

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Кабанова Любовь Александровна

**Метод структурных функций
в решении квазистатических задач
об изгибе неоднородных упругих пластин**

Специальность 1.1.8 —
механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Диссертация выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: *Горбачев Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник*

Официальные оппоненты: *Димитриенко Юрий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», кафедра «Вычислительная математика и математическая физика», заведующий кафедрой*

Полилов Александр Николаевич, доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени А. А. Благонравова Российской академии наук, главный научный сотрудник
Бондарь Валентин Степанович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский политехнический университет», кафедра «Техническая механика и компьютерное моделирование», профессор

Защита состоится 06 июня 2025 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета МГУ.011.6 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, НИИ механики МГУ, к. 240.

E-mail: pvchist@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3403>.

Автореферат разослан «_____» апреля 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.6,
кандидат физико-математических наук

П. В. Чистяков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Разработка и развитие аналитических методов исследования поведения неоднородных материалов является одной из значимых задач механики деформируемого твердого тела. Важная часть разработки метода – описание арсенала его возможностей: качественных свойств приближенных решений, построенных изучаемым методом, количественное сопоставление таких приближенных решений с известными решениями и изучение влияния параметров настройки метода на конечное приближение. Данная работа посвящена исследованию возможностей метода структурных функций (МСФ) [Горбачев В. И., 1991], разработанного научным руководителем автора.

МСФ – это способ вычисления приближенного решения задачи о нагружении неоднородного (исходного) тела по решениям вспомогательных задач двух типов: задачи о нахождении структурных функций и задачи о нагружении однородного (сопутствующего) тела, геометрия которого, закрепления и приложенные нагрузки совпадают с таковыми для исходного тела. Метод не накладывает ограничений на тип неоднородности материала и характер зависимости упругих свойств материала от координат.

В настоящее время [Горбачев В. И., Гулин В. В., 2021; Соляев Ю. О., Горбачев В. И., 2019; Горбачев В. И., 2020 и др.] построены МСФ-приближения решений некоторых одномерных и двумерных постановок задач теории упругости, разработаны варианты метода для термоупругих тел, динамической задачи теории упругости, теории устойчивости, вычисления эффективных свойств материалов. Однако вопрос применения МСФ к решению трехмерных задач теории упругости остается открытым, а следовательно, требует изучения влияния параметров метода на качество конечных приближений и вопрос практического выбора этих параметров, в частности, упругих свойств сопутствующего тела [Горбачев В. И., 2020].

Целью данной работы является:

- построение приближенных решений задачи о нагружении неоднородной в поперечном направлении сильно ортотропной прямоугольной пластины при помощи метода структурных функций (МСФ)
 - различных порядков,
 - на основе различных приближенных решений вспомогательной (сопутствующей) задачи;
- сопоставление для набора тестовых задач построенных приближенных решений между собой, с известными классическими приближениями,

- с аналитическим и конечноэлементными решениями аналогичной задачи в трехмерной постановке;
- изучение простейших качественных свойств построенных приближенных решений в зависимости от параметров метода, в том числе – в зависимости от выбора упругих свойств сопутствующего тела.

Научная новизна:

1. Для пластины, составленной из слоев, ортотропных в осях координат, связанных с пластиной, в рамках МСФ получены аналитические выражения для структурных функций первого и второго порядка. На основе найденных структурных функций для задачи о нагружении свободно опертой на контуре прямоугольной пластины получены явные выражения для МСФ-приближений – впервые в рамках изучаемого метода для трехмерной задачи теории упругости. Построены МСФ-приближения первого и второго порядка, основанные на решении сопутствующей задачи в трехмерной постановке и на приближенных решениях сопутствующей задачи в рамках классических кинематических гипотез.
2. Проведен анализ свойств напряженно-деформированного состояния, характерных для МСФ-приближений с разными параметрами изучаемого метода. Показано, что МСФ-приближения учитывают зависимость перемещений от поперечной координаты в виде криволинейной ломаной и позволяют вычислить поперечные напряжения, удовлетворяющие граничным условиям.
3. Из требования выполнения МСФ-приближением граничных условий на лицевых поверхностях получены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела.
4. При фиксированном первом (или втором) порядке метода структурных функций параметром, влияющим на качество конечного приближения, является точность решения сопутствующей задачи. Показано, что повышение точности решения сопутствующей задачи позволяет уже при помощи метода структурных функций первого порядка приближенно вычислить поперечные напряжения в пластине.
5. Построенные МСФ-приближения решения вышеупомянутой задачи численно сопоставлены с аналитическим и конечноэлементным решением той же задачи в трехмерной постановке. При сопоставлениях варьировался выбор параметров метода, геометрия и упругие свойства пластин. Эти сопоставления подтверждают необходимость предложенного в работе выбора упругих свойств сопутствующего тела и

сформулированные выводы о свойствах МСФ-приближений напряженно-деформированного состояния пластины.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Приближенные решения задачи о нагружении слоистой ортотропной линейно-упругой прямоугольной пластины, построенные методом структурных функций первого и второго порядка, основанные на решении сопутствующей задачи в рамках модели Тимошенко (или более точной), позволяют получить зависимость перемещений в пластине от поперечной координаты в виде криволинейной ломаной.
2. Приближенные решения задачи о нагружении слоистой ортотропной линейно-упругой прямоугольной пластины, построенные методом структурных функций первого порядка с использованием достаточно точного приближенного решения сопутствующей задачи, обеспечивают выполнение граничных условий на лицевых поверхностях пластины тогда и только тогда, когда модули сдвига сопутствующего тела совпадают с осредненными по Рейссу модулями сдвига исходного тела.
3. При фиксированном порядке метода структурных функций оправдано повышение порядка точности решения сопутствующей задачи: так, в рассмотренных в работе примерах уже при использовании метода первого порядка повышение точности решения сопутствующей задачи позволяет приближенно вычислять поперечные напряжения в исходной пластине.

Теоретическая и практическая ценность работы Результаты работы имеют теоретическое и прикладное значение в контексте дальнейшего исследования метода структурных функций; кроме того, результаты могут быть использованы в качестве методических материалов (учебного пособия) для изучения метода структурных функций и его применения к трехмерным задачам теории упругости.

