МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Давыдов Александр Вадимович

Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих в теории вязкоупругости

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Власов Виктор Валентинович**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В.Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Закора Дмитрий Александрович,**
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры математического анализа
физико-технического института
ФГАОУ ВО «КФУ имени В.И.Вернадского»

Сакбаев Всеволод Жанович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник
ФГУ «Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Шамаев Алексей Станиславович,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник
Лаборатории механики управляемых систем
ФГБУН «ИПМех РАН имени А.Ю.Ишлинского»

Защита диссертации состоится 16.12.2022 в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3(01.07) Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 12-25.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: http://istina.msu.ru/dissertations/507231297/

Автореферат разослан 15 ноября 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.011.3(01.07),
к.ф.-м.н., доцент **Раутиан Н.А.**

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность темы

Значимым разделом общей теории операторов является спектральный анализ оператор-функций. В свою очередь спектральная теория операторов является важным разделом функционального анализа.

Основные результаты диссертации посвящены спектральному анализу интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве.

В диссертации изучается задача Коши для интегродифференциального уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа, которое может быть записано в операторном виде с помощью интегродифференциального уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t)+M_1\frac{d}{dt}u(t)+M_2\left(A^2u(t)-\int\limits_0^t\Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau\right)+M_3Tu(t)=f(t),\quad t>0,\quad (1)$$

$$u(0+)=\varphi_0,\quad u'(0+)=\varphi_1,\quad (2)$$

где $M_1,\ M_2,\ M_3$ — положительные физические константы, $\Gamma(t)$ — ядро релаксации, определенная на луче $[0,+\infty)$ убывающая положительная интегрируемая функция, а $u(t)$ и $f(t)$ — это определенные на луче $[0,+\infty)$ вектор-функции со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, а оператор A^{-1}, обратный к нему, является компактным, замкнутый оператор T компактно подчинен оператору A.

В диссертации также представлены результаты, касающиеся задачи Коши для интегродифференциального уравнения Гуртина–Пипкина:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t)+A^2u(t)-\int\limits_0^t\Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau=f(t),\quad t>0,\quad (3)$$

$$u(0+)=\varphi_0,\quad u'(0+)=\varphi_1.\quad (4)$$

Уравнение Гуртина–Пипкина и его модификации могут быть использованы при изучении моделей, возникающих в теории вязкоупругости, в частности, при изучении движения вязкоупругой пластины при отсутствии внешнего потока жидкости или газа[1], в динамике вязкоупругих тел, в задачах управляемости термоупругих систем с памятью[2], при исследовании малых движений вязкоупругих жидкостей[3,4], а также при

[1] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука. 2006.

[2] Rivera J.E.M., Naso M.G., On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indefinite Dissipation // Asympt. Anal. — 2006. — Vol. 49. — P. 189–204.

[3] Закора Д.А. Копачевский Н.Д. К проблеме малых колебаний системы из,двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сос,уд (модельная задача) // СМФН. – 2020. – Т.66, №2. – С.182-208.

[4] Kopachevsky N.D., Syomkina E.V., Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4, № 4. — P. 64–87

описании распространения тепла в средах с памятью[5,6], в задачах усреднения в многофазных средах[7,8], в теории акустики эмульсий[9] и в кинетической теории газов[10].

Уравнение (3) используется при описании большого количества различных физических моделей, например, изотропной модели вязкоупругости, если полагать, что в пространстве $L_2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) оператор A^2 задается следующим дифференциальным выражением:

$$A^2 u = -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} u),$$

где μ и λ являются параметрами Ламе упругой среды[11,12]. Кроме того, здесь уместно указать модели вязкоупругой жидкости Максвела и Олдройта, приводящие к модификациям уравнения (3). Данные уравнения были подробно изучены Д.А. Закорой[13,14,15]. Так, им была получена корректная разрешимость интегродифференциальных уравнений, соответствующих данным моделям, был рассмотрен вопрос экспоненциальной устойчивости решений уравнения, а также была определена их асимптотика.

Задаче Коши вида (3), (4) посвящено большое число работ как российских, так и зарубежных. Отметим здесь работы В.В. Власова, Н.А. Раутиан, А.С. Шамаева[16,17,18], в которых установлена корректная разрешимость уравнения Гуртина–Пипкина в весовых пространствах Соболева, проведен спектральный анализ символа уравнения (3), получена асимптотика невещественных точек спектра для ядер, представимых в виде суммы экспонент, и локализация вещественных кластеров. Кроме того, получены результаты о корректной разрешимости данной задачи. Естественное продолжение данного

---

[5]Pandolfi L., Ivanov S., Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. — 2009. — Vol. 355. — P. 1–11.

[6]Лыков А.В. Проблема тепло и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.

[7]Sanchez-Palencia E. Nonhomogeneous Media and Vibration Theory. Lecture notes in physics. — Springer, Berlin, 1980

[8]Шамаев А.С., Шумилова В.В. Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2011. — №2. — С. 92–103.

[9]Гавриков А.А., Шамаев А.С. Некоторые вопросы акустики эмульсий // Труды семинара имени И. Г. Петровского. — 2011. — т. 28. — С. 114–146.

[10]Guyer R.A., Krumhansl J.A. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation // Physical Review. — 1966. — Vol. 148. — 766–778.

[11]Fabrizzio M., Lazzari B., On the existence and the asympthotics stability of solutions for linearly viscoelastic solids // Archive of Rational Mechanics and Analysis. — 1991. — Vol.116. — P.139–152.

[12]Rivera J.E.M., Naso M.G., Vegni F.M., Asymptotic behaviour of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory// Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2003. — Vol. 286. — P. 692–704.

[13]Закора Д.А., Модель сжимаемой жидкости Максвелла // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. — 2017. — Т.63, №2. — С. 247–265

[14]Закора Д.А., Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т.55, №9. — С. 1195–1208

[15]Закора Д.А., Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН. — 2016. — Т.61. — С.41–66

[16]Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений // Тр. сем. имени И. Г. Петровского. — М.:Изд-во МГУ, 2011 — Т.28. — С. 75–113

[17]Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.

[18]Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С., Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // СМФН. — 2012. — Т. 45. — С.43–61.

