МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Тихонов Юрий Андреевич

Исследование операторных моделей Кельвина-Фойгхта, возникающих в теории вязкоупругости.

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Власов Виктор Валентинович

Москва–2022 г.

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве получили широкое распространение во многих областях механики и физики. Задачи, приводящие к таким уравнениям, возникают в теории теплопроводности в средах с памятью, теории вязкоупругости, теории усреднения, кинетической теории газов и др. Работа посвящена исследованию задачи Коши одного из таких интегро-дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}(t) + \alpha A\dot{u}(t) + (A + C)u(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \ \dot{u}(0) = u_1. \tag{2}$$

Неизвестная функция $u(t)$ определена на луче $[0, +\infty)$ и принимает значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H; A и C — линейные операторы в H такие, что оператор A самосопряжённый, положительно определённый, имеющий компактный обратный, а оператор C — симметрический оператор, компактно подчинённый оператору A. Параметр α — положительная постоянная.

Прежде всего следует упомянуть об обширной литературе, касающейся исследований указанного уравнения в случае, когда параметр α равен нулю. Хотя этот случай имеет ряд принципиальных отличий от рассматриваемого в настоящей работе, именно для него разработаны и развиты методы, применяемые при изучении задачи (1) – (2). Уравнение (1) при $\alpha = 0$ и $C \equiv 0$ относится к классу интегро-дифференциальных уравнений, которые принято в современной отечественной и зарубежной литературе называть уравнениями Гуртина–Пипкина. Возник этот класс в задачах теплофизики, а именно в работах советского теплофизика А.В. Лыкова [40] и американских теплофизиков M.E. Gurtin и A.C. Pipkin [73]. Целью упомянутых работ было получение модели теплопроводности с конечной скоростью распространения тепла. Впоследствии оказалось, что аналогичные абстрактные интегро-дифференциальные уравнения появляются в теории вязкоупругости. Так, в случае, когда оператор A действует в

$L_2(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$, где Ω — ограниченная область, порождаемый дифференциальным выражением $-\mu\Delta y(x) - (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}\ y)(x)$, где μ, λ — коэффициенты Ламе, уравнение Гуртина-Пипкина представляет собой изотропную модель вязкоупругости (см. работы C.M. Dafermos [63], J.E. Muñoz Rivera, M.G. Naso, F.M. Vegni [74], [75], G. Amendola, M. Fabrizio, Golden J.M. и V. Lazzari [59], [67]). В упомянутых работах изучались вопросы о разрешимости уравнения Гуртина-Пипкина, убывании решения при $t \to +\infty$, устанавливалась экспоненциальная устойчивость решения. Указанные результаты были получены с помощью построения и оценок энергетических функционалов.

Задачи управления и обратные задачи для интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина рассматривались в работах L. Pandolfi [72], С.А. Авдонина и С.А. Иванова [71].

Отметим работы А.С. Шамаева и соавторов [54]—[56], в которых изучались задачи граничного управления системами типа Гуртина–Пипкина, а также проводился спектральный анализ моделей вязкоупругих сред Кельвина–Фойгхта. Ядра вольтерровой свёртки в указанных работах представлялись в виде сумм конечного числа экспонент. В работе А.С. Шамаева и В.В. Шумиловой [57] изучались модели с дробно-экспоненциальными ядрами свёртки.

Подробное исследование интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина проведено в работах В.В. Власова и его соавторов Н.А. Раутиан, А.С. Шамаева, Р. Переза Ортиза [6]—[19], а также [46], [47]. Результаты исследований упомянутых авторов систематически изложены в монографии [12]. Их подход основывается на спектральном анализе оператор-функции, которая является символом интегро-дифференциального уравнения. Полученные авторами результаты об асимптотике спектра позволяют им получать представления решений уравнения Гуртина–Пипкина в пространствах Соболева. Спектральный подход к изучению абстрактных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений основан на идеях, восходящих к работам М.В. Келдыша, в которых изложены основополагающие результаты спектральной теории полиномиальных операторных пучков [34], [35]. Дробно-рациональные оператор-функции, обобщениями которых являются символы интегро-дифференциальных уравнений вида (1), рассматривались в работах Дж.Э. Аллахвердиева [2], А.И. Милославского [42]. В цикле работ Г.В. Радзиевского изучались существенно более общие оператор-функции. Результаты его исследований изложены в обзорной статье [45]. Следует отметить, все результаты диссертации по существу основаны на спектральном анализе оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1). Таким образом, задача изучения спектра оператор-функции является ключевой для проводимого в работе исследования.

Уравнение Гуртина-Пипкина, возмущённое относительно компактным слагаемым, возникает при изучении явления флаттера пластины в потоке жидкости [3]. Изучению этой операторной модели посвящены работы А.В. Давыдова [60], [61]. Исследование, проводимое в настоящей работе, развивает методы упомянутых авторов (см. гл. 2).

Интегро-дифференциальное уравнение (1) при $\alpha > 0$ возникает в задачах вязкоупругости в средах с внутренним трением, или трением Кельвина–Фойгхта [31]. Спектральный анализ абстрактного уравнения (1) без учёта слагаемого свёртки проведён в работах А.А. Шкаликова и соавторов [58], [70]. Вопросы устойчивости решений интегро-дифференциального уравнения (1) с ненулевым интегрируемым ядром свёртки изучены А.И. Милославским в работе [41], а спектральный анализ этого уравнения в случае, когда ядро свёртки представимо в виде интеграла Лебега-Стилтьеса от экспоненты, в случае меры с финитным носителем и нулевым оператором C, проведён в работе А.Э. Ерёменко и С.А. Иванова [65].

Системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, которые дифференцированием могут быть сведены к абстрактным моделям вида (1) возникают также при изучении малых движений вязкоупругих жидкостей. Ряд глубоких результатов в этой области получен С.Г. Крейном и соавторами Н.К. Аскеровым и Г.И. Лаптевым [4], [36], [38]; Н.Д. Копачевским и его учениками [1], [25], [69]. Модели вязкоупругой жидкости Максвелла и Олдройта, приводящие к уравнениям, аналогичным по форме уравнению (1), изучались в работах Д.А. Закоры [26]—[29], в которых рассматривались также задачи движения этих жидкостей во вращающемся твёрдом теле. Д.А. Закора установил корректную разрешимость указанных уравнений в классическом смысле, экспоненциальную устойчивость решений, а также получил асимптотику решений. В целом, упомянутые авторы при исследовании опираются на теорию полугрупп операторов, сводя интегро-дифференциальные уравнения к системам дифференциальных уравнений в прямой сумме гильбертовых пространств. Отметим, что это возможно лишь для ядер экспоненциального типа. Изучение вопроса о разрешимости и устойчивости решений с помощью полугрупп, которое будет проводиться в 3й и 4й главах настоящей работы во многом следует идеям упомянутых авторов. В работах Н.А. Раутиан и В.В. Власова [19], [46], [47] этот полугрупповой подход развит и применён к исследованию уравнения Гуртина-Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами свёртки [44].

Изучение интегро-дифференциальных уравнений тесно связано с исследованиями в области функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Ряд глубоких результатов в области ФДУ принадлежит Л.Е. Россовскому [49], [50].

Цель диссертационной работы. Цель настоящего исследования состоит в следующем:

1. Установить структуру и локализацию спектра оператор-функции, являющейся символом абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, возникающего в задачах колебаний вязкоупругих сред с внутренним трением.

2. Исследовать ассоциированную с указанным уравнением полугруппу операторов на предмет принадлежности классу C_0-полугрупп и доказать аналитичность этих полугрупп в некотором угле.

3. Основываясь на вышеупомянутых результатах, установить классическую корректную разрешимость уравнения, аналитичность его решения, и получить в некоторых случаях представление решения.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, спектральной теории линейных операторов и оператор-функций в гильбертовом пространстве, методы комплексного анализа, теория полугрупп операторов.

Научная новизна. В работе получены результаты о поведении спектра оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1), в случае когда ядро вольтерровой свёртки представимо в виде интеграла Лебега-Стилтьеса с некомпактным носителем меры. Кроме этого, для этого случая построен генератор ассоциированной с задачей (1)–(2) полугруппы и доказана аналитичность в угле этой полугруппы. Наконец, для этого случая доказана корректная разрешимость задачи (1)–(2) в классическом смысле, экспоненциальная устойчивость решения и аналитичность его в угле. Перечисленные результаты являются новыми и получены лично автором.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о локализации спектра оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1), в левой полуплоскости.

2. Теорема об оценках резольвенты оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1).

3. Теоремы о сильной непрерывности и аналитичности полугруппы операторов, ассоциированной с задачей (1)–(2).

4. Теорема о корректной разрешимости в классическом смысле задачи (1)–(2), экспоненциальной устойчивости и аналитичности единственного решения в некотором угле в правой полуплоскости.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории оператор-функций, теории интегро-дифференциальных уравнений, а также в задачах теории управления и прикладных задачах, возникающих в теории вязкоупругости.

Апробация. Постановка задачи и результаты обсуждались на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ» под руководством профессора В.В. Власова и доцента Н.А. Раутиан, 2016 — 2022 гг. (неоднократно).

2. Научный семинар «Операторные модели в математической физике» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора А.А. Шкаликова, 2017 г.

3. Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Д. В. Георгиевского, профессора М. В. Шамолина, профессора С. А. Агафонова, 2017 – 2022 гг. (неоднократно).

4. Научный семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора М.И. Зеликина, чл.-корр. РАН, профессора В.Ю. Протасова, профессора В.М. Тихомирова и профессора А.В. Фурсикова, 2018 г.

5. Научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ под руководством академика В.А. Садовничего, 2019 г.

6. Научный семинар «Асимптотические методы в математической физике» лаборатории механики природных катастроф ИПМех РАН под руководством профессора С.Ю. Доброхотова, чл.-корр. РАН, профессора В.Е. Назайкинского, чл.-корр. РАН, профессора А.И. Шафаревича 2019 г., 2020 г.(дважды)

7. Научный семинар «Спектральный анализ дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» кафедры функционального анализа и его применений и кафедры общей математики факультета ВМК МГУ под руководством академика Е.И. Моисеева и профессора И.С. Ломова, 2020 г.

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных конференциях:

1. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения»–XXXI, Воронеж, Россия, 4-7 мая 2020

2. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXII, Воронеж, Россия, 3-9 мая 2021

3. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXIII, Воронеж, 3-9 мая 2022

4. XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам, Симферополь, 2021

5. Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis — 2019 (June 17—21, 2019, Moscow Region, Dolgoprudny)

6. Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis — 2021 (June 30–July 9, 2021, online, Moscow Region, Dolgoprudny)

Публикации. Результаты диссертации изложены в 5 статьях [23], [24], [51]—[53], опубликованных в научных журналах, индексируемых в наукометрических базах Web of Science, SCOPUS, RSCI. В работах [23] – [24], выполненных совместно с А.В. Давыдовым, автору настоящей диссертации принадлежат результаты о локализации спектра оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1), в левой полуплоскости (утверждения 1—3 и теоремы 2, 3). Список работ автора приведён в конце автореферата и диссертации.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 77 наименований. Общий объём работы составляет 114 страниц.

Обзор содержания диссертации.

В первой главе настоящей работы вводятся основные обозначения и формулируется основная задача диссертации.

Рассмотрим задачу Коши (1) – (2) для абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, в котором неизвестная вектор-функция $u(t)$ определена на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ и принимает значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Уравнение (1) может быть реализовано в виде интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в задачах теории вязкоупругости, в которых изучаются движения сред с учётом внутреннего трения (трения Кельвина–Фойгхта) [31]. В уравнении (1) этому явлению отвечает слагаемое $\alpha A\dot{u}(t)$, где α — положительный параметр, который называется коэффициентом трения Кельвина–Фойгхта.

Ядро вольтерровой свёртки $K(t)$ — скалярная вещественнозначная функция, задаваемая равенством

$$K(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu(\tau), \qquad (3)$$

где $\mu(\tau)$ — неубывающая, непрерывная справа функция, такая что носитель меры $\operatorname{supp} d\mu(\tau)$ содержится внутри луча $[d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$. В приложениях часто изучается частный вид ядра (3), который задаётся равенством

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t}, \tag{4}$$

где $c_j > 0$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1} \to +\infty$, $j = 1, 2, \ldots$ Для ядра вольтерровой свёртки мы потребуем выполнения следующего условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1. \tag{5}$$

Соответственно в случае (4) это условие обретает вид

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1. \tag{6}$$

Линейные операторы A и C, действующие в пространстве H, удовлетворяют следующим условиям:

1. A — самосопряжённый, положительно определённый оператор, имеющий компактный обратный;

2. C — симметрический оператор, компактно подчинённый оператору A, т. е. оператор CA^{-1} компактен;

3. Справедливо следующее неравенство

$$\left\| \overline{A^{-1/2} C A^{-1/2}} \right\| < 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}. \tag{7}$$

В неравенстве (7) запись $\overline{T}$ означает замыкание оператора T.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) может быть реализовано, например, как уравнение, описывающее малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины $u(t, x)$ при $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ (см. [41]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \alpha \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}(t,x) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right) - \int_0^t K(t-s) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(s,x) ds = 0, \tag{8}$$

$$t > 0,\ 0 < x < 1,$$

где неизвестная функция $u(t,x)$ из класса $L_2(0,1)$ по пространственной переменной, а $g(x)$ — гладкая ограниченная вещественная функция, пропорциональная неоднородной силе натяжения.

В работах Д.А. Закоры [26]—[30] широко представлены различные реализации абстрактной модели вида (1). Так движения начально-изотропного вязкоупругого тела Ильюшина, занимающего ограниченный объём $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и закреплённого на границе $\partial\Omega$, при изометрических процессах деформирования могут быть описаны следующим интегро-дифференциальным уравнением

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{2}\Delta u(t,x) + \frac{c}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(t,x)\right) + \left(\frac{c}{2}\Delta u(t,x) + \frac{c}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(t,x)\right) - \\ - \int_0^t K(t-s)\left(\frac{1}{2}\Delta u(s,x) + \frac{1}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(s,x)\right) ds, \ x \in \Omega, \quad (9)$$

где функция $\rho(x)$ — плотность тела, $f(t,x)$ — поле внешних сил, $c > 0$ — некоторая структурная постоянная. Ядро $K(t)$ отвечает слагаемому сдвиговой релаксации и имеет вид

$$K(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-\gamma_j t},$$

где $c_j \geq 0$, для $j = 1, 2, \ldots, n$; $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Во второй главе проводится спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом интегро-дифференциального уравнения (1). Применение преобразования Лапласа к уравнению (1) приводит к следующей оператор-функции

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A, \quad (10)$$

где $\hat{K}(\lambda)$ — преобразование Лапласа ядра (3), аналитически продолженное в $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -d_0]$, которое задаётся равенством

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}.$$

Определение 1. *Резольвентным множеством* оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество точек $\rho(L) \subset \mathbb{C}$ такое, что для всех точек $\lambda \in \rho(L)$ оператор $L^{-1}(\lambda)$ определён и ограничен. *Спектром* оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество $\sigma(L) := \mathbb{C}\backslash\rho(L)$.

Изучение спектра оператор-функции $L(\lambda)$ опирается на результаты о поведении спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$, определяемой формулой

$$L_0(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A - \hat{K}(\lambda)A. \tag{11}$$

В силу свойств оператора A найдётся ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ в пространстве H, такой что $Ae_n = a_n e_n,\ 0 < a_n \le a_{n+1} \to +\infty$.

Рассмотрим проекции оператор-функции $L_0(\lambda)$ на собственные векторы e_n:

$$l_n(\lambda) = \lambda^2 + \alpha a_n \lambda + a_n - a_n \hat{K}(\lambda). \tag{12}$$

Спектр оператор-функции $L_0(\lambda)$ тогда можно задать следующим образом:

$$\sigma(L_0) = \overline{\cup_{n=1}^{+\infty} \{\lambda \in \mathbb{C} : l_n(\lambda) = 0\}}.$$

Следовательно, исследуя распределение нулей функций $l_n(\lambda)$ в области $\mathcal{S} := \mathbb{C}\backslash(-\infty, -d_0]$, можно установить результаты о локализации спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$ в области $\mathcal{S}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда спектр оператор-функции* $L_0(\lambda)$ *в области* $\mathcal{S}$ *состоит из счетной последовательности пар комплексно-сопряженных собственных точек конечной алгебраической кратности, расположенных в области*

$$D_{\gamma,p,q} := \left\{\lambda \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\ \lambda < -\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q\right\}, \tag{13}$$

где γ, p *и* q *— положительные константы.*

При этом если выполнено условие

$$\lim_{x \to -d_0+0} \left(\alpha x + 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + x}\right) < 0, \tag{14}$$

то $\sigma(L_0)$ *содержит последовательность конечнократных вещественных собственных значений, сходящихся к некоторому* x_0, *лежащему в интервале* $(-d_0, 0)$. *В противном случае вещественных точек в* $\sigma(L_0) \cap \mathcal{S}$ *нет.*

Если выполнено условие

$$K(0) = \int_0^{+\infty} d\mu(\tau) < +\infty, \tag{15}$$

то результат теоремы 1 можно существенно уточнить.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 пусть выполнено условие* (15), *тогда невещественная часть спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$ представляет собой последовательность собственных чисел конечной алгебраической кратности, мнимые части которых стремятся к нулю, причём найдётся такая постоянная $M > 0$, что для всех натуральных n справедлива оценка*

$$\left|\mathrm{Im}\ \lambda_n^{\pm}\right| < M \left(\frac{K(0)}{\alpha^2 a_n} + \sqrt{\frac{\int_{\alpha a_n/4}^{+\infty} d\mu(\tau)}{\alpha}} \right), \tag{16}$$

где $\lambda_n^{\pm}$ — невещественные точки спектра $L_0(\lambda)$.

Укажем оценки нормы резольвенты оператор-функции $L_0^{-1}(\lambda)$. Рассмотрим области $\mathcal{S}_R$, $\mathcal{S}_{R,\delta}$ и $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$, которые определяются следующим образом:

$$\mathcal{S}_{R,\delta} := \{\lambda \in \mathcal{S} : |\lambda| > R,\ |\arg\lambda| < \pi - \delta\}, \tag{17}$$

$$\mathcal{S}_R := \{\lambda \in \mathcal{S} : |\lambda| > R\}$$

и

$$\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q} := \mathcal{S}_R \backslash \overline{D_{\gamma,p,q}}, \tag{18}$$

где область $D_{\gamma,p,q}$ определена равенством (13).

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *для любого значения $\delta \in (0, \pi/2)$ существуют постоянные $R > 0$ и $C > 0$, такие что в $\mathcal{S}_{R,\delta}$ справедлива оценка*

$$\left\|AL_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{C}{|\lambda|}. \tag{19}$$

Существуют положительные постоянные $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, такие что для каждого $\delta \in (0, \pi/2)$ существуют такие $R > 0$ и $C > 0$, что в области $\mathcal{S}_{R,\gamma,\tilde{p},\tilde{q}} \backslash \mathcal{S}_{R,\delta}$ справедлива оценка

$$\left\|AL_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{20}$$

Результаты о локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$ вытекают из равенства

$$L(\lambda) = \left(I + CL_0^{-1}(\lambda)\right) L_0(\lambda)$$

и оценки

$$\left\|CL_0^{-1}(\lambda)|\right\| \leq \left\|CA^{-1}\right\| \left\|AL_0^{-1}\right\|.$$

Сформулируем основной результат второй главы о локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 4. *Спектр оператор-функции $L(\lambda)$ в области $\mathcal{S}$ состоит из собственных чисел конечной алгебраической кратности, за исключением, быть может, единственной точки $x_0 \in (-d_0, 0)$. Более того, если выполнено условие (5), тогда существуют положительные постоянные γ, p', $q' > 0$, такие что спектр $\sigma(L)$ содержится в области $D_{\gamma,p',q'}$ (13).*

Заключительным результатом второй главы диссертации является оценка резольвенты оператор-функции $L(\lambda)$, которая существенно используется в последующих главах.

Теорема 5. *В условиях теоремы 4 для любого $\delta \in (0, \pi/2)$ найдутся числа $R > 0$ и $M > 0$ такие, что для $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\delta}$ (17) справедлива следующая оценка:*

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{M}{|\lambda|^2}. \tag{21}$$

Для $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p',q'}$ найдется такое число $\tilde{M} > 0$, что

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{\tilde{M}}{|\lambda|^{3/2}}, \tag{22}$$

где постоянные γ, p' и q' такие же, как в теореме 4.

Теоремы 1 и 2 сформулированы и доказаны в работах [23], [24], а результаты о поведении спектра оператор-функции $L(\lambda)$ и оценки её резольвенты, сформулированные в виде теорем 3, 4 и 5, доказаны в работе [53].

В третьей главе исследуется задача (1) – (2), в случае, когда оператор C нулевой, а ядро вольтерровой свёртки представимо в виде (4). Изучаются вопросы о корректной разрешимости указанной задачи Коши, а также проводятся оценки нормы решения. Под разрешимостью задачи (1) – (2) понимается существование классического решения этой задачи.

Определение 2. Функция $u \in C^2(\mathbb{R}_+, H) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A))$ называется классическим решением задачи (1) – (2), если для каждого $t \geq 0$ функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2).

Исследование вопроса о корректной разрешимости проводится с использованием аппарата теории полугрупп операторов. Для этого исходная задача Коши сводится к эволюционной задаче вида

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}_0 x(t) + F(t), \tag{23}$$

$$x(0) = x_0. \tag{24}$$

Рассмотрим пространство $l_2(H)$, задаваемое следующим образом:

$$l_2(H) = \sum_{j=1}^{+\infty} H,$$

элементами которого являются вектор-функции $\mathbf{h} := (h_1, h_2, \dots)^T$. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|\mathbf{h}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \|h_j\|^2.$$

Пусть

$$h_j(t) = \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} \int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)} A^{1/2} u(s) ds.$$

Рассмотрим $\mathbb{H} := H \oplus H \oplus l_2(H)$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}^2 := \|\cdot\|^2 + \|\cdot\|^2 + \|\cdot\|_2^2$. Пусть $x(t)$ — вектор-функция, определённая на $[0, +\infty)$, принимающая значения в $\mathbb{H}$, и задаваемая равенством

$$x(t) = \left(\dot{u}(t), \beta A^{1/2} u(t), \mathbf{h}(t)\right)^T,$$

где $\beta = \left(1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \dfrac{c_j}{\gamma_j}\right)^{1/2}$, $\mathbf{h}(t) := (h_1(t), h_2(t), \dots))^T$. Вектор $x_0 \in \mathbb{H}$ зададим как

$$x_0 = \left(u_1, \beta A^{1/2} u_0, 0\right)^T.$$

Тогда задачу (1)–(2) можно записать в виде (23)–(24), где вектор-функция $F(t)$ в правой части определяется как

$$F(t) = \left(-\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} A u_0, 0, 0\right)^T,$$

а оператор $\mathcal{A}_0$ задаётся матрицей, коэффициенты которой — линейные операторы в пространствах H и $l_2(H)$.