Методология и методы исследования. Исследование свойств МСФ-приближений выполнено на примере трехмерной постановки задачи о квазистатическом нагружении прямоугольной пластины, составленной из линейно-упругих, ортотропных в связанных с пластиной осях координат слоев, свободно опертой на всех боковых гранях [Reddy J. N., 2006; Васильев В. В., 2024]. Задачи с данным типом граничных условий часто используют для сравнения и исследования подходов к моделированию упругого поведения пластин. В работе реализован МСФ первого и второго порядка, построены соответствующие приближенные решения. Построение

МСФ-приближений требует выбора трех параметров: порядка МСФ, упругих свойств сопутствующего тела и точности приближенного решения сопутствующей задачи. В рассматриваемом случае сопутствующее тело – однородная (возможно, толстая) пластина. В работе использованы три известных решения сопутствующей задачи – в рамках моделей, основанных на кинематических гипотезах Кирхгофа-Лява [Kirchhoff G., 1877] и Тимошенко [Hencky H., 1947], и в трехмерной постановке – при помощи метода Пагано [Pagano N. J., 1970].

Качественные свойства приближений проверены на соответствие критериям качества, сформулированным в работе [E. Carrera, 2002]. Количественно построенные приближения сопоставлены с приближениями, полученными методом конечных элементов и по методу Пагано для исходной задачи. Сравнения выполнены для достаточно толстых пластин (отношение продольного и поперечного размера – $1/4$) из сильно ортотропных слоёв (отношение осевых модулей упругости в диапазоне $1 : 30 \dots 1 : 70$), как для симметричных, так и для асимметричных укладок. Проверено, что МСФ-приближения решения приближаются к известным точным решениям при уменьшении отношения толщины пластины к её размеру в плане, а также при приближении структуры пластины к однородной.

Достоверность и обоснованность полученных результатов вытекает из использования классического аппарата механики сплошных сред и подтверждена строгими математическими выводами. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., профессора В. И. Горбачева (2020, 2021, 2022, 2023),
- научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., профессора Д. В. Георгиевского (2023),
- научно-исследовательском и аспирантском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством член-корреспондента РАН, профессора Е. В. Ломакина (2023, 2024),
- научно-исследовательском семинаре кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика РАН, профессора Р. И. Нигматулина (2024),

- семинаре МЕСМУС Института машиноведения РАН под руководством член-корреспондента РАН Н. А. Махутова (2025),
- Научно-техническом совете Института машиноведения РАН под руководством д.т.н., профессора Ю. Г. Матвиенко (2025),
- семинаре Института прикладной механики РАН под руководством д.т.н., профессора А. Н. Власова (2023),
- международной конференции «Математика в созвездии наук» к юбилею академика В. А. Садовниченко (2024),
- XII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (2023),
- научных школах-конференциях по механике композитов имени Б. Е. Победри (2022, 2023),
- научной конференции «Ломоносовские чтения» (2022).

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Научный руководитель принимал участие в формулировке постановок задач, верификации и анализе результатов; при этом вклад соискателя является определяющим. Основные идеи и положения диссертации изложены в 4 научных работах общим объемом 7,37 п.л. Личный вклад автора составляет 6,49 п.л., или 22/25; в работах [2, 3] личный вклад равен 1, в работе [4] – 6/7; в работе [1] – 1/2.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях общим объемом 7,37 п. л., опубликованных в журналах Web of Science, Scopus и RSCI.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 132 страницы, включая 12 таблиц и 14 рисунков. Список литературы содержит 156 наименований.

Содержание работы

Во **введении** приведён обзор существующих исследований метода структурных функций (МСФ), обоснована актуальность вопросов, исследуемых в рамках данной диссертационной работы. Поскольку исследование МСФ проводится на примере решения квазистатической задачи об изгибе неоднородной пластины, приведен краткий обзор литературы в области методов решения задач теории пластин. В данный обзор включены общие подходы к моделированию пластин, не предполагающие конкретного характера неоднородности материала. Отдельно рассмотрены модели слоистых пластин:

отмечены подходы к классификации существующих моделей, апробации вновь разрабатываемых, а также [Carrera E., 2002, 2003] – критерии качества, по соответствию которым можно сопоставлять модели слоистых пластин (далее КР1-КР5). Согласно им, к модели предъявляются следующие требования.

1. Представление перемещений в виде криволинейной ломаной от поперечной координаты, включая перемещение вдоль поперечной оси.
2. Выполнение условий межслойной непрерывности [идеального контакта] для поперечных напряжений на каждой границе слоёв.
3. Точное представление поперечных напряжений σ_{33} .
4. Возможность непосредственно вычислить поперечные напряжения σ_{13} без постобработки других величин, в том числе – без интегрирования трехмерных уравнений равновесия теории упругости.
5. Наименьшее возможное для заданной точности число степеней свободы, в том числе, независимость числа переменных от количества слоёв в пластине.

Во Введении дается краткий обзор решений задачи о нагружении неоднородной пластины, основанных на методах механики композитов, в том числе – на применении метода малого параметра (асимптотического метода). Данный метод, родственник исследуемому в диссертации МСФ, значительно более последнего исследован в настоящий момент, в том числе – применительно к задачам о нагружении неоднородных пластин. Асимптотические теории пластин построены и развиты в работах R. V. Kohn и M. Vogelius, Г. П. Панасенко и М. В. Резцова, Т. Levinski и J. J. Telega, С. В. Шешенина, Ю. И. Димитриенко, К. А. Скопцова, М. И. Савенковой, Е. А. Губаревой, Д. О. Яковлева, Ю. В. Юрина и др.

