Уравнение (1) при $\alpha = 0$ и $C \equiv 0$ относится к классу интегро-дифференциальных уравнений, которые принято в современной отечественной и зарубежной литературе называть уравнениями Гуртина–Пипкина. Возник этот класс в задачах теплофизики, а именно в работах советского теплофизика А.В. Лыкова[1] и американских теплофизиков M.E. Gurtin и A.C. Pipkin[2]. Целью упомянутых работ было получение модели теплопроводности с конечной скоростью распространения тепла. Впоследствии оказалось, что аналогичные абстрактные интегро-дифференциальные уравнения появляются в теории вязкоупругости. Так, в случае, когда оператор A действует в $L_2(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$, где Ω — ограниченная область, порождаемый дифференциальным выражением $-\mu\Delta y(x) - (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}\ y(x))$, где μ, λ — коэффициенты Ламе, уравнение Гуртина-Пипкина представляет собой изотропную модель вязкоупругости (см. работы C.M. Dafermos[3], J.E. Muñoz Rivera, M.G. Naso, F.M. Vegni[4,5], G. Amendola, M. Fabrizio, J.M. Golden и V. Lazzari[6,7]). В

[1] *Лыков А.В.,* Проблемы тепло- и массопереноса. — Минск:Наука и Техника, 1976.

[2] *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds // *Arch. for Rational Mech. and Anal.* — 1968. — Vol. 31. — P.113–126.

[3] *Dafermos C.M.,* An abstract Volterra equation with applications in viscoelasticity // *Archive of Rational Mechanics and Analysis.* — 1970. — Vol. 7, no. 3. — P.544–569.

[4] *Rivera J.E.M., Naso M.G.,* On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indefinite Dissipation // *Asympt. Anal.* — 2006. — Vol. 49. — P.189–204.

[5] *Rivera J.E.M., Naso M.G., Vegni F.M.,* Asymptotic behaviour of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory// *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*— 2003. — Vol. 286.— P.692–704.

[6] *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. — NY:Springer New York, 2012.

[7] *Fabrizzio M., Lazzari B.,* On the existence and the asympthotics stability of solutions for linearly viscoelastic solids // *Archive of Rational Mechanics and Analysis.* — 1991. — Vol. 116. — P.139–152.

упомянутых работах изучались вопросы о разрешимости уравнения Гуртина–Пипкина, убывании решения при $t \to +\infty$, устанавливалась экспоненциальная устойчивость решения. Указанные результаты были получены с помощью построения и оценок энергетических функционалов.

Задачи управления и обратные задачи для интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина рассматривались в работах L. Pandolfi, С.А. Авдонина и С.А. Иванова[8,9].

Отметим работы А.С. Шамаева и соавторов[10,11,12], в которых изучались задачи граничного управления системами типа Гуртина–Пипкина, а также проводился спектральный анализ моделей вязкоупругих сред Кельвина–Фойгхта. Ядра вольтерровой свёртки в указанных работах представлялись в виде сумм конечного числа экспонент. В работе А.С. Шамаева и В.В. Шумиловой[13] изучались модели с дробно-экспоненциальными ядрами свёртки.

Подробное исследование интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина проведено в работах В.В. Власова и его соавторов Н.А. Раутиан[14,15,16,18,19,20], А.С. Шамаева[21], Р. Переза Ортиза [22]. Результаты исследований упомянутых авторов системати-

[8] *Pandolfi L.*, The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. and Optim. — 2005. — Vol. 52. — P.143–165.

[9] *Pandolfi L., Ivanov S.*, Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // *J. of Math. and Appl.*. — 2009. — Vol. 355. — P. 1–11.

[10] *Романов И.В., Шамаев А.С.*, О задачах распределенного и граничного управления некоторыми системами с интегральным последействием // *Тр. сем. им. И. Г. Петровского.* — 2016. — Т. 31. — С. 134–157.

[11] *Романов И.В., Шамаев А.С.,* О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием // *Автомат. и телемех.* — 2013. — Т. 11. — С. 49–61.

[12] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.*, О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 282–290.

[13] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.,* Усреднение уравнений состояния для гетерогенной среды, состоящей из слоев двух ползучих материалов // *Труды МИАН.* — 2016. — Т. 295. — С. 229–240.

[14] *Власов В.В., Раутиан Н.А.*, Об асимптотическом поведении решений интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // *Дифференциальные уравнения.* — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 718–730.

[15] *Власов В.В., Раутиан Н.А.*, О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена // *Тр. ММО.* — 2014. — Т.75, №2. — С.219–243.

[16] *Власов В.В., Раутиан Н.А.*,[17], Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // *Современная математика. Фундаментальные направления.* — 2015. — Т. 58. — С. 22–42.

[18] *Власов В.В., Раутиан Н.А.*, Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // *Тр. ММО.* — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 197–220.

[19] *Власов В.В., Раутиан Н.А.*, О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // *Дифференциальные уравнения.* — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 536–551.

[20] *Власов В.В., Раутиан Н.А.*, Полугруппы операторов, порождаемые интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // *Современная математика. Фундаментальные направления.* — 2021. — Т. 67, № 3. — С. 507–525.

[21] *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.*, Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // *Совр. математика. Фунд. направления.* — 2012. — Т. 45. — С. 43–61.