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -\beta I & -S^* \\ \beta I & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $S : H \to l_2(H)$ — линейный оператор, действующий по правилу

$$Sh = \left(\sqrt{\frac{c_1}{\gamma_1}}h, \dots, \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}}h, \dots\right)^T,$$

S^* — сопряжённый оператору S, Γ — оператор в $l_2(H)$

$$\Gamma\mathbf{h} = \mathrm{diag}\left\{\gamma_1 h_1, \dots, \gamma_j h_j, \dots\right\}.$$

Зададим область определения оператору $\mathcal{A}_0$

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0) = \left\{(v, \rho, \mathbf{h})^T \in \mathbb{H} : \Gamma\mathbf{h} \in l_2(H),\ (-\alpha A^{1/2}v - \beta\rho - S^*\mathbf{h}) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right\}.$$

Сформулируем главный результат третьей главы, который доказан в работе [51].

Теорема 6. *Оператор $\mathcal{A}_0$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы, аналитической в угле $\{|\arg\lambda| < \delta\}$ для некоторого $\delta \in (0, \pi/2)$.*

Как следствие из доказанной теоремы выводится теорема о корректной разрешимости в классическом смысле задачи (23) – (24).

Определение 3. Функция $x(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}) \cap C(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0))$ называется классическим решением задачи (23) – (24), если $x(t)$ удовлетворяет уравнению (23) для любого $t \geq 0$ и начальному условию (24).

Разрешимость задачи (23) – (24) при $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$ вытекает из теоремы 6, а также из результатов монографии [21] (гл. 2, теорема 1.4). Возвращаясь к исходной задаче, можно получить следующий результат о корректной разрешимости.

Теорема 7. *Пусть $u_0, u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$, а также выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j < +\infty.$$

Тогда задача (1) – (2) имеет единственное решение в смысле определения 2. При этом существует число $\delta \in (0, \pi/2)$, такое что решение $u(t)$ допускает аналитическое продолжение в угол $D_\delta = \{|\arg\lambda| < \delta\}$ и справедлива оценка

$$\|\dot{u}(t)\|^2 + \left\|A^{1/2}u(t)\right\|^2 \leq Me^{-2\gamma t}\left(\|u_1\|^2 + \left\|A^{1/2}u_0\right\|^2 + t^2\|Au_0\|^2\right), \qquad (26)$$

где M, γ — положительные постоянные.

Завершает третью главу результат о представлении решения задачи Коши (1 – (2) в виде ряда из экспонент.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 7, тогда для решения задачи* (1)–(2) $u(t)$ *при* $t > 0$ *справедливо следующее представление*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\nu(L_0)} \frac{(\lambda_n^+ + \alpha a_n)\, u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_n^+)} e^{\lambda_n^+ t} e_n + \sum_{n=1}^{\nu(L_0)} \frac{(\lambda_n^- + \alpha a_n)\, u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_n^-)} e^{\lambda_n^- t} e_n + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda_{n,k} + \alpha a_n) u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_{n,k})} e^{\lambda_{n,k} t} \right) u_{1,n} e_n, \quad (27)$$

где $\nu(L_0)$ *— число невещественных точек в спектре оператор-функции* $L_0(\lambda)$, $\lambda_n^\pm$ *— невещественные точки спектра оператор-функции* $L_0(\lambda)$, $\lambda_{n,k}$ *— вещественные точки спектра* $L_0(\lambda)$, *такие что*

$$-\gamma_k < \lambda_{n,k} < -\gamma_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots,\ \gamma_0 := 0$$

для всех натуральных n, e_n *— единичные собственные векторы оператора* A, *отвечающие собственным значениям* a_n, $u_{0,n}$ *и* $u_{1,n}$ *— коэффициенты Фурье при разложении начальных условий* u_0 *и* u_1 *соответственно по ортонормированному базису* $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Наконец, в **четвёртой главе** рассматривается задача Коши (1) – (2) в наиболее общем случае, когда $C \neq 0$ и ядро вольтерровой свертки имеет вид (3).

Исследование вопроса о корректной разрешимости в классическом смысле проводится по той же схеме, что и в третьей главе. Рассматривается гильбертово пространство $L_2(H, \mu)$ ([20], стр. 148), которое состоит из вектор-функций $h(\tau)$ со значениями в H, измеримых относительно меры $d\mu$ на $\mathbb{R}_+$, квадраты норм которых суммируемы:

$$\|h\|^2_{L_2(H,\mu)} = \int_0^{+\infty} \|h(\tau)\|^2_H \, d\mu(\tau) < +\infty.$$

Далее задача (1) – (2) сводится к эволюционной задаче в прямой сумме гильбертовых пространств $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus L_2(H, \mu)$:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + F(t), \quad (28)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (29)$$

Обозначим за S, S^* и Γ — линейные операторы, определяемые как

$$S : H \to L_2(H, \mu),\ Sh(\tau) := \frac{1}{\sqrt{\tau}} h,$$

$$S^* : L_2(H,\mu) \to H,\ S^* f := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} f(\tau) d\mu(\tau),$$
$$\Gamma : L_2(H,\mu) \to L_2(H,\mu),\ \Gamma f(\tau) := \tau f(\tau).$$

Пусть B — линейный оператор $B = \left(\left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right) I + \overline{A^{-1/2} C A^{-1/2}}\right)^{1/2}$ Неизвестная вектор-функция $x(t)$ связана с неизвестной функцией $u(t)$ следующим образом:

$$x(t) = \left(\dot{u}(t), BA^{1/2}u(t), h(t)\right)^T,$$

где $h(t) \in L_2(H,\mu)$ при каждом фиксированном t и задаётся равенством

$$h(t) := h(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^t e^{-\tau(t-s)} A^{1/2} u(s) ds.$$

Функция $F(t)$ определена как

$$F(t) = \left(-\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau t}}{\tau} A u_0 d\mu(\tau), 0, 0\right).$$

Наконец, оператор $\mathcal{A}$ задаётся следующей матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -B & -S^* \\ B & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{30}$$

на области определения:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \left\{(u,\rho,v)^T \in \mathbb{H} :\ v \in \mathrm{Dom}(\Gamma),\ (-\alpha A^{1/2} u - B\rho - S^* v) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right\}. \tag{31}$$

Основной результат четвёртой главы, опубликованный в работе [52], состоит в следующем:

Теорема 9. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда оператор* $\mathcal{A}$ *является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Более того, эта полугруппа является аналитической в некотором угле* $\Lambda_\delta := \{|\arg\lambda| < \delta\}$, $\delta \in (0, \pi/2)$.

Ввиду результата из монографии [21] (гл. 2, теорема 1.4), делаем вывод о корректной разрешимости в классическом смысле задачи (28) – (29) при $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, из которой как следствие можно вывести результат о корректной разрешимости исходной задачи Коши (1) – (2).

Теорема 10. *Пусть* $u_0, u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$, *а также выполнено условие* (15). *Тогда задача* (1)–(2) *имеет единственное решение в смысле определения* 2. *При этом существует число* $\delta \in (0, \pi/2)$, *такое что решение* $u(t)$ *допускает аналитическое продолжение в угол* $D_\delta = \{|\arg\lambda| < \delta\}$, *и справедлива оценка*

$$\|\dot{u}(t)\|^2 + \left\|A^{1/2}u(t)\right\|^2 \leq Me^{-2\gamma t}\left(\|u_1\|^2 + \left\|A^{1/2}u_0\right\|^2 + t^2\|Au_0\|^2\right), \tag{32}$$

где $M,\ \gamma$ *— положительные постоянные.*

1 Обозначения и некоторые результаты из теории операторов и теории полугрупп

1.1 Обозначения

Обозначим луч $[0, +\infty)$ за $\mathbb{R}_+$.

Через H будем обозначать сепарабельное гильбертово пространство, норма и скалярное произведение в котором будут обозначаться соответственно через $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$.

Для некоторого линейного оператора T, действующего в пространстве H, область определения будет обозначаться через $\mathrm{Dom}(T)$, множество значений — через $\mathrm{Ran}(T)$. T^* — оператор, сопряжённый оператору T в гильбертовом пространстве H, $\overline{T}$ — замыкание оператора T. Резольвентное множество оператора T обозначим через $\rho(T)$, соответственно его спектр — $\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \rho(T)$. Для $\lambda \in \rho(T)$ определена резольвента $(T - \lambda I)^{-1}$, которую будем обозначать как $R(\lambda, T)$.

Пространство вектор-функций, определённых на некотором множестве $X \subseteq \mathbb{R}_+$, принимающих значения в гильбертовом пространстве H, непрерывных на X по норме пространства H, обозначим через $C(X, H)$. Соответственно, $C^n(X, H)$ — пространство n раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций на множестве X со значениями в H.

Пусть A — самосопряжённый, положительно определённый оператор в H. При $\theta > 0$ определим пространство вектор-функций $C^n(X, \mathrm{Dom}(A^\theta))$ как пространство n раз непрерывно дифференцируемых на X функций $f(t)$ таких, что для всякого $t \in X$, $f(t) \in \mathrm{Dom}(A^\theta)$ и $A^\theta f(\cdot) \in C^n(X, H)$.

1.2 Некоторые сведения из теории полугрупп операторов.

Теория полугрупп линейных операторов в банаховых (гильбертовых) пространствах в настоящее время находит всё более широкое применение при изучении обыкновенных дифференцальных уравнений, уравнений с частными производными, интегро-дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений и др. Интерес к этой теории возник в связи с изучением эволюционных задач математической физики. Приведём ряд фундаментальных результатов, изложенных в известных монографиях

[37], [64].

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ в гильбертовом пространстве H.

Определение 1.2.1. Семейство линейных ограниченных операторов $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ такое, что для любых $t, s \geq 0$ выполняется равенство $U(t+s) = U(t)U(s)$ называется *полугруппой* операторов.

Особый интерес представляют сильно непрерывные полугруппы (C_0-полугруппы).

Определение 1.2.2. Сильно непрерывной полугруппой (C_0-полугруппой) операторов $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ называется полугруппа, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. Для любого $h \in H$ выполняется равенство $U(0)h = h$;
2. Для любого $h \in H$ справедливо $U(\cdot)h \in C(\mathbb{R}_+, H)$.

Введём ещё один класс полугрупп ограниченных операторов, который занимает центральное место в последующих главах, — аналитические полугруппы.

Определение 1.2.3. Рассмотрим угол $\Delta_{\varphi_1,\varphi_2} = \{\lambda : \varphi_1 < \arg\lambda < \varphi_2\}$, где $-\pi/2 < \varphi_1 < 0 < \varphi_2 < \pi/2$. *Аналитической полугруппой* ограниченных операторов называется семейство ограниченных линейных операторов $\{U(z)\}_{z\in\Delta_{\varphi_1,\varphi_2}}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. Для любого $h \in H$ функция $U(z)h$ является аналитической в $\Delta_{\varphi_1,\varphi_2}$;
2. Для любого $h \in H$ справедливо $U(0)h = h$;
3. $\lim\limits_{z\to 0,\ z\in\Delta_{\varphi_1,\varphi_2}} U(z)h = h$ для любого $h \in H$;
4. $U(z_1+z_2) = U(z_1)U(z_2)$ для всех $z_1, z_2 \in \Delta_{\varphi_1,\varphi_2}$ таких, что $z_1 + z_2 \in \Delta_{\varphi_1,\varphi_2}$.

Введём ещё одно важное понятие.

Определение 1.2.4. *Генератором* полугруппы $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ называется линейный оператор $\mathcal{A}$, определённый следующим образом:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \left\{ h \in H : \exists \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\left(U(t)h - h\right) \in H \right\},$$
$$\mathcal{A}h = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\left(U(t)h - h\right), \quad h \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}).$$

Свойства сильной непрерывности и аналитичности полугруппы напрямую связаны со спектральными свойствами её генератора. Этот факт нашёл отражение в генераторных теоремах Хилле–Иосиды–Филлипса ([64], гл. 2, теоремы 3.5 и 3.8), заложивших основу теории полугрупп операторов. Не будем здесь приводить формулировок всех этих теорем, но сосредоточим внимание на одном частном случае сильно непрерывных полугрупп — сжимающих сильно непрерывных полугруппах.

Определение 1.2.5. Сильно непрерывная полугруппа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ называется *сжимающей*, если для любого $t \geq 0$ выполняется

$$\|U(t)\| \leq 1.$$

Генераторы сжимающих сильно непрерывных полугрупп обладают свойством диссипативности.

Определение 1.2.6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ с плотной в H областью определения $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ называется *диссипативным*, если

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}h, h) \leq 0, \quad h \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}).$$

При этом, если оператор $\mathcal{A}$ не имеет нетривиальных диссипативных расширений, то он называется максимально диссипативным.

Перейдём к основным теоремам, на которых по существу основаны главные результаты настоящей работы. Первая теорема — генераторная теорема Лумера–Филлипса о сжимающей сильно непрерывной полугруппе ([64], гл. 2, теорема 3.15).

Теорема 1.2.1 [Лумер-Филлипс] *Замкнутый, плотно определённый в гильбертовом пространстве H оператор $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является максимально диссипативным.*

Установить свойство максимальной диссипативности для диссипативного оператора $\mathcal{A}$ позволяет

Теорема 1.2.2. *Диссипативный оператор $\mathcal{A}$ является максимально диссипативным тогда и только тогда, когда для любого $\lambda > 0$ выполняется равенство* $\mathrm{Ran}(\mathcal{A} - \lambda I) = H$.

Таким образом, для разрешения вопроса, является ли $\mathcal{A}$ генератором сжимающей полугруппы, достаточно установить его замкнутость, плотность всюду в H его области определения, диссипативность и выполение условия теоремы 1.2.2.

Перейдём теперь к обсуждению свойств для линейного оператора $\mathcal{A}$, являющегося генератором аналитической полугруппы.

Определение 1.2.7. Назовём замкнутый линейный оператор $\mathcal{A}$ с плотной областью определения $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ *секториальным*, если найдётся число $\delta : 0 \le \delta \le \pi/2$ такое, что область

$$\Lambda_\delta = \{\lambda : |\arg\,\lambda| < \pi/2 + \delta\} \setminus \{0\}$$

содержится в резольвентном множестве $\rho(\mathcal{A})$ и для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ найдётся постоянная $M_\varepsilon \ge 1$ такая, что выполнена оценка

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \le \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \quad 0 \ne \lambda \in \overline{\Lambda_{\delta-\varepsilon}}.$$

Необходимое и достаточное условие аналитичности полугруппы с генератором $\mathcal{A}$ сформулировано в виде следующей теоремы ([64], см. теорема 4.6).

Теорема 1.2.3. [критерий аналитичности полугруппы] *Оператор $\mathcal{A}$ является генератором аналитической в угле $\Delta_\delta := \{|\arg\,\lambda| < \delta\}$ полугруппы ограниченных линейных операторов $\{U(z)\}_{z\in\Delta_\delta}$ тогда и только тогда, когда этот оператор является секториальным в области $\Lambda_\delta = \{|\arg\,\lambda| < \pi/2 + \delta\}$.*

Именно в проверке условий теоремы 1.2.3 и заключается доказательство одного из основных результатов настоящей работы.

Отметим ещё некоторые факты об оценках нормы полугруппы $U(t)$.

Теорема 1.2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ имеет резольвенту при $\{\mathrm{Re}\,\lambda \ge \gamma\}$ и при этом является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$. Тогда найдётся постоянная $M > 0$ такая, что при всех $t \ge 0$ справедлива оценка*

$$\|U(t)\| \le Me^{\gamma t}.$$

На основании теоремы 1.2.4 в дальнейшем будут сделаны выводы об оценке нормы решения.

1.3 О связи свойств полугруппы с решениями порождающей её задачи Коши

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. В этом пространстве рассмотрим эволюционную задачу

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + F(t), \quad t \geq 0, \tag{33}$$

$$x(0) = x_0, \tag{34}$$

где $x(t)$ — вектор функция, определённая на $\mathbb{R}_+$, со значениями в H. В настоящем разделе обсудим связь свойств оператора $\mathcal{A}$ с вопросом о разрешимости задачи (33)–(34).

Определение 1.3.1. *Классическим* решением задачи (33)–(34) называется функция $x(t)$ такая, что $x \in C^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ (см. §1.1). При этом удовлетворяется уравнение (33) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие (34).

Помимо самого факта разрешимости, немаловажным является вопрос о единственности решения и его непрерывной зависимости от начальных условий — корректности задачи (см. [37], определение 1.2).

Определение 1.3.2. Пусть в уравнении (33) в правой части $F(t) \equiv 0$. Задача (33)–(34) *поставлена корректно* на отрезке $[0, T]$, если:

1. При любом $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ существует и единственное решение задачи (33)–(34) в смысле определения 1.3.1;

2. Если $\{x_n(t)\}_{n=1}$ последовательность решений уравнений вида (33) с начальными условиями $x_n(0) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ такими, что $x_n(0) \to 0$, то $x_n(t) \to 0$ для любого $t \in [0, T]$.

Если условие 2 выполняется равномерно по t на отрезке $[0, T]$, задача называется *равномерно корректной*. Задачу, (равномерно) корректную на отрезке $[0, T]$ для любого $T > 0$, назовём (*равномерно*) *корректной* на $\mathbb{R}_+$.

Перейдём теперь к формулировке критериев, позволяющих установить корректную разрешимость в классическом смысле задачи (33)–(34). Сформулируем необходимое и достаточное условие равномерной корректности однородной задачи (33)–(34).

Теорема 1.3.1. ([21], гл. 2, теорема 1.2) *Пусть в уравнении* (33) $F(t) \equiv 0$ *и* $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$. *Задача* (33)–(34) *равномерно корректна на* $\mathbb{R}_+$ *тогда и только тогда, когда оператор* $\mathcal{A}$ *является генератором сильно непрерывной на* $\mathbb{R}_+$ *полугруппы* $U(t)$. *Решение при этом задаётся формулой*

$$x(t) = U(t)x_0.$$

Для неоднородной задачи имеем

Теорема 1.3.2 ([21], гл. 2, теорема 1.3) *Пусть оператор* $\mathcal{A}$ *порождает сильно непрерывную полугруппу* $U(t)$, $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, $F(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, *тогда задача* (33)–(34) *имеет единственное классическое решение, которое задаётся формулой*

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_0^t U(t-s)F(s)ds.$$

Задачу Коши вида (33)–(34) можно несколько ослабить, требуя выполнения уравнения (33) лишь при $t > 0$, определяя решение этой задачи следующим образом ([37], гл. 1, п. 3)

Определение 1.3.3 *Ослабленным решением* задачи (33)–(34) на $\mathbb{R}_+$ называется вектор-функция $x(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, H) \cap C^1(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, H)$, удовлетворяющая уравнению (33) при всех $t > 0$ и начальному условию (34).

Если оператор $\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы, то имеем следующую теорему о разрешимости ([21], гл. 2, теорема 1.4.).

Теорема 1.3.3. *Пусть оператор* $\mathcal{A}$ *является генератором полугруппы* $U(z)$, *аналитической в угле* $\Delta_\delta = \{\lambda : |\arg \lambda| < \delta\}$. *Пусть* $F(t)$ *является локально гёльдеровой, то есть для каждого* $T > 0$ *найдутся числа* $k = k(T)$, $\alpha = \alpha(T) \in (0, 1]$, *что*

$$\|F(t) - F(s)\| \leq k|t-s|^\alpha, \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

Тогда задача (33)–(34) *имеет единственное ослабленное решение для каждого* $x_0 \in H$. *При этом, если* $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, *то указанное решение будет классическим.*

Заметим, что в условиях теоремы 1.3.3 задача (33)–(34) имеет ослабленное решение при любом начальном условии. Такие задачи называются *параболическими.* К этому классу относится интегро-дифференциальное уравнение, анализу которого посвящены последующие главы настоящей работы.

1.4 Некоторые утверждения теории операторов

Пусть A — самосопряжённый положительно определённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а C — симметрический, компактный относительно оператора A.

Определение 1.4.1 ([33], гл. 4, п. 3) Оператор C называется *компактным относительно оператора* A, если

1. $\mathrm{Dom}(C) \supset \mathrm{Dom}(A)$;

2. Для произвольной последовательности $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $h_n \in \mathrm{Dom}(A)$ такой, что $\{Ah_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена, последовательность $\{Ch_n\}_{n=1}^{+\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Если оператор A имеет компактный обратный, то непосредственно из определения 1.4.1 и определения компактного оператора вытекает

Предложение 1.4.1. *Пусть A^{-1} — компактен, тогда оператор C компактен отностительно оператора A в том и только том случае, когда CA^{-1} — компактен.*

Для самосопряжённого положительно определённого оператора A, используя спектральное разложение, можно определить любую его степень A^{θ}, $\theta \in \mathbb{R}$ ([48], п. 120). Превратим $\mathrm{Dom}(A^{\theta})$ в гильбертово пространство H_{θ} со скалярным произведением

$$(h_1, h_2)_{\theta} := \left(A^{\theta} h_1, A^{\theta} h_2\right).$$

Полнота вытекает из замкнутости оператора A. Норму в пространстве H_{θ} будем записывать как $\|\cdot\|_{\theta} := \left\|A^{\theta}\cdot\right\|$ Рассмотрим шкалу гильбертовых пространств $\{H_{\theta}\}_{0\le\theta\le 1}$. Сформулируем теорему об интерполяции ([39], гл. 1, теорема 5.1).

Теорема 1.4.1. *Пусть T является линейным ограниченным оператором в пространствах H и H_1 одновременно, тогда для любого $\theta \in (0,1)$ T — ограниченный оператор в пространстве H_{θ}.*

Как простое следствие из только что сформулированной теоремы докажем утверждение, важное для дальнейшего изложения.