Также во Введении формулируется цель работы, сформулированы научная новизна и положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** рассматриваются классические теории пластин, основанные на предположениях о виде поля перемещений в пластине. В работе [Vasiliev V. V., Lurie S. A., 1992] представлен наиболее общий вид подобного предположения – $u_i(\vec{x}) = \sum_{r=0}^R \psi^{(r)}(x_3) \varphi_i^{(r)}(x_1, x_2)$, где $\varphi(x_1, x_2), \psi(x_3)$ – гладкие функции, x_1, x_2 – координаты в срединной плоскости пластины, ось x_3 перпендикулярна плоскости пластины. В диссертации использовано полиномиальное представление перемещений [Reddy J. N., 2006],

$$u_i = \sum_{r=0}^R x_3^r \varphi_i^{(r)}(x_1, x_2). \quad (1)$$

Для решения конкретных задач в данной работе задействованы две модели, основанные на классических гипотезах – два частных случая (1):

- модель Кирхгофа-Лява: для неё (1) принимает вид $u_i = w_i - \delta_{iL} x_3 w_{3,L}$, $w_i(x_1, x_2)$ – перемещения точек срединной плоскости;
- модель Тимошенко, для неё (1) принимает вид $u_i = y_i - \delta_{iL}(x_3 y_{3,L} - \gamma_L)$, $y_i(x_1, x_2)$ – перемещения точек срединной плоскости, γ_L – изменения углов в плоскости $Ox_L x_3$ между нейтральным волокном и срединной плоскостью после деформации.

Для моделей пластин, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява и Тимошенко, приведены определяющие соотношения в случае анизотропного неоднородного материала. Построены функционалы Лагранжа этих моделей, при помощи вариационного принципа Лагранжа получены постановки задачи о квазистатическом нагружении пластины в этих моделях.

Приближенные решения задачи о нагружении пластины, полученные в рамках моделей Кирхгофа-Лява и Тимошенко, обладают рядом известных недостатков. Модель Кирхгофа-Лява не описывает поведение относительно толстых пластин и пластин, изготовленных из материалов с выраженной ортотропией; кроме того, и модель Кирхгофа-Лява, и модель Тимошенко обеспечивают только выполнение критерия КР5 (и, формально, КР2) из списка, приведенного выше.

Во второй главе, разделе 2.1., рассматривается МСФ бесконечного порядка. Вводится понятие исходной – задачи в перемещениях о нагружении неоднородного тела [Победра Б. Е., 1984]

$$[C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} + X_i(\vec{x}) = 0, \quad \sigma_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{kl}(\vec{x}), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2}[u_{i,j}(\vec{x}) + u_{j,i}(\vec{x})], \quad u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0,$$

и вспомогательной (сопутствующей) задачи о нагружении однородного тела аналогичной системой нагрузок с аналогичными граничными условиями

$$C_{ijkl}^0 v_{k,l,j}(\vec{x}) + X_i(\vec{x}) = 0, \quad s_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}^0 e_{kl}(\vec{x}), \quad (3)$$

$$e_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2}[v_{i,j}(\vec{x}) + v_{j,i}(\vec{x})], \quad v_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad s_{ij}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0.$$

В работах [Горбачев В. И., 1991, 2018, 2020 и др.] получена интегральная формула, устанавливающая взаимосвязь решений задач (2) и (3):

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \int_V G_{m|n}^{(i)}(\vec{\xi}, \vec{x}) [C_{mnkl}^0 - C_{mnkl}(\vec{\xi})] e_{kl}(\vec{\xi}) dV_\xi. \quad (4)$$

$G_{m|n}^{(i)}(\vec{\xi}, \vec{x})$ – компоненты тензора Грина неоднородного тела. В тех же работах построено приближение формулы (4) рядом,

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1 \dots i_q}(\vec{x}) e_{kl, i_1 \dots i_q}(\vec{x}), \quad (5)$$

коэффициенты которого названы структурными функциями. Для их вычисления существуют два подхода, один из которых состоит в вычислении структурных функций, как взвешенных моментов тензора Грина исходной задачи:

$$N_{ikli_1 \dots i_q} = \int_V \frac{1}{q!} G_{m|n}^{(i)}(\vec{\xi}, \vec{x}) [C_{mnkl}^0 - C_{mnkl}(\vec{\xi})] (\xi_{i_1} - x_{i_1}) \dots (\xi_{i_q} - x_{i_q}) dV_{\xi}. \quad (6)$$

Второй подход состоит в вычислении структурных функций, как решения системы уравнений в частных производных

$$[C_{ijkl} N_{kmn, l} + C_{ijmn}],_{,j} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} [C_{ijmn} N_{mkli_1, n} + C_{ijmi_1} N_{mkl}],_{,j} &= C_{ii_1 kl}^0 - [C_{ii_1 mn} N_{mkl, n} + C_{ii_1 kl}], \\ [C_{ijmn} N_{mkli_1 \dots i_q, n} + C_{ijmi_q} N_{mkli_1 \dots i_{q-1}}],_{,j} &= \\ -[C_{ii_q mn} N_{mkli_1 \dots i_{q-1}, n} + C_{ii_q mi_{q-1}} N_{mkli_1 \dots i_{q-2}}],_{,j} &\geq 2. \end{aligned}$$

$$N_{ikli_1 \dots i_q} v_{k, li_1 \dots i_q} \Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad q \geq 0 \quad (8)$$

$$\left[C_{ijkl} v_{k, l} + C_{ijmn} N_{mkl, n} v_{k, l} \right] n_j \Big|_{\Sigma_{\sigma}} = C_{ijkl}^0 v_{k, l} n_j \Big|_{\Sigma_{\sigma}}, \quad q = 0 \quad (9)$$

$$\left[C_{ijmn} N_{mkli_1 \dots i_{q-1}} v_{k, li_1 \dots i_{q-1}, n} + C_{ijmn} N_{mkli_1 \dots i_q, n} v_{k, li_1 \dots i_q} \right] n_j \Big|_{\Sigma_{\sigma}} = 0, \quad q \geq 1.$$

В работе проверено, что структурные функции, определённые соотношениями (6), удовлетворяют соотношениям (7), (8) и (9). Решение системы уравнений в частных производных (7) с граничными условиями (8)-(9) единственно. Следовательно, два приведённых подхода к вычислению структурных функций (как взвешенных моментов тензора Грина и как решения системы уравнений в частных производных) эквивалентны. Описаны свойства структурных функций (СФ).

1. СФ зависят от упругих свойств сопутствующего тела, но не от решения сопутствующей задачи, в том числе, не зависят от выбора приближенного решения сопутствующей задачи, его точности, характера приближения и т. п.