исследования можно видеть в более поздней работе[19] авторов, где исследуется уравнение Гуртина–Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами релаксации. В работах[5,20] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. Здесь следует также отметить работы А.С. Шамаева и соавторов[21,22,23], в которых изучались задачи граничного управления системами типа Гуртина–Пипкина, а также проводился спектральный анализ моделей вязкоупругих сред Кельвина–Фойгхта. В работе[2] устанавливается зависимость скорости убывания энергии от скорости убывания ядра в модели теплопроводности Гуртина–Пипкина. В монографии[24] и работах[25,26] разрабатывается подход к решению задачи (3), (4) с позиции теории полугрупп, где для случая более общего вида ядер $\Gamma(t)$ устанавливается вид генератора полугруппы и доказывается, что полугруппа является сжимающей и экспоненциально устойчивой. Полугрупповой подход к более общим задачам, в которых интегральное ядро имеет компактный носитель, развивался в работах Н.Д. Копачевского и Д.А. Закоры[27,28]. В этих работах установлена экспоненциальная устойчивость соответствующих сжимающих полугрупп. Новейшие исследования, касающиеся полугруппового подхода при исследовании уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами, опубликованы в статье[29]. Интегродифференциальные уравнения могут рассматриваться как специальный класс функционально-дифференциальных уравнений. В работах В.Ж. Сакбаева и В.В. Власова[30,31,32] по-

[19]Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Труды Московского математического общества. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 197–220

[20]Pandolfi L., The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. and Optim. — 2005. — Vol. 52. — P.143–165.

[21]Романов И.В., Шамаев А.С., О задачах распределенного и граничного управления некоторыми системами с интегральным последействием // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2016. — Т. 31. — С. 134–157.

[22]Романов И.В., Шамаев А.С. О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием // Автомат. и телемех. — 2013. — Т. 11. — С.49–61.

[23]Шамаев А.С., Шумилова В.В., О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т.53, №2. — С.282–290.

[24]Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. — Springer. N. Y.; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.

[25]Dafermos C. M., Asymptotic stability in viscoelasticity. // Arch. for Rational Mech.and Anal. — 1970. — V. 37. — P. 297–308.

[26]Fabrizio M., Giorgi C., Pata V., A New Approach to Equations with Memory // Arch. for Rational Mech. and Anal. — 2010. — Vol. 198. — P. 189–232.

[27]Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д., Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта // *Мат. заметки.* — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 924–928.

[28]Закора Д.А., Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. — 2018. — Т.103, № 5. — С.702–719

[29]Власов В.В., Раутиан Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, № 8. — С. 1122–1126.

[30]Власов В.В., Сакбаев В.Ж. О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева // Матем. заметки. — 2000. — Т.68, №6. — С. 939–942

[31]Власов В.В., Сакбаев В.Ж. О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т.37 №9. — С. 1194–1202

[32]Власов В.В., Сакбаев В.Ж. Корректная разрешимость дифференциальных уравнений с последей-

лучены результаты, касающиеся корректной разрешимости в шкале весовых пространств Соболева вектор-функций класса функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Проблема корректной разрешимости интегродифференциальных уравнений в пространствах вектор-функций, голоморфных в угле, затронута в статьях[33,34]. Следует также отметить работу[35], в которой исследуется обобщенная разрешимость уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами. При изучении колебаний вязкоупругого трубопровода с учетом трения Кельвина–Фойгхта Ю.А. Тихоновым было изучено интегродифференциальное уравнение (3) с учетом трения Кельвина–Фойгхта и симметрическим относительно-компактным возмущением, построена полугруппа, связанная с уравнением, и исследован спектр символа уравнения колебаний вязкоупругого трубопровода[36,37,38].

Задача (1), (2) в основном изучалась на предмет устойчивости и асимптотической устойчивости решений (явление флаттера). Можно назвать, например, работы [1,39], где было произведено численное исследование зависимости критической скорости $v_{\text{кр}}$, при которой решение (1), (2) становится неустойчивым, от физических параметров, а также работы В.В. Веденеева[40,41], где проводится численное исследование одномодового флаттера невязкоупругой пластины.

Спектральный подход к изучению абстрактных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений основан на идеях, восходящих к работам М.В. Келдыша, в которых изложены основополагающие результаты спектральной теории полиномиальных операторных пучков[42,43]. Дробно-рациональные оператор-функции, обобщени-

ствием в шкале пространств Соболева // Изв. вузов. Матем. — 2003. — № 4. — С. 8–16

[33]Власов В.В., Раутиан Н.А. О пространствах вектор-функций, голоморфных в угловой области // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. — Российский университет дружбы народов. М. 2022. — Т.68, № 3. — С. 393–406

[34]Власов В.В., Раутиан Н.А. О корректной разрешимости интегро-дифференциальных уравнений в пространствах вектор-функций, голоморфных в угле // Докл. РАН. Матем. информ. проц. упр. — 2022. — Т. 503. — С. 40–44

[35]Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений наследственной механики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т.60, № 8. — с. 1367–1376

[36]Тихонов Ю.А. Об аналитичности полугруппы операторов, возникающей в задачах теории вязкоупругости. // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56 , № 6. — С.808–822.

[37]Тихонов Ю.А., О свойствах одной полугруппы операторов, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением, возникающим в теории вязкоупругости // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т.58, № 5. — С. 669—685.

[38]Тихонов Ю.А. О локализации спектра оператор-функции, возникающей при изучении колебаний вязкоупругого трубопровода с учетом трения Кельвина–Фойгта // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2022. — № 2. — С. 23—34.

[39]Ларионов Г. С. Устойчивость колебаний вязкоупругой пластинки при больших сверхзвуковых скоростях. // В сб. Вопр. Вычисл. и прикл. мат. — Ташкент. 1970. — Вып. 3. — С. 156-163.

[40]Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В. Исследование одномодового флаттера пластин различной формы при малой сверхзвуковой скорости // Уч. зап. ЦАГИ. — 2017. — Т. 48, № 1. — С. 86–98

[41]Веденеев В.В. Связанный флаттер упругой пластины в потоке газа с пограничным слоем// Труды МИАН. — 2013. — Т. 281. — С. 149-161.