Предложение 1.4.2. *Пусть оператор A самосопряжённый положительно определённый, оператор C симметрический,* $\mathrm{Dom}(C) \supset \mathrm{Dom}(A)$, CA^{-1} *ограничен в H. Тогда для любого $\theta \in (0,1)$ оператор $A^{-1+\theta} C A^{-\theta}$ имеет ограниченное замыкание в H.*

Доказательство. Оператор $A^{-1}C$ ограничен как оператор в пространстве H_1, поскольку для любого $h_1 \in H_1$

$$\left\|A^{-1}Ch_1\right\|_1 = \left\|AA^{-1}Ch_1\right\| = \left\|CA^{-1}Ah_1\right\| \leq \left\|CA^{-1}\right\| \|Ah_1\| = \left\|CA^{-1}\right\| \|h_1\|_1 .$$

Далее заметим, что $A^{-1}C$ допускает ограниченное замыкание в H. Действительно, ввиду свойств операторов A и C для любых $h_1, h_2 \in H_1 = \mathrm{Dom}(A)$ справедливо

$$\left(CA^{-1}h_1, h_2\right) = \left(h_1, A^{-1}Ch_2\right),$$

то есть $A^{-1}C = (CA^{-1})^*$ на всюду плотном множестве $\mathrm{Dom}(A)$. Поскольку $(CA^{-1})^*$ ограничен, справедливо равенство $\overline{A^{-1}C} = (CA^{-1})^*$. Выберем в качестве оператора T в теореме 1.4.1 оператор $\overline{A^{-1}C}$, тогда оператор $\overline{A^{-1}C}$ ограничен как оператор H_θ для всех $\theta \in (0,1)$. Отсюда вытекает, что для любого $h_\theta \in H_\theta = \mathrm{Dom}(A^\theta)$

$$\left\|\overline{A^{-1}C}\right\|_\theta \|h_\theta\|_\theta \geq \left\|\overline{A^{-1}C}h_\theta\right\|_\theta = \left\|A^\theta\overline{A^{-1}C}A^{-\theta}A^\theta h_\theta\right\| = \left\|\overline{A^{-1+\theta}CA^{-\theta}}A^\theta h_\theta\right\|. \tag{35}$$

В силу непрерывной обратимости оператора A для каждого $h \in H$ найдётся $h_\theta \in H_\theta$, что $h = A^\theta h_\theta$. Подставляя h в (35), имеем

$$\left\|\overline{A^{-1+\theta}CA^{-\theta}}h\right\| \leq \left\|\overline{A^{-1}C}\right\|_\theta \|h\|$$

для любого $h \in H$. Тем самым предложение доказано.

Предложение 1.4.2 сформулировано в виде замечания в работе ([76], замечание 7.3).

1.5 Постановка задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, описывающего движения вязкоупругих среды с учётом трения Кельвина–Фойгхта

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим следующую задачу Коши для абстрактного интегро-дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \alpha A\frac{du}{dt}(t) + (A + C)u(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \tag{36}$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1. \tag{37}$$

Функция $K(t)$ задаётся интегралом Лебега-Стилтьеса:

$$K(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu(\tau), \tag{38}$$

с неубывающей, непрерывной справа функцией μ такой, что $\operatorname{supp} d\mu \subset [d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$. При этом справедливо условие

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1. \tag{39}$$

Предположим, что операторы A и C удовлетворяют следующим свойствам:

1. (A) Оператор A — самосопряжённый и положительно определённый: $A = A^*$, $A \geq aI$, где $a > 0$. Обратный к нему оператор A^{-1} — компактный.

2. (B) Оператор C — симметрический, $\mathrm{Dom}(C) \supset \mathrm{Dom}(A)$ и оператор CA^{-1} — компактный.

3. (C) $\left\| \overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}} \right\| < 1 - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}$.

Параметр α — положительная постоянная, которая пропорциональна *коэффиценту трения Кельвина–Фойгхта.* Отметим, что ситуация, когда $\alpha = 0$, соответствует классу уравнений, которые называются *уравнениями Гуртина–Пипкина* ([12], гл. 3), и имеет значительное число реализаций в теплофизике, акустике, теории усреднения.

В настоящей работе задача (36)–(37) будет изучена на предмет классической корректной разрешимости, получены оценки скорости убывания решения, а также в частном случае представление самого решения. Изучение упомянутых вопросов составляет содержание глав 3–4.

1.6 Реализации в виде интегро-дифференциальных уравнений с частными производными в теории вязкоупругости

Абстрактное интегро-дифференциальное уравнение (36) может быть реализовано как интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, где операторы A и C соответствуют дифференциальным операторам по пространственным переменным. Приведём примеры таких реализаций в различных задачах механики.

Сначала рассмотрим простую одномерную реализацию. Малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины $u(t, x)$ при

$t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ в безразмерных переменных без учёта внешнего трения описываются уравнением [41]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \alpha \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}(t,x) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right) - \int_0^t \frac{d}{dt} K(t-s) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(s,x) ds = 0, \tag{40}$$

$$t > 0, \quad 0 < x < 1.$$

Функция $g(x)$ — гладкая ограниченная вещественная функция, пропорциональная неоднородной силе натяжения. Краевые условия для уравнения (40) задаются в предположении шарнирного закрепления концов трубы:

$$u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,1) = 0, \quad t > 0. \tag{41}$$

При $t = 0$ заданы начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \varphi_1(x), \quad 0 < x < 1. \tag{42}$$

Уравнение (40) с краевыми и начальными условиями (41)–(42) запишем в операторном виде, рассмотрев сепарабельное гильбертово пространство $H = L_2[0,1]$ и операторы A и C, действующие следующим образом:

$$Ay(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}(x), \quad Cy(x) = \frac{d}{dx}\left(g(x) \frac{dy}{dx}(x) \right), \tag{43}$$

на функциях $y(\cdot) \in \mathrm{Dom}(A) = \{y |\ y \in W_2^4[0,1],\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0\}$. Неизвестную фунцию $u(t,x)$ рассматриваем как вектор-функцию $u(t)$ со значениями в H, а начальные условия φ_0 и φ_1 — как некоторые векторы в H. Во ведённых обозначениях эта задача, очевидно, принимает вид (36). В работе [41] изучался вопрос об экспоненциальной устойчивости решения абстрактной формы указанной задачи.

В работах Д.А. Закоры [26]—[30] широко представлены различные реализации абстрактной модели вида (36). Так движения начально-изотропного вязкоупругого тела Ильюшина, занимающего ограниченный объём $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и закреплённого на границе $\partial\Omega$, при изометрических процессах деформирования могут быть описаны следующим интегро-дифференциальным уравнением

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{2}\Delta u(t,x) + \frac{c}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(t,x)\right) + \left(\frac{c}{2}\Delta u(t,x) + \frac{c}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(t,x)\right) -$$
$$- \int_0^t K_1(t-s)\left(\frac{1}{2}\Delta u(s,x) + \frac{1}{6}\nabla \mathrm{div}\ u(s,x)\right) ds - \int_0^t K_2(t-s)\nabla \mathrm{div}\ u(s,x) ds + \rho(x) f(t,x),$$
$$x \in \Omega, \tag{44}$$

с кравевыми и начальными условиями

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad u(0,x) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1.$$

Функция $\rho(x)$ — плотность тела, $f(t,x)$ — поле внешних сил, $c > 0$ — некоторая структурная постоянная. Ядра $K_1(t)$ и $K_2(t)$ отвечают слагаемым сдвиговой и объёмной релаксации и имеют вид

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-\gamma_j t},$$

$$K_2(t) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_j e^{-\tilde{\gamma}_j t},$$

$c_j, \tilde{c}_j \geq 0$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1}$, $0 < \tilde{\gamma}_j < \tilde{\gamma}_{j+1}$. Рассматривая дифференциальный оператор $-\frac{1}{2}\Delta u(s,x) - \frac{1}{6}\nabla \mathrm{div}\ y(x)$ как линейный оператор A в пространстве $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathrm{Dom}(A) = \left\{y \in W_2^2(\Omega) : y_{|\partial\Omega} = 0\right\}$ и полагая $K_2(t) \equiv 0$, получим уравнение в форме (36), где $C \equiv 0$.

1.7 О слагаемом типа вольтерровой свёртки

В задачах вида (36)–(37) слагаемое вольтерровой свёртки отвечает наследственным свойствам среды, то есть влиянию предыдущих состояний среды. Например, в задачах теории вязкоупругости в качестве наследственого свойства выступает вязкость среды, в задачах теплопровоности в средах с памятью [73], [40] — память. Ядро свёртки обуславливается некоторыми структурными параметрами среды и выбор его определяется экспериментальным путём (см. [44], гл. 2, и цитируемую литературу). Ввиду физических соображений [44], в задачах теории вязкоупругости на ядра $K(t)$ свёртки накладываются следующие ограничения:

1. Ядро $K(t)$ неотрицательно;

2. Ядро $K(t)$ монотонно убывает и стремится к конечному пределу при $t \to +\infty$;

3. Ядро $K(t)$ выпукло вниз.

Отметим, что указанные условия являются достаточными, и функции, которыми аппроксимируют ядра, обычно им удовлетворяют, однако при этом эти условия не являются необходимыми ([44], гл. 2, п. 18).

Во многих работах, посвящённых задачам вязоупругости и теплопроводности в качестве ядра рассматривается ряд убывающих экспонент

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t},$$

где $c_j > 0$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1} \to +\infty$. Подобный тип ядер удобен для изучения, ибо это единственный тип ядер, который позволяет свести изучение интегро-дифференциального уравнения к исследованию системы дифференциальных уравнений ([44], гл. 1, п. 4). Этот факт весьма важен для дальнейших рассмотрений, поскольку техника перехода от интегро-дифференциальных уравнений к дифференциальным будет существенно использована в дальнейшем (см. гл. 3–4). Заранее отметим, что этот подход будет обобщён на экспоненциальные ядра несколько более общего типа.

В настоящей работе рассматривается обобщение экспоненциального ядра, представимое в виде интеграла Лебега–Стильтьеса (38). Ясно, что рассматривая в указанном интеграле $d\mu(\tau)$ вида

$$d\mu(\tau) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \delta(\tau - \gamma_j) d\tau,$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, мы получим ядро экспоненциального типа.

Для задач теории вязкоупругости с внутренним трением (трением Кельвина-Фойгхта) в твёрдых телах большой интерес представляют дробно-экспоненциальные ядра, т.е. ядра вида

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j R_j(t),$$

где функция $R_j(t)$ определена равенством

$$R_j(t) = t^{\theta-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\gamma_j)^n t^{n\theta}}{\Gamma\left((n+1)\theta\right)}, \quad 0 < \theta \le 1,$$

здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Для последовательностей $\{c_j\}_{j=1}^{+\infty}$ и $\{\gamma_j\}_{j=1}^{+\infty}$ выполнено, что $c_j > 0$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1} \to +\infty$. Указанные ядра изучались в монографии [44]. При $\theta = 1$, очевидно, мы вернёмся к случаю экспоненциального ядра. Преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид (см [44], гл. 1)

$$\hat{R}_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\theta + \gamma_j}.$$

Здесь $\lambda^\theta = |\lambda|^\theta e^{i\theta \text{ arg } \lambda}$, $|\text{arg } \lambda| < \pi$. Применяя к $\hat{R}_j(\lambda)$ обратное преобразование Лапласа, можно получить интегральное представление $R_j(t)$ ([44], гл. 1)

$$R_j(t) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^\theta e^{-t\tau}}{\tau^{2\theta} + 2\gamma_j \tau^\theta \cos \pi\theta + \gamma_j} d\tau.$$

Это представление приводит к типу ядра $K(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu(\tau)$, где

$$d\mu(\tau) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\tau^\theta}{\tau^{2\theta} + 2\gamma_j \tau^\theta \cos \pi\theta + \gamma_j} d\tau.$$

Изучению задачи (36)–(37) для случая $\alpha = 0$ с дробно-экспоненциальными ядрами посвящены работы [13]—[19].

1.8 Заключение к первой главе

В настоящей главе разобраны вводные определения и обозначения (см. §1.1), а также представлен основной для дальнейшего исследования математический аппарат. В §1.2 приведены фундаментальные результаты теории полугрупп. Изложение этих результатов основывалось на монографии [64]. В §1.3 указана связь полугрупп операторов с эволюционными задачами, которая потом будет использована для получения важных следствий из основных результатов настоящей работы. В качестве источников §1.3 использованы монографии [37] и [21]. Наконец, в §1.4 рассмотрены некоторые вопросы из теории линейных операторов, в частности, вопрос о компактной подчинённости одного оператора другому, об ограниченных расширениях операторов вида $A^{-1+\theta} C A^{-\theta}$, $\theta \in [0, 1]$ (см. предложение 1.4.2.). Вопросы компактной и ограниченной подчинённости подробно изложены в монографии [33], предложение 1.4.2 сформулировано в работе [76].

Во второй части главы сформулирована задача Коши, исследованию которой посвящены все последующие главы. Она записана в абстрактном операторном виде, который может быть реализован как интегро-дифференциальное уравнение с частными производными. Подобные уравнения возникают в различных областях наследственной механики и некторые примеры приведены в §2.2. Особенностью данного семейства задач является слагаемое типа вольтерровой свёртки, которое отвечает наследственным свойствам среды. В §2.3 затронута мотивация выбора ядра вида (38).

В последующих главах перейдём непосредственно к решению задачи (36)–(37).

2 Спектральный анализ символа интегродифференциального уравнения и оценки его резольвенты

2.1 Введение

В настоящей главе будет проведён спектральный анализ оператор-функции $L(\lambda)$, заданной следующим равенством

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A. \tag{45}$$

Эта оператор-функция возникает в результате применения преобразования Лапласа к левой части равенства в уравнении (36) и называется *символом* этого уравнения. Функция $\hat{K}(\lambda)$ является образом Лапласа ядра вольтерровой свёртки (38), аналитически продолженным в область

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}\backslash(-\infty, -d_0), \tag{46}$$

и задаётся равенством

$$\hat{K}(\lambda) = \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}, \tag{47}$$

где мера $d\mu(\tau)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в §1.5.

Линейные операторы A и C удовлетворяют условиям (A)—(C) (см. §1.5).

В настоящей главе будет изучаться спектр оператор-функции $L(\lambda)$ в области $\mathcal{S}$. Для полноты изложения приведём здесь определение понятия спектра оператор-функции.

Определение 2.1.1 *Резольвентным множеством* оператор-функции L называется множество точек $\rho(L) \subset \mathbb{C}$ такое, что для всех точек $\lambda \in \rho(L)$ оператор $L^{-1}(\lambda)$ определён, ограничен и задан на всём пространстве. *Спектром* оператор-функции L называется множество $\sigma(L) := \mathbb{C}\backslash\rho(L)$.

Основные результаты относятся к вопросу о локализации спектра L в области $\mathcal{S}$. Отдельно будет рассмотрен вопрос о структуре невещественной части спектра, а также его асимптотического поведения.

Кроме исследования спектра, будут получены оценки нормы резольвенты $L^{-1}(\lambda)$ в точках резольвентного множества.

Результаты главы 2 изложены в §2.2, 2.3, 2.4. В §2.2 подробно изучен спектр символа уравнения (36) в случае, когда оператор C — нулевой, а также получены оценки нормы резольвенты. Это наиболее простой случай, ибо в этой ситуации оператор-функция является диагональным оператором в базисе из собственных векторов оператора A.

В §2.3 изложены результаты о локализации спектра и оценках резольвенты в случае ненулевого оператора C.

В §2.4 рассматривается вопрос о структуре невещественной части спектра оператор-функции L, а также о связи невещественной части спектра с ядром вольтерровой свёртки. В частности, рассмотрены виды ядер, при которых невещественный спектр будет счётным, а также получены некоторые условия, при которых невещественный спектр будет конечным.

2.2 Случай $C \equiv 0$

В этом разделе проведён анализ спектра оператор-функции

$$L_0(\lambda) := \lambda^2 + \alpha\lambda A + A - \hat{K}(\lambda)A. \tag{48}$$

Рассмотрим систему $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ собственных векторов оператора A, образующих ортонормированный базис в пространстве H: $Ae_n = a_n e_n$, причем $0 < a_n \leq a_{n+1} \to +\infty$.

Рассмотрим проекции оператор-функции $L_0(\lambda)$ на одномерные собственные подпространства оператора A:

$$l_n(\lambda) := (L_0(\lambda)e_n, e_n)_H = \lambda^2 + \alpha a_n \lambda + a_n - a_n \hat{K}(\lambda). \tag{49}$$

Сперва покажем, что функции $l_n(\lambda)$ не имеют нулей в замкнутой правой полуплоскости. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2.1. *Пусть выполнено условие* (39), *тогда функции $l_n(\lambda)$ не имеют корней в замкнутой правой полуплоскости $\mathbb{C}$ для любого натурального n.*

Доказательство. Пусть $\lambda = x + iy,\ x \geq 0$. Заметим, что

$$\mathrm{Im}\ l_n(x+iy) = 2xy + \alpha a_n y + a_n \int_0^{+\infty} \frac{y d\mu(\tau)}{|\tau + x + iy|^2},$$

причем $\mathrm{Im}\ l_n(x+iy) = 0$ верно только лишь в случае, когда $y = 0$, тем самым в замкнутой правой полуплоскости функция $l_n(\lambda)$ может иметь лишь вещественные нули. Последнее же, однако, невозможно, поскольку при всех $x \geq 0$

$$l_n(x) = x^2 + \alpha a_n x + a_n \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + x}\right) \geq x^2 + \alpha a_n x + a_n \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right) > 0,$$

ввиду условия (39). Лемма доказана.

Изучим теперь нули функций $l_n(\lambda)$ в $\mathcal{S} \cap \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$. Прежде всего рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = \alpha\lambda + 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}. \tag{50}$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.2.2. *Пусть выполнено условие* (39), *а также в дополнение к нему справедливо неравенство*

$$\lim_{x \to -d_0+0} \left(\alpha x + 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + x} \right) < 0, \tag{51}$$

где x стремится к d_0 по действительной оси, а предел в левой части неравенства может быть бесконечным. Тогда функция $g(\lambda)$ имеет в $\mathcal{S}$ единственный корень λ_0, причем $\lambda_0 \in (-d_0, 0)$.

Если же условие (51) *не выполняется, то $g(\lambda)$ не имеет корней в $\mathcal{S}$, причем $g(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (-d_0, +\infty)$.*

Доказательство. Функция $g(\lambda)$ не имеет невещественных корней, ибо очевидно, что

$$\mathrm{Im}(\alpha\lambda + 1) \cdot \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda} < 0$$

для невещественных λ. Далее, ввиду (39), функция $g(\lambda)$ может иметь лишь отрицательные корни. Наконец, заметим, что на $(-d_0, 0)$ функция $g(x)$ монотонно возрастает и непрерывна, причем $g(0) > 0$, следовательно, если выполнено условие (51), то функция $g(x)$ меняет знак, а значит, имеет корень λ_0. В противном случае $g(\lambda)$ не имеет вещественных корней в $\mathcal{S}$. Утверждение доказано.

Теперь установим поведение нулей функций $l_n(\lambda)$ во всей области $\mathcal{S}$. Для доказательства следующей леммы используется известная теорема[32] (гл. 4, п. 70, теорема 3). Пусть для $z_1, z_2 \in \{\mathrm{Im}\ z > 0\}$ определено неевклидово расстояние:

$$D(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|\overline{z}_1 - z_2| + |z_1 - z_2|}{|\overline{z_1} - z_2| - |z_1 - z_2|}.$$

Теорема Шварца–Пика. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция, отличная от константы, отображающая верхнюю полуплоскость в себя, тогда для любых двух внутренних точек верхней полуплоскости z_1 и z_2 выполнено неравенство*

$$D(f(z_1), f(z_2))) \leq D(z_1, z_2),$$

причем равенство достигается только в случае, если $f(z)$ — дробно-линейное отображение, переводящее верхнюю полуплоскость на себя.

Следующая лемма доказана в работе [65], однако для полноты изложения приведём здесь подробное доказательство.

Лемма 2.2.3. *Функция $l_n(\lambda)$, определенная равенством (49), для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет не более двух невещественных корней, причем эти корни комплексно сопряжены.*

Доказательство. Тот факт, что все невещественные нули функции $l_n(\lambda)$ комплексно-сопряжены, очевидно, следует из того, что все коэффициенты $l_n(\lambda)$ вещественны, т.е. $l_n(\overline{\lambda}) = \overline{l_n(\lambda)}$.

Уравнение $l_n(\lambda) = 0$ запишем в виде равенства

$$\lambda^2 = -\alpha a_n \lambda - a_n \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}\right).$$

Заметим, что функция $\varphi_n(\lambda) := -\alpha a_n \lambda - a_n \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}\right)$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{C}_-$. Действительно, для $\mathrm{Im}\lambda > 0$ справедливо

$$\mathrm{Im}\left(-\alpha a_n \lambda - a_n \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}\right)\right) = -\alpha a_n \mathrm{Im}\lambda - a_n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\tau + \lambda|^2} d\mu(\tau) < 0.$$

Рассмотрим функцию $\psi_0(z)$, где $\psi_0(z) = |z|^{1/2} e^{i \arg z/2}$. Отметим, что $\psi_0(\phi_n(\lambda))$ — аналитична в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и переводит $\mathbb{C}_+$ в себя. Невещественные корни уравнения $l_n(\lambda) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости, являются корнями уравнения

$$\lambda = \psi_0\left(\phi_n(\lambda)\right). \tag{52}$$

Предположим λ_1 и λ_2 — различные точки из $\mathbb{C}_+$, удовлетворяющие равенству (52). Функция $\psi_0\left(\phi_n(\lambda)\right)$ удовлетворяет условиям теоремы Шварца-Пика и не является дробно-линейной. Отсюда приходим к противоречию

$$D(\lambda_1, \lambda_2) = D\left(\psi_0\left(\phi_n(\lambda_1)\right), \psi_0\left(\phi_n(\lambda_2)\right)\right) < D(\lambda_1, \lambda_2).$$

Следовательно, уравнение (52) имеет не более одного решения в $\mathbb{C}_+$, а функция $l_n(\lambda)$ имеет не более одной пары комплексно-сопряжённых корней. Лемма доказана.

В следующей лемме установим локализацию невещественных корней $l_n(\lambda)$.

Лемма 2.2.4. *Если выполнено условие* (39), *то существуют положительные постоянные* p *и* q, *не зависящие от* n, *такие, что невещественные корни* $l_n(\lambda)$ *содержатся в области*

$$D_{p,q,n} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ \lambda < -\frac{\alpha a_n}{2}, \quad |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q\right\}. \tag{53}$$

Доказательство. Пусть $\lambda = x + iy$, $y > 0$ и $l_n(\lambda) = 0$, тогда

$$\mathrm{Im}\ l_n(\lambda) = 2xy + \alpha a_n y + a_n \int_0^{+\infty} \frac{y d\mu(\tau)}{|\tau + \lambda|^2} = 0,$$

тем самым

$$x = -\frac{\alpha a_n}{2} - a_n \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + \lambda|^2},$$

откуда немедленно получаем оценку вещественных частей комплексно-сопряженных корней функции $l_n(\lambda)$:

$$x < -\frac{\alpha a_n}{2}. \tag{54}$$

Оценим теперь мнимые части. Запишем

$$l_n(\lambda) = f_n(\lambda) - a_n \hat{K}(\lambda), \tag{55}$$

где $f_n(\lambda) = \lambda^2 + \alpha a_n \lambda + a_n$.