2. СФ зависят от типа граничных условий исходной смешанной краевой задачи, но не зависят от объемных сил, приложенных к исходному телу.
3. В тривиальном случае $C_{ijkl}(\vec{x}) \equiv C_{ijkl}^0$ СФ тождественно обращаются в нуль.

В разделе 2.2. рассмотрен вопрос практического применения МСФ к решению задачи о нагружении пластины. Поскольку вычисление суммы ряда (5) затруднительно, вводится понятие порядка МСФ – числа $Q + 1$, такого, что

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^Q N_{ikl i_1 \dots i_q}(\vec{x}) e_{kl, i_1 \dots i_q}(\vec{x}), \quad 0 \leq Q < \infty. \quad (10)$$

Тогда, если решение сопутствующей задачи (3) найдено в общей полиномиальной форме приближенного решения задачи о нагружении однородной пластины $v_i(\vec{x}) = \sum_{r=0}^R x_3^r \varphi_i^{(r)}(x_1, x_2)$, перемещения в исходном теле имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x}) = & \sum_{r=0}^R \left[x_3^r \varphi_i^{(r)}(x_1, x_2) + \sum_{q=0}^Q \left(x_3^r N_{ikL I_1 \dots I_q} \varphi_{k, L I_1 \dots I_q}^{(r)}(x_1, x_2) + \right. \right. \\ & r x_3^{r-1} [N_{ik3 I_1 \dots I_q} \varphi_{k, I_1 \dots I_q}^{(r)}(x_1, x_2) + q N_{ikL I_1 \dots I_{q-1} 3} \varphi_{k, I_1 \dots I_{q-1} L}^{(r)}(x_1, x_2)] + \\ & r(r-1) x_3^{r-2} [q N_{ik3 I_1 \dots I_{q-1} 3} \varphi_{k, I_1 \dots I_{q-1}}^{(r)} + q(q-1) N_{ikL I_1 \dots I_{q-2} 33} \varphi_{k, I_1 \dots I_{q-2} L}^{(r)} / 2] + \\ & \left. + \dots + r(r-1) \dots (r-q) x_3^{r-q-1} N_{ik3 \dots 3} \varphi_k^{(r)}(x_1, x_2) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Вид (11) удобен для сопоставления с решениями, полученными асимптотическим методом. При соответствующем выборе упругих свойств сопутствующего тела и приближения решения сопутствующей задачи можно получить кинематические соотношения, эквивалентные соотношениям асимптотических теорий пластин, построенным в работах [Шешенин С. В., 2006, Шешенин С. В., Скопцов К. А., 2014, Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., 2018].

Также из анализа соотношений для перемещений (11) и их подстановки в граничные условия для N -функций можно заключить, что если порядок решения сопутствующей задачи $R < Q + 2$, система условий на структурные функции оказывается недоопределенной. Однако в случае $R < Q + 2$ структурные функции, которые не допускают определения из системы уравнений и граничных условий, не входят в приближенное решение исходной задачи (10) [из тех же соображений], поэтому приближение в принципе построить возможно – ниже подобные приближения построены и рассмотрены.

Раздел 2.3 посвящен построению МСФ-приближений решения задачи о нагружении слоистой прямоугольной пластины, слои которой ортотропны в осях координат, сонаправленных сторонам пластины, а все боковые грани свободно оперты. Математическая постановка этой задачи имеет вид [Pagano N. J., 1970, Васильев В. В., 2024, и др.]

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(x_3) u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} &= 0, \\ \sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) &= q_i^{\pm}(x_1, x_2), \\ x_1 = 0, L_1 : \quad \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) &= 0, \quad u_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad u_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\ x_2 = 0, L_2 : \quad \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) &= 0, \quad u_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad u_3(x_1, \cdot, x_3) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу ортотропии слоев пластины $C_{\alpha\alpha\alpha\beta} = 0, C_{\alpha\alpha\beta\gamma} = 0, \alpha \neq \beta \neq \gamma$, суммирование по повторяющимся греческим индексам отсутствует.

Сопутствующей для задачи (12) является аналогичная с точки зрения геометрии, граничных условий и внешних нагрузок задача об изгибе однородной пластины, математическая постановка которой имеет вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x}) &= 0, \\ s_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) &= q_i^{\pm}(x_1, x_2), \\ x_1 = 0, L_1 : \quad s_{11}(\cdot, x_2, x_3) &= 0, \quad v_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad v_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\ x_2 = 0, L_2 : \quad s_{22}(x_1, \cdot, x_3) &= 0, \quad v_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad v_3(x_1, \cdot, x_3) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В разделе 2.3.1. приведена процедура применения метода Навье для построения приближенных решений задачи (13) вида

$$\begin{aligned} v_1(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} V_1^{mn}(x_3) \cos(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \\ v_2(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} V_2^{mn}(x_3) \sin(\lambda_m x_1) \cos(\mu_n x_2), \\ v_3(\vec{x}) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} V_3^{mn}(x_3) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\mu_n x_2), \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{L_1}, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{L_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношения (14) объединяют три фактически рассматриваемых приближения решения сопутствующей задачи – в рамках модели Кирхгофа-Лява, модели Тимошенко и метода Пагано. Эти приближения отличаются конкретным видом $V_{mn}^i(x_3)$.

В разделе 2.3.2. построены МСФ-приближения первого порядка решения исходной задачи (12). От тождественно нулевых отличны 5 структурных

функций, для которых система уравнений (7) сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям и краевым условиям

$$[C_{i3mn}(x_3) + C_{i3k3}(x_3)N_{kmn,3}(x_3)]_{,3} = 0, \quad (15)$$

$$(C_{i3mn}(\pm h/2) + C_{i3k3}(\pm h/2)N_{kmn,3}(\pm h/2)) = C_{i3mn}^0, \\ C_{i3kl}(\pm h/2)N_{kmn}(\pm h/2) = 0. \quad (16)$$

Решение системы (15)-(16) – структурные функции первого порядка исходной задачи (12) – имеет вид

$$N_{3\alpha\alpha}(x_3) = \int_{-h/2}^{x_3} (C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha}(y))/C_{3333}(y)dy, \quad (17) \\ N_{\alpha\alpha 3}(x_3) = \int_{-h/2}^{x_3} (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(y))/C_{\alpha 3\alpha 3}(y)dy.$$