[42]Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях нектороых классов несамосопряжённых уравнений // ДАН СССР. — 1951. — Т. 77, №1. — С. 11–14

[43]Келдыш М.В. О полноте собственных функций некторых классов несамосопряжённых операторов // УМН. — 1971. — Т.24. — С. 15–41

ями которых являются символы интегродифференциальных уравнений вида (1), рассматривались в работах Дж. Э. Аллахвердиева[44], А.И. Милославского[45]. В цикле работ Г.В. Радзиевского изучались существенно более общие оператор-функции. Результаты его исследований изложены в обзорной статье[46]. Следует отметить, что все результаты диссертации по существу основаны на спектральном анализе оператор-функций, являющихся символом интегродифференциальных уравнений (1), (3). Таким образом, задача изучения спектра оператор-функций является ключевой для проводимого в работе исследования.

1.2 Цель диссертационной работы

Целями настоящей работы являются:

1. Исследование корректной разрешимости в пространствах Соболева и устойчивости решений задачи (1), (2);
2. Изучение асимптотики невещественного спектра символа уравнения (1);
3. Вычисление асимптотики невещественного спектра символа уравнения (3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса;
4. Исследование корректной разрешимости задачи (3), (4) в шкале пространств, порожденной оператором A;
5. Определение условий, при которых невещественный спектр символа уравнения (3) при учете трения Кельвина–Фойгхта бесконечен.

1.3 Научная новизна

В диссертации получены новые результаты о корректной разрешимости в весовых пространствах Соболева задачи (1), (2), приведена асимптотика спектра символа (1) в зависимости от асимптотики спектра символа (3) с таким же ядром релаксации. Также в диссертации определена асимптотика невещественного спектра символа уравнения (3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса. Кроме того, приведены результаты о корректной разрешимости задачи (3), (4) в шкале пространств, порожденной оператором A, а также исследован вопрос наличия бесконечного невещественного спектра символа уравнения (3) при учете трения Кельвина–Фойгхта.

1.4 Методы исследования

В работе применяются методы комплексного и функционального анализа, спектральной теории линейных операторов и оператор-функций в гильбертовом пространстве.

[44] Аллахвердиев Дж.Э., О несамосопряженных операторах, рационально зависящих от спектрального параметра // ДАН СССР. — 1969. — Т.186, №4. — С. 743–746.

[45] Милославский А.И., Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости // Деп. в Укр. НИИНТИ. — 13.07.1987. — №1229-УК87. — С.53.

[46] Радзиевский Г.В., Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // УМН. — 1982. — Т.37, №2. — С.81–145.

1.5 Положения, выносимые на защиту, и их научная новизна

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Теорема о корректной разрешимости задачи (1), (2) для слабых решений в весовых пространствах Соболева $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$ и её следствия про асимптотическую устойчивость и устойчивость по Ляпунову решений, а также про условие отсутствия спектра символа уравнения в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$;

2. Теорема об асимптотике невещественного спектра символа уравнения (3) с относительно-компактным возмущением;

3. Теорема об асимптотике невещественного спектра символа уравнения (1);

4. Теорема об асимптотике невещественного спектра символа уравнения (3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса;

5. Теоремы о корректной разрешимости задачи (3), (4) для сильных и слабых решений, а также их следствия о разрешимости задачи (3), (4) в шкале пространств, порожденной оператором A;

6. Теорема о достаточных условиях наличия бесконечного невещественного спектра символа уравнения (3) при учете трения Кельвина–Фойгхта.

1.6 Теоретическая и практическая значимость результатов

Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории интегродифференциальных уравнений, спектральной теории оператор-функций, при численном расчете возникновения флаттера в вязкоупругих материалах, а также в задачах теории управления и прикладных задачах, возникающих в теории вязкоупругости.

1.7 Апробация

Постановка задачи и результаты обсуждались на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ» под руководством профессора В.В. Власова и доцента Н.А. Раутиан 2016 - 2022 гг. (неоднократно).

2. Научный семинар «Операторные модели в математической физике» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора А.А. Шкаликова, 2017 г.

3. Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Д. В. Георгиевского, профессора М. В. Шамолина, профессора С. А. Агафонова, 2017 – 2022 гг. (неоднократно).

4. Научный семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора М.И. Зеликина, чл.-корр. РАН, профессора В.Ю. Протасова, профессора В.М. Тихомирова и профессора А.В. Фурсикова, 2018 г.

5. Научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ под руководством академика РАН, профессора В.А. Садовничего, 2019, 2022 гг.

6. Научный семинар «Асимптотические методы в математической физике» лаборатории механики природных катастроф ИПМех РАН под руководством профессора С.Ю. Доброхотова, чл.-корр. РАН, профессора В.Е. Назайкинского, чл.-корр. РАН, профессора А.И. Шафаревича, 2019 г.

7. Научный семинар «Спектральный анализ дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» кафедры функционального анализа и его применений и кафедры общей математики факультета ВМК МГУ под руководством академика РАН, профессора Е.И. Моисеева и профессора И.С. Ломова, 2020 г.

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных конференциях:

1. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXII, Воронеж, Россия, 3-9 мая 2021

2. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXIII, Воронеж, 3-9 мая 2022

3. The First International conference «Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis», Долгопрудный, 17–21 июня 2019

4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, 2017

1.8 Публикации

Результаты диссертации изложены в 5 статьях, опубликованных в научных журналах, индексируемых в наукометрических базах Web of Science, SCOPUS, RSCI. В работах, содержащих основные результаты, выводы и положения диссертационного исследования, выполненных совместно с Ю.А. Тихоновым, автору настоящей диссертации принадлежат результаты, посвященные вопросу бесконечности невещественного спектра символа уравнения (3) при учете трения Кельвина–Фойгхта. Список работ автора приведён в конце автореферата и диссертации.

1.9 Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы из 71 наименования. Общий объём работы составляет 121 страницу.