[22] *Власов В.В., Перез О.Р.*, Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникаю-

чески изложены в монографии[23]. Их подход основывается на спектральном анализе оператор-функции, которая является символом интегро-дифференциального уравнения. Полученные авторами результаты об асимптотике спектра позволяют им получать представления решений уравнения Гуртина–Пипкина в пространствах Соболева. Спектральный подход к изучению абстрактных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений основан на идеях, восходящих к работам М.В. Келдыша, в которых изложены основополагающие результаты спектральной теории полиномиальных операторных пучков [24,25]. Дробно-рациональные оператор-функции, обобщениями которых являются символы интегро-дифференциальных уравнений вида (1), рассматривались в работах Дж.Э. Аллахвердиева[26], А.И. Милославского[27]. В цикле работ Г.В. Радзиевского изучались существенно более общие оператор-функции. Результаты его исследований изложены в обзорной статье[28]. Следует отметить, все результаты диссертации по существу основаны на спектральном анализе оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1). Таким образом, задача изучения спектра оператор-функции является ключевой для проводимого в работе исследования.

Уравнение Гуртина-Пипкина, возмущённое относительно компактным слагаемым, возникает при изучении явления флаттера пластины в потоке жидкости[29]. Изучению этой операторной модели посвящены работы А.В. Давыдова[30,31]. Исследование, проводимое в настоящей работе, развивает методы упомянутых авторов.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) при $\alpha > 0$ возникает в задачах вязкоупругости в средах с внутренним трением, или трением Кельвина–Фойгхта[32]. Спектральный анализ абстрактного уравнения (1) без учёта слагаемого свёртки проведён в работах А.А. Шкаликова и соавторов[33,34]. Вопросы устойчивости решений интегро-

---

щих в теории вязкоупругости и теплофизике // *Математические заметки.* — 2015. — Т. 98, № 4. — С. 630–634.

[23] *Власов В.В., Раутиан Н.А.,* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений.— М.:Макс Пресс, 2016.

[24] *Келдыш М.В.,* О собственных значениях и собственных функциях некторых классов несамосопряжённых уравнений // *ДАН СССР.* — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 11–14.

[25] *Келдыш М.В.,* О полноте собственных функций некторых классов несамосопряжённых операторов // *УМН.* — 1971. — Т. 24. — С. 15–41.

[26] *Дж.Э. Аллахвердиев,* О несамосопряженных операторах, рационально зависящих от спектрального параметра // *ДАН СССР.* — 1969. — Т. 186, № 4. — С.743–746.

[27] *Милославский А.И.,* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости // *Деп. в Укр. НИИНТИ.* — 13.07.1987. — №1229-УК87. — С. 53.

[28] *Радзиевский Г.В.,* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // *УМН.* — 1982. — Т. 37, № 2. — С.81–145.

[29] *Алгазин С.Д., Кийко И.А.,* Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006.

[30] *Davydov A.V.,* Asymptotics of the Spectrum of an Integro-Differential Equation, Arising in the Study of the Flutter of a Viscoelastic Plate // *Russian Journal of Mathematical Physics.* — 2021. — Vol.28, no. 2. — P.188–197.

[31] *Davydov A.V.,* Spectral Analysis of Integrodifferential Operators Arising in the Study of Flutter of a Viscoelastic Plate // *Moscow Univ. Math. Bull.*— 2020. — Vol.75, no. 2. — P. 65–71.

[32] *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости.— М., 1970.

[33] *Шкаликов А.А., Гринив Р.О.,* О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением // *Мат. заметки.* — 1994. — Т.56, №2. — С. 114–131.

[34] *Lancaster P., Shkalikov A.,* Damped vibrations of beams and related spectral problems // *Canad. Appl. Math. Quart..* — 1994. — Vol.2, no.1. — P.45–90.

дифференциального уравнения (1) с ненулевым интегрируемым ядром свёртки изучены А.И. Милославским[35], а спектральный анализ этого уравнения в случае, когда ядро свёртки представимо в виде интеграла Лебега-Стилтьеса от экспоненты, в случае меры с финитным носителем и нулевым оператором C, проведён в работе А.Э. Ерёменко и С.А. Иванова[36].

Системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, которые дифференцированием могут быть сведены к абстрактным моделям вида (1) возникают также при изучении малых движений вязкоупругих жидкостей. Ряд глубоких результатов в этой области получен С.Г. Крейном и соавторами Н.К. Аскеровым и Г.И. Лаптевым[37,38]; Н.Д. Копачевским и его учениками[39,40,41]. Модели вязкоупругой жидкости Максвелла и Олдройта, приводящие к уравнениям, аналогичным по форме уравнению (1), изучались в работах Д.А. Закоры[42,43,44,45], в которых рассматривались также задачи движения этих жидкостей во вращающемся твёрдом теле. Д.А. Закора установил корректную разрешимость указанных уравнений в классическом смысле, экспоненциальную устойчивость решений, а также получил асимптотику решений. В целом, упомянутые авторы при исследовании опираются на теорию полугрупп операторов, сводя интегро-дифференциальные уравнения к системам дифференциальных уравнений в прямой сумме гильбертовых пространств. Отметим, что это возможно лишь для ядер экспоненциального типа. Изучение вопроса о разрешимости и устойчивости решений с помощью полугрупп, которое будет проводиться в 3й и 4й главах настоящей работы во многом следует идеям упомянутых авторов. В работах Н.А. Раутиан[46,47] и В.В. Власова[48] этот

---

[35] *Милославский А.И.*, О спектре неустойчивости операторного пучка // *Мат. заметки.* — 1991. — Т.49, № 4. — С. 88–94.