Далее потребуется оценка $f_n(\lambda)$ в верхней полуплоскости

$$\left|\frac{f_n(x+iy)}{a_n}\right| \geq \alpha y - 1, \tag{56}$$

которая устанавливается следующим образом:

$$\left|\frac{f_n(x+iy)}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+iy)^2}{a_n} + \alpha(x+iy) + 1\right| \geq |x+iy|^2 \left|\frac{1}{a_n} + \alpha\frac{1}{x+iy}\right| - 1 =$$

$$= (x^2+y^2)\left|\mathrm{Im}\left(\frac{1}{a_n} + \alpha\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)\right| - 1 = \alpha y - 1.$$

Для функции $\hat{K}(x+iy)$ при $y > 0$ справедлива оценка

$$|\hat{K}(x+iy)| < \frac{2|x|}{y} + 2.$$

Действительно,

$$|\hat{K}(x+iy)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + x + iy}\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + x + iy|} = \int_0^{2|x|} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + x + iy|} + \int_{2|x|}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + x + iy|}.$$

Оценим первый интеграл в правой части цепочки неравенств следующим образом:

$$\int_0^{2|x|} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + x + iy|} < \frac{1}{y} \int_0^{2|x|} d\mu(\tau) \leq \frac{1}{y} \int_0^{2|x|} \frac{2|x| d\mu(\tau)}{\tau} < \frac{2|x|}{y}.$$

Последнее неравенство вытекает из условия (39). Второй интеграл ввиду того, что $|\tau + x + iy| > \tau - |x| > \tau/2$ при $\tau > 2|x|$, допускает оценку

$$\int_{2|x|}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + x + iy|} < 2 \int_{2|x|}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 2.$$

Последнее неравенство вытекает из (39).

Заметим, что если справедливо неравенство

$$\alpha y - 1 > \frac{2|x|}{y} + 2, \tag{57}$$

то $|f_n(x+iy)/a_n| > |\hat{K}(x+iy)|$, а значит, в области $D \subset \mathbb{C}$, на границе которой выполняется (57), по теореме Руше функция $l_n(\lambda)$ имеет столько же нулей, сколько и функция $f_n(\lambda)$. Неравенство (57) выполняется при

$$y > \frac{3 + \sqrt{9 + 8\alpha|x|}}{2\alpha}. \tag{58}$$

Существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $f_n(\lambda)$ имеет только вещественные корни для всех $n > n_0$, следовательно, в области

$$D = \left\{ \ |\mathrm{Im}\ \lambda| > \frac{3 + \sqrt{9 + 8\alpha|\mathrm{Re}\ \lambda|}}{2\alpha} \right\}$$

функция $f_n(\lambda)$ не имеет корней, а значит, и функция $l_n(\lambda)$ не имеет корней в силу (58) и теоремы Руше при $n > n_0$.

В силу того, что $l_n(\lambda)$ имеет не более одной пары комплексно-сопряженных корней, лишь конечное число корней $l_n(\lambda)$ может оказаться в области D при $n \leq n_0$. Максимум их мнимых частей обозначим через C. Таким образом, в области

$$D_C = \left\{ |\mathrm{Im}\ \lambda| > \frac{\sqrt{9 + 8\alpha|\mathrm{Re}\ \lambda|}}{2\alpha} + \max\left(C, \frac{3}{2\alpha}\right) \right\}$$

при любом натуральном n функция $l_n(\lambda)$ не имеет корней. Тем самым для мнимых частей невещественных корней $l_n(\lambda)$ справедлива оценка

$$|\mathrm{Im}\ \lambda| \leq \frac{\sqrt{9 + 8\alpha|\mathrm{Re}\ \lambda|}}{2\alpha} + \max\left(C, \frac{3}{2\alpha}\right). \tag{59}$$

Теперь, объединяя оценки (54) и (59) и оценивая

$$\sqrt{9+8\alpha|\mathrm{Re}\ \lambda|} < \sqrt{\frac{18}{\alpha a_n}+8\alpha}\cdot\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} \le \sqrt{\frac{18}{\alpha a_1}+8\alpha}\cdot\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|},$$

получаем область (53), где $p := \sqrt{\dfrac{18}{\alpha a_1}+8\alpha}$ и $q := \max\left(C, \frac{3}{2\alpha}\right)$. Лемма доказана.

Отдельно следует отметить поведение вещественных нулей функций $l_n(\lambda)$.

Лемма 2.2.5. *Пусть выполнено условие* (51), *тогда для любого $\delta > 0$ найдется число n_0 такое, что для всех $n > n_0$ функция $l_n(\lambda)$ имеет единственный вещественный корень в $\mathcal{S}$, лежащий на интервале $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$, где λ_0 — корень функции из формулы* (50).

Если же условие (51) *не выполнено, то $l_n(\lambda)$ не имеет вещественных корней.*

Доказательство. Пусть условие (51) выполнено, тогда по доказанной лемме 2.2.2 у функции $g(\lambda)$ есть вещественный корень λ_0 на интервале $(-d_0, 0)$.

Имеем

$$\frac{l_n(\lambda)}{a_n} = \frac{\lambda^2}{a_n} + g(\lambda).$$

Поскольку $a_n \to +\infty$, $l_n(\lambda)/a_n$ равномерно на любом компакте $\mathcal{S}$ сходится к $g(\lambda)$, следовательно, по теореме Руше для любой окрестности точки λ_0 найдется некоторый номер n_0, начиная с которого все функции $l_n(\lambda)$ обращаются в 0 в этой окрестности причём в единственной точке. Заметим, что в силу леммы 2.2.4 эта точка вещественная при $-\alpha a_{n_0} < -2d_0$.

Если условие (51) не выполнено, то $g(\lambda) > 0$ на $(-d_0, 0)$ ввиду монотонности, поэтому вторая часть леммы вытекает из очевидной оценки:

$$l_n(\lambda) = a_n\left(\frac{\lambda^2}{a_n} + g(\lambda)\right) > a_n g(\lambda) > 0$$

при $\lambda \in (-d_0, 0)$. В силу того, что в замкнутой правой полуплоскости нет нулей у $l_n(\lambda)$ по лемме 2.2.1, $l_n(\lambda)$ не имеет вещественных корней. Лемма доказана.

Замечание 2.2.1. Из доказательства леммы 2.2.5 вытекает, что если $\lambda_0 \in (-d_0, 0)$ — корень функции $g(\lambda)$, то $\lambda_0 \in \overline{\cup_{n=1}^{+\infty}\{\lambda\in\mathbb{C} : l_n(\lambda) = 0\}}$.

Теперь сформулируем и докажем теорему о локализации спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$. Для её доказательства потребуется известная теорема Гохберга (см. [22], гл. 1, теорема 5.1). Приведём её в следующей формулировке:

Теорема (И.Ц. Гохберг). *Пусть $Q(\lambda)$ — голоморфная на открытом связном множестве G оператор-функция со значениями в идеале компактных операторов Σ_∞. Если хотя бы в одной точке $\lambda \in G$ уравнение $\varphi + Q(\lambda)\varphi = 0$ имеет лишь нулевое решение, то для всех точек $\lambda \in G$, за исключением, быть может, некоторых изолированных, оператор $I + Q(\lambda)$ имеет ограниченный обратный.*

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнено условие* (39), *тогда спектр оператор-функции $L_0(\lambda)$ состоит из счетной последовательности пар комплексно-сопряженных собственных точек конечной кратности, локализованных в области*

$$D_{\gamma,p,q} = \left\{\lambda \in \mathcal{S} : \mathrm{Re}\ \lambda < -\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q\right\}, \tag{60}$$

где $\gamma > 0$, p и q — положительные константы, как в (53).

При этом если выполнено условие (51), *то $\sigma(L_0)$ содержит последовательность конечнократных вещественных собственных значений, сходящихся к единственному корню функции $g(\lambda)$ из формулы* (50), *лежащему в интервале $(-d_0, 0)$. В противном случае вещественных точек в $\sigma(L_0) \cap \mathcal{S}$ нет.*

Доказательство. Докажем сначала, что спектр оператор-функции $L_0(\lambda)$ в области $\mathcal{S}$ задаётся равенством

$$\sigma(L_0) \cap \mathcal{S} = \overline{\cup_{n=1}^{+\infty} \{\lambda \in \mathcal{S} : l_n(\lambda) = 0\}}. \tag{61}$$

Действительно, представим оператор-функцию $L_0(\lambda)$ в следующем виде:

$$L_0(\lambda) = \left(\left(\alpha\lambda + 1 - \hat{K}(\lambda)\right) I + \lambda^2 A^{-1}\right) A = \left(g(\lambda)I + \lambda^2 A^{-1}\right) A.$$

В точках λ таких, что $g(\lambda) \neq 0$ к оператор-функции $g(\lambda)I + \lambda^2 A^{-1}$ применим теорему Гохберга. Из этой теоремы, а также леммы 2.2.2 вытекает, что все точки $\lambda \in \mathcal{S}$, за исключением, быть может, единственной $\lambda_0 \in (-d_0, 0)$, являются либо точками резольвентного множества, либо изолированными собственными числами конечной алгебраической кратности. Если выполнено условие (50), то найдётся точка $\lambda_0 \in (-d_0, 0)$, в которой выполнено $g(\lambda_0) = 0$. При этом оператор $L_0(\lambda_0) = \lambda_0^2 I$ как оператор из области $\mathrm{Dom}(A)$ в пространство H не имеет обратного, образ которого совпадает с H, тем самым $\lambda_0 \in \sigma(L)$, а именно: λ_0 — точка непрерывного спектра, ибо $\mathrm{Dom}(A)$ плотно в H.

Пусть точка $\lambda \in \sigma(L)$, $\lambda \neq \lambda_0$, тогда существует ненулевой вектор $h \in \mathrm{Dom}(A)$ такой, что $L_0(\lambda)h = 0$. Раскладывая h по базису из собственных векторов оператора A: $h = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n e_n$, получаем

$$L_0(\lambda)h = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n l_n(\lambda) e_n = 0.$$

В силу линейной независимости $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$, устанавливаем $\lambda \in \cup_{n=1}^{+\infty} \{\lambda \in \mathcal{S} : l_n(\lambda) = 0\}$.

Если же $\lambda = \lambda_0 \in \sigma(L_0)$, то, как указано в замечании 2.2.1, $\lambda_0 \in \overline{\cup_{n=1}^{+\infty} \{\lambda \in \mathcal{S} : l_n(\lambda) = 0\}}$, таким образом, равенство (61) полностью доказано.

В силу равенства (61) из леммы 2.2.2 вытекает, что оператор-функция $L_0(\lambda)$ не имеет точек спектра в замкнутой правой полуплоскости. Далее из леммы 2.2.4 следует, что оператор-функция $L_0(\lambda)$ имеет не более чем счётное число невещественных точек в левой полуплоскости, которые при этом являются собственными числами конечной алгебраической кратности, локализованными в области (60).

Наконец, докажем что спектр $\sigma(L_0)$ отделен от мнимой оси. Невещественная часть спектра отделена от мнимой оси прямой $\{\mathrm{Re}\lambda = -\alpha a_1/2\}$. Если выполнено условие (50), то все вещественные точки спектра лежат в интервале $(-d_0, \lambda_0)$, где λ_0 — корень функции $g(\lambda)$. В противном случае в области $\mathcal{S}$ нет вещественных точек спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$. Постоянную γ из условия теоремы полагаем равной $\min(\alpha a_1/2, -\lambda_0)$. Теорема доказана.

Если выполнено условие

$$K(0) = \int_0^{+\infty} d\mu(\tau) < +\infty, \qquad (62)$$

то результат теоремы 2.2.1 можно существенно уточнить. Для этого сначала докажем следующую лемму

Лемма 2.2.6. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и условие* (62), *тогда для любого натурального n функция* $l_n(\lambda)$, *определённая равенством* (49), *не имеет нулей в области*

$$\left\{ \mathrm{Re}\lambda < -\frac{\alpha a_1}{2},\ |\mathrm{Im}\lambda| \geq \frac{K(0) + \sqrt{(K(0))^2 + (\alpha|\mathrm{Re}\ \lambda|^2 - 2|\mathrm{Re}\ \lambda|) \int_{|\mathrm{Re}\ \lambda|/2}^{+\infty} d\mu(\tau)}}{\alpha|\mathrm{Re}\ \lambda| - 2} \right\}. \qquad (63)$$

Доказательство. Заметим, что для $f_n(\lambda) = \dfrac{\lambda^2}{a_n} + \alpha\lambda + 1$ справедлива оценка

$$|f_n(x+iy)| = \left|\frac{(x+iy)^2}{a_n} + \alpha(x+iy) + 1\right| = |x+iy|^2 \left|\frac{1}{a_n} + \alpha\frac{x-iy}{x^2+y^2} + \frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \geq$$

$$\geq (x^2+y^2)\left|\alpha\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right| \geq \alpha|y| - \frac{2|y|}{|x|}. \qquad (64)$$

Далее, ввиду условия (62), оценку для $\hat{K}(\lambda)$, полученную при доказательстве леммы 2.2.4, можно уточнить следующим образом:

$$\left|\hat{K}(x+iy)\right| = \left|\int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + x + iy}\right| < 2\int_{d_0}^{|x|/2} \frac{d\mu(\tau)}{|x|} + \int_{|x|/2}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|y|} \leq \frac{2}{|x|}K(0) + \frac{1}{|y|}\int_{|x|/2}^{+\infty} d\mu(\tau). \qquad (65)$$

Для каждого фиксированного $x < 0$ найдём $y(x)$ такое, что для любого $|y| > |y(x)|$ в точке $\lambda = x + iy$ выполнено неравенство

$$|f_n(\lambda)| \geq |\hat{K}(\lambda)|. \qquad (66)$$

В этом случае в области $\{\lambda = x + iy \in \mathbb{C}: \ |y| > |y(x)|, \ x < 0\}$ функции $l_n(\lambda) = a_n\left(f_n(\lambda) - \hat{K}(\lambda)\right)$ по теореме Руше не имеют корней для всех натуральных n. В силу оценок (64), (65) для выполнения неравенства (66) достаточно найти $y(x)$, при котором будет справедливо неравенство

$$\left(\alpha - \frac{2}{|x|}\right)|y| > \frac{2}{|x|}K(0) + \frac{1}{|y|}\int_{|x|/2}^{+\infty} d\mu(\tau).$$

Разрешая последнее неравенство относительно $|y|$, установим

$$|y(x)| = \frac{K(0) + \sqrt{(K(0))^2 + (\alpha|x|^2 - 2|x|)\int_{|x|/2}^{+\infty} d\mu(\tau)}}{\alpha|x| - 2}.$$

Это завершает доказательство леммы.

Из только что доказанной леммы вытекает

Теорема 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.1 пусть выполнено условие* (62), *тогда невещественная часть спектра оператор-функции* L_0 *представляет собой последовательность собственных чисел конечной алгебраической кратности, мнимые части которых стремятся к нулю, причём найдётся такая постоянная* $M > 0$, *что для всех натуральных* n *справедлива оценка*

$$\left|\operatorname{Im}\,\lambda_n^{\pm}\right| < M\left(\frac{K(0)}{\alpha^2 a_n} + \sqrt{\frac{\int_{\alpha a_n/4}^{+\infty} d\mu(\tau)}{\alpha}}\right), \qquad (67)$$

где $\lambda_n^{\pm}$ *— невещественные точки спектра* $L_0(\lambda)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 2.2.4, а именно:

$$\mathrm{Re}\ \lambda_n^{\pm} < -\frac{\alpha a_n}{2},$$

а также оценки (63) для $|\mathrm{Im}\ \lambda_n^{\pm}|$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.2.2, очевидно, следует, что в случае, когда $K(0) < +\infty$, невещественный спектр оператор-функции $L_0(\lambda)$ стремится к отрицательной полуоси. Заметим, что несмотря на эти результаты, для установления асимптотики невещественной части спектра условий, налагаемых на функцию $K(t)$, недостаточно. Более того, их недостаточно, чтобы утверждать, будет ли невещественная часть спектра конечным или счётным множеством. В §2.4 настоящей главы изучим этот вопрос подробнее, а также приведём соответствующие примеры.

Отметим, что изложенные результаты о локализации спектра являются обобщением аналогичных результатов, полученных в работе [24], на случай ядер $K(t)$, представимых в виде интеграла Лебега–Стилтьеса.

Приведем теперь оценки нормы резольвенты $L_0^{-1}(\lambda)$, которые потребуются для дальнейших рассмотрений. Введем обозначения:

$$\mathcal{S}_{R,\delta} := \{\lambda \in \mathcal{S} : |\lambda| > R,\ |\arg\lambda| < \pi - \delta\}\,, \tag{68}$$

$$\mathcal{S}_R := \{\lambda \in \mathcal{S} : |\lambda| > R\}$$

и

$$\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q} := \mathcal{S}_R \backslash \overline{D_{\gamma,p,q}}, \tag{69}$$

где область $D_{\gamma,p,q}$ определена в (60).

Теорема 2.2.3. *В условиях теоремы* 2.2.1 *для любого* $\delta \in (0,\pi/2)$ *существуют* $R > 0$ *и* $C > 0$, *такие, что в* $\mathcal{S}_{R,\delta}$ *справедлива оценка*

$$\left\|AL_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{C}{|\lambda|}. \tag{70}$$

Существуют положительные постоянные $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, *такие, что для каждого* $\delta \in (0,\pi/2)$ *существуют такие* $R > 0$ *и* $C > 0$, *что в области* $\mathcal{S}_{R,\gamma,\tilde{p},\tilde{q}} \backslash \mathcal{S}_{R,\delta}$ *справедлива оценка*

$$\left\|AL_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{71}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\|AL_0^{-1}(\lambda)\| = \sup_n \left|\frac{a_n}{l_n(\lambda)}\right|,$$

где функция $l_n(\lambda)$ определена в (49).

Оценка (70) в правой полуплоскости может быть получена из следующих соображений:

$$\left|\frac{l_n(\lambda)}{a_n}\right| = \left|\frac{\lambda^2}{a_n} + \alpha\lambda + 1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda}\right| \geq \left|\frac{\lambda^2}{a_n} + \alpha\lambda\right| - 1 = |\alpha\lambda| \left|\frac{\lambda}{\alpha a_n} + 1\right| - 1 \geq |\alpha\lambda| - 1.$$

Рассмотрим случай $\lambda = x + iy \in \mathcal{S}_{R,\delta}$, $x < 0$. Для таких точек, ввиду неравенства (57), выполненного в области (69) при некоторых $p,\ q > 0$, выполнено

$$\left|\frac{l_n(x+iy)}{a_n}\right| > \alpha\,|y| - \left|\frac{2x}{y}\right| - 3. \tag{72}$$

В силу того, что $|y| > |x \operatorname{tg} \delta|$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{l_n(\lambda)}{a_n}\right| > \alpha|y| - 2|\operatorname{ctg} \delta| - 3$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, следовательно,

$$\|AL_0^{-1}(\lambda)\| = \sup_n \left|\frac{a_n}{l_n(x+iy)}\right| < \frac{1}{\alpha|y| - 2|\operatorname{ctg} \delta| - 3}. \tag{73}$$

Поскольку $|\lambda| > R$ и $|y| > |x \operatorname{tg} \delta|$, имеем $|y| > R/\sqrt{1 + (\operatorname{ctg} \delta)^2}$, откуда следует, что можно выбрать достаточно большое число R, такое, что

$$\frac{1}{\alpha|y| - 2|\operatorname{ctg} \delta| - 3} < \frac{C}{|y|}, \tag{74}$$

где $C > 0$. Замечая, что

$$|\lambda| < \sqrt{1 + (\operatorname{ctg} \delta)^2}|y|,$$

получаем из (73) и (74) неравенство (70).

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda = x + iy,\ |\lambda| > R,\ x < 0$, но $|y| \leq |x \operatorname{tg} \delta|$, отметив, что $|x| > R/\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \delta)^2}$. Пусть $|y_0| = \dfrac{3 + \sqrt{9 + 8\alpha|x|}}{2\alpha}$ — корень правой части (72). Выберем достаточно большое число R, чтобы выполнялись оценки

$$|y_0| < \frac{3}{2\alpha} + \frac{\sqrt{9/|x| + 8\alpha}}{2\alpha}\sqrt{|x|} < \frac{3}{2\alpha} + \frac{\sqrt{8\alpha + 8\alpha}}{2\alpha}\sqrt{|x|} < \frac{3}{2\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{|x|}$$

и

$$|x \text{ tg } \delta| > \frac{3}{2\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{|x|}.$$

Пусть y таково, что

$$\frac{3}{2\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{|x|} < |y| \leq |x \text{ tg } \delta|,$$

тогда справедливы оценки

$$\left|\frac{l_n(x+iy)}{a_n}\right| > \frac{3}{2} + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{|x|} - \frac{2|x|}{3/2\alpha + 2\sqrt{|x|}/\sqrt{\alpha}} - 3 >$$
$$> 2\sqrt{|x|}\sqrt{\alpha} - \frac{2|x|}{2\sqrt{|x|}/\sqrt{\alpha}} - \frac{3}{2} = \sqrt{\alpha}\sqrt{|x|} - \frac{3}{2}.$$

Из последней оценки вытекает, что при достаточно большом $R > 0$

$$\left|\sup_n \frac{a_n}{l_n(x+iy)}\right| < \frac{1}{\sqrt{\alpha|x|} - 3/2} < \frac{\tilde{C}}{\sqrt{|x|}},$$

где $\tilde{C}$ — положительное число. Заметим, что $|\lambda| \leq \sqrt{1 + (\text{tg } \delta)^2}|x|$, откуда

$$\left\|AL_0^{-1}(\lambda)\right\| = \sup_n \left|\frac{a_n}{l_n(x+iy)}\right| < \frac{\tilde{C}}{\sqrt{|x|}} < \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}},$$

где C — положительная постоянная. Полагая $\tilde{p} := 2/\sqrt{\alpha}$, $\tilde{q} := 3/2\alpha$, ввиду последней оценки получаем (71). Теорема доказана.

2.3 Случай $C \neq 0$

Сформулируем и докажем основные результаты настоящей работы о локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$, определённой равенством (45). Указанная оператор-функция возникает в результате применения преобразования Лапласа к левой части уравнения (36). В этом разделе докажем результаты о структуре и локализации спектра этой оператор-функции. В силу свойств (B)–(C) оператора C (см. §1.5) главную роль в асимптотическом поведении спектра будет играть ранее изученная оператор-функция $L_0(\lambda)$, определённая равенством (48), поэтому доказательство результатов настоящего раздела целиком основывается на свойствах спектра $L_0(\lambda)$ установленных ранее.

Сначала докажем утверждение об общей структуре спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Справедлива следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть операторы A и C удовлетворяют свойствам* (A)—(C) (см. §1.5), *тогда все точки спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в области $\mathcal{S}$, определённой формулой* (46), *являются собственными числам конечной алгебраической кратности, за исключением, быть может, единственной точки $\lambda_0 \in (-d_0, 0)$, являющейся корнем функции $g(\lambda)$, определённой равенством* (50).

Доказательство. Прежде всего заметим, что оператор $L(0) = \left(1 - \hat{K}(0)\right) A + C$ обратим. Это следует из теоремы о возмущении самосопряженного оператора симметрическим [25, гл. 5, теорема 4.11] и условия (B).