2 Обзор содержания диссертации

В **первой главе** диссертации проведён спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом интегродифференциального уравнения (1): установлена общая структура спектра, построена асимптотика невещественного спектра, установлено условие отсутствия спектра в правой полуплоскости, а также приведены теоремы об устойчивости решений и корректной разрешимости задачи (1), (2).

Рассмотрим задачу Коши (1), (2) для интегродифференциального уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа, которая будет исследоваться в данной главе, и запишем его в операторном виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + M_1\frac{d}{dt}u(t) + M_2\left(A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau\right) + M_3Tu(t) = f(t), \quad t > 0,$$

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1,$$

где $M_1,\ M_2,\ M_3$ — положительные физические константы, $u(t)$ и $f(t)$ — это определенные на луче $[0,+\infty)$ вектор-функции со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, а оператор A^{-1}, обратный к нему, является компактным. Хорошо известно, что его собственные векторы e_n составляют ортонормированный базис в пространстве H, а собственные значения a_n удовлетворяют соотношениям:

$$Ae_n = a_ne_n, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Будем предполагать, что собственные значения a_n строго возрастают: $a_{n+1} > a_n > 0$. Оператор T замкнут и компактно подчинен оператору A. Для уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа можно представить его в виде произведения частичной изометрии и самосопряженного оператора

$$T = UA^{\frac{1}{2}}.$$

Функция $\Gamma(t)$ — ядро релаксации, убывающая положительная интегрируемая функция $(0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Будут использованы прежде всего функции вида

$$\Gamma(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_je^{-\gamma_jt}, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

где

$$c_j \geq 0, \quad \gamma_{j+1} > \gamma_j > 0, \quad \lim_{j\to+\infty}\gamma_j = +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\gamma_j} < +\infty, \tag{6}$$

а также функции вида

$$\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}d\sigma(x), \quad t \geq 0 \tag{7}$$

такие, что функция $\sigma(x)$ не убывает, положительна, непрерывна слева, интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} < +\infty$, и $\sigma(0) = 0$.

Возьмем произвольное число $\gamma \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$, если она сильно измерима, и функция, определяемая соотношением $g(t) = e^{-\gamma t} \cdot ||u(t)||_H$, лежит в пространстве $L_2([0,+\infty))$. Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u(t), v(t))_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} = \int\limits_0^{+\infty} (u(t), v(t))_H e^{-2\gamma t} dt.$$

Определение 2. Вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $W^k_{2,\gamma}([0,+\infty), A),\ k \in \mathbb{N}$, если

1. существует (в обобщенном смысле) $u^{(k)}(t)$ и $u^{(k)}(t) \in L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$,
2. $u(t) \in \operatorname{Dom} A^k$ почти всюду на луче $[0,+\infty)$, и $A^k u(t) \in L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$.

Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением:

$$(u(t), v(t))_{W^k_{2,\gamma}([0,+\infty),A)} = \int\limits_0^{+\infty} \left((u^{(k)}(t), v^{(k)}(t))_H + (A^k u(t), A^k v(t))_H\right) e^{-2\gamma t} dt.$$

Функция $e^{-\gamma t}$ здесь — экспоненциальный вес. При $\gamma = 0$ соответствующие пространства будем обозначать $L_2([0,+\infty), H)$ и $W^k_2([0,+\infty), A)$. Основные свойства пространств Соболева вектор-функций сформулированы и доказаны в первой главе монографии[47].

Определение 3. Вектор-функцию $u(t)$ назовем *слабым решением* задачи (1), (2), если она принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, удовлетворяет соотношению $u(0+) = \varphi_0$, и для любой вектор-функции $v(t) \in W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$ выполнено

$$\Phi(u,v) \overset{\text{def}}{=} 2\gamma(u'(t), v(t)) - (u'(t), v'(t)) - (\varphi_1, v(0+))_H + M_1(u'(t), v(t)) + \\ + M_2\left((Au(t), Av(t)) - \left(\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) Au(\tau) d\tau, Av(t)\right)\right) + \\ + M_3(Tu(t), v(t)) - (f(t), v(t)) = 0. \quad (8)$$

Здесь все скалярные произведения вектор-функций берутся в пространстве $L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$.

Определение 4. Вектор-функция $u(t)$ называется *сильным решением* задачи (1), (2), если она принадлежит для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на луче $[0,+\infty)$ и начальным условиям (2).

[47] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

Применение преобразования Лапласа к уравнению (1) (при $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + M_1 z I + M_2 \left(1 - K(z)\right) A^2 + M_3 T, \tag{9}$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь $K(z)$ – преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$. При использовании $\Gamma(t)$ вида (5) получим $K(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{z+\gamma_k}$. При использовании $\Gamma(t)$ вида (7) получим $K(z) = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{d\sigma(t)}{z+t}$.

Определение 5. *Резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(z)$ будем называть множество всех значений $z \in \mathbb{C}$, для которых оператор $L^{-1}(z)$ существует, ограничен и задан на всем пространстве. Дополнение множества $R(L)$ в комлексной плоскости, т.е., $\sigma(L) = \mathbb{C} \ \setminus R(L)$, будем называть *спектром* оператор-функции $L(z)$. Определим также *невещественный спектр* уравнения, то есть $\sigma_{Im}(L) = \sigma(L) \setminus \mathbb{R}$.

Введем обозначение

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_1 M_2 (1-D) x^3 - M_3 \sqrt{M_2} x - M_1 M_3, \tag{10}$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{\infty} \Gamma(t) dt$. Константа $D < \infty$, так как $\Gamma(t)$ интегрируема.

Сформулируем теорему 4.1 о корректной разрешимости и устойчивости решений в пространствах Соболева $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$:

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. *Существует такое $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, что $\Gamma(t) e^{-\gamma_1 t}$ — монотонно убывающая положительная интегрируемая функция.*
2. *Существует такое $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, что $f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma_2}([0,+\infty), H)$.*
3. *$\varphi_0 \in \mathrm{Dom}(A^{3/2})$ и $\varphi_1 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$.*

Тогда существует такое $\gamma_3 \in \mathbb{R}$, что для любого $\gamma \geq \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ задача (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$(то есть существует единственное слабое решение задачи* (1), (2)*), и для её решения справедлива оценка*

$$||u||_{W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)} \leq d \left(||f||_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} + ||A^{3/2}\varphi_0||_H + ||A^{1/2}\varphi_1||_H \right),$$

где константа $d > 0$ не зависит от начальных данных φ_0, φ_1 и правой части $f(t)$.