[36] *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of Gurtin-Pipkin type equations // *SIAM J. Math. Anal.* — 2011. — Vol. 43. — P. 2296–2306.

[37] *Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И.,* К задаче о движении вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1968. — Т. 2, № 2. — С. 21–32.

[38] *Крейн С.Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // *ДАН СССР.* — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 262–265.

[39] *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д.*, Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта // *Матем. заметки.* — 1999. — Т.65, №6. — С. 924–928.

[40] *Закора Д.А., Копачевский Н.Д.*, О малых движениях и нормальных колебаниях гидросистемы «вязкая жидкость + система идеальных жидкостей» // *Матем. физ., анал. геом.* — 2002. — Т.9, № 3. — С. 420–426.

[41] *Kopachevsky N.D., Syomkina E.V.*, Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative // *Eurasian Mathematical Journal.* — 2013. — Vol.4, no. 4. — P. 64–87.

[42] *Закора Д.А.*, Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // *Мат. заметки.* — 2018. — Т. 103, №5. — С. 702–719.

[43] *Закора Д.А.*, Модель сжимаемой жидкости Максвелла // *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН.* — 2017. — Т.63, №2. — С. 247–265.

[44] *Закора Д.А.*, Модель сжимаемой жидкости Олдройта // *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН.* — 2016. — Т.61. — С. 41–66.

[45] *Закора Д.А.*, Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // *Дифференциальные уравнения.* — 2019. — Т. 55, № 9. — С. 1195—1208.

[46] *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // *Дифференциальные уравнения.* — 2021. — Т.57, №9. — С. 1255–1272.

[47] *Раутиан Н.А.*, Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т.56, №9. — С. 1226–1244.

[48] *Власов В.В., Раутиан Н.А.,* Полугруппы операторов, порождаемые интегро-дифференциальными

полугрупповой подход развит и применён к исследованию уравнения Гуртина-Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами свёртки[49].

Изучение интегро-дифференциальных уравнений тесно связано с исследованиями в области функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Ряд глубоких результатов в области ФДУ принадлежит Л.Е. Россовскому[50,51].

Цель диссертационной работы. Цель настоящего исследования состоит в следующем:

1. Установить структуру и локализацию спектра оператор-функции, являющейся символом абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, возникающего в задачах колебаний вязкоупругих сред с внутренним трением.

2. Исследовать ассоциированную с указанным уравнением полугруппу операторов на предмет принадлежности классу C_0-полугрупп и доказать аналитичность этих полугрупп в некотором угле.

3. Основываясь на вышеупомянутых результатах, установить классическую корректную разрешимость уравнения, аналитичность его решения, и получить в некоторых случаях представление решения.

Научная новизна. В работе получены результаты о поведении спектра оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1), в случае когда ядро вольтерровой свёртки представимо в виде интеграла Лебега-Стилтьеса с некомпактным носителем меры. Кроме этого, для этого случая построен генератор ассоциированной с задачей (1)–(2) полугруппы и доказана аналитичность в угле этой полугруппы. Наконец, для этого случая доказана корректная разрешимость задачи (1)–(2) в классическом смысле, экспоненциальная устойчивость решения и аналитичность его в угле. Перечисленные результаты являются новыми и получены лично автором.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, спектральной теории линейных операторов и оператор-функций в гильбертовом пространстве, методы комплексного анализа, теория полугрупп операторов.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории оператор-функций, теории интегро-дифференциальных уравнений, а также в задачах теории управления и прикладных задачах, возникающих в теории вязкоупругости.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о локализации спектра оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1), в левой полуплоскости.

уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // *Современная математика. Фундаментальные направления.* — 2021. — Т. 67, № 3. — С. 507–525.

[49] *Работнов Ю.Н.,* Элементы наследственной механики твёрдых тел. — М.:Наука, 1977.

[50] *Россовский Л.Е.*, Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // *СМФН.* — 2014.— Т.54. — С. 3–138.

[51] *Россовский Л.Е.*, О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *Матем. заметки.* — 2011. — Т.90, №6. — С. 885–901.

2. Теорема об оценках резольвенты оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1).

3. Теоремы о сильной непрерывности и аналитичности полугруппы операторов, ассоциированной с задачей (1)–(2).

4. Теорема о корректной разрешимости в классическом смысле задачи (1)–(2), экспоненциальной устойчивости и аналитичности единственного решения в некотором угле в правой полуплоскости.

Апробация. Постановка задачи и результаты обсуждались на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ» под руководством профессора В.В. Власова и доцента Н.А. Раутиан, 2016 — 2022 гг. (неоднократно).

2. Научный семинар «Операторные модели в математической физике» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора А.А. Шкаликова, 2017 г.

3. Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Д. В. Георгиевского, профессора М. В. Шамолина, профессора С. А. Агафонова, 2017 – 2022 гг. (неоднократно).

4. Научный семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора М.И. Зеликина, чл.-корр. РАН, профессора В.Ю. Протасова, профессора В.М. Тихомирова и профессора А.В. Фурсикова, 2018 г.

5. Научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ под руководством академика В.А. Садовничего, 2019 г., 2022 г. (дважды).

6. Научный семинар «Асимптотические методы в математической физике» лаборатории механики природных катастроф ИПМех РАН под руководством профессора С.Ю. Доброхотова, чл.-корр. РАН, профессора В.Е. Назайкинского, чл.-корр. РАН, профессора А.И. Шафаревича 2019 г., 2020 г. (дважды).