Граничное условие (16) следует из требования совпадения напряжений на лицевых поверхностях исходной и сопутствующей пластины $\sigma_{i3}|_{\pm h/2} = s_{i3}|_{\pm h/2}$. Условие (16) задает ограничение на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Таким образом, для выполнения МСФ-приближением всех граничных условий на лицевых поверхностях необходимо, чтобы

$$C_{\alpha 3\alpha 3}^0 = \langle C_{33\alpha\alpha}/C_{3333} \rangle / \langle 1/C_{3333} \rangle, \quad C_{\alpha 3\alpha 3}^0 = 1 / \langle 1/C_{\alpha 3\alpha 3} \rangle; \quad (18)$$

$\langle f \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(y)dy$ – то есть, необходимо выбрать модули сдвига сопутствующего тела совпадающими с осредненными по Рейссу модулями сдвига исходного тела. В численных примерах рассматриваются два варианта выбора свойств сопутствующего тела. МСФ-приближение первого порядка решения задачи (12) имеет вид

$$u_1(\vec{x}) = v_1(\vec{x}) + N_{113}(x_3)(v_{1,3}(\vec{x}) + v_{3,1}(\vec{x})), \quad (19) \\ u_2(\vec{x}) = v_2(\vec{x}) + N_{223}(x_3)(v_{2,3}(\vec{x}) + v_{3,2}(\vec{x})), \\ u_3(\vec{x}) = v_3(\vec{x}) + N_{311}(x_3)v_{1,1}(\vec{x}) + N_{322}(x_3)v_{2,2}(\vec{x}) + N_{333}(x_3)v_{3,3}(\vec{x}).$$

Отмечены свойства МСФ-приближений первого порядка (19).

- Использование МСФ I-го порядка и модели Кирхгофа-Лява для решения сопутствующей задачи (СЗ) дает наименее точное приближенное

решение исходной задачи: в этом случае $u_I \equiv v_I$, $\varepsilon_{IJ} \equiv e_{IJ}$. Это соответствует выводам раздела 2.2.: порядок модели Кирхгофа-Лява меньше необходимого для построения МСФ-приближения I-го порядка, а также – свойствам нулевого приближения в теориях Шешенина-Скопцова и Димитриенко-Юрина.

- Использование модели типа Тимошенко (или высшего порядка по поперечным деформациям) или метода Пагано для решения СЗ и МСФ I-го порядка позволяет моделировать перемещения u_i в виде криволинейных ломаных по поперечной координате. Таким образом, такие приближения решения ИЗ удовлетворяют КР1, КР2 и КР5 по Е. Carrera.
- Использование приближенного решения СЗ в трехмерной постановке (по методу Пагано) и МСФ I-го порядка позволяет приближенно вычислять поперечные напряжения σ_{iz} , удовлетворяющие граничным условиям исходной задачи, если свойства сопутствующего тела выбраны по формулам (18).
- При использовании модели Кирхгофа-Лява для СЗ в итоговое решение входят 2 ненулевых структурных функции $N_{3\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, модели типа Тимошенко – 4 функции $N_{3\alpha\alpha}, N_{\alpha\alpha 3}$, $\alpha = 1, 2$. Для пластин с кусочно-постоянными упругими свойствами структурные функции – кусочно-линейные.

Раздел 2.3.3. посвящен построению приближенных решений исходной задачи (12) МСФ второго порядка. Решение уравнений (7) в этом случае – структурные функции второго порядка; из них отличны от тождественно нулевых 15,

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\beta\beta\alpha}(x_3) &= \int_{-H/2}^{x_3} \left[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int_{-H/2}^z \left(C_{\alpha\alpha\beta\beta}^0 - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) - C_{\alpha\alpha 33}(y) N_{3\beta\beta,3}(y) \right) dy - \right. \\
 &\quad \left. N_{3\beta\beta}(z) \right] dz, \\
 N_{\alpha\alpha\beta\beta}(x_3) &= \int_{-H/2}^{x_3} \left[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int_{-H/2}^z \left(C_{\alpha\beta\alpha\beta}^0 - C_{\alpha\beta\alpha\beta}(y) \right) dy \right] dz, \alpha = 1..2, \\
 N_{\alpha\alpha 33}(x_3) &= - \int_{-h/2}^{x_3} N_{\alpha\alpha 3}(z) dz, \quad N_{33\alpha\alpha}(x_3) = - \int_{-h/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} N_{\alpha\alpha 3}(y) dy.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

МСФ-приближение для перемещений в исходной пластине вычисляется подстановкой решения для СФ (20) в соотношение (10) при $Q = 1$ (итоговый

вид приближений опущен в автореферате в силу громоздкости). Условие $N_{ikl i_1} \Big|_{\pm h/2} = 0$ аналогично случаю первого порядка задаёт ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Отмечены следующие свойства полученных приближений.

- МСФ-приближения II порядка при использовании модели Кирхгофа-Лява для решения СЗ уже не обладают свойством $u_I \equiv v_I$, однако уточнение, вносимое повышением порядка МСФ, незначительно.
- В приближение, основанное на решении СЗ по методу Пагано, вносимые $N_{ikl i_1} v_{k, l i_1}$ вносят более существенный вклад.
- МСФ-приближения II порядка при использовании модели типа Тимошенко и метода Пагано для решения СЗ удовлетворяют КР1, КР2 и КР5 по Е. Carrera. МСФ-приближение II порядка, использующее решение по методу Пагано для СЗ, удовлетворяет и КР3 по Е. Carrera при выборе упругих свойств сопутствующего тела, изложенном в диссертации.
- При использовании модели Кирхгофа-Лява для СЗ корректно определяются и входят в итоговое решение 8 ненулевых СФ, модели типа Тимошенко – 10 ненулевых СФ. В случае композита с кусочно-постоянными свойствами СФ – кусочно-параболические функции.