Кроме того, если $p(\sqrt{a_1}) > 0$, где a_1 — наименьшее собственное значение оператора A, то γ_3 можно взять того же знака, что и γ_1.

Замечание. Величины $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ не обязательно должны быть положительными. Если уравнение (1) автономно, то есть $f \equiv 0$, то γ_2 можно положить любым.

Из теоремы 4.1 при $\gamma_1,\ \gamma_2 < 0$ следует экспоненциальное убывание решений уравнения, а при $\gamma_1,\ \gamma_2 \leq 0$ следует ограниченность решений уравнения.

В первой главе также доказано, что если $p(\sqrt{a_1}) > 0$ и $\gamma_1 < 0$, то спектр оператор-функции $L(z)$ будет отделен от полуплоскости $\{\mathrm{Re} z \geq 0\}$.

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\Gamma(t)e^{\gamma_1 t}$ *— монотонно убывающая положительная интегрируемая функция для некоторого* $\gamma_1 > 0$ *и* $p(\sqrt{a_1}) > 0$, *где* a_1 *— наименьшее собственное значение* A.

Тогда для некоторого $\gamma > 0$ *в полуплоскости* $\{\mathrm{Re}\ z \geq -\gamma\}$ *отсутствует спектр оператор-функции* $L(z)$, *определенной в* (9) *и являющейся символом уравнения* (1).

Рассмотрим случай уравнения Гуртина–Пипкина с A^2–компактным возмущением:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau + RA^\theta u(t) = f(t), \quad t > 0 \tag{11}$$

где $\theta \in [0, 2)$, R — ограниченный оператор. Ядро релаксации Γ имеет вид (5). Предположим, что собственные значения оператора A удовлетворяют соотношению

$$a_n^{\theta-1}(a_n - a_{n-1})^{-1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Применение преобразования Лапласа к уравнению (11) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2I + (1 - K(z))A^2 + RA^\theta, \tag{13}$$

которая является символом уравнения (11). Здесь $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Укажем асимптотику невещественного спектра $\sigma(L)$.

Положим

$$l_n(z) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2. \tag{14}$$

Эта функция комплекного переменного имеет лишь один корень μ_n^+ в верхней полуплоскости $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$[48]. Далее, возьмем $D_{n,C} = \{z : |z - \mu_n^+| < Ca_n^{\theta-1}\}$.

Теорема 5.1. *Предположим, собственные числа оператора* A *удовлетворяют соотношению* (12). *Тогда существуют положительные константы* y_0, C *такие, что спектр* $\sigma(L)$ *оператор-функции* $L(z)$, *лежащий в верхней полуплоскости* $\{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}$, *может быть представлен в виде совокупности точек* $\{\widetilde{\mu}_n^+,\ n > n_0\}$, *так что* $\widetilde{\mu}_n^+ \in D_{n,C}$. *Число* n_0 *здесь — наименьшее натуральное число такое, что для любого* $n > n_0$ *выполняется*

$$D_{n,C} \subset \{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}. \tag{15}$$

Замечание. В случае $\theta < 1$ радиус круга $D_{n,C}$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$, а значит, можно описать асимптотику невещественного спектра $L(z)$:

$$\widetilde{\mu}_n^+ = \mu_n^+ + O(a_n^{\theta-1}).$$

Рассмотрим теперь оператор-функцию, являющуюся символом первоначального уравнения колебания вязкоупругой пластинки в потоке жидкости или газа (1):

$$L(z) = z^2I + M_1zI + M_2(1 - K(z))A^2 + M_3UA^\theta.$$

[48] Eremenko A., Ivanov S. Spectra of Gurtin-Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. — 2011. — Vol. 43. — P. 2296–2306.

Известно, что $\theta = 1/2$; здесь ради большей общности рассмотрим $\theta \in [0,1)$. Обозначим $(\mu_n^+)_1$ — лежащий в верхней полуплоскости корень уравнения

$$\rho^2 + (1 - \widetilde{K}(\rho))a_n^2 = 0,$$

функцию от переменной ρ

$$\widetilde{K}(\rho) = K\left(\sqrt{M_2}\rho - M_1/2\right) \tag{16}$$

и область $(D_{n,C})_1$:

$$(D_{n,C})_1 = \{\rho \,:\, |\rho - (\mu_n^+)_1| < Ca_n^{\theta-1}\} = \{z \,:\, |z - (\sqrt{M_2}(\mu_n^+)_1 - M_1/2)| < C\sqrt{M_2}a_n^{\theta-1}\}.$$

Теорема 5.3. *Предположим, собственные числа оператора A удовлетворяют соотношению (12). Тогда существуют положительные константы y_0, C такие, что спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(z)$, лежащий в верхней полуплоскости $\{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}$, может быть представлен в виде совокупности точек $\{\widetilde{\mu}_n^+,\ n > n_0\}$, так что*

$$\widetilde{\mu}_n^+ \in (D_{n,C})_1.$$

Число n_0 здесь — наименьшее натуральное число такое, что для любого $n > n_0$ выполняется

$$(D_{n,C})_1 \subset \{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}.$$

Замечание. С учетом определения $D_{n,C}$ асимптотика невещественного спектра $L(z)$ имеет вид

$$\widetilde{\mu}_n^+ = \sqrt{M_2}(\mu_n^+)_1 - M_1/2 + O(a_n^{\theta-1}).$$

Следствие 5.2. *В случае ядра вида (5) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, можно записать в явном виде асимптотику спектра $L(z)$:*

$$\widetilde{\mu}_n^+ = i\sqrt{M_2}a_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k}{2} - \frac{M_1}{2} + O(a_n^{\theta-1}). \tag{17}$$

Во **второй главе** исследован спектр символа уравнения Гуртина–Пипкина в случае ядер релаксации вида (7), а также в случае наличия слагаемого трения Кельвина–Фойгхта; кроме того, получена разрешимость в шкале пространств для немодифицированного уравнения.