Далее представим $L(\lambda)$ в следующем виде:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A = \left(\lambda^2 A^{-1} + CA^{-1} + \left(1 + \alpha\lambda - \hat{K}(\lambda)\right) I\right) A.$$

Положим

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} + CA^{-1} + \left(1 + \alpha\lambda - \hat{K}(\lambda)\right) I = \lambda^2 A^{-1} + CA^{-1} + g(\lambda)I.$$

Ввиду обратимости оператора A оператор $L(\lambda)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим $\tilde{L}(\lambda)$. Предположим, что $g(\lambda)$ не имеет корней в $\mathcal{S}$. Запишем $\tilde{L}(\lambda)$ в виде

$$\tilde{L}(\lambda) = g(\lambda)\left((g(\lambda))^{-1}\left(\lambda^2 A^{-1} + CA^{-1}\right) + I\right) = g(\lambda)(Q(\lambda) + I),$$

где $Q(\lambda) := (g(\lambda))^{-1}\left(\lambda^2 A^{-1} + CA^{-1}\right)$ — голоморфная в $\mathcal{S}$ оператор-функция, принимающая значения в множестве компактных операторов. Оператор $L(0)$ обратим, следовательно, обратим оператор $\tilde{L}(0)$, откуда по теореме Гохберга $\tilde{L}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный во всех точках области $\mathcal{S}$, за исключением изолированных точек λ.

Докажем, что изолированные точки λ являются собственными точками конечной кратности оператор-функции $L(\lambda)$. Зафиксируем λ_1, тогда если оператор $\tilde{L}(\lambda_1) = \lambda_1^2 A^{-1} + CA^{-1} + g(\lambda_1)I$ не является ограниченно обратимым, то $\mu := -g(\lambda_1)$ есть ненулевая точка спектра компактного оператора $\lambda_1^2 A^{-1} + CA^{-1}$, которая, как известно [26, с. 471], является собственным числом конечной алгебраической кратности, а значит, λ_1 является конечнократной собственной точкой оператор-функций $\tilde{L}(\lambda)$ и $L(\lambda)$.

Наконец, если найдется точка $\lambda_0 \in (-d_0, 0)$, являющаяся корнем функции $g(\lambda)$ (см. лемму 2.2.2), то аналогичные рассуждения справедливы для области $\mathcal{S} \setminus \{\lambda_0\}$. При этом оператор $\tilde{L}(\lambda_0)$ компактен, а следовательно, необратим, так что $\lambda_0 \in \sigma(L)$. Теорема доказана.

По только что доказанной теореме если λ_1 — точка спектра оператор-функции $L(\lambda)$, такая, что $g(\lambda_1) \neq 0$, то существует ненулевой вектор $h \in \mathrm{Dom}(L(\lambda_1)) = \mathrm{Dom}(A)$, такой, что $L(\lambda_1)h = 0$, тем самым λ_1 является корнем уравнения вида

$$l_h(\lambda) := \lambda^2 + \alpha a\lambda + a + c - a\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda} = 0,$$

где $a := (Ah, h) > 0$, $c := (Ch, h)$.

Лемма 2.3.1. *В условиях теоремы* 2.3.1 *пусть дополнительно выполнено условие* (39), *тогда функция* $l_h(\lambda)$ *не имеет корней в замкнутой правой полуплоскости для любого* $h \in \mathrm{Dom}(A)$.

Доказательство. Ввиду условия (B), согласно уже упомянутой теореме об устойчивости самосопряженности [25, гл. 5, теорема 4.11], оператор $B := \left(1 - \hat{K}(0)\right) A + C$ самосопряженный и строго положительный, т.е. для любого $h \in \mathrm{Dom}(A)$ имеем $b := (Bh, h) > 0$. Тогда

$$l_h(\lambda) = \lambda^2 + \alpha a\lambda + b + \int_0^{+\infty} \frac{a\lambda d\mu(\tau)}{\tau(\tau + \lambda)}.$$

Если $\lambda \geq 0$, то $l_h(\lambda) > 0$.

Рассмотрим теперь невещественные точки в замкнутой правой полуплоскости. Если $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, то

$$\mathrm{Im}\ l_h(\lambda) = 2\mathrm{Re}\lambda\ \mathrm{Im}\lambda + \alpha a\ \mathrm{Im}\lambda + a\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\lambda d\mu(\tau)}{|\tau + \lambda|^2} = 0$$

только в случае, когда

$$\mathrm{Re}\lambda < -\frac{\alpha a}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau + \lambda|^2} < -\frac{\alpha a_1}{2} < 0, \tag{75}$$

где a_1 — нижняя грань оператора A. Таким образом, точка λ лежит в левой полуплоскости, тем самым лемма доказана.

Отметим, что попутно доказан следующий факт.

Замечание. Все невещественные точки спектра $\sigma(L)$ отделены от мнимой оси прямой $\mathrm{Re}\lambda = -\dfrac{\alpha a_1}{2}$, где a_1 — нижняя грань оператора A.

Это замечание немедленно следует из (75).

Перейдем теперь к формулировке основного результата о спектре оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.1 *и условие* (39), *тогда существуют положительные постоянные* γ, p, q *такие, что спектр* $\sigma(L)$ *содержится в области* $D_{\gamma,p,q}$, *где*

$$D_{\gamma,p,q} = \left\{ \mathrm{Re}\ \lambda < -\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \lambda| < p\sqrt{|\mathrm{Re}\ \lambda|} + q \right\}.$$

Доказательство. Тот факт, что невещественная часть спектра $\sigma(L)$ отделена от мнимой оси, отмечен в ходе доказательства леммы 2.3.1. Докажем, что спектр в левой полуплоскости ограничен ветвями парабол.

В силу того, что оператор CA^{-1} ограничен, найдется такая постоянная $M > 0$, что справедлива оценка

$$\left\| CL_0^{-1}(\lambda) \right\| \leq M \left\| AL_0^{-1}(\lambda) \right\|$$

при всех $\lambda \in \rho(L_0)$. Ввиду теоремы 2.2.3 существуют p, q, $R > 0$, такие, что в области $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$ (см. (69)) выполняется оценка (71). Поскольку $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q} \subset \rho(L_0)$, для всех $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$ имеет место равенство

$$L(\lambda) = \left(I + CL_0^{-1}(\lambda) \right) L_0(\lambda). \tag{76}$$

В силу оценки (71) найдется достаточно большое число $R > 0$ такое, что в области $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$

$$\left\| CL_0^{-1}(\lambda) \right\| \leq M \left\| AL_0^{-1}(\lambda) \right\| < 1.$$

Из последнего неравенства и соотношения (76) следует обратимость $L(\lambda)$ в области $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$. Положим $\tilde{q} := \max(R, q)$, тогда для точек $\lambda \notin D_{\gamma,p,\tilde{q}}$ оператор $L(\lambda)$ обратим.

Наконец, существование постоянной $\gamma > 0$, отделяющей вещественную часть спектра, устанавливается следующим образом. Точка $\lambda = 0$ принадлежит $\rho(L)$. Действительно ввиду условий (A)—(C) (см. §2.1) оператор

$$L(0) = \left(I - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} \right) A + C = A^{1/2} \left(\left(I - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} \right) I + \overline{A^{-1/2} C A^{-1/2}} \right) A^{1/2}$$

является ограниченно обратимым. Ввиду того, что $\rho(L)$ — открытое множество, найдётся $\tilde{\gamma} > 0$, отделяющая вещественные точки спектра от 0. Полагая $\gamma := \min\{\alpha a_1/2, \tilde{\gamma}\}$, завершаем доказательство теоремы. Теорема доказана.

В завершение приведем оценки нормы резольвенты $L^{-1}(\lambda)$ в области $\mathcal{S}_{R,\delta}$ (см. 68) и в области $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$ (см. 69) для некоторых $R,\ p,\ q > 0$ и $\delta \in (0, \pi/2)$.

Теорема 2.3.3. *В условиях теоремы* 2.3.2 *для любого* $\delta \in (0, \pi/2)$ *найдутся числа* $R > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что для* $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\delta}$ *справедлива следующая оценка:*

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{M}{|\lambda|^2}. \tag{77}$$

Для $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$ *найдется такое число* $\tilde{M} > 0$, *что*

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{\tilde{M}}{|\lambda|^{3/2}}. \tag{78}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (76), верным в $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$, и тем, что оператор $(I + CL_0^{-1}(\lambda))$ при указанных λ обратим. Ввиду этих фактов достаточно получить оценку $\left\|L_0^{-1}(\lambda)\right\|$ в $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$. Покажем, что найдется такое число $m > 0$, что для любого $h \in \mathrm{Dom}(A)$

$$\|L_0(\lambda)h\| > m|\lambda|^2 \|h\|, \quad \lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}.$$

Запишем оператор $L_0(\lambda)$ в следующем виде:

$$L_0(\lambda) = \lambda\left(I + \frac{1}{\lambda}\left(1 - \hat{K}(0)\right)A(\alpha A + \lambda I)^{-1} + \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)} A(\alpha A + \lambda I)^{-1}\right)(\alpha A + \lambda I).$$

Начнем с оценки нормы $\|A(\alpha A + \lambda I)^{-1}\|$:

$$\left\|A(\alpha A + \lambda I)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|(A^{-1} + \frac{\alpha}{\lambda})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{\mathrm{dist}(\sigma(A^{-1}), -\alpha/\lambda)} \leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{|\lambda|}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Далее оценим интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}$ в $\mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$. Пусть $\lambda = x + iy \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$, тогда

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}\right| \leq \sup_{\tau>0}\left|\frac{1}{\tau+\lambda}\right| \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \frac{1}{|y|} < \max\left(\frac{M}{\sqrt{|x|}}, \frac{1}{\sin\delta|\lambda|}\right) \leq$$
$$\leq \max\left(\frac{M}{\sqrt{\cos\delta|\lambda|}}, \frac{1}{\sin\delta|\lambda|}\right),$$

где $M > 0$, $\delta \in (0, \pi/2)$. Из вышесказанного следует, что существует такое число $R > 0$, что при $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$

$$\left\|\frac{1}{\lambda}\left(1 - \hat{K}(0)\right)A(\alpha A + \lambda I)^{-1} + \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)} A(\alpha A + \lambda I)^{-1}\right\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\alpha|\lambda|}\left(1 - \hat{K}(0)\right) + \max\left(\frac{M}{\sqrt{\alpha\cos\delta|\lambda|}}, \frac{1}{\alpha\sin\delta|\lambda|}\right) < 1,$$

следовательно, оператор

$$I + \frac{1}{\lambda}\left(1 - \hat{K}(0)\right) A(\alpha A + \lambda I)^{-1} + \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)} A(\alpha A + \lambda I)^{-1}$$

ограниченно обратим.

Наконец, оценим снизу $\|(\alpha A + \lambda I)h\|$, $h \in \mathrm{Dom}(A)$:

$$\|(\alpha A + \lambda I)h\|^2 = \|\alpha A h\|^2 + 2\mathrm{Re}\lambda(\alpha A h, h) + \left(|\mathrm{Re}\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\lambda|^2\right)\|h\|^2 \geq |\mathrm{Im}\lambda|^2 \|h\|^2 .$$

Из указанной оценки и обратимости оператора

$$I + \frac{1}{\lambda}\left(1 - \hat{K}(0)\right) A(\alpha A + \lambda I)^{-1} + \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)} A(\alpha A + \lambda I)^{-1}$$

следует, что найдется число $M_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$ справедлива оценка

$$\left\|L_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{M_0}{|\lambda||\mathrm{Im}\lambda|}. \tag{79}$$

Заметим теперь, что если $\lambda = x + iy \in \mathcal{S}_{R,\delta}$, то $|y| > |x \ \mathrm{tg}\ \delta|$, $\delta \in (0, \pi/2)$, т.е. $|\lambda| < \sqrt{1 + (\mathrm{ctg}\ \delta)^2}|y|$. Отсюда, учитывая неравенство (79), получаем

$$\left\|L_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{M_1}{|\lambda|^2}. \tag{80}$$

Пусть p и q — те же, что в теореме 2.3.2. Если $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q} \backslash \mathcal{S}_{R,\delta}$, то $|y| \leq |x \ \mathrm{tg}\ \delta|$. При достаточно большом R имеем $|x \ \mathrm{tg}\ \delta| > p\sqrt{|x|} + q$, и для $p\sqrt{|x|} + q \leq |y| \leq |x \ \mathrm{tg}\ \delta|$, $|x| \geq |\lambda|/(1 + (\mathrm{tg}\ \delta)^2)$ справедливо неравенство

$$|y| \geq \frac{\sqrt{|\lambda|}}{(1 + (\mathrm{tg}\ \delta)^2)^{1/4}} + q > m_1\sqrt{|\lambda|},$$

где m_1 — положительная постоянная. Оценивая таким образом $|\mathrm{Im}\lambda|$ в (79), получаем, что существует число $M_2 > 0$, для которого

$$\left\|L_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{M_2}{|\lambda|^{3/2}}. \tag{81}$$

С учетом равенства (76) и обратимости оператора $I + CL_0^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in \mathcal{S}_{R,\gamma,p,q}$ из неравенств (80) и (81) получаем неравенства (78) и (77) соответственно. Теорема доказана.

2.4 О структуре невещественной части спектра

В настоящем разделе будем полагать $C \equiv 0$. Основная задача состоит в изучении невещественной части спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$, а именно: будет ли невещественная часть спектра конечным или счёным множеством. Для случая, когда носитель меры $d\mu(\tau)$ компактен, ответ получен в работе [65]: оператор-функция $L_0(\lambda)$ имеет лишь конечное число невещественных собственных чисел в спектре. В этой же работе был поставлен вопрос, какова будет ситуация в случае меры с некомпактным носителем. Ниже будут приведены примеры, показывающие, что невещественная часть спектра $L_0(\lambda)$, вообще говоря, может быть как конечным, так и счётным множеством.

Рассмотрим ядро свёртки частного вида:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t}, \tag{82}$$

где $c_j > 0$ для $j = 1, 2, \ldots$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1} \to +\infty$, $j \to +\infty$. Условия (39) и (62) перепишутся соответственно в виде

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1 \tag{83}$$

и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j < +\infty. \tag{84}$$

Приводимые ниже примеры будут опираться на пару простых лемм. Докажем следующее утверждение:

Лемма 2.4.1 *Пусть $l_a(\lambda)$ — семейство функций положительного параметра a, задаваемых равенствами:*

$$l_a(\lambda) := \lambda^2 + \alpha a\lambda + a - a\frac{c(a)}{\gamma(a) + \lambda}, \tag{85}$$

где $\gamma(a) := \dfrac{\alpha a + \sqrt{\alpha^2 a^2 - 4a}}{2}$, $c(a) = o(a)$ при $a \to +\infty$. Тогда найдётся $a_0 > 0$ такое, что для всех $a > a_0$ функции (85) имеют пару комплексно-сопряжённых корней.

Доказательство. Запишем функцию (85) в следующем виде:

$$l_a(\lambda) = (\lambda + \gamma(a))(\lambda + \gamma_1(a)) - a\frac{c(a)}{\gamma(a) + \lambda},$$

где $\gamma_1(a) = \dfrac{\alpha a - \sqrt{\alpha^2 a^2 - 4a}}{2}$. Рассмотрим точку $\lambda_0(a) = -\gamma(a) + i\sqrt{\dfrac{c(a)}{\alpha}}$. Заметим, что $\lambda_0(a)$ — корень функции

$$l_{0,a}(\lambda) := -\alpha a(\lambda + \gamma(a)) - a\frac{c(a)}{\gamma(a) + \lambda}.$$

При $a \to +\infty$ справедливо

$$l_a(\lambda) = (\lambda + \gamma(a))(\lambda + \gamma(a) + \gamma_1(a) - \gamma(a)) - a\frac{c(a)}{\gamma(a) + \lambda} =$$

$$= (\lambda+\gamma(a))(\lambda+\gamma(a)-\sqrt{\alpha^2 a^2 - 4a}) - a\frac{c(a)}{\gamma(a) + \lambda} = (\lambda + \gamma(a))\left(\lambda + \gamma(a) - \alpha a + \frac{2}{\alpha} + O\left(\frac{1}{a}\right)\right) -$$

$$-a\frac{c(a)}{\gamma(a) + \lambda} = l_{0,a}(\lambda) + (\lambda + \gamma(a))^2 + \left(\frac{2}{\alpha} + O\left(\frac{1}{a}\right)\right)(\lambda + \gamma(a)) = l_{0,a}(\lambda) + r(\lambda),$$

где $r(\lambda) := (\lambda + \gamma(a))^2 + \left(\dfrac{2}{\alpha} + O\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)(\lambda + \gamma(a))$ Докажем, что $l_a(\lambda)$ имеет корень в круге $U(\lambda_0(a)) := \left\{|\lambda - \lambda_0(a)| < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c(a)}{\alpha}}\right\}$ при достаточно большом a. Оценим $|l_a(\lambda)|$ снизу при $\lambda = \lambda_0(a) + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c(a)}{\alpha}}e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$|l_{0,a}(\lambda)| = \left|-\alpha a\left(i\sqrt{\frac{c(a)}{\alpha}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c(a)}{\alpha}}e^{i\theta}\right) - a\frac{\sqrt{\alpha c(a)}}{i + e^{i\theta}/2}\right| \geq \frac{1}{2}a\sqrt{\alpha c(a)}. \tag{86}$$

Для $|r(\lambda)|$ при тех же λ справедлива оценка сверху:

$$|r(\lambda)| \leq \frac{9}{4}\frac{c(a)}{\alpha} + \frac{3}{\alpha}\left(\frac{c(a)}{\alpha}\right)^{1/2} + O\left(\frac{1}{a}\right)\sqrt{\frac{c(a)}{\alpha}}. \tag{87}$$

При достаточно больших a на границе круга $U(\lambda_0(a))$ выполнено неравенство $|l_{0,a}(\lambda)| > |r(\lambda)|$, следовательно, по теореме Руше $l_a(\lambda)$ имеет внутри круга $U(\lambda_0(a))$ невещественный корень.Все коэффициенты $l_a(\lambda)$ — вещественные, значит, невещественные корни входят парами комплексно-сопряжённых корней. Лемма полностью доказана.

Опираясь на лемму 2.4.1, мы приведём пример оператор-функции вида $L_0(\lambda)$, которая имеет счётное число невещественных точек в спектре.

Пример 1. Рассмотрим оператор $A := \dfrac{d^4}{dx^4}$ с областью определения $\mathrm{Dom}(A) = \{y(x) \in W_2^4(0,1) :\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0\}$, тогда $a_n = n^4$. Положим $c_n \equiv 1$,

$\gamma_n = \dfrac{\alpha n^4 + \sqrt{\alpha^2 n^8 - 4n^4}}{2}$, тогда оператор-функция $L_0(\lambda)$ имеет счётное число невещественных точек спектра.

Доказательство. Достаточно изучить невещественные нули функций $l_m(\lambda)$ (см. 49). Покажем, что при $m \to +\infty$:

$$\left|\lambda^2 + \alpha a_m \lambda + a_m - a_m \frac{c_m}{\gamma_m + \lambda}\right| > \left|a_m \sum_{j=1, j\neq m}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j + \lambda}\right|$$

на границе области $U_m := \left\{|\lambda - \lambda_0(m)| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_m}{\alpha}}\right\}$, где $\lambda_0(m) = -\gamma_m + i\sqrt{\frac{c_m}{\alpha}}$. В этом случае $l_m(\lambda)$ имеет в этой области столько же нулей, сколько $\left|\lambda^2 + \alpha a_m \lambda + a_m - a_m \frac{c_m}{\gamma_m + \lambda}\right|$, которое в силу леммы 2.4.1 имеет ровно один нуль.

Оценка снизу левой части равенства следует из оценок (86) и (87), полученных в лемме 2.4.1:

$$\left|\lambda^2 + \alpha a_m \lambda + a_m - a_m \frac{c_m}{\gamma_m + \lambda}\right| > \frac{1}{2} a_m \sqrt{\alpha c_m} \left(1 + O\left(\frac{1}{a_m}\right)\right) = \frac{1}{2} m^4 \sqrt{\alpha} \left(1 + O\left(\frac{1}{m^4}\right)\right).$$

Оценим сверху $r_m(\lambda) := \left|a_m \sum_{j=1, j\neq m}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j + \lambda}\right|$ на границе U_m. Имеем

$$r_m(\lambda) \leq a_m \sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_j}{\gamma_m - \gamma_j} + a_m \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j - \gamma_m}.$$

Оценим первое слагаемое:

$$\sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_j}{\gamma_m - \gamma_j} < \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\gamma_m - \gamma_{m-1}} = \frac{m-1}{4\alpha m^3 \left(1 + O(1/m)\right)}.$$

Последнее равенство из определения γ_m и равенства

$$\gamma_m - \gamma_{m-1} = \alpha \left(m^4 - (m-1)^4\right)\left(1 + O(1/m^4)\right).$$

При достаточно больших m справедлива оценка

$$\sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j - \gamma_m} < \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j - \gamma_{j-1}} = \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{1}{4\alpha j^3 \left(1 + O(1/j)\right)},$$

т.е. получен остаток сходящегося ряда, который стремится к нулю при $m \to +\infty$. Таким образом,

$$r_m(\lambda) = o(1),$$

следовательно, найдётся $m_0 > 0$ такое, что для всех $m > m_0$

$$\left|\lambda^2 + \alpha a_m \lambda + a_m - a_m \frac{c_m}{\gamma_m + \lambda}\right| > r_m(\lambda)$$

на границе U_m, следовательно, $l_m(\lambda)$ имеет в U_m ровно один корень в силу леммы 2.4.1. Этим завершается обоснование примера.

Покажем, что существуют оператор-функции $L_0(\lambda)$ с конечным невещественным спектром при отсутствии условия компактности носителя меры $d\mu(\tau)$. Для этого потребуется ещё одно утверждение.