В **третьей главе** представлены результаты численных сравнений построенных МСФ-приближений, параметры которых варьировались, с известными решениями исходной задачи. В качестве последних взяты решения методом конечных элементов с использованием элементов *C3D8*, *C3D20*; решения исходной задачи в модели Тимошенко и методом Пагано. Выбран набор тестовых трехслойных сильно ортотропных пластин, отличающихся друг от друга соотношением технических постоянных и геометрией укладок. При реализации МСФ-приближений сопоставлены два варианта выбора упругих свойств сопутствующего тела:

1. C_{ijkl}^0 выбираются из соображений выполнения граничных условий для N -функций на лицевых поверхностях – такой выбор упругих свойств сопутствующего тела обеспечивает выполнение граничных условий исходной задачи; (18) для первого порядка и из аналогичных соображений – для второго.
2. $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$. При данном выборе свойств сопутствующего тела решение сопутствующей задачи фактически совпадает с соответствующим приближенным решением исходной задачи, которое основано на осреднении упругих свойств по Фойгту.

Таким образом, сопоставлены следующие приближенные решения (Табл. 1).

Таблица 1 — приближенные решения исходной задачи
и цветовые обозначения Рис. 1-4

Порядок метода	Выбор свойств сопутствующего тела	Приближение решения сопутствующей задачи	Цвет графика
Первый	1	модель Кирхгофа-Лява	светло-зеленый
Первый	2	модель Кирхгофа-Лява	зеленый
Первый	1	модель типа Тимошенко	оранжевый
Первый	2	модель типа Тимошенко	коричневый
Первый	1	метод Пагано	сиреневый
Первый	2	метод Пагано	синий
Второй	1	модель Кирхгофа-Лява	голубой
Второй	2	модель Кирхгофа-Лява	бирюзовый
Второй	1	модель типа Тимошенко	розовый
Второй	2	модель типа Тимошенко	малиновый
Второй	1	метод Пагано	серый
Второй	2	метод Пагано	черный
—	—	Метод Пагано для исходной пластины	красный
—	—	Модель типа Тимошенко для исходной пластины	темно-синий
—	—	МКЭ С3D8 (треугольные маркеры)	зеленый
—	—	МКЭ С3D20 (квадратные маркеры)	оливковый

Вычисленные приближения напряжений и перемещений нормализованы:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3) &= 100H^3 E_T u_1(0, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^4), \\
\hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3) &= 100H^3 E_T u_3(L_1/2, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^4), \\
\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(L_1/2, L_2/2, x_3) &= H\sigma_{\alpha\alpha}(L_1/2, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^2), \\
\hat{\sigma}_{13}(0, L_2/2, x_3) &= H\sigma_{13}(0, L_2/2, x_3)/(q_0 L_1^2).
\end{aligned}$$

В разделе 3.1. проведено сравнение МСФ-приближений I и II порядка, основанных на решении СЗ по методу Пагано, решения задачи (12) по методу Пагано и методом конечных элементов для пластины 1 (табл. 2), нагруженной только нормальной нагрузкой $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2$, $q_I^+ \equiv 0$, $q_i^- \equiv 0$; для пластины 2 (табл. 3), нагруженной аналогично предыдущей (Рис. 1).

Таблица 2 — технические постоянные модельной пластины 1, соотношение линейных размеров пластины — $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/12, H/2]$	70	1	1	0.25	$\frac{0.25}{70}$	$\frac{0.25}{70}$	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/12]$	1	30	1	$\frac{0.25}{30}$	0.25	$\frac{0.25}{30}$	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2

Таблица 3 — технические постоянные модельной пластины 2, соотношение линейных размеров пластины — $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/6, H/2]$	1	30	1	$\frac{0.25}{30}$	0.25	$\frac{0.25}{30}$	0.5	0.2	0.5
$[-H/6, H/6]$	30	1	1	0.25	$\frac{0.25}{30}$	$\frac{0.25}{30}$	0.5	0.5	0.2
$[-H/2, -H/6]$	1	30	1	$\frac{0.25}{30}$	0.25	$\frac{0.25}{30}$	0.5	0.2	0.5

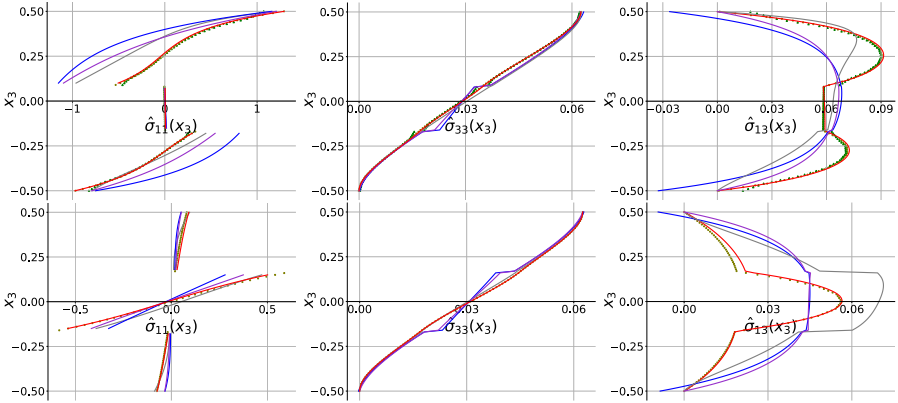


Рис. 1 — Сопоставление между собой и с конечноэлементным решением приближений напряжений $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, $\hat{\sigma}_{33}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{\sigma}_{13}(L_1/2, L_2/2, x_3)$, полученных методом структурных функций I и II порядка в сочетании с решением сопутствующей задачи по методу Пагано. Верхняя тройка — для пластины 1, нагруженной поверхностными силами $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2)$, $q_I^\pm(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$, нижняя — для аналогично нагруженной пластины 2

Сравнения (Рис.1) подтверждают, что, в соответствии с теоретическими выводами, выбор упругих свойств сопутствующего тела 2 не позволяет получить приближенное решение исходной задачи, удовлетворяющее граничным условиям на лицевых поверхностях, а выбор упругих свойств сопутствующего

тела 1 – позволяет. Уже МСФ I-го порядка позволяет приближенно вычислять поперечные напряжения при условии выбора приближенного решения СЗ в трехмерной постановке. Кроме того, решение исходной задачи, построенное по методу Пагано, практически совпадает с конечноэлементами решениями.