Уравнение Гуртина–Пипкина может быть получено из исследованого ранее уравнения (1), если взять $M_1 = M_3 = 0,\ M_2 = 1$:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau = f(t), \quad t > 0.$$

Добавив к нему начальные условия:

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1,$$

получаем задачу Коши (3), (4).

Во второй главе будем использовать обозначение $L(z)$ для символа именно уравнения (1):

$$L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2. \tag{18}$$

Рассмотрим проекции $L(z)$ на одномерные собственные подпространства

$$l_n(z) = (L(z)e_n, e_n) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2, \tag{19}$$

порожденные собственными векторами оператора A — $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда спектр $L(z)$ есть замыкание множества нулей функций $l_n(z)$:

$$\sigma(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : l_n(z) = 0\}}.$$

Исследуем невещественный спектр $L(z)$:

$$\sigma_{Im}(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ l_n(z) = 0\}} \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0,\ l_n(z) = 0\}}.$$

Заметим также, что из вещественности коэффициентов (19) вытекает, что спектр будет симметричен относительно вещественной оси. Рассмотрим невещественный спектр в верхней полуплоскости:

$$\sigma_{Im^+}(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ l_n(z) = 0\}}.$$

Обозначим класс неубывающих положительных непрерывных слева функций $\sigma(t)$ на $[0, +\infty)$ таких, что интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{d\sigma(t)}{t} < +\infty$ и $\sigma(0) = 0$ за $\mathbf{F}[0, +\infty)$. Определим асимптотику невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина $L(z)$ с ядром релаксации вида (7):

$$L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2,$$

где $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$:

$$K(z) = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{z + t}. \tag{20}$$

и $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$.

Предложение 7.2. *Функция $l_n(z)$ имеет в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ только один ноль, который обозначим через μ_n^+.*

Доказательство данного предложения приведено в работе[48]. Представленная ниже теорема 7.2 является естественным развитием и обобщением результатов указанной работы, затрагивает более широкий класс ядер и может быть применена к другим описанным там интегродифференциальным уравнениям.

Введем обозначение

$$\hat{\sigma}(x,v) = \frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)}.$$

Определение. Определенная на луче $[0,+\infty)$ функция $\sigma(x)$ *регулярно меняется на бесконечности*, если при всех $x>0$ существует предел

$$\lim_{v\to+\infty} \hat{\sigma}(x,v) = r(x).$$

Для функций σ из класса $\mathbf{F}[0,+\infty)$ выполнено $r(0) = \lim\limits_{v\to+\infty} \hat{\sigma}(0,v) = 0$.

Класс регулярно меняющихся функций достаточно подробно изучен (см. работы[49,50]). Для производящей функции $\sigma(t)$ из этого класса возможно исследовать асимптотическое поведение корней μ_n^+ :

Теорема 7.2. *Пусть ядро релаксации $\Gamma(t)$ имеет вид (7) для регулярно меняющейся на бесконечности функции $\sigma(t)\in\mathbf{F}[0,+\infty)$ Тогда*

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)), \quad n\to+\infty,$$

где $C_1 = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dr(q)}{i+q}$.

Следствие 7.1. *Пусть $\sigma(t)\in\mathbf{F}[0,+\infty)$, и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha(\ln x)^\beta(1+\bar{o}(1)), \quad x\to+\infty, \tag{21}$$

где $M>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, при $0<\alpha<1$; или $\beta\geq 0$, при $\alpha=0$.

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i}M(a_n)^\alpha(\ln a_n)^\beta(1+\bar{o}(1)), \quad n\to+\infty,$$

где $\hat{C}_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}e^{i\pi(\alpha-1)/2}, & \alpha>0 \\ -i, & \alpha=0 \end{cases}.$

Можно также записать следствие 7.1 через ядро релаксации $\Gamma(t)$:

Следствие 7.3. *Пусть $\sigma(t)\in\mathbf{F}[0,+\infty)$, и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha(\ln x)^\beta(1+\bar{o}(1)), \quad x\to+\infty,$$

[49]Bingham N.H. Goldie C.M. Teugels J.L. Regular Variation. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987

[50]Seneta E. Regularly Varying Functions. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976

где $\beta \in \mathbb{R}$, *при* $0 < \alpha < 1$; *или* $\beta \geq 0$, *при* $\alpha = 0$

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i\Gamma_0(\alpha+1)}\Gamma(1/a_n)(1+\bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $\hat{C}_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}e^{i\pi(\alpha-1)/2}, & \alpha > 0 \\ -i, & \alpha = 0. \end{cases}$, *а* $\Gamma_0(t)$ *— Гамма-функция Эйлера.*

При $\Gamma(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j e^{-\gamma_j t} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} d\sigma(x)$ функция $\sigma(x)$ — кусочно постоянная, имеющая скачки в точках γ_j равные c_j. Тогда можно записать следствие 7.1 для c_j, γ_j, имеющих степенное поведение:

Следствие 7.5. *Пусть* $\Gamma(t) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t}$, *где* $c_j = Mj^\alpha$, $\gamma_j = Bj^\beta$, *и* $M, B > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \geq -1$, $\alpha - \beta < -1$.

Тогда при $\alpha > -1$:

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{W}{2i}\frac{M}{B^s(\alpha+1)}(a_n)^s(1+\bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $s = \dfrac{\alpha+1}{\beta}$ *и* $W = \dfrac{\pi s}{\sin \pi s}e^{i\pi(s-1)/2}$.

А при $\alpha = -1$:

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\frac{M}{\beta}\ln(a_n)(1+\bar{o}(1)), \quad n \to +\infty.$$

Данное следствие является естественным развитием результатов работы[16], и покрывает случай $\alpha \geq 0$.