Лемма 2.4.2 *Пусть выполнено условие* (84) *и существует* $\delta > 0$, *такое что*

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq 2\delta, \ n \in \mathbb{N}; \tag{88}$$

$$\varliminf_{n \to +\infty} \inf_k |\gamma_k + \theta_n| \geq \delta, \tag{89}$$

где $\theta_n := \dfrac{-\alpha a_n - \sqrt{\alpha^2 a_n^2 - 4a_n}}{2}$. *Тогда найдётся номер* n_0, *начиная с которого все функции* $l_n(\lambda)$, *определённые равенством* (49), *имеют только вещественные нули.*

Доказательство. Пусть номер n такой, что $\inf_k |\gamma_k + \theta_n| \geq \dfrac{1}{2}\delta$. Рассмотрим круги $B_{k,\delta} := \{|\lambda + \gamma_k| < \delta/4\}$. Докажем, что найдутся числа $k_0, n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $k > k_0$ и $n > n_0$ в каждом кружке $B_{k,\delta}$ функция $l_n(\lambda)$ имеет единственный (а потому вещественный) корень. Как и ранее, доказательство проведём по теореме Руше: докажем, что на границах кружков $B_{k,\delta}$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\lambda^2 + \alpha a_n + a_n}{a_n}\right| > \left|\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j + \lambda}\right|. \tag{90}$$

Оценим снизу левую часть неравенства (90). Имеем

$$\lambda^2 + \alpha a_n + a_n = (\lambda - \theta_n)(\lambda - \tau_n),$$

где величина θ_n определена в условии леммы, $\tau_n := \dfrac{-\alpha a_n + \sqrt{\alpha^2 a_n^2 - 4a_n}}{2}$. Справедливо

$$\max\{|\theta_n + \gamma_k|, \ |\tau_n + \gamma_k|\} \geq \frac{|\theta_n - \tau_n|}{2}. \tag{91}$$

Далее, ввиду равенств

$$\theta_n = -\alpha a_n + \frac{1}{\alpha} + O\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

$$\tau_n = -\frac{1}{\alpha} + O\left(\frac{1}{a_n}\right),$$

можно рассмотреть такие n_1 и k_1, что для всех $n > n_1$ и $k > k_1$ выполняется неравенство $|\tau_n + \gamma_k| \geq \delta/2$. Из этого замечания и условия (89) вытекает неравенство

$$\min\{|\theta_n + \gamma_k|, |\tau_n + \gamma_k|\} \geq \frac{\delta}{2} \tag{92}$$

при $n > n_1$, $k > k_1$. Пусть $\lambda = -\gamma_k + \dfrac{\delta}{4}e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. С учётом оценок (91) и (92) имеем

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda^2 + \alpha a_n\lambda + a_n}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n}\left|\left(\theta_n + \gamma_k - \frac{\delta e^{i\varphi}}{4}\right)\right|\left|\left(\tau_n + \gamma_k - \frac{\delta e^{i\varphi}}{4}\right)\right| \geq \frac{\delta}{4a_n}\left(\frac{|\theta_n - \tau_n|}{2} - \frac{\delta}{4}\right) = \\ = \frac{\delta}{8a_n}\left(\left|-\alpha a_n + \frac{2}{\alpha} + O\left(\frac{1}{a_n}\right)\right| - \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\alpha\delta}{8}\left(1 + O\left(\frac{1}{a_n}\right)\right).\end{aligned} \tag{93}$$

Перейдём к оценке сверху правой части неравенства (90) на границах кругов $B_{k,\delta}$ при достаточно больших k. Ввиду условия (84), для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное N такое, что

$$\sum_{j=N+1}^{+\infty} c_j < \frac{7\delta\varepsilon}{4}, \tag{94}$$

$$c_k < \frac{7\delta\varepsilon}{24}, \quad \forall k > N. \tag{95}$$

Зафиксируем это N и выберем натуральное k_2 такое, что для всех $k > k_2$ на границе кругов $B_{k,\delta}$ справедлива следующая оценка

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{|\gamma_j + \lambda|} \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{|\gamma_j - \gamma_k| - \delta/2} < \varepsilon. \tag{96}$$

Таким образом, с учётом (94) и (96), для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся k_2 такое, что для всех

$k > k_2$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{c_j}{|\gamma_j+\lambda|}=\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{|\gamma_j+\lambda|}+\sum_{j=N+1}^{+\infty}\frac{c_j}{|\gamma_j+\lambda|}<\varepsilon+\sum_{j=N+1}^{k-2}\frac{c_j}{|\gamma_j+\lambda|}+\sum_{j=k+2}^{+\infty}\frac{c_j}{|\gamma_j+\lambda|}+$$

$$+\frac{c_{k-1}}{|\gamma_{k-1}+\lambda|}+\frac{c_k}{|\gamma_k+\lambda|}+\frac{c_{k+1}}{|\gamma_{k+1}+\lambda|}\leq\varepsilon+\sum_{j=N+1}^{k-2}\frac{c_j}{\gamma_k-\gamma_j-\delta/4}+\sum_{j=k+2}^{+\infty}\frac{c_j}{\gamma_j-\gamma_k-\delta/4}+$$

$$+\frac{c_{k-1}}{\gamma_k-\gamma_{k-1}-\delta/4}+\frac{4c_k}{\delta}+\frac{c_{k+1}}{\gamma_{k+1}-\gamma_k-\delta/4}<\varepsilon+\sum_{j=N+1}^{k-2}\frac{c_j}{\gamma_k-\gamma_{k-1}-\delta/4}+\sum_{j=k+2}^{+\infty}\frac{c_j}{\gamma_{k+1}-\gamma_k-\delta/4}+$$

$$+\frac{c_{k-1}}{2\delta-\delta/4}+\frac{4c_k}{\delta}+\frac{c_{k+1}}{2\delta-\delta/4}<\varepsilon+\frac{4}{7\delta}\sum_{j=N+1}^{+\infty}c_j+\frac{24}{7\delta}c_k<3\varepsilon. \quad (97)$$

Выбирая n_2 так, чтобы для всех $n > n_2$

$$\frac{\alpha\delta}{8}\left(1+O\left(\frac{1}{a_n}\right)\right)>\frac{\alpha\delta}{16},$$

заключаем, что найдутся натуральные k_1 и k_2 такие, что выполнены оценки (93) и (97), где $\varepsilon := \dfrac{\alpha\delta}{48}$. Полагая $k_0 := \max(k_1, k_2)$ завершаем доказательство неравенства (90) на границах $B_{k,\delta}$. Таким образом, установлено, что при $n > n_2$ функции $l_n(\lambda)$ имеют по одному корню внутри кругов $B_{k,\delta}$, $k > k_0$. Отметим, что для n_3 такого, при котором для всех $n > n_3$ выполнено $-\dfrac{\alpha a_n}{2} < -\gamma_{k_0+1}$, в кругах $B_{k,\delta}$ при $k \leq k_0$ функции $l_n(\lambda)$ также не имееют невещественных нулей при $n > n_3$ в силу леммы 2.2.4. Так, при $n_0 := \max\{n_1, n_2, n_3\}$ функции $l_n(\lambda)$ не имеют невещественных нулей в кругах $B_{k,\delta}$ при $n > n_0$.

В силу условия (84) и теоремы 2.2.2 при достаточно большом n функции $l_n(\lambda)$ не имеют невещественных корней в области $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\ \lambda| > \delta/4\}$.

Для завершения доказательства того факта, что функции $l_n(\lambda)$ при достаточно больших n имеют только вещественные нули осталось доказать отсутствие невещественных корней в областях $U_{k,\delta}$, определяемых следующим образом:

$$U_{k,\delta}=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\mathrm{Im}\ \lambda|\leq\delta,\ -\gamma_{k+1}<\mathrm{Re}\ \lambda<-\gamma_k\}\setminus\left(B_{k+1,\delta}\cup B_{k,\delta}\right). \quad (98)$$

По доказанному ранее при $n > n_0$ и $k > k_0$ на боковых границах областей $U_{k,\delta}$ выполнено неравенство (90). На горизонтальной границе имеем

$$\left|\frac{\lambda^2}{a_n}+\alpha\lambda+1\right|>\frac{\alpha\delta}{4}-\frac{\delta}{2\,|\mathrm{Re}\ \lambda|},$$

согласно (64). Выбирая k_0 достаточно большим, можно получить оценку вида

$$\left|\frac{\lambda^2}{a_n} + \alpha\lambda + 1\right| > \frac{\alpha\delta}{8} \tag{99}$$

на горизонтальных границах $U_{k,\delta}$. Наконец, аналогично доказательству оценки (97), выбираем достаточно большое k_0, чтобы для $k > k_0$ были выполнены соотношения

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{|\gamma_j + \lambda|} = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{|\gamma_j + \lambda|} + \sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{c_j}{|\gamma_j + \lambda|} < \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{\gamma_k - \gamma_j} + \frac{2}{\delta} \sum_{j=N+1}^{+\infty} c_j < \frac{\alpha\delta}{4}. \tag{100}$$

Из оценок (99) и (100) заключаем, что при $n > n_0$ и $k > k_0$ функция $l_n(\lambda)$ имеет в $U_{k,\delta}$ столько же нулей, сколько и $f_n(\lambda) := \lambda^2 + \alpha a_n \lambda + a_n = (\lambda + \theta_n)(\lambda + \tau_n)$.

Заметим, что, начиная с некоторого номера, функции $f_n(\lambda)$ содержат в $U_{k,\delta}$ не более одного корня, поскольку $\tau_n - \theta_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Следовательно, $l_n(\lambda)$ содержит не более одного корня в этих областях при $k > k_0$, значит, этот корень — вещественный. В области $\{\mathrm{Re}\,\lambda \geq -\gamma_{k_0}\}$ функция $l_n(\lambda)$ не имеет невещественных корней, если $-\dfrac{\alpha a_n}{2} < -\gamma_{k_0}$ по лемме 2.2.4.

В силу очевидного равенства

$$\mathbb{C} = \overline{\cup_{k=1}^{+\infty} (B_{k,\delta} \cup U_{k,\delta}) \cup \{|\mathrm{Im}\,\lambda| > \delta/2\}}$$

заключаем, что существует n_0 такое, что для всех $n > n_0$ функция $l_n(\lambda)$ не имеет невещественных нулей в $\mathbb{C}$. Лемма полностью доказана.

Нетрудно привести пример оператор-функции $L_0(\lambda)$, для которой выполнены условия леммы 2.4.2.

Пример 2. Пусть оператор A — такой же, как в примере 1. Параметры ядра свёртки определим следующим образом: $c_n := \dfrac{1}{n^2}$, $\gamma_n := 1 + \dfrac{\alpha n^4 + \sqrt{\alpha^2 n^8 - 4n^4}}{2}$. Тогда оператор-функция $L_0(\lambda)$ содержит лишь конечное число точек спектра.

2.5 Выводы к третьей главе

Установлена локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости с вырезанным лучом. Спектр отделён от мнимой оси и представляет собой набор вещественных точек, имеющих, возможно, одну точку сгущения, а также не более чем счётную, последовательность невещественных собственных чисел конечной алгебраической кратности, которые содержатся в области, ограниченной ветвями парабол (см.

теоремы 2.2.1 и 2.3.1). Для случая $C \equiv 0$, когда ядро вольтерровой свёртки определено в точке 0, результат о локализации спектра может быть уточнён: мнимые части невещественных точек спектра стремятся к нулю (см. теорему 2.2.2). Заметим, что при таком распределении точек спектра, они заведомо попадают в некоторый угол в левой полуплоскости. Этот факт будет использоваться в следующих главах. Вне области, содержащей спектр, получены оценки резольвенты оператор-функции $L(\lambda)$ (см. теоремы 2.2.3 и 2.3.3). Результаты о локализации спектра и оценки резольвенты опубликованы в статьях [23], [24], [53].

Отдельно изучен вопрос о поведении невещественной части спектра: конечно или счётно множество невещественных точек. Примеры 1 и 2 из §2.4 показывают, что возможны оба варианта. Следует отметить, что существенным в обоих примерах было взаимное расположение спектра «полиномиальной» части оператор-функции $L(\lambda)$ и носителя меры ядра свёртки. Эти результаты дают ответ на вопрос, поставленный в работе [65], будет ли невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ конечна в случае, когда носитель меры ядра свёртки некомпактен.

3 Исследование одного частного случая вольтеррова интегродифференциального уравнения со слагаемым трения Кельвина–Фойгхта

3.1 Введение

В настоящей главе изучается следующая задача Коши в сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \alpha A \frac{du}{dt}(t) + Au(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \tag{101}$$

$$u(0) = u_0, \ \frac{du}{dt}(0) = u_1, \tag{102}$$

где A — самосопряжённый, положительно определённый оператор, имеющий компактный обратный. Ядро вольтерровой свёртки определено равенством (82), причём

$\gamma_1 < -d_0$ и выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1. \tag{103}$$

Уравнение (101) является частным случаем уравнения (36), в котором $C \equiv 0$, а ядро свёртки представимо в виде интеграла Стилтьеса с дискретной мерой. В настоящей главе будет построена полугруппа операторов, порождаемая уравнением (101) (см. §3.2), на основе её свойств будут доказаны результаты о разрешимости задачи (101)–(102) и аналитичности решений (см. §3.3), наконец, будет получено преставление решения в виде ряда из экспонент (см. §3.4).

3.2 Сведение интегродифференциального уравнения второго порядка к дифференциальному уравнению первого порядка в гильбертовом пространстве

Запишем интегродифференциальное уравнение второго порядка (101) в виде системы интегродифференциальных уравнений первого порядка. Для этого рассмотрим функции

$$v(t) = \frac{du}{dt}(t), \tag{104}$$

$$\rho(t) = \beta A^{1/2} u(t), \tag{105}$$

где $\beta := \left(1 - \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j}\right)^{1/2}$.

С помощью формулы интегрирования по частям преобразуем выражение

$$\begin{gathered}
Au(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = \left(1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j}\right) Au(t) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} Au(t) - \\
- \int_0^t \sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j (t-s)} Au(s)ds = \left(1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j}\right) Au(t) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} Au(0) + \\
+ \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j (t-s)} A \frac{du}{ds}(s)ds = \beta A^{1/2} \rho(t) - f(t) + \\
+ \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} \int_0^t \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} e^{-\gamma_j (t-s)} A^{1/2} v(s)ds,
\end{gathered} \tag{106}$$

где $f(t) := -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} Au(0)$. Отметим, что указанная цепочка равенств нуждается в обосновании, однако на данном этапе изложения будем указанные равенства понимать формально, считая, что функция $u(t)$ такая, что указанные преобразования верны. В §3.4 будут проведены недостающие рассуждения.

Введём счётное число функций $h_j(t)$:

$$h_j(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} e^{-\gamma_j(t-s)} A^{1/2} v(s) ds, \quad j = 1, 2, \dots \tag{107}$$

С учётом (104)–(107) уравнение (101) можно записать в виде

$$\frac{dv}{dt} = A^{1/2} \left(-\alpha A^{1/2} v(t) - \beta \rho(t) - \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} h_j(t) \right) + f(t). \tag{108}$$

Добавляя к соотношению (108) дифференциальные уравнения

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \beta A^{1/2} v(t), \tag{109}$$

$$\frac{dh_j}{dt}(t) = \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} v(t) - \gamma_j h_j(t), \quad j = 1, 2, \dots \tag{110}$$

получим систему

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) = A^{1/2} \left(-\alpha A^{1/2} v(t) - \beta \rho(t) - \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} h_j(t) \right) + f(t), \\ \frac{d\rho}{dt}(t) = \beta A^{1/2} v(t), \\ \frac{dh_j}{dt}(t) = \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} A^{1/2} v(t) - \gamma_j h_j(t), \ j = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{111}$$

Зададим начальные условия

$$v(0) = u_1, \quad \rho(0) = A^{1/2} u_0, \quad h_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots \tag{112}$$

Задачу (111)–(112) перепишем в виде эволюционной задачи в некотором гильбертовом пространстве.

Рассмотрим пространство $l_2(H)$ — пространство бесконечномерных векторов $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots)^T$, компоненты которых являются элементами сепарабельного гильбертова пространства H, удовлетворяющих неравенству:

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \|h_j\|_H^2 \right)^{1/2} < +\infty. \tag{113}$$

Выражение в левой части (113) задаёт норму в пространстве $l_2(H)$, относительно которой это пространство является полным. Определяя скалярное произведение в $l_2(H)$ по формуле:

$$(\mathbf{h}, \mathbf{g})_{l_2(H)} = \sum_{j=1}^{+\infty} (h_j, g_j)_H,$$

превратим пространство $l_2(H)$ в сепарабельное гильбертово пространство. Полнота и сепарабельность этого пространства вытекают из полноты и сепарабельности пространства H и доказываются аналогично доказательству полноты и сепарабельности пространства l_2. Далее, вместо обозначения $\|\cdot\|_H$, будем использовать $\|\cdot\|$, соответственно, вместо $\|\cdot\|_{l_2(H)}$, — $\|\cdot\|_2$. Аналогично поступим с обозначениями скалярных произведений.

В пространстве $l_2(H)$ определим линейные операторы S, S^* и Γ, действующие по следующим правилам:

$$S : H \to l_2(H), \quad Sv = \left(\sqrt{\frac{c_1}{\gamma_1}} v, \sqrt{\frac{c_2}{\gamma_2}} v, \dots \right)^T, \tag{114}$$

$$S^* : l_2(H) \to H, \quad S^* \mathbf{h} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} h_j, \tag{115}$$

$$\Gamma : l_2(H) \to l_2(H), \quad \Gamma \mathbf{h} = (\gamma_1 h_1, \gamma_2 h_2, \dots)^T. \tag{116}$$

Заметим, что, ввиду условия (103), операторы S и S^* ограничены

$$\|Sv\|_2^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} \|v\|^2 < \|v\|^2,$$

$$\|S^* \mathbf{h}\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} h_j \right\|^2 \le \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} \sum_{j=1}^{+\infty} \|h_j\|^2 < \|\mathbf{h}\|_2^2,$$

а также взаимносопряжены:

$$(Sv, \mathbf{h})_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} v, h_j \right) = \left(v, \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} h_j \right) = (v, S^* \mathbf{h}),$$

где $v \in H$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots)^T \in l_2(H)$.

Оператор Γ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(\Gamma) := \left\{ \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots)^T : \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j^2 \|h_j\|^2 < +\infty \right\}$$

является самосопряжённым положительно определённым.

Составим матрицу с операторными коэффициентами $\mathcal{A}_0$:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -\beta I & -S^* \\ \beta I & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{117}$$

Эта матрица действует как линейный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = H \oplus H \oplus l_2(H)$$

с нормой

$$\|\cdot\|_{\mathbb{H}} := \sqrt{\|\cdot\|^2 + \|\cdot\|^2 + \|\cdot\|_2^2}.$$

Область определения этого оператора

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0) = \left\{(v, \rho, \mathbf{h})^T \in \mathbb{H} : \ h \in \mathrm{Dom}(\Gamma), \ (-\alpha A^{1/2} v - \beta\rho - S^*\mathbf{h}) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right\}. \tag{118}$$

Задача (111)–(112) теперь может быть записана в следующем виде

$$\frac{dx}{dt}(t) = \mathcal{A}_0 x(t) + F(t), \tag{119}$$

$$x(0) = x_0, \tag{120}$$

где $x(t) = (v(t), \rho(t), \mathbf{h}(t))^T$, $F(t) = (f(t), 0, \mathbf{0})^T$, $x_0 = \left(u_1, A^{1/2}u_0, \mathbf{0}\right)^T$, $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots)^T$, функции $h_j(t)$ определены равенством (107). В следующем разделе будет показано, что оператор $\mathcal{A}_0$ является генератором аналитической полугруппы, на основе чего будут получены результаты о корректной разрешимости задачи (119) – (120), из которых в свою очередь будут установлены результаты о корректной разрешимости задачи (101)–(102).

3.3 Об аналитичности полугруппы операторов с генератором $\mathcal{A}_0$

Доказательство теоремы об аналитичности полугруппы будет заключаться в проверке выполнения условий теоремы Лумера-Филлипса и критерия аналитичности (см. §1.2). Сначала мы установим плотность и замкнутость оператора $\mathcal{A}_0$.

Лемма 3.3.1. *Область определения* $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$ *всюду плотна в* $\mathbb{H}$. *При этом оператор* $\mathcal{A}_0$ *— замкнут.*

Доказательство. Рассмотрим множество V векторов вида $(v, \rho, \tilde{h}_k)^T$, где $v \in \mathrm{Dom}(A)$, $\rho \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, $\tilde{h}_k := (h_1, h_2, \dots, h_k, 0, 0, \dots)^T$, где $h_i \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, $i = 1, 2, \dots k$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $V \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$. Действительно, очевидно, что
$\Gamma\tilde{h}_k = (\gamma_1 h_1, \gamma_2 h_2, \dots, \gamma_k h_k, 0, 0, \dots) \in l_2(H)$, и при этом

$$A^{1/2}\left(-\alpha A^{1/2}v - \beta\rho - S^*\tilde{h}_k\right) = -\alpha Av - \beta A^{1/2}\rho - \sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}}A^{1/2}h_j \in H,$$

если $(v, \rho, \tilde{h}_k)^T \in V$. Множество V всюду плотно в $\mathbb{H}$. Действительно, $\mathrm{Dom}(A)$ и $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$ плотны в H, в силу самосопряжённости оператора A. Векторы с конечным числом ненулевых компонент плотны в $l_2(H)$. Ввиду плотности $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$ в H, эти векторы могут быть приближены векторами вида $\tilde{h}_k$ с компонентами из $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$. Следовательно, $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$ плотно в $\mathbb{H}$. Первое утверждение леммы доказано.

Второе утверждение леммы проверим по определению замкнутого оператора. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$ такую, что $x_n \to x \in \mathbb{H}$ и $\mathcal{A}_0 x_n \to y \in \mathbb{H}$ при $n \to +\infty$. По определению замкнутого линейного оператора, нужно показать, что $x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$ и $y = \mathcal{A}_0 x$.

Поскольку $x_n \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$, то $x_n = (v_n, \rho_n, \tilde{h}_n)^T$, где $\tilde{h}_n \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$ и $(-\alpha A^{1/2}v_n - \beta\rho_n - S^*\tilde{h}_n) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, откуда, в частности, следует, что $v_n \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$. Пусть $x = (v, \rho, h)^T$, причём, очевидно, $v_n \to v$, $\rho_n \to \rho$ в H и $\tilde{h}_n \to \tilde{h}$ в $l_2(H)$ при $n \to +\infty$. Подействуем оператором $\mathcal{A}_0$ на вектор x_n:

$$\mathcal{A}x_n = \mathcal{A}\begin{pmatrix} v_n \\ \rho_n \\ \tilde{h}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}v_n - \beta\rho_n - S^*\tilde{h}_n) \\ \beta A^{1/2}v_n \\ SA^{1/2}v_n - \Gamma\tilde{h}_n \end{pmatrix} \to y := \begin{pmatrix} y_v \\ y_\rho \\ y_h \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $\beta A^{1/2}v_n \to y_\rho$, следовательно, $A^{1/2}v_n \to \beta^{-1}y_\rho$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$, $v \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$ и $A^{1/2}v = \beta^{-1}y_\rho$, следовательно, $y_\rho = \beta A^{1/2}v$.

Далее, ввиду ограниченности S, $SA^{1/2}v_n \to SA^{1/2}v$, следовательно, $\Gamma\tilde{h}_n \to (y_h - SA^{1/2}v) \in l_2(H)$, при $n \to +\infty$. Оператор Γ — самосопряжён в $l_2(H)$, следовательно, замкнут, отсюда следует, что $\Gamma\tilde{h} = SA^{1/2}v - y_h$, то есть $y_h = SA^{1/2}v - \Gamma\tilde{h}$.

Наконец, $A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}v_n - \beta\rho_n - S^*\tilde{h}_n) \to y_v$, при этом $(-\alpha A^{1/2}v_n - \beta\rho_n - S^*\tilde{h}_n) \to (-\alpha A^{1/2}v - \beta\rho - S^*\tilde{h})$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$, $(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*\tilde{h}) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$ и $y_v = A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*\tilde{h})$. Лемма доказана.