7. Научный семинар «Спектральный анализ дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» кафедры функционального анализа и его применений и кафедры общей математики факультета ВМК МГУ под руководством академика Е.И. Моисеева и профессора И.С. Ломова, 2020 г.

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных конференциях:

1. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения»–XXXI, Воронеж, Россия, 4-7 мая 2020.

2. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXII, Воронеж, Россия, 3-9 мая 2021.

3. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXIII, Воронеж, 3-9 мая 2022.

4. XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам, Симферополь, 2021.

5. Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis — 2019. (June 17—21, 2019, Moscow Region, Dolgoprudny).

6. Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis — 2021. (June 30–July 9, 2021, online, Moscow Region, Dolgoprudny).

Публикации. Результаты диссертации изложены в 5 статьях, опубликованных в научных журналах, индексируемых в наукометрических базах Web of Science, SCOPUS, RSCI. В работах, содержащих основные результаты, выводы и положения диссертационного исследования, выполненных совместно с А.В. Давыдовым, автору настоящей диссертации принадлежат результаты о локализации спектра оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1), в левой полуплоскости. Список работ автора приведён в конце автореферата и диссертации.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 77 наименований. Общий объём работы составляет 114 страниц.

Обзор содержания диссертации

В первой главе настоящей работы вводятся основные обозначения и формулируется основная задача диссертации.

Рассмотрим задачу Коши (1)–(2) для абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, в котором неизвестная вектор-функция $u(t)$ определена на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ и принимает значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Уравнение (1) может быть реализовано в виде интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в задачах теории вязкоупругости, в которых изучаются движения сред с учётом внутреннего трения (трения Кельвина–Фойгхта). В уравнении (1) этому явлению отвечает слагаемое $\alpha A\dot{u}(t)$, где α — положительный параметр, который называется коэффициентом трения Кельвина–Фойгхта.

Ядро вольтерровой свёртки $K(t)$ — скалярная вещественнозначная функция, задаваемая равенством

$$K(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu(\tau), \tag{3}$$

где $\mu(\tau)$ — неубывающая, непрерывная справа функция такая, что носитель меры $\operatorname{supp}\, d\mu(\tau)$ содержится внутри луча $[d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$. В приложениях часто изучается частный вид ядра (3), который задаётся равенством

$$K(t)=\sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t}, \tag{4}$$

где $c_j>0$, $0<\gamma_j<\gamma_{j+1}\to+\infty$, $j=1,2,\ldots$ Для ядра вольтерровой свёртки мы потребуем выполнения следующего условия

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}<1. \tag{5}$$

Соответственно в случае (4) это условие обретает вид

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{c_j}{\gamma_j}<1. \tag{6}$$

Линейные операторы A и C, действующие в пространстве H, удовлетворяют следующим условиям:

1. (A) Оператор A самосопряжённый, положительно определённый: $A=A^*$, $A\geq aI$, где $a>0$. Обратный к нему оператор A^{-1} компактный.

2. (B) Оператор C симметрический, $\mathrm{Dom}(C)\supset\mathrm{Dom}(A)$, оператор CA^{-1} — компактный.

3. (C) Справедливо следующее неравенство:

$$\left\|\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\right\|<1-\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}. \tag{7}$$

В неравенстве (7) запись $\overline{T}$ означает замыкание оператора T.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) может быть реализовано, например, как уравнение, описывающее малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины $u(t,x)$ при $t\geq 0$, $0\leq x\leq 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)+\alpha\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}(t,x)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)-\int_0^t K(t-s)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(s,x)ds=0, \tag{8}$$

$$t>0,\quad 0<x<1,$$

где неизвестная функция $u(t,x)$ из класса $L_2(0,1)$ по пространственной переменной, а $g(x)$ — гладкая ограниченная вещественная функция, пропорциональная неоднородной силе натяжения.

В работах Д.А. Закоры широко представлены различные реализации абстрактной модели вида (1). Так движения начально-изотропного вязкоупругого тела Ильюшина, занимающего ограниченный объём $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ и закреплённого на границе $\partial\Omega$, при изометрических процессах деформирования могут быть описаны следующим интегро-дифференциальным уравнением

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{2}\Delta u(t,x) + \frac{c}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(t,x)\right) + \left(\frac{c}{2}\Delta u(t,x) + \frac{c}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(t,x)\right) - \\ - \int_0^t K(t-s)\left(\frac{1}{2}\Delta u(s,x) + \frac{1}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(s,x)\right) ds, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

где функция $\rho(x)$ — плотность тела, $f(t,x)$ — поле внешних сил, $c > 0$ — некоторая структурная постоянная. Ядро $K(t)$ отвечает слагаемому сдвиговой релаксации и имеет вид

$$K(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-\gamma_j t},$$

где $c_j \geq 0$, для всех $j = 1, \ldots, n$ и выполнено $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Во второй главе проводится спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1). Применение преобразования Лапласа к уравнению (1) приводит к следующей оператор-функции

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A, \quad (10)$$

где $\hat{K}(\lambda)$ — преобразование Лапласа ядра (3), аналитически продолженное в $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -d_0]$, которое задаётся равенством

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}.$$

Определение 2.1.1. *Резольвентным множеством* оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество точек $\rho(L) \subset \mathbb{C}$ такое, что для всех точек $\lambda \in \rho(L)$ оператор $L^{-1}(\lambda)$ определён и ограничен. *Спектром* оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество $\sigma(L) := \mathbb{C}\backslash\rho(L)$.