Сформулируем три теоремы о корректной разрешимости задачи (3), (4). Далее будут использоваться ядра релаксации вида (5) с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1.$$

Теорема 8.1. *Пусть* $\varphi_0 \in \mathrm{Dom}\,(A^2)$ *и* $\varphi_1 \in \mathrm{Dom}\,(A)$, *а* $Af(t) \in L_2([0,+\infty), H)$, *тогда существует единственное сильное решение задачи* (3), (4) $u(t)$, $t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы* d *(не зависящей от* φ_0, φ_1 *и правой части* $f(t)$*) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);A)} \leq d\left(||Af||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A^2\varphi_0||_H + ||A\varphi_1||_H\right). \tag{22}$$

В работе[16] рассмотрен вопрос корректной разрешимости задачи (3), (4) в весовых пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^2([0,+\infty), A)$ для неотрицательного веса γ. Теорема 8.1 является естественным развитием указанного результата, в ней для $\gamma = 0$ установлена корректная разрешимость в сильном смысле задачи (3), (4) и асимптотическая устойчивость решений.

Рассмотрим теперь частный случай задачи (3),(4) с условиями степенного поведения c_k и γ_k при $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$:

$$c_k = Ak^{-\alpha},\ \gamma_k = Bk^{\beta}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

$$c_k > 0,\ \gamma_{k+1} > \gamma_k > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

$$\alpha + \beta > 1,\ \alpha < 1,\ \beta > 0. \tag{25}$$

Тогда для $s = (1-\alpha)/(2\beta)$ верна

Теорема 8.2. *Пусть $\varphi_0 \in \mathrm{Dom}\,(A^{2-s})$ и $\varphi_1 \in \mathrm{Dom}\,(A^{1-s})$, а $A^{1-2s}f(t) \in L_2([0,+\infty),H)$, тогда существует единственное сильное решение задачи (3), (4) $u(t)$, $t \geq 0$. Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы d (не зависящей от φ_0, φ_1 и правой части $f(t)$) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);A)} \leq d \left(||A^{1-2s}f||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A^{2-s}\varphi_0||_H + ||A^{1-s}\varphi_1||_H \right). \tag{26}$$

Теорема 8.2 ослабляет требования, предъявляемые к начальным данным, для получения корректной разрешимости в сильном смысле (3),(4) с условиями степенного поведения c_k и γ_k (23)–(25).

Теорема 8.3. *Пусть $\varphi_0 \in \mathrm{Dom}\,(A)$ и $\varphi_1 \in H$, а $f(t) \in L_2([0,+\infty),H)$, тогда существует единственное слабое решение задачи (3), (4) $u(t)$, $t \geq 0$. Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы d (не зависящей от φ_0, φ_1 и правой части $f(t)$) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^1([0,+\infty),A)} \leq d \left(||f||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A\varphi_0||_H + ||\varphi_1||_H \right). \tag{27}$$

Кроме того, в диссертации представлены результаты, посвященные разрешимости в шкале пространств задачи (3), (4) на основе теорем 8.1–8.3.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гуртина–Пипкина с учетом трения Кельвина–Фойгхта (при $\alpha, \beta > 0$)

$$u''(t) + \alpha A^2 u'(t) + \beta A^2 u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-s) A^2 u(s) ds = f(t), \quad t > 0, \tag{28}$$

$$u(0+) = \varphi_0,\ u'(0+) = \varphi_1. \tag{29}$$

В данном разделе будут использованы ядра релаксации вида (5). Дополнительно рассмотрим условие, которое соответствует тому, что $\Gamma(t) \in C([0,+\infty))$, то есть $\Gamma(0) < +\infty$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty. \tag{30}$$

Применение преобразования Лапласа к (28) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + \alpha z A^2 + \beta A^2 - K(z) A^2, \tag{31}$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь

$$K(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c_j}{\gamma_j+z}$$

является преобразованием Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Определим асимптотику невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина при учете трения Кельвина–Фойгхта $L(z)$.

Для нахождения точек спектра рассмотрим проекции $L(z)$ на одномерные собственные подпространства

$$l_n(z)=(L(z)e_n,e_n)=z^2+\alpha z a_n^2+\beta a_n^2-K(z)a_n^2,$$

порожденные собственными векторами оператора A — $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Спектр (31) есть замыкание множества всех нулей мероморфных функций $l_n(z)$:

$$\sigma(L)=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z\in\mathbb{C}:l_n(z)=0\}}.$$

В настоящей работе приведено достаточное условие наличия бесконечного невещественного спектра символа $L(z)$ при ядре релаксации $\Gamma(t)$ вида (5) с бесконечной суммой экспонент.

Введём обозначение:

$$g_n=\frac{\alpha a_n^2+\sqrt{\alpha^2a_n^4-4a_n^2\beta}}{2},$$

а также

$$d_k=\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\neq k}}\frac{c_m}{|\gamma_m-\gamma_k|}. \tag{32}$$

Необходимо отметить, что будут рассмотрены лишь большие значения n, при которых $\alpha^2a_n^2>4\beta$. Тогда числа g_n вещественны.

Теорема 9.3. *Если при $k\to\infty$ выполнены условия*

$$d_k=\overline{o}(\sqrt{c_k}), \tag{33}$$

$$\sqrt{c_k}=\overline{o}(\gamma_{k+1}-\gamma_{k-1}), \tag{34}$$

и существуют две подпоследовательности натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{c_{k_j}}}|g_{n_j}-\gamma_{k_j}|=0,\quad \lim_{j\to+\infty}\sqrt{c_{k_j}}a_{n_j}^2=+\infty, \tag{35}$$

то спектр оператор-функции $L(z)$ содержит две комплексно-сопряженные последовательности $\mu_n^{\pm}$ невещественных точек.

Рассмотрим теперь два примера последовательностей $\{c_j\}$, $\{\gamma_j\}$, удовлетворяющих условию теоремы.

Выберем последовательность $n(k)$ так, что $a_{n(1)} > a_1^2$, $a_{n(k+1)}^2 - a_{n(k)}^2 > (k+1)^2 - k^2$. Тогда зададим коэффициенты ядра свёртки следующим образом:

$$c_k = 1, \quad \gamma_k = g_{n(k)}. \tag{36}$$

Заметим, что условия (6) выполнены, но не выполнено условие (30). Условия теоремы 9.3 выполнены, и при этом можно показать, что мнимые части невещественных точек спектра оператор-функции $L(z)$ не стремятся к нулю.