Далее докажем, что $\mathcal{A}_0$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Для этого надлежит проверить условия теоремы Лумьера–Филлипса (см. §1.2). Сначала покажем, что справедлива

Лемма 2.3.2 *Оператор $\mathcal{A}_0$ — диссипативен, т.е.*

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0 x, x) < 0, \quad x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0). \tag{121}$$

Доказательство. Неравенство (121) проверяется непосредственно. Пусть $x = (v, \rho, \mathbf{h})^T \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$. Запишем $(\mathcal{A}_0 x, x)_{\mathbb{H}}$:

$$(\mathcal{A}_0 x, x)_{\mathbb{H}} = \left(-\alpha A^{1/2}v - \beta\rho - S^*\mathbf{h},\ \beta A^{1/2}v,\ SA^{1/2}v - \Gamma\mathbf{h}\right)\begin{pmatrix} A^{1/2}v \\ \rho \\ \mathbf{h}\end{pmatrix} =$$

$$-\alpha(A^{1/2}v, A^{1/2}v) - (\beta\rho, A^{1/2}v) - (S^*\mathbf{h}, A^{1/2}v) + (\beta A^{1/2}v, \rho) + (SA^{1/2}v, \mathbf{h})_2 - (\Gamma\mathbf{h}, \mathbf{h})_2 =$$

$$= -\alpha(A^{1/2}v, A^{1/2}v)) + 2\ \mathrm{Im}\left[(A^{1/2}S^*\mathbf{h}, v) + (\beta A^{1/2}v, \rho)_H\right] - (\Gamma\mathbf{h}, \mathbf{h})_2,$$

где $x = (v, \rho, \mathbf{h}) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$. Из последнего равенства, в силу самосопряжённости и положительности операторов A и Γ, следует, что $\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0 x, x)_{\mathbb{H}} < 0$ для любого $x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$. Лемма доказана.

Далее потребуются результаты о спектре оператора $\mathcal{A}_0$. Покажем, что спектр оператора $\mathcal{A}_0$, за исключением, точек $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots$ совпадает со спектром оператор-функции $L_0(\lambda)$ (см. (48)), подробно изучавшимся в главе 2 настоящей работы. Для этого потребуется факторизация матрицы $\mathcal{A}_0$ типа Шура–Фробениуса (см. [77], гл. 1, утв. 1.6.2). Справедлива

Лемма 3.3.3 *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, операторы $A_{12} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, $A_{21} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, операторы A_{11}, A_{22}, вообще говоря, неограничены и действуют в пространствах H_1 и H_2 соответственно. Если A_{22} ограниченно обратим в H_2, тогда*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I\end{pmatrix}. \tag{122}$$

Если же ограниченно обратим оператор A_{11}, то

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I\end{pmatrix}. \tag{123}$$

Доказательство. Проверим равенство (122), равенство (123) проверяется аналогично.

Обозначим гильбертово пространство $H_1 \oplus H_2$ за $\mathbf{H}$. Докажем, что области определения операторных матриц в обеих частях равентства совпадают. Очевидно, что область определения операторной матрицы, стоящей в левой части равенства равна

$$\mathfrak{A} = \left\{\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbf{H} : \ h_1 \in \mathrm{Dom}(A_{11}), \ h_2 \in \mathrm{Dom}(A_{22})\right\}.$$

Операторная матрица

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix}$$

в правой части равенства (122) является ограниченным оператором в пространстве $\mathbf{H}$, значит, определена всюду. Рассмотрим вектор $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbf{H}$ и подействуем на него этой матрицей:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ A_{22}^{-1}A_{21}h_1 + h_2 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы произведение операторных матриц в правой части равенства (122) было определено необходимо и достаточно, чтобы вектор $(h_1, A_{22}^{-1}A_{21}h_1 + h_2)^T$ находился в области определения операторной матрицы

$$\begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

то есть выполнялось $h_1 \in \mathrm{Dom}(A_{11})$, $A_{22}^{-1}A_{21}h_1 + h_2 \in \mathrm{Dom}(A_{22})$. Последнее верно в том и только том случае, когда $h_2 \in \mathrm{Dom}(A_{22})$, ибо $A_{22}^{-1}A_{21}h_1 \in \mathrm{Dom}(A_{22})$. Отметим, что третья операторная матрица в правой части (122) есть ограниченный оператор. Тем самым доказано, что области определения операторов в левой и правой частях равенства (122) совпадают.

Равенство самих операторов на векторах из области определения проверяются непосредственно по правилу умноженния матриц. Лемма доказана.

Теперь, пользуясь равенствами (122) и (123), разложим оператор $\mathcal{A}_0 - \lambda I$ следующим образом:

Лемма 3.3.4 *Пусть $\lambda \neq 0, -\gamma_1, -\gamma_2, \ldots,$ тогда справедливо разложение:*

$$\mathcal{A}_0 - \lambda I = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\lambda}\beta I & S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}\overline{A^{-1/2}L_0(\lambda)A^{-1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma + \lambda I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\beta I & I & 0 \\ -(\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{124}$$

где оператор-функция $L_0(\lambda)$ определена равенством (48).

Справедливо разложение:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ -\beta T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \beta T^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{125}$$

где $T = (\alpha I + S^*\Gamma^{-1}S)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0,\ -\gamma_1,\ -\gamma_2 \ldots$ Имеем

$$\mathcal{A}_0 - \lambda I = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I - \lambda A^{-1} & -\beta I & -S^* \\ \beta I & -\lambda I & 0 \\ S & 0 & -\Gamma - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{126}$$

К операторной матрице

$$\begin{pmatrix} -\alpha I - \lambda A^{-1} & -\beta I & -S^* \\ \beta I & -\lambda I & 0 \\ S & 0 & -\Gamma - \lambda I \end{pmatrix}.$$

осталось применить разложение (122), где $A_{11} = -\alpha I - \lambda A^{-1}$, $A_{12} = (-\beta I, -S^*)$, $A_{21} = (\beta I, S)^T$,

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -\lambda I & 0 \\ 0 & -(\Gamma + \lambda I) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda = 0$. Имеем

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -\beta I & -S^* \\ \beta I & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{127}$$

В матрице

$$\begin{pmatrix} -\alpha I & -\beta I & -S^* \\ \beta I & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix}$$

рассмотрим подматрицу

$$\begin{pmatrix} -\alpha I & -S^* \\ & \\ S & -\Gamma \end{pmatrix},$$

к которой применим (122):

$$\begin{pmatrix} -\alpha I & -S^* \\ S & -\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & S^*\Gamma^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I - S^*\Gamma^{-1}S & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & I \end{pmatrix}.$$

Подставим полученный результат в матрицу:

$$\begin{pmatrix} -\alpha I & -\beta I & -S^* \\ \beta I & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I - S^*\Gamma^{-1}S & -\beta I & 0 \\ \beta I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{128}$$

Заметим, что оператор

$$T := \alpha I + S^*\Gamma^{-1}S$$

обратим. Действительно, $S^*\Gamma^{-1}S$ — самосопряжённый положительный оператор, следовательно $-\alpha \notin \sigma(S^*\Gamma^{-1}S)$.

К подматрице

$$\begin{pmatrix} -T & -\beta I \\ \beta I & 0 \end{pmatrix}$$

применим разложение (123), что возможно сделать, ввиду обратимости оператора T:

$$\begin{pmatrix} -T & -\beta I \\ \beta I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\beta T^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T & 0 \\ 0 & -\beta^2 T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \beta T^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{129}$$

Возвращаясь к (128), перемножая матрицы

$$\begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\beta T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ -\beta T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & \beta T^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \beta T^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{pmatrix} -\alpha I & -\beta I & -S^* \\ \beta I & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ -\beta T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \beta T^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из (127), следует (125). Лемма доказана.

Из факторизации (124) легко вывести следующее утверждение:

Лемма 3.3.4 *Пусть $\lambda \neq 0,\ -\gamma_1,\ -\gamma_2, \ldots,$ тогда для данного λ выполнено следующее: $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \sigma(L_0)$.*

Доказательство. Действительно, это следует из непрерывной обратимости матрицы

$$\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

ввиду обратимости оператора A, а также непрерывной обратимости матриц

$$\begin{pmatrix} I & \frac{1}{\lambda}\beta I & S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\beta I & I & 0 \\ -(\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix},$$

так как для них легко указать обратные:

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\lambda}\beta I & -S^*(\Gamma+\lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda}\beta I & I & 0 \\ (\Gamma+\lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}$$

соответственно. Таким образом, непрерывная обратимость $\mathcal{A}_0-\lambda I$ вытекает непрерывной обратимости матрицы

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}A^{-1/2}L_0(\lambda)A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma+\lambda I) \end{pmatrix},$$

что в свою очередь следует из непрерывной обратимости $L_0(\lambda)$. Лемма доказана.

Из факторизации (125) вытекает ещё одно простое утверждение:

Лемма 3.3.5. *Оператор $\mathcal{A}_0$ непрерывно обратим.*

Доказательство. Для ограниченных операторов

$$\begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ -\beta T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & \beta T^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}$$

укажем обратные. Непосредственно по правилу умножения матриц можно проверить, что таковыми являются ограниченные операторы, задаваемые матрицами

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -S^*\Gamma^{-1} \\ \beta T^{-1} & I & -\beta T^{-1}S^*\Gamma^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{pmatrix} I & -\beta T^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \Gamma^{-1}S & -\beta\Gamma^{-1}ST^{-1} & I \end{pmatrix}$$

соответственно. Ввиду нерерывной обратимости операторной матрицы

$$\begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix},$$

из разложения (125) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Сформулируем и докажем основной результат настоящего раздела.

Теорема 3.3.1. *Оператор $\mathcal{A}_0$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы, аналитической в угле* $\{|\arg\lambda| < \delta\}$.

Доказательство. Из лемм 3.3.4 и 3.3.5 спектр $\sigma(\mathcal{A}_0)\setminus\{-\gamma_1, -\gamma_2, \dots\}$ и спектр оператор-функции $L_0(\lambda)$ совпадают. В силу теоремы 2.2.1 и леммы 3.3.4 найдётся постоянная $\delta \in (0, \pi/2)$ и $\gamma > 0$ такие, что невещественная часть спектра оператора $\mathcal{A}_0$ содержится в области $D_{\gamma,\delta}$, где

$$D_{\gamma,\delta} = \left\{\mathrm{Re}\,\lambda < -\gamma,\ \frac{\pi}{2} + \delta < |\arg\lambda| < \frac{3\pi}{2} - \delta\right\}.$$

Отсюда $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset D_{\gamma,\delta}$, следовательно, оператор $\mathcal{A}_0 - \lambda I$ — непрерывно обратим для любого положительного λ, следовательно, замкнутый диссипативный оператор $\mathcal{A}_0$ является максимальным, и из теоремы о генераторе полугруппы вытекает, что $\mathcal{A}_0$ — генератор сжимающей C_0-полугруппы.

Докажем теперь аналитичность этой полугруппы. Ввиду критерия аналитичности, следует проверить, что в $\Lambda_\delta := \overline{\{|\arg\lambda| < \pi/2 + \delta\}}\setminus\{\lambda = 0\}$ для нормы резольвенты оператора $\mathcal{A}_0$ справедлива оценка

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}_0)\| < \frac{M}{|\lambda|} \tag{130}$$

для некоторой постоянной $M > 0$. Для этого с помощью разложения (124) запишем $R(\lambda, \mathcal{A}_0)$ в явном виде:

$$R(\lambda, \mathcal{A}_0) = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda}\beta I & I & 0 \\ (\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$
\times\begin{pmatrix} -\lambda\tilde{L}_0(\lambda)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\lambda}I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma+\lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\dfrac{1}{\lambda}\beta I & -S^*(\Gamma+\lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{131}
$$

где $\tilde{L}_0(\lambda) = \overline{A^{-1/2}L_0(\lambda)A^{-1/2}}$ и подействуем ей на произвольный вектор $(v, \rho, \mathbf{h})^T \in \mathbb{H}$:

$$
R(\lambda, \mathcal{A}_0)\begin{pmatrix} v \\ \rho \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\rho} \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{pmatrix},
$$

где

$$
\tilde{v} = -\left(\lambda A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)A^{-1/2}v - A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\beta\rho - \lambda A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)S^*(\Gamma+\lambda I)^{-1}\mathbf{h}\right), \tag{132}
$$

$$
\tilde{\rho} = \frac{1}{\lambda}(\beta A^{1/2}\tilde{v} - \rho), \tag{133}
$$

$$
\tilde{v} = (\Gamma+\lambda I)^{-1}(SA^{1/2}\tilde{v} - \mathbf{h}). \tag{134}
$$

Для проверки (130) достаточно доказать:

$$
\|A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\| \le \frac{M_1}{|\lambda|^2}, \tag{135}
$$

$$
\|A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\| \le \frac{M_2}{|\lambda|}, \tag{136}
$$

$$
\|(\Gamma+\lambda I)^{-1}\| \le \frac{M_3}{|\lambda|}, \tag{137}
$$

$M_1, M_2, M_3 > 0$. Неравенство (135) немедленно следует из равенства $\left\|A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\right\| = \left\|L_0^{-1}(\lambda)\right\|$ и теоремы 2.3.3.

Неравенство (136) следует из

$$
\left\|A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\right\| = \left\|A^{1/2}L_0^{-1}(\lambda)\right\| < M\left\|AL_0^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{M_2}{|\lambda|}.
$$

Последнее неравенство доказано в теореме 2.3.3

Наконец,

$$
\|\Gamma+\lambda I\| \le \frac{1}{\cos\delta|\lambda|},
$$

при $\lambda \in \Lambda_\delta$. Таким образом, неравенства (135), (136), (137) доказаны.

Таким образом, по теореме об аналитичности полугруппы оператор $\mathcal{A}_0$ является генератором полугруппы, аналитической в угле $\{|\arg\,\lambda| < \delta\}$. Теорема доказана.

Используя только что доказанный результат, в следующем разделе докажем теорему о классической разрешимости задачи (101)–(102).

3.4 О классической разрешимости интегродифференциального уравнения, возникающего в теории вязкоупругости

Под классической разрешимостью задачи (101)–(102) понимается следующее:

Определение 3.4.1. Функция $u \in C^2\left(\mathbb{R}_+, H\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A)\right)$ называется классическим решением задачи (101)–(102), если для каждого $t \geq 0$ функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (101) и начальным условиям (102).

Решение задачи (101)–(102) будет получено из решения задачи (111)–(112), разрешимость которой будет пониматься в следующем смысле.

Определение 3.4.2. Функции $(v(t), \rho(t), h_1(t), h_2(t), \dots)$ называются классическим решением задачи (111)–(112), если эти функции непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$ и, кроме этого, справедливо $\alpha A^{1/2} v(t) + \beta\rho(t) + \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\dfrac{c_j}{\gamma_j}} h_j(t) \in C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right)$, $\left(h_1(t), h_2(t), \dots\right)^T \in C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(\Gamma)\right)$. При этом указанные функции для всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнениям (111) и начальным условиям (112).

Из доказанного в §3.3 результата об аналитичности полугруппы вытекает следующая теорема о разрешимости ([37], см. гл. 3, п. 5)

Теорема 3.4.1. *Пусть $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$, функция $F(t)$ локально гёльдерова, тогда задача* (119)–(120) *имеет единственное решение $x \in C^1\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)\right)$, удовлетворяющее уравнению* (119) *для любого $t \geq 0$ и начальному условию* (120).

Далее потребуется следующая простая лемма, вытекающая из леммы Жордана.

Лемма 3.4.1. *Пусть вектор-функция $f(\lambda)$ такая, что существует $\delta \in (0, \pi/2)$, для которого в области $D_\delta := \{|\arg\,\lambda| < \pi/2 + \delta\}$ функция $f(\lambda)$ аналитична и справедливо*

$$\|f(\lambda)\| \to 0, \quad |\lambda| \to 0, \quad \lambda \in \Lambda_\delta.$$

Тогда при $t > 0$ справедливо равенство

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t} f(\lambda) h d\lambda, \tag{138}$$

где $\Lambda_\delta := \{\arg\lambda = -\pi/2 - \delta\} \cup \{\arg\lambda = \pi/2 + \delta\}$.

Доказательство. Рассмотрим контуры вида

$D^+_{R,\delta} = \Lambda^+_{R,\delta} \cup C^+_{R,\delta} \cup \{\mathrm{Re}\,\lambda = 0,\ 0 \le \mathrm{Im}\,\lambda \le R\}$ и

$D^-_{R,\delta} = \Lambda^-_{R,\delta} \cup C^-_{R,\delta} \cup \{\mathrm{Re}\,\lambda = 0,\ -R \le \mathrm{Im}\,\lambda \le 0\}$, где

$$C^+_{R,\delta} = \left\{|\lambda| = R,\ \frac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le \frac{\pi}{2} + \delta\right\},$$

$$C^-_{R,\delta} = \left\{|\lambda| = R,\ -\frac{\pi}{2} - \delta \le \arg\lambda \le -\frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\Lambda^+_{R,\delta} = \left\{\arg\lambda = \frac{\pi}{2} + \delta,\ |\lambda| \le R\right\},$$

$$\Lambda^-_{R,\delta} = \left\{\arg\lambda = -\frac{\pi}{2} - \delta,\ |\lambda| \le R\right\}.$$

По теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_0^{iR} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda + \int_{C^+_{R,\delta}} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda - \int_{\Lambda^+_{R,\delta}} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = \int_{D^+_{R,\delta}} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = 0,$$

для любого $R > 0$. Заметим, что

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C^+_{R,\delta}} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = 0.$$

при $t > 0$. Этот факт следует из оценок, аналогичных тем, что используются при выводе известной леммы Жордана. Пусть $M_f^+(R,\delta) = \max_{\lambda\in C^+_{R,\delta}} |f(\lambda)|$. Имеем

$$\left\|\int_{C^+_{R,\delta}} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda\right\| \le M_f^+(R,\delta) \int_0^\delta e^{-tR\sin\varphi} d\varphi \le M_f^+(R,\delta) \int_0^\delta e^{-tR\varphi/\pi} d\varphi =$$

$$= M_f^+(R,\delta)\left(1 - e^{-tR\delta/\pi}\right) \to 0,$$

при $R \to +\infty$, так как $M_f^+(R,\delta) \to 0$. Таким образом, установлено равенство

$$\int_0^{+i\infty} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Lambda^+_{R,\delta}} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\int_{-i\infty}^0 e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Lambda^-_{R,\delta}} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda.$$

Складывая оба доказанных равенства и переходя к пределу в правой части, завершаем доказательство леммы. Лемма доказана.

Из теоремы 3.4.1 непосредственно следует разрешимость в смысле определения 3.4.2 задачи (111)–(112). Определим вектор-функции, которые потребуются для представления решения задачи (111)–(112). Пусть

$$\tilde{v}_0(\lambda) := -\lambda L_0^{-1}(\lambda)u_1 + \beta A^{-1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)A^{1/2}u_0, \tag{139}$$

где оператор-функция $\tilde{L}_0(\lambda)$, как и ранее, определена равенством $\tilde{L}_0(\lambda) = \overline{A^{-1/2}L_0(\lambda)A^{-1/2}}$. Тогда

$$\tilde{\rho}_0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}A^{1/2}u_0 + \frac{\beta}{\lambda}A^{1/2}\tilde{v}_0(\lambda), \tag{140}$$

$$\tilde{h}_0(\lambda) = S\left(\Gamma + \lambda I\right)^{-1} A^{1/2}\tilde{v}_0(\lambda), \tag{141}$$

$$\tilde{f}_1(\lambda, s) = \lambda L_0^{-1}(\lambda)f(s), \tag{142}$$

$$\tilde{f}_2(\lambda, s) = -\beta A^{1/2}L_0^{-1}(\lambda)f(s), \tag{143}$$

$$\tilde{f}_3(\lambda, s) = -\lambda S\left(\Gamma + \lambda I\right)^{-1} A^{1/2}L_0^{-1}(\lambda)f(s). \tag{144}$$

Теорема 3.4.2. *Пусть начальные условия* (112) *такие, что* $A^{1/2}u_1 + \beta A^{1/2}u_0 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, *и при этом функция* $f(t)$ *— локально гёльдерова. Тогда задача* (111)–(112) *имеет единственное решение в смысле определения* 3.4.2, *которое при этом допускает аналитическое продолжение в угол* $D_\delta := \{|\arg\lambda| < \delta\}$. *При* $t > 0$ *для этого решения справедливо следующее представление:*

$$v(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}\tilde{v}_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}\tilde{f}_1(\lambda, s)d\lambda\, ds, \tag{145}$$

$$\rho(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}\tilde{\rho}_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}\tilde{f}_2(\lambda, s)d\lambda\, ds, \tag{146}$$

$$h(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}\tilde{h}_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}\tilde{f}_3(\lambda, s)d\lambda\, ds, \tag{147}$$

где Λ_δ *— граница угла из леммы* 3.4.1, δ *— число из интервала* $(0, \pi/2)$, *при котором выполнены условия теоремы* 3.3.1.

Доказательство. В §3.2 показано, что задача (111)–(112) может быть записана в виде задачи (119)–(120) с неизвестной функцией $x(t) = (v(t), \rho(t), h(t))^T$, $h(t) =$

$(h_1(t), h_2(t), \dots)^T$, начальным условием $x_0 = \big(u_1, \beta A^{1/2}u_0, 0\big)$, оператором $\mathcal{A}_0$, определённым равенством (117), с областью определения (118) и функцией $F(t) = (f(t), 0, 0)^T$. Проверим выполнение условий теоремы 3.4.1 для полученной задачи.

Из определения нормы в пространстве $\mathbb{H}$

$$\|F(t)\|_{\mathbb{H}} = \|f(t)\|,$$

откуда, очевидно, следует локальная гёльдеровость $F(t)$. Далее, из условия $A^{1/2}u_1 + \beta A^{1/2}u_0 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$ вытекает, что $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_0)$. Таким образом, все условия теоремы 3.4.1 выполнены, и задача (119)–(120) имеет единственное решение $x(t)$ в смысле определения 3.4.1.

По теореме 3.3.1 оператор $\mathcal{A}_0$ является генератором аналитической в угле D_δ полугруппы операторов $U(t)$. Для функции $x(t)$ справедливо равенство ([37], гл. 1 теорема 6.1):

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_0^t U(t-s)F(s)ds, \tag{148}$$

где для $U(t)$ справедливо ([37], гл. 1 теорема 1.3):

$$U(t)f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, \mathcal{A}_0)fd\lambda, \quad f \in \mathbb{H}. \tag{149}$$

Из оценки (130) резольвенты оператора $\mathcal{A}_0$, леммы 3.4.1 и представления полугруппы (149) $U(t)$ выражение (148) при $t > 0$ принимает вид

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}R(\lambda, \mathcal{A}_0)x_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}R(\lambda, \mathcal{A}_0)F(s)d\lambda\, ds. \tag{150}$$

Используя разложение (131), а также равенства (132)–(134), запишем $R(\lambda, \mathcal{A}_0)x_0$ в переменных задачи (108) – (112):

$$R(\lambda, \mathcal{A}_0)x_0 = \begin{pmatrix} \tilde{v}_0(\lambda) \\ \tilde{\rho}_0(\lambda) \\ \tilde{h}_0(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{v}_0(\lambda)$, $\tilde{\rho}_0(\lambda)$, $\tilde{h}_0(\lambda)$ определены равенствами (139) — (141). Аналогично запишем $R(\lambda, \mathcal{A}_0)F(s)$:

$$R(\lambda, \mathcal{A}_0)F(s) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\lambda, s) \\ \tilde{f}_2(\lambda, s) \\ \tilde{f}_3(\lambda, s) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{f}_1(\lambda, s)$, $\tilde{f}_2(\lambda, s)$, $\tilde{f}_3(\lambda, s)$ определены в (142)—(144). С учётом равенства (150) получаем представления (145)—(147).