Раздел 3.2.1. посвящен взаимным сопоставлениям МСФ-приближений только первого и только второго порядка, основанных на всех рассмотренных в работе приближенных решениях СЗ, с варьированием выбора упругих свойств сопутствующего тела 1-2. Приведем (рис.2) результат этого сравнения для симметричной относительно $x_3 = 0$ пластины 3, упругие свойства которой приведены в таблице 4. Это сравнение подтверждает, что МСФ-приближение, основанное на решении СЗ в модели Кирхгофа-Лява, не дает приемлемого приближения решения исходной задачи. МСФ-приближения, основанные на решении СЗ в модели Тимошенко (оранжевые кривые, розовые кривые), позволяют описывать перемещения и продольные напряжения. Повышение порядка точности решения СЗ позволяет приблизиться и к описанию поперечных напряжений при условии выбора упругих свойств сопутствующего тела предложенным в диссертации образом (сиреневые кривые, серые кривые).

В разделе **3.2.2.** для той же пластины 3 сравниваются МСФ-приближения I-го и II-го порядка, основанные на фиксированных приближенных решениях СЗ.

Таблица 4 — технические постоянные пластины 3, соотношение размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/6, H/2]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	30	1	$\frac{0.25}{30}$	0.25	$\frac{0.25}{30}$	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2

В разделе **3.3.** проверено, что по мере приближения структуры тела к однородой разница МСФ-приближений и решения исходной задачи методом Пагано уменьшается. Рассмотрены две пластины А-1 и А-2, которые отличаются ориентацией среднего слоя, и контрольная А-3 – однородная (табл. 5, 6, 7). Нагружение: $q_i^- \equiv 0$, $q_I^+(x_1, x_2) \equiv 0$, $q_3(x_1, x_2) = q_0 \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2$. Результаты вычислений для пластин серии А приведены на иллюстрации 3.

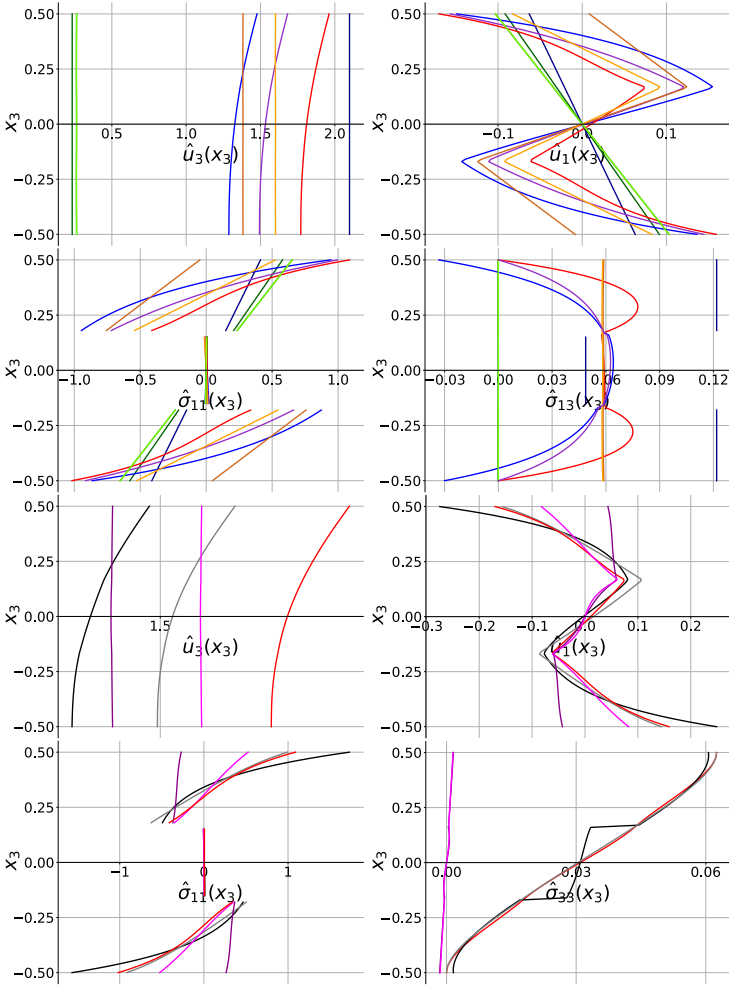


Рис. 2 — Сравнение результатов моделирования приближений по методу структурных функций первого (верхние рисунки) и второго (нижние рисунки) порядка в сочетании с разными приближениями решением сопутствующей задачи нормализованных значений перемещения $\hat{u}_3(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3)$ и напряжения $\hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ и $\hat{\sigma}_{13}(L_1/2, L_2/2, x_3)$ для пластины 4, нагруженной поверхностными силами $q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2)$, $q_I^\pm(x_1, x_2) = 0$, $q_3^-(x_1, x_2) = 0$

Таблица 5 — технические постоянные пластины №А-1, соотношение размеров — $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/12, H/2]$	70	1	1	0.25	$\frac{0.25}{70}$	$\frac{0.25}{70}$	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/12]$	1	30	1	$\frac{0.25}{30}$	0.25	$\frac{0.25}{30}$	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2

Таблица 6 — технические постоянные пластины №А-2, соотношение размеров — $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/12, H/2]$	70	1	1	0.25	$\frac{0.25}{70}$	$\frac{0.25}{70}$	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/12]$	30	1	1	0.25	$\frac{0.25}{30}$	$\frac{0.25}{30}$	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2

Таблица 7 — технические постоянные пластины №А-3, соотношение размеров — $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2, H/2]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2

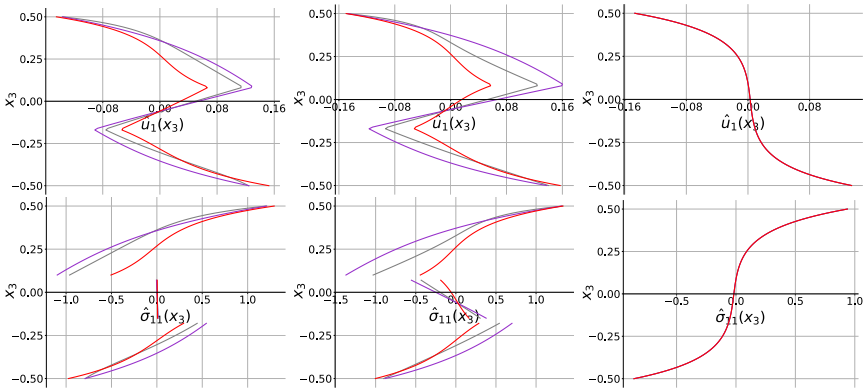


Рис. 3 — Нормализованные значения приближений напряжений и перемещений в сечениях $x_1 = L_1/2, x_2 = L_2/2$ пластин А-1, А-2, А-3