В случае выполнения условия (30) можно также построить пример задачи с бесконечным невещественным спектром оператор-функции $L(z)$. Выберем последовательность $n(k)$ так, что $a_{n(1)} > a_1^2$, $a_{n(k+1)}^2 - a_{n(k)}^2 > (k+1)^q - k^q$. Для задачи (28) рассмотрим следующие коэффициеты:

$$c_k = \frac{1}{k^{2p}}, \quad \gamma_k = g_{n(k)}. \tag{37}$$

Выбирая, $p > 1$, $q > p+1$, получим оператор-функцию, удовлетворяющий условию теоремы 9.3, при этом условие (30) также окажется выполненным.

В работе[48] А.Э. Еременко и С.А. Иванов показали, что в случае ядра вида (7), когда носитель меры компактен, невещественный спектр оператор-функции $L(z)$ конечен. Примеры (36), (37) дают ответ на вопрос, поставленный в указанной работе: возможно ли наличие бесконечного невещественного спектра оператор-функции $L(z)$, если носитель меры некомпактен. Действительно, для любого оператора A было построено такое ядро релаксации $\Gamma(t)$, что в спектре $L(z)$ будет счетное число невещественных точек спектра.

Отметим одно важное утверждение: бесконечный невещественный спектр оператор-функции $L(z)$ может появиться в результате сколь угодно малого изменения ядра $\Gamma(t)$.

Теорема 9.4. *Предположим, что спектр оператор-функции $L(z)$ имеет лишь конечное число невещественных точек в спектре. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Gamma^*(t) \in L_1([0,+\infty))$ такое, что*

$$\|\Gamma(t) - \Gamma^*(t)\|_{L_1([0,+\infty))} < \varepsilon,$$

и оператор-функция

$$L^*(z) = z^2 I + \alpha z A^2 + \beta A^2 - K^*(z) A^2,$$

где $K^*(z)$ — преобразование Лапласа $\Gamma^*(t)$, имеет бесконечное число невещественных точек в спектре.

Отметим, что для обратной ситуации, когда спектр $\sigma(L)$ содержит бесконечное число невещественных точек, а $\sigma(L^*)$ должно быть конечным, аналогичное утверждение есть простое следствие результатов работы[48]: $\Gamma(t)$ с некомпактным носителем меры нужно приблизить некоторым $\Gamma^*(t)$, имеющим меру с компактным носителем.

Замечание. Пусть для ядра $\Gamma(t)$ выполнено условие (30), то есть $\Gamma \in C([0,+\infty))$, тогда приближения в теореме 9.4 можно проводить по норме в $C([0,+\infty))$.

10 Заключение

В диссертации изучены спектральные свойства оператор-функций, являющихся символами уравнения (1) и различных модификаций уравнения (3), а также получены результаты о корректной разрешимости (1) и разрешимости в шкале пространств задачи (3), (4).

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Проведён спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом интегродифференциального уравнения (1): установлена общая структура спектра, построена асимптотика невещественного спектра, установлено условие отсутствия спектра в правой полуплоскости, а также приведены теоремы об устойчивости решений и корректной разрешимости задачи (3), (4).

2. Найдена асимптотика невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина (3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса.

3. Проведено исследование разрешимости в шкале пространств, порожденной оператором A, задачи (3), (4).

4. Обоснована возможность существования бесконечного невещественного спектра символа уравнения (3) при учете трения Кельвина–Фойгхта.

Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории интегродифференциальных уравнений, спектральной теории оператор-функций, при численном расчете возникновения флаттера в вязкоупругих материалах, а также в задачах теории управления и прикладных задачах, возникающих в теории вязкоупругости. Из перспективных направлений для дальнейшего исследования можно выделить следующие:

1. Исследование уравнения колебаний вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа для различных граничных условий.

2. Спектральный анализ уравнения колебаний вязкоупругой пластины, учитывая ненулевую толщину пластины (учет пространственной переменной).

3. Исследование разрешимости в шкале пространств уравнения (1).

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Власову за постановку задачи, научное руководство и активную поддержку, а также участникам научного семинара “Функционально-дифференциальные и интегродифференциальные уравнения и их спектральный анализ”, в особенности доцента Н.А. Раутиан, за поддержку и ценные советы.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Давыдов А.В., Тихонов Ю.А. О свойствах спектра оператор-пучка, возникающего в теории вязкоупругости // Математические заметки. — 2018. — Т. 103, № 5. — С. 774–778.
Davydov A.V., Tikhonov Y.A. On properties of the spectrum of an operator pencil arising in viscoelasticity theory // Mathematical Notes. — 2018. — Vol. 103, №5-6. — P. 841–845. / 0.31 п. л. / 0.21 п. л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 0.650).
Автору принадлежат теоремы 3–5.

[2] Давыдов А.В., Тихонов Ю.А. Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгта // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т.54, Вып. 12. — С. 1663–1677.
Davydov A.V., Tikhonov Y.A., Study of Kelvin–Voight models arising in viscoelasticity // Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, №12. — P. 1620–1635. / 1 п. л. / 0.625 п. л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 0.784).
Автору принадлежат теоремы 4–6.

[3] Давыдов А.В. Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. — 2020. — № 2. — С. 15–22
Davydov A.V. Spectral Analysis of Integrodifferential Operators Arising in the Study of Flutter of a Viscoelastic Plate // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2020. — Vol.75, №2. — P. 65–71 / 0.43 п. л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ (ИФ SJR 0.417).

[4] Davydov A.V. Asymptotics of the Spectrum of an Integro-Differential Equation Arising in the Study of the Flutter of a Viscoelastic Plate // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 28. № 2. — P. 188–197. / 0.62 п. л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 1.120).

[5] Давыдов А.В. Об асимптотике невещественного спектра интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина с ядрами релаксации, представимыми в виде интеграла Стилтьеса // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т.58, Вып. 2. — С.238–251.
Davydov A.V. On the Asymptotics of the Nonreal Spectrum of the Integro-Differential Gurtin–Pipkin Equation with Relaxation Kernels Representable in the Form of the Stielties Integral // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, No. 2. — P. 242–255 / 0.875 п. л.
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, Web of Science (ИФ WoS 0.784).