Изучение спектра оператор-функции $L(\lambda)$ опирается на результаты о поведении спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$, определяемой формулой

$$L_0(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A - \hat{K}(\lambda)A. \quad (11)$$

В силу свойств оператора A найдётся ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ в пространстве H, такой что $Ae_n = a_n e_n,\ 0 < a_n \leq a_{n+1} \to +\infty$.

Рассмотрим проекции оператор-функции $L_0(\lambda)$ на собственные векторы e_n:

$$l_n(\lambda) = \lambda^2 + \alpha a_n \lambda + a_n - a_n\hat{K}(\lambda). \quad (12)$$

Можно доказать, что спектр оператор-функции $L_0(\lambda)$ является замыканием множества нулей функций $l_n(\lambda)$:

$$\sigma(L_0) = \overline{\cup_{n=1}^{+\infty}\{\lambda \in \mathbb{C} : l_n(\lambda) = 0\}}.$$

Следовательно, исследуя распределение нулей функций $l_n(\lambda)$ в области $\mathcal{S} := \mathbb{C}\backslash(-\infty, -d_0]$, можно установить результаты о локализации спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$ в области $\mathcal{S}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда спектр оператор-функции* $L_0(\lambda)$ *в области* $\mathcal{S}$ *состоит из не более, чем счетной, последовательности пар комплексно-сопряженных собственных точек конечной алгебраической кратности, расположенных в области*

$$D_{\gamma,p,q} := \left\{\lambda \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\ \lambda < -\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q\right\}, \tag{13}$$

где γ, p *и* q *— положительные константы.*

При этом если выполнено условие

$$\lim_{x \to -d_0+0} \left(\alpha x + 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + x}\right) < 0, \tag{14}$$

то $\sigma(L_0)$ *содержит последовательность конечнократных вещественных собственных значений, сходящихся к некоторому* x_0, *лежащему в интервале* $(-d_0, 0)$. *В противном случае вещественных точек в* $\sigma(L_0) \cap \mathcal{S}$ *нет.*

Если выполнено условие

$$K(0) = \int_0^{+\infty} d\mu(\tau) < +\infty, \tag{15}$$

то результат теоремы 2.2.1 можно существенно уточнить.

Теорема 2.2.2. *В условиях теоремы* 2.2.1 *пусть выполнено условие* (15), *тогда невещественная часть спектра оператор-функции* $L_0(\lambda)$ *представляет собой последовательность собственных чисел конечной алгебраической кратности, мнимые части которых стремятся к нулю, причём найдётся такая постоянная* $M > 0$, *что для всех натуральных* n *справедлива оценка*

$$\left|\mathrm{Im}\ \lambda_n^{\pm}\right| < M\left(\frac{K(0)}{\alpha^2 a_n} + \sqrt{\frac{\int_{\alpha a_n/4}^{+\infty} d\mu(\tau)}{\alpha}}\right), \tag{16}$$

где $\lambda_n^{\pm}$ *— невещественные нули функции* $l_n(\lambda)$, *определяемой равенством* (12).

Укажем оценки нормы резольвенты оператор-функции $L_0^{-1}(\lambda)$. Рассмотрим области $\mathcal{S}_R$, $\mathcal{S}_{R,\delta}$ и $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$, которые определяются следующим образом:

$$\mathcal{S}_{R,\delta} := \{\lambda \in \mathcal{S} : |\lambda| > R,\ |\arg\lambda| < \pi - \delta\}, \tag{17}$$

$$\mathcal{S}_R := \{\lambda \in \mathcal{S} : |\lambda| > R\}$$

и

$$\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q} := \mathcal{S}_R \backslash \overline{D_{\gamma,p,q}}, \tag{18}$$

где область $D_{\gamma,p,q}$ определена равенством (13).

Теорема 2.2.3. *В условиях теоремы* 2.2.1 *для любого значения* $\delta \in (0, \pi/2)$ *существуют постоянные* $R > 0$ *и* $C > 0$, *такие что в* $\mathcal{S}_{R,\delta}$ *справедлива оценка*

$$\left\|AL_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{C}{|\lambda|}. \tag{19}$$

Существуют положительные постоянные $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ такие, что для каждого $\delta \in (0, \pi/2)$ существуют такие $R > 0$ и $C > 0$, что в области $\mathcal{S}_{R,\gamma,\tilde{p},\tilde{q}} \backslash \mathcal{S}_{R,\delta}$ справедлива оценка

$$\left\| A L_0^{-1}(\lambda) \right\| < \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{20}$$

Результаты о локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$ вытекают из равенства

$$L(\lambda) = \left(I + C L_0^{-1}(\lambda) \right) L_0(\lambda)$$

и оценки

$$\left\| C L_0^{-1}(\lambda) | \right\| \leq \left\| C A^{-1} \right\| \left\| A L_0^{-1} \right\|.$$

Прежде чем сформулировать основные результаты второй главы о локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$, рассмотрим функцию $g(\lambda)$, определённую равенством

$$g(\lambda) = \alpha\lambda + 1 - \hat{K}(\lambda). \tag{21}$$

Нетрудно показать, что при условии

$$\lim_{x \to -d_0+} \left(\alpha x + 1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + x} \right) < 0,$$

функция $g(\lambda)$ имеет единственный в области $\mathcal{S}$ корень λ_0, принадлежащий интервалу $(-d_0, 0)$. В противном случае $g(\lambda)$ не имеет нулей в $\mathcal{S}$.

Основной результат второй главы сформулирован в виде следующих теорем.