В разделе 3.4. рассмотрена серия Б пластин – упругие свойства и схема укладки этих пластин одинаковы и приведены в таблице 8, а отношение толщины к размеру в плане убывает: для пластины №Б-1 $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$, №Б-2 – $H/L_1 = H/L_2 = 1/6$, №Б-3 – $H/L_1 = H/L_2 = 1/16$.

Таблица 8 — технические постоянные пластин серии Б

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/6, H/2]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	50	1	$\frac{0.25}{50}$	0.25	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	$\frac{0.25}{50}$	$\frac{0.25}{50}$	0.5	0.5	0.2

Результат вычисления МСФ-приближений решения этих задач приведен на иллюстрации 4.

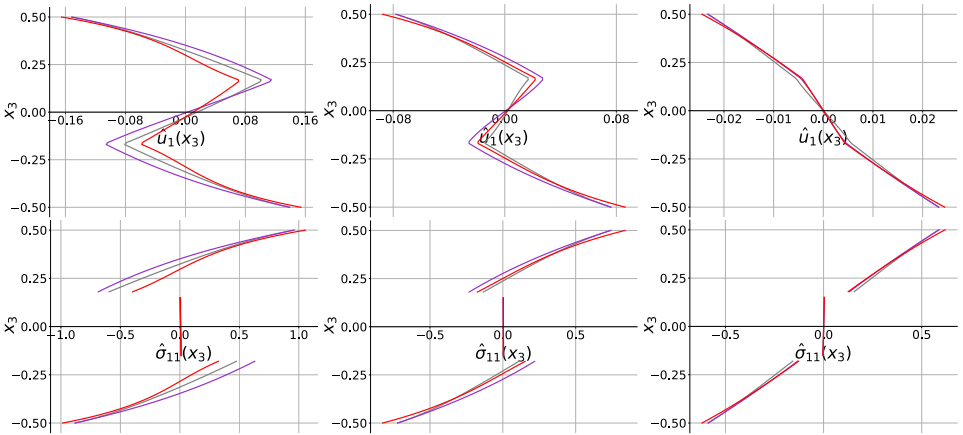


Рис. 4 — Нормализованные значения приближений напряжений и перемещений в сечениях $x_1 = L_1/2, x_2 = L_2/2$ пластин Б-1, Б-2, Б-3

В **заклучении** приведены основные результаты работы, которые заклчаются в следующем.

При помощи метода структурных функций построены и исследованы приближенные решения задачи о нагружении прямоугольной свободно опертой

на боковых гранях пластины, составленной из линейно-упругих слоев, ортотропных в осях координат. Рассмотрен метод структурных функций I-го и II-го порядка; приближенные решения сопутствующей задачи в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява, модели типа Тимошенко, трехмерной теории упругости (по методу Пагано); получены ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела. Сформулированы следующие выводы.

- Совместное использование метода структурных функций I-го порядка, модели типа Тимошенко (или высшего порядка) или метода Пагано для решения сопутствующей задачи позволяет моделировать перемещения u_i в виде криволинейных ломаных от поперечной координаты. Аналогичное верно и для II-го порядка метода структурных функций.
- Использование метода структурных функций в сочетании с решением сопутствующей задачи в трехмерной постановке позволяет приближенно вычислить поперечные напряжения в пластине.
- Повышение точности приближенного решения сопутствующей задачи при фиксированном порядке метода структурных функций позволяет улучшить построенное методом приближение. Повышение порядка метода структурных функций при фиксированном порядке решения сопутствующей задачи целесообразно, только если точность решения сопутствующей задачи позволяет записать нужное количество граничных условий для структурных функций соответствующего порядка.
- При выборе упругих свойств сопутствующего тела в соответствии с представленными в диссертации соотношениями поперечные напряжения, вычисленные по методу структурных функций, удовлетворяют граничным условиям на лицевых плоскостях пластины. Для метода первого порядка необходимо выбрать модули сдвига сопутствующего тела совпадающими с осредненными по Рейссу модулями сдвига исходного тела.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus и RSCI:

1. Горбачев В. И., Кабанова Л. А. О постановке задач в общей теории пластин Кирхгофа-Лява // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 3. — С. 43–50. (РИНЦ, ИФ – 0,479) (0,9 п.л. / авторский вклад 0,45 п.л.) (Перевод: Gorbachev V. I., Kabanova L. A. Formulation of problems in the general Kirchhoff–Love theory of inhomogeneous anisotropic plates // Moscow University Mechanics Bulletin. — 2018. — Vol. 73, no. 3. — P. 60–66. - DOI: 10.3103/S0027133018020020) (Scopus, Q4, Impact Factor SJR -0,2) (0,81 п.л. / авторский вклад 0,4 п.л.)

2. Kabanova L. A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 7. — P. 1866–1877. - DOI: 10.1134/S199508022210016X (Scopus, Q2, Impact Factor SJR – 0,453) (1,5 п.л.)
3. Кабанова Л. А. Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 4. — С. 211–232. - DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232 (Scopus, Q3, Impact Factor SJR – 0,296) (2,54 п.л.)
4. Кабанова Л. А., Романов А. В. Сопоставление решений квазистатической задачи о нагружении пластины, построенных методом структурных функций и методом конечных элементов // Чебышевский сборник. — 2024. — Т. 25, № 4. — С. 175–196. - DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-4-175-196(Scopus, Q3, Impact Factor SJR – 0,296) (2,43 п.л. / авторский вклад 2 п.л.)

Кабанова Любовь Александровна

Метод структурных функций
в решении квазистатических задач
об изгибе неоднородных упругих пластин

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____