Теорема 2.3.1. *Пусть операторы A и C удовлетворяют свойствам* (A)—(C), *тогда все точки спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в области $\mathcal{S}$, являются собственными числам конечной алгебраической кратности, за исключением, быть может, единственной точки $\lambda_0 \in (-d_0, 0)$, являющейся корнем функции $g(\lambda)$, определённой равенством* (21).

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.1 *и условие* (5), *тогда существуют положительные постоянные γ, p, q такие, что спектр $\sigma(L)$ содержится в области $D_{\gamma,p,q}$, где*

$$D_{\gamma,p,q} = \left\{ \mathrm{Re}\ \lambda < -\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q \right\}.$$

Заключительным результатом второй главы диссертации является оценка резольвенты оператор-функции $L(\lambda)$, которая существенно используется в последующих главах.

Теорема 2.3.3. *В условиях теоремы* 2.3.1 *для любого $\delta \in (0, \pi/2)$ найдутся числа $R > 0$ и $M > 0$ такие, что для $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\delta}$* (17) *справедлива следующая оценка:*

$$\left\| L^{-1}(\lambda) \right\| \leq \frac{M}{|\lambda|^2}. \tag{22}$$

Для $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$ найдётся такое число $\tilde{M} > 0$, что

$$\left\| L^{-1}(\lambda) \right\| \leq \frac{\tilde{M}}{|\lambda|^{3/2}}, \tag{23}$$

где постоянные γ, p и q такие же, как в теореме 2.3.2.

Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 сформулированы и доказаны в работах [1], [2], а результаты о поведении спектра оператор-функции $L(\lambda)$ и оценки её резольвенты, сформулированные в виде теорем 2.2.3, 2.3.1, 2.3.2 и 2.3.3, доказаны в работе [5].

В третьей главе исследуется задача (1)–(2), в случае, когда оператор C нулевой, а ядро вольтерровой свёртки представимо в виде (4). Изучаются вопросы о корректной разрешимости указанной задачи Коши, а также проводятся оценки нормы решения. Под разрешимостью задачи (1)–(2) понимается существование классического решения этой задачи.

Определение 3.4.1. Функция $u \in C^2(\mathbb{R}_+, H) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A))$ называется классическим решением задачи (1)–(2), если для каждого $t \geq 0$ функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2).

Исследование вопроса о корректной разрешимости проводится с использованием аппарата теории полугрупп операторов. Для этого исходная задача Коши сводится к эволюционной задаче вида

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}_0 x(t) + F(t), \tag{24}$$

$$x(0) = x_0. \tag{25}$$

Рассмотрим пространство $l_2(H)$, задаваемое следующим образом:

$$l_2(H) = \sum_{j=1}^{+\infty} H,$$

элементами которого являются вектор-функции $\mathbf{h} := (h_1, h_2, \dots)^T$. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|\mathbf{h}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \|h_j\|^2.$$

Пусть

$$h_j(t) = \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} \int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)} A^{1/2} u(s) ds.$$

Рассмотрим $\mathbb{H} := H \oplus H \oplus l_2(H)$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}^2 := \|\cdot\|^2 + \|\cdot\|^2 + \|\cdot\|_2^2$. Пусть $x(t)$ — вектор-функция, определённая на $[0, +\infty)$, принимающая значения в $\mathbb{H}$, и задаваемая равенством

$$x(t) = \left(\dot{u}(t), \beta A^{1/2} u(t), \mathbf{h}(t)\right)^T,$$

где $\beta = \left(1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \dfrac{c_j}{\gamma_j}\right)^{1/2}$, $\mathbf{h}(t) := (h_1(t), h_2(t), \dots))^T$. Вектор $x_0 \in \mathbb{H}$ зададим как

$$x_0 = \left(u_1, \beta A^{1/2} u_0, 0\right)^T.$$

Тогда задачу (1)–(2) можно записать в виде (24)–(25), где вектор-функция $F(t)$ в правой части определяется как

$$F(t) = \left(-\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} A u_0, 0, 0\right)^T,$$

а оператор $\mathcal{A}_0$ задаётся матрицей, коэффициенты которой — линейные операторы в пространствах H и $l_2(H)$.

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -\beta I & -S^* \\ \beta I & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

где $S : H \to l_2(H)$ — линейный оператор, действующий по правилу

$$Sh = \left(\sqrt{\frac{c_1}{\gamma_1}} h, \ldots, \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} h, \ldots \right)^T,$$

S^* — сопряжённый оператору S, Γ — оператор в $l_2(H)$

$$\Gamma \mathbf{h} = \operatorname{diag} \{ \gamma_1 h_1, \ldots, \gamma_j h_j, \ldots \}.$$

Зададим область определения оператору $\mathcal{A}_0$

$$\operatorname{Dom}(\mathcal{A}_0) = \left\{ (v, \rho, \mathbf{h})^T \in \mathbb{H} : \Gamma \mathbf{h} \in l_2(H),\ (-\alpha A^{1/2} v - \beta \rho - S^* \mathbf{h}) \in \operatorname{Dom}(A^{1/2}) \right\}.$$

Сформулируем главный результат третьей главы, который доказан в работе [3].

Теорема 3.3.1. *Оператор $\mathcal{A}_0$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы, аналитической в угле $\{|\arg \lambda| < \delta\}$ для некоторого $\delta \in (0, \pi/2)$.*

Как следствие из доказанной теоремы выводится теорема о корректной разрешимости в классическом смысле задачи (24) – (25).

Определение. Функция $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}) \cap C(\mathbb{R}_+, \operatorname{Dom}(\mathcal{A}_0))$ называется классическим решением задачи (24) – (25), если $x(t)$ удовлетворяет уравнению (24) для любого $t \geq 0$ и начальному условию (25).

Разрешимость задачи (24)–(25) при $x_0 \in \operatorname{Dom}(\mathcal{A}_0)$ вытекает из теоремы 3.3.1, а также из результатов монографии[52](гл. 2, теорема 1.4). Возвращаясь к исходной задаче, можно получить следующий результат о корректной разрешимости.

Теорема 3.4.3. *Пусть $u_0, u_1 \in \operatorname{Dom}(A)$, а также выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j < +\infty.$$

Тогда задача (1)–(2) *имеет единственное решение в смысле определения* 3.4.1 *При этом существует число $\delta \in (0, \pi/2)$, такое что решение $u(t)$ допускает аналитическое продолжение в угол $D_\delta = \{|\arg \lambda| < \delta\}$ и справедлива оценка*

$$\|\dot{u}(t)\|^2 + \left\| A^{1/2} u(t) \right\|^2 \leq M e^{-2\gamma t} \left(\|u_1\|^2 + \left\| A^{1/2} u_0 \right\|^2 + t^2 \|A u_0\|^2 \right), \qquad (27)$$

где $M > 0$, $0 < \gamma \leq \gamma_1$.

Завершает третью главу результат о представлении решения задачи Коши (1)–(2) в виде ряда из экспонент.

[52] *Голдстейн Дж.,* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.:Выща школа, 1989.

Теорема 3.5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.4.3, тогда для решения задачи (1)–(2) $u(t)$ при $t > 0$ справедливо следующее представление*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\nu(L_0)} \frac{(\lambda_n^+ + \alpha a_n)\, u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_n^+)} e^{\lambda_n^+ t} e_n + \sum_{n=1}^{\nu(L_0)} \frac{(\lambda_n^- + \alpha a_n)\, u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_n^-)} e^{\lambda_n^- t} e_n + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda_{n,k} + \alpha a_n) u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_{n,k})} e^{\lambda_{n,k} t} \right) u_{1,n} e_n, \quad (28)$$

где $\nu(L_0)$ — число невещественных точек в спектре оператор-функции $L_0(\lambda)$, $\lambda_n^\pm$ — невещественные точки спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$, $\lambda_{n,k}$ — вещественные точки спектра $L_0(\lambda)$, такие что

$$-\gamma_k < \lambda_{n,k} < -\gamma_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots,\ \gamma_0 := 0$$

для всех натуральных n, e_n — единичные собственные векторы оператора A, отвечающие собственным значениям a_n, $u_{0,n}$ и $u_{1,n}$ — коэффициенты Фурье при разложении начальных условий u_0 и u_1 соответственно по ортонормированному базису $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Наконец, в **четвёртой главе** рассматривается задача Коши (1)–(2) в наиболее общем случае, когда $C \neq 0$ и ядро вольтерровой свертки имеет вид (3).

Исследование вопроса о корректной разрешимости в классическом смысле проводится по той же схеме, что и в третьей главе. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(H, \mu)$[53], которое состоит из вектор-функций $h(\tau)$ со значениями в H, измеримых относительно меры $d\mu$ на $\mathbb{R}_+$, квадраты норм которых суммируемы:

$$\|h\|^2_{L_2(H,\mu)} = \int_0^{+\infty} \|h(\tau)\|^2_H \, d\mu(\tau) < +\infty.$$

Далее, задача (1)–(2) сводится к эволюционной задаче в прямой сумме гильбертовых пространств $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus L_2(H, \mu)$:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + F(t), \quad (29)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (30)$$

Обозначим через S, S^* и Γ — линейные операторы, определяемые как

$$S : H \to L_2(H, \mu),\ Sh(\tau) := \frac{1}{\sqrt{\tau}} h,$$

$$S^* : L_2(H, \mu) \to H,\ S^* f := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} f(\tau) d\mu(\tau),$$

$$\Gamma : L_2(H, \mu) \to L_2(H, \mu),\ \Gamma f(\tau) := \tau f(\tau).$$

[53] *Гельфанд И.М., Виленкин М.Я.*, Обобщённые функции. — М.:Физматгиз, 1961 (стр. 148)

Пусть B — линейный оператор $B := \left(\left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right) I + \overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\right)^{1/2}$. Неизвестная вектор-функция $x(t)$ связана с неизвестной функцией $u(t)$ следующим образом:

$$x(t) = \left(\dot{u}(t), BA^{1/2}u(t), h(t)\right)^T,$$

где $h(t) \in L_2(H, \mu)$ при каждом фиксированном t и задаётся равенством

$$h(t) := h(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^t e^{-\tau(t-s)} A^{1/2} u(s) ds.$$

Функция $F(t)$ определена как

$$F(t) = \left(-\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau t}}{\tau} A u_0 d\mu(\tau), 0, 0\right)^T.$$

Наконец, оператор $\mathcal{A}$ задаётся следующей матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -B & -S^* \\ B & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{31}$$

на области определения:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \left\{(u, \rho, v)^T \in \mathbb{H} : \ v \in \mathrm{Dom}(\Gamma), \ (-\alpha A^{1/2}u - B\rho - S^*v) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right\}. \tag{32}$$

Основной результат четвёртой главы, опубликованный в работе [4], состоит в следующем.

Теорема 4.3.1. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда оператор $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Более того, эта полугруппа является аналитической в некотором угле* $\Lambda_\delta := \{|\arg \lambda| < \delta\}$, $\delta \in (0, \pi/2)$.

Ввиду этого результата, делается вывод о корректной разрешимости в классическом смысле задачи (29)–(30) при $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, из чего как следствие можно вывести результат о корректной разрешимости исходной задачи Коши (1)–(2).

Теорема 4.4.3. *Пусть* $u_0, u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$, *а также выполнено условие* (15). *Тогда задача* (1)–(2) *имеет единственное решение в смысле определения* 3.4.1. *При этом существует число $\delta \in (0, \pi/2)$ такое, что решение $u(t)$ допускает аналитическое продолжение в угол $D_\delta = \{|\arg \lambda| < \delta\}$, и справедлива оценка*

$$\|\dot{u}(t)\|^2 + \left\|A^{1/2}u(t)\right\|^2 \le M e^{-2\gamma t} \left(\|u_1\|^2 + \left\|A^{1/2}u_0\right\|^2 + t^2 \|Au_0\|^2\right), \tag{33}$$

где $M > 0$, $0 < \gamma \le d_0$.

Заключение

В диссертации изучен спектр оператор-функции, являющейся символом абстрактного интегро-дифференциального уравнения (1), а также исследованы свойства ассоциированной с этим уравнением полугруппы операторов. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Установлена локализация спектра символа интегро-дифференциального уравнения (1), а также получена оценка её резольвенты.

2. Построена эквивалентная задаче (1)–(2) эволюционная задача (29) и доказано, что полугруппа операторов сдвига вдоль траектории решения этой задачи является сильно непрерывной, аналитической в некотором угле.

3. На основе полученных результатов установлена корректная разрешимость задачи (1)–(2) в классическом смысле и в случае, когда оператор C нулевой, а ядро свёртки представлено в виде ряда (4), получено представление решения.

Изложенные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории оператор-функций. Кроме этого, полученные выводы могут быть использованы в ряде прикладных задач наследственной механики.

Из перспективных направлений для дальнейшего исследования можно выделить следующее:

1. Уточнение асимптотики невещественных точек спектра символа интегро-дифференциального уравнения.

2. Исследование геометрических свойств систем собственных и присоединённых векторов генератора полугруппы, ассоциированной с задачей (29)–(30).

3. Оценка скорости сходимости ряда в представлении решения задачи (1)–(2).

4. Изучение задачи (1)–(2) в случае, когда ядра свёртки имеют более общий вид, например, в случае ядер Работнова.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Власову Виктору Валентиновичу и доценту Надежде Александровне Раутиан за постановку задачи, постоянное внимание к работе, многочисленные обсуждения и ценные рекомендации.

Автор глубоко благодарен всем участникам семинара «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ» под руководством профессора Власова В.В. за полезные замечания и плодотворные дискуссии.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.,* О свойствах спектра оператор-пучка, возникающего в теории вязкоупругости // *Математические заметки.* — 2018.— Т. 103, № 5. — С. 774–778.
Davydov A.V., Tikhonov Y.A., On properties of the spectrum of an operator pencil arising in viscoelasticity theory // *Mathematical Notes.* — 2018. — Vol. 103, no. 5-6. — P. 841–845. / 0.31 п.л. / 0.1 п.л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 0.626)

[2] *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.*, Исследование операторных моделей Кельвина-Фойгта // *Дифференциальные уравнения.* — 2018. — Т.54, №12. — С.1663–1677.
Davydov A.V., Tikhonov Y.A., Study of Kelvin–Voight models arising in viscoelasticity // *Differential Equations.* — 2018. — Vol. 54, no. 12. — P. 1620–1635. / 1 п.л. / 0.33 п.л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 0.420)

[3] *Тихонов Ю.А.,* Об аналитичности полугруппы операторов, возникающей в задачах теории вязкоупругости. // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т.56, № 6. — С. 808–822.
Tikhonov Y.A., Analyticity of an operator semigroup arising in viscoelasticity problems // *Differential Equations.* — 2020. — Vol. 56, no. 6. — P. 797–812. / 1 п.л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 0.420)

[4] *Тихонов Ю.А.,* О свойствах одной полугруппы операторов, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением, возникающим в теории вязкоупругости // *Дифференциальные уравнения.* — 2022. — Т.58, № 5. — С. 669—685.
Tikhonov Y.A., On the Properties of a Semigroup of Operators Generated by a Volterra Integro-Differential Equation Arising in the Theory of Viscoelasticity // *Differential Equations.* — 2022. — Vol. 58, no. 5. — P. 662–679. / 1.13 п.л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 0.420)

[5] *Тихонов Ю.А.,* О локализации спектра оператор-функции, возникающей при изучении колебаний вязкоупругого трубопровода с учетом трения Кельвина–Фойгта //*Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* — 2022. — no. 2. С. 23—34.
Tikhonov Y.A., On the spectrum localization of an operatorfFunction arising at studying oscillations of a viscoelastic pipeline with Kelvin–Voigt friction // *Moscow Univ. Math. Bull.* — 2022. — Vol. 77, №2. — P. 73–85. / 0.81 п.л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ (ИФ SJR 0.417)

В работе [1] автору принадлежат утверждения 1—3 и теоремы 2, 3 о локализации спектра оператор-функции. В работе [2] автору принадлежат утверждения 1—3 и теоремы 2, 3.