Аналитичность в угле $v(t)$, $\rho(t)$ и $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots)$ непосредственно вытекает из аналитичности $x(t)$. Теорема доказана.

Замечание 3.4.1 Заметим, что разрешимость (101) – (102) не является тривиальным следствием из теоремы 3.4.2, поскольку, вместо условия $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A))$, при $v(t) = \dot{u}(t)$, $\rho(t) = \beta A^{1/2}u(t)$, $h_j(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} e^{-\gamma_j(t-s)} A^{1/2}\dot{u}(s)ds$, мы имеем лишь

$$\alpha A^{1/2}\dot{u}(t) + \beta A^{1/2}u(t) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} \int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)} A^{1/2}\dot{u}(s)ds \in C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right).$$

Из разрешимости (111) – (112) тривиальным образом вытекает разрешимость задачи

$$\ddot{u}(t) + A^{1/2}\left(\alpha A^{1/2}\dot{u}(t) + \beta^2 A^{1/2}u(t) - \int_0^t \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j(t-s)} A^{1/2}u(s)ds\right) = 0,$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1,$$

где $\alpha A^{1/2}u_1 + \beta^2 A^{1/2}u_0 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, т.е. решение принадлежит более широкой области, чем требуется, согласно определению 3.4.1.

Для того чтобы имела место классическая разрешимость достаточно положить $u_0, u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$. Докажем основной результат настоящего раздела.

Теорема 3.4.3. *Пусть* $u_0, u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$, *а также выполнено условие* (84). *Тогда задача* (101)–(102) *имеет единственное решение в смысле определения* 3.4.1. *При этом существует число* $\delta \in (0, \pi/2)$ *такое, что решение* $u(t)$ *допускает аналитическое продолжение в угол* $D_\delta = \{|\arg \lambda| < \delta\}$ *и справедлива оценка*

$$\|\dot{u}(t)\|^2 + \left\|A^{1/2}u(t)\right\|^2 \le Me^{-2\gamma t}\left(\|u_1\|^2 + \left\|A^{1/2}u_0\right\|^2 + t^2\|Au_0\|^2\right), \tag{151}$$

где $M > 0$, $0 < \gamma \le d_0$.

Доказательство.

В задаче (111) положим $f(t) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} Au_0$. В силу условия (84) функция $f(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, следовательно, является локально гёльдеровой. Далее из условия $u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$ и $u_0 \in \mathrm{Dom}(A)$ вытекает $\alpha A^{1/2}u_1 + \beta A^{1/2}u_0 \in \mathrm{Dom}(A)$.

Пусть $(v(t), \rho(t), h(t))$ — решение задачи (111) – (112), где $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots)^T$. Отметим, что ввиду $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$ имеем, что $v \in C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$. Из второго уравнения (111) выразим $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \beta A^{1/2} u_0 + \int_0^t \beta A^{1/2} v(s) ds. \tag{152}$$

Из третьего уравнения (111) для функции $h_j(t)$ справедливо равенство

$$h_j(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} e^{-\gamma_j(t-s)} A^{1/2} v(s) ds. \tag{153}$$

В силу теоремы 3.4.1 и равенства (118) функция $\alpha A^{1/2} v(t) + \beta \rho(t) + \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{c_j}{\gamma_j}} h_j(t) =$ $\alpha A^{1/2} v(t) + \beta A^{1/2} u_0 + \int_0^t \left(\beta^2 + \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j(t-s)}\right) A^{1/2} v(s) ds \in C(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2}))$. Поскольку $u_0 \in \mathrm{Dom}(A)$, имеем

$$\alpha A^{1/2} v(t) + \int_0^t \left(\beta^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j(t-s)}\right) A^{1/2} v(s) ds =: g(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})). \tag{154}$$

Нам требуется доказать, что $v \in C(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A))$, т.е. $\tilde{v}(t) = A^{1/2} v(t) \in C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right)$. Иными словами, интегральное уравнение

$$\alpha \tilde{v}(t) + \int_0^t \left(\beta^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j(t-s)}\right) \tilde{v}(s) ds = g(t) \tag{155}$$

разрешимо в пространстве $C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right)$ при $g(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right)$. Интегральный оператор $\mathcal{K}$, задаваемый равенством

$$\mathcal{K} f(t) := \int_0^t \left(\beta^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j(t-s)}\right) f(s) ds,$$

является вольтерровым в пространстве $C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right)$, поскольку ядро этого оператора в силу условия (103) есть ограниченный оператор в H. Из этого по теореме Фредгольма заключаем, что интегральное уравнение (155) однозначно разрешимо в пространстве $C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right)$, следовательно, $A^{1/2} v(\cdot) = \tilde{v}(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right)$. Таким образом, установлено, что функция $v(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, \mathrm{Dom}(A))$ при $u_0 \in \mathrm{Dom}(A)$, $u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$.

Рассмотрим функцию $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s) ds$. Покажем, что эта функция является решением задачи (101)–(102) в смысле определения 4.4.1. Выполенение начальных условий (102) очевидным образом следует из непрерывности функции $v(t)$. Для проверки же выполнения равенства (101) при $t \geq 0$ достаточно подставить выражения (152) и (153) в первое уравнение системы (111) с $f(t) = -\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} A u_0$:

$$\dot{v}(t) = A^{1/2}\left(-\alpha A^{1/2} v(t) - \beta^2 A^{1/2} u_0 - \int_0^t \beta^2 A^{1/2} v(s) ds - \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j (t-s)} A^{1/2} v(s) ds\right) - \\ - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} A u_0. \quad (156)$$

По доказанному оператор $A^{1/2}$ в правой части можно занести в скобки. Для интегральных слагаемых имеем:

$$\int_0^t A^{1/2} v(s) ds = A^{1/2} u(t) - A^{1/2} u_0,$$

$$\int_0^t \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j (t-s)} A^{1/2} v(s) ds = \frac{c_j}{\gamma_j} A^{1/2} u(t) - \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t} A u_0 - \int_0^t c_j e^{-\gamma_j (t-s)} A^{1/2} u(s) ds.$$

Подставляя полученные равенства в (156) и, пользуясь замкнутостью $A^{1/2}$, внеся этот оператор под знаки интегралов, получим

$$\ddot{u}(t) + \alpha A \dot{u}(t) + \beta^2 A u(t) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} A u(t) - \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t c_j e^{-\gamma_j (t-s)} A u(s) ds = 0.$$

С учётом $\beta^2 = 1 - \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j}$, получаем уравнение (101).

Таким образом, из разрешимости (111) – (112) вытекает разрешимость (101) – (102). Обратное доказано в §3.2.

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь установить оценку (151). Для её получения воспользуемся оценкой нормы классического решения задачи (111) – (112)

$$\|x(t)\|_{\mathbb{H}} \leq \|U(t) x_0\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \|U(t-s) F(s)\|_{\mathbb{H}} ds, \quad (157)$$

где $U(t)$ — полугруппа, генератором которой является оператор $\mathcal{A}_0$. Поскольку ввиду лемм 3.3.4 и 3.3.5 $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(L_0(\lambda))$, то найдётся $0 < \gamma \leq d_0$ такое, что $\sigma(\mathcal{A}_0) \in \{\mathrm{Re}\, \lambda < -\gamma\}$, следовательно,

$$\|U(t)\| \leq M_0 e^{-\gamma t}$$

для некоторой постоянной $M_0 \geq 1$. Отсюда вытекают следующие оценки:

$$\|U(t) x_0\|_{\mathbb{H}}^2 \leq M_0^2 e^{-2\gamma t} \left(\|u_1\|^2 + \beta^2 \left\|A^{1/2} u_0\right\|^2\right)$$

и

$$\|U(t-s)F(s)\|_{\mathbb{H}} \leq M_0 e^{-\gamma(t-s)} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j s} \|Au_0\| < M_0 e^{-\gamma t} \|Au_0\|.$$

Последнее вытекает из условий $\gamma_1 > d_0 \geq \gamma$ и (103). Используя полученные оценки, а также оценку (157), получаем:

$$\|\dot{u}(t)\|^2 + \left\|A^{1/2}u(t)\right\|^2 \leq (1+\beta^2)\|x(t)\|^2_{\mathbb{H}} \leq M e^{-2\gamma t}\left(\|u_1\|^2 + \left\|A^{1/2}u_0\right\|^2 + t^2\|Au_0\|^2\right)$$

для некоторой постоянной $M > 0$. Тем самым теорема о корректной разрешимости полностью доказана.

3.5 О представлении решения интегродифференциального уравнения, возникающего в теории вязкоупругости

В заключительном разделе главы 3 получим представление решения задачи (101)–(102) в виде ряда из экспонент. Напомним некоторые обозначения из гл. 3. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортоноримрованный базис в пространстве H из собственных векторов оператора A:

$$Ae_n = a_n e_n,$$

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \to +\infty.$$

Функции $l_n(\lambda) = (L_0(\lambda)e_n, e_n)$ задаются равенствами (49).

Перед тем, как мы сформулируем основной результат настоящего раздела, введём некоторые обозначения. Число невещественных точек спектра оператор-функции $L_0(\lambda)$, которых, согласно §3.4, может быть как конечное, так и счётное число, примем за $\nu(L_0)$. Далее начальные условия (102) разложим в ряды Фурье по системе $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$:

$$u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{0,n} e_n,$$

$$u_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{1,n} e_n,$$

где $u_{0,n} := (u_0, e_n)$, $u_{1,n} := (u_1, e_n)$. Заметим, что если условия теоремы 4.4.3 выполнены, то сходятся ряды

$$Au_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_{0,n} e_n,$$

$$Au_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_{1,n} e_n.$$

Сформулируем и докажем теорему о представлении решения задачи (101)–(102).

Теорема 3.5.1 *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4.3, *тогда для решения* $u(t)$ *задачи* (101)–(102) *в смысле определения* 3.4.1 *при* $t > 0$ *справедливо следующее представление*

$$\begin{aligned} u(t) = &\sum_{n=1}^{\nu(L_0)} \frac{(\lambda_n^+ + \alpha a_n)\, u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_n^+)} e^{\lambda_n^+ t} e_n + \sum_{n=1}^{\nu(L_0)} \frac{(\lambda_n^- + \alpha a_n)\, u_{0,n} + u_{1,n}}{l_n'(\lambda_n^-)} e^{\lambda_n^- t} e_n + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_{n,k}}{l_n'(\lambda_{n,k})} e^{\lambda_{n,k} t} \right) u_{0,n} e_n + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{l_n'(\lambda_{n,k})} e^{\lambda_{n,k} t} \right) a_n u_{0,n} e_n + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{l_n'(\lambda_{n,k})} e^{\lambda_{n,k} t} \right) u_{1,n} e_n, \end{aligned} \tag{158}$$

где $\lambda_n^{\pm}$ *— невещественные точки спектра оператор-функции* $L_0(\lambda)$, $\lambda_{n,k}$ *— вещественные точки спектра* $L_0(\lambda)$ *такие, что*

$$-\gamma_k < \lambda_{n,k} < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \gamma_0 := 0$$

для всех натуральных n.

Доказательство. В силу теоремы 3.4.3 существует и единственное решение задачи (101)–(102) такое, что $u(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}_+, H) \cap C^1(\mathbb{R}_+, A)$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (101), заметим, что для преобразования Лапласа решения задачи (101) – (102) $\hat{u}(\lambda)$ справедливы равенства

$$L_0(\lambda)\hat{u}(\lambda) = (\lambda I + \alpha A)\, u_0 + u_1, \tag{159}$$

$$\hat{u}(\lambda) = L_0^{-1}(\lambda)\left((\lambda I + \alpha A)\, u_0 + u_1\right).$$

Так как $u \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$ и ввиду оценки нормы решения (151), при $t > 0$ выполнена формула обращения

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t} \hat{u}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t} L_0^{-1}(\lambda)\left((\lambda I + \alpha A)\, u_0 + u_1\right) d\lambda.$$

В силу оценок (70) и (78) резольвенты оператор-функции $L_0(\lambda)$ и леммы 3.4.1 найдётся $\delta \in (0, \pi/2)$ такое, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t} L_0^{-1}(\lambda)\left((\lambda I + \alpha A)\, u_0 + u_1\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t} L_0^{-1}(\lambda)\left((\lambda I + \alpha A)\, u_0 + u_1\right) d\lambda,$$

где Λ_δ — граница угла $\{|\mathrm{arg}\lambda| < \delta + \pi/2\}$. Разложим u_0 и u_1 в ряды Фурье по системе собственных векторов оператора A, тогда для решения $u(t)$ будет справедлива следующая формула

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda t} \left(\frac{\lambda + \alpha a_n}{l_n(\lambda)} u_{0,n} + \frac{1}{l_n(\lambda)} u_{1,n} \right) e_n d\lambda.$$

Докажем, что суммирование можно вынести за знак интеграла. Рассмотрим функции

$$f_N(\lambda) := \sum_{n=1}^{N} e^{\lambda t} \left(\frac{\lambda + \alpha a_n}{l_n(\lambda)} u_{0,n} + \frac{1}{l_n(\lambda)} u_{1,n} \right) e_n d\lambda,$$

$$f(\lambda) := \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda t} \left(\frac{\lambda + \alpha a_n}{l_n(\lambda)} u_{0,n} + \frac{1}{l_n(\lambda)} u_{1,n} \right) e_n d\lambda = e^{\lambda t} L_0^{-1}(\lambda) \left((\lambda I + \alpha A) u_0 + u_1 \right).$$

Докажем равенство

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\Lambda_\delta} f_N(\lambda) d\lambda = \int_{\Lambda_\delta} f(\lambda) d\lambda,$$

применив теорему Лебега о мажорируемой сходимиости. Отметим, что ввиду ортогональности системы $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеем $\|f_N(\lambda)\| \le \|f(\lambda)\|$ для $\lambda \in \{|\mathrm{arg}\lambda| < \delta + \pi/2\}$. Следующий интеграл сходится

$$\int_{\Lambda_\delta} \|f(\lambda)\| \, d|\lambda| = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t|\lambda| \sin\delta} \left\| L_0^{-1}(\lambda) (\lambda I + \alpha A) u_0 + u_1 \right\| d|\lambda|.$$

Из оценок нормы резольвенты $L_0^{-1}(\lambda)$ вытекает

$$\left\| L_0^{-1}(\lambda) (\lambda I + \alpha A) u_0 + u_1 \right\| \to 0,$$

при $\lambda \in \Lambda_\delta$, $|\lambda| \to +\infty$, откуда вытекает сходимость интеграла $\int_{\Lambda_\delta} \|f(\lambda)\| \, d|\lambda|$. К последовательности функций $\{f_N\}_{N=1}^{+\infty}$ применим теорему о мажорируемой сходимости и тем самым установим равенство

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\Lambda_\delta} f_N(\lambda) d\lambda = \int_{\Lambda_\delta} f(\lambda) d\lambda,$$

т.е. справедливо

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda t} \left(\frac{\lambda + \alpha a_n}{l_n(\lambda)} u_{0,n} + \frac{1}{l_n(\lambda)} u_{1,n} \right) e_n d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t} \left(\frac{\lambda + \alpha a_n}{l_n(\lambda)} u_{0,n} + \frac{1}{l_n(\lambda)} u_{1,n} \right) d\lambda \right) e_n. \quad (160)$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно вычислить интегралы

$$I_{1,n}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\delta} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda$$

и

$$I_{2,n}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\delta} \frac{\lambda e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda$$

для каждого натурального n и положительного t. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — последовательность нулей функции

$$g(\lambda) = \alpha\lambda + 1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j + \lambda}.$$

По лемме 2.2.2 нули функции $g(\lambda)$ вещественны, причём для них выполнены следующие неравенства

$$-\gamma_k < z_k < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \gamma_0 := 0.$$

Последнее, очевидно, следует из монотонности функции $g(x)$ на каждом интервале $(-\gamma_{k+1}, -\gamma_k)$. Рассмотрим контуры $\Lambda_{\delta,k} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| = \pi/2 + \delta, \ \mathrm{Re}\ \lambda \geq z_k\}$ и $C_k := \{\pi/2 + \delta < \arg\lambda < 3\pi/2 - \delta, \ \mathrm{Re}\ \lambda = z_k\}$. Применим теорему Коши о вычетах к интегралу по контуру $\Lambda_{\delta,k} \cup C_k$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{\delta,k} \cup C_k} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda = \sum_{j=1}^{k} \frac{e^{\lambda_{n,j} t}}{l'_n(\lambda_{n,j})} + \frac{e^{\lambda_n^+ t}}{l'_n(\lambda_n^+)} + \frac{e^{\lambda_n^- t}}{l'_n(\lambda_n^-)},$$

в случае, если $l_n(\lambda)$ содержит внутри контура $\Lambda_{\delta,k} \cup C_k$ невещественные корни и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{\delta,k} \cup C_k} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda = \sum_{j=1}^{m(k,n)} \frac{e^{\lambda_{n,j} t}}{l'_n(\lambda_{n,j})},$$

если все корни вещественные. При этом $0 \leq m(k,n) - k \leq 2$. Покажем, что

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\Lambda_{\delta,k} \cup C_k} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda = \int_{\Lambda_\delta} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda.$$

Очевидно, для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{C_k} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Для доказательства последнего соотношения потребуются некоторые оценки функции $l_n(\lambda)$ на вертикальном отрезке C_k. По определению величины z_k для $l_n(\lambda)$ в этой точке выполняется равенство $l_n(z_k) = z_k^2$. Функция $l_n(\lambda)$ непрерывна на отрезке C_k, следовательно, найдутся $m > 0$ и $\rho > 0$ такие, что на отрезке $[z_k - i\rho, z_k + i\rho]$ справедлива оценка

$$|l_n(\lambda)| \geq m|z_k|^2. \tag{161}$$

На промежутке $\left(z_k + i\rho, z_k + i\dfrac{z_k}{\text{tg } \delta}\right)$ ввиду условия (62) имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j + \lambda}\right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\frac{c_j}{\gamma_j + x + iy}\right| < \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{+\infty} c_j.$$

Таким образом, на указанном интервале $|l_n(\lambda)|$ можно оценить следующим образом

$$|l_n(\lambda)| \geq |\lambda|^2 - \alpha a_n|\lambda| - a_n - \frac{a_n}{\rho} \sum_{j=1}^{+\infty} c_j \geq |z_k|^2 + \rho^2 -$$

$$- \alpha a_n|z_k| \left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \delta}\right)^{1/2} - a_n - \frac{a_n}{\rho} \sum_{j=1}^{+\infty} c_j = |z_k|^2 \left(1 + o(1)\right), \quad k \to +\infty.$$

Интеграл $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda$ допускает тогда оценку

$$\int_{C_k} \frac{e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda \leq \max_{\lambda \in C_k} \left|\frac{1}{l_n(\lambda)}\right| e^{-|z_k|t} \frac{2|z_k|}{\text{tg } \delta} \leq \frac{2Me^{-|z_k|t}}{|z_k| \text{tg } \delta}, \tag{162}$$

где M — некоторая положительная константа. Аналогично

$$\int_{C_k} \frac{\lambda e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda \leq \frac{2M_1 e^{-|z_k|t}}{\text{tg } \delta}, \tag{163}$$

где M_1 — положительная постоянная. Из оценок (162) – (163), переходя к пределу при $k \to +\infty$, для интеграла $I_{1,n}(t)$ справедливы равенства

$$I_{1,n}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{\lambda_{n,j} t}}{l'_n(\lambda_{n,j})} + \frac{e^{\lambda_n^+ t}}{l'_n(\lambda_n^+)} + \frac{e^{\lambda_n^- t}}{l'_n(\lambda_n^-)}$$

и

$$I_{1,n}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{\lambda_{n,j} t}}{l'_n(\lambda_{n,j})}$$

в случае, когда $l_n(\lambda)$ не имеет невещественных корней. Аналогично для $I_{2,n}(t)$ имеют место равенства

$$I_{2,n}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_{n,j} e^{\lambda_{n,j} t}}{l'_n(\lambda_{n,j})} + \frac{\lambda_n^+ e^{\lambda_n^+ t}}{l'_n(\lambda_n^+)} + \frac{\lambda_n^- e^{\lambda_n^- t}}{l'_n(\lambda_n^-)}$$

и

$$I_{2,n}(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_{n,j} e^{\lambda_{n,j} t}}{l'_n(\lambda_{n,j})}$$

в случае отсутствия невещественных корней. Подставляя полученные выражения для $I_{1,n}(t)$, $I_{2,n}(t)$ в представление (160), приходим к представлению (158), чем завершаем доказательство теоремы.

3.6 Выводы к третьей главе

В настоящей главе изучен вопрос о корректной разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа Гуртина-Пипкина с дополнительным слагаемым трения Кельвина–Фойгхта. Вопрос о корректной разрешимости изучался с позиций теории полугрупп. Исходная задача представляется в виде эволюционной задачи (119)–(120) (см. §3.2), причём оператор в правой части является генератором сжимающей C_0-полугруппы, голоморфной в некотором угле правой полуплоскости (см. §3.3 теорема 3.3.1). Эти результаты опубликованы в работе [51]

Из этих результатов вытекает корректная разрешимость исходной задачи (см. §3.4 теорема 3.4.3). Наконец, в §3.5 получено представление решения в виде ряда из экспонент (см. теорема 3.5.1), полностью завершив изучение задачи (101) – (102) для случая, когда ядро вольтерровой свёртки представляется в виде ряда из экспонент.

В качестве замечания укажем, что полугрупповой подход позволяет получить решение задачи (101)–(102) в ослабленном смысле при более слабых ограничениях на начальные условия (см. §3.4 замечание 3.4.1).

4 Исследование общего случая вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с интегральным ядром свёртки и некоммутирующими операторными слагаемыми

4.1 Введение

В настоящей главе проведём подробный анализ исходной задачи Коши вида (36) – (37). Будут получены результаты о корректной разрешимости указанной задачи в классическом смысле. Для изучения вопроса о разрешимости будем использовать полугрупповой подход, аналогичный рассмотренному в предыдущей главе.

Задача (36) – (37) для интегро-дифференциального уравнения второго порядка будет приведена к эволюционной задаче вида (119)–(120) в некотором новом гильбертовом пространстве (см. §4.2). Будет доказано, что оператор в правой части является генератором сжимающей полугруппы, аналитической в некотором угле правой полуплоскости (см. §4.3), на основе чего будет сделан вывод о классической корректной разрешимости исходной задачи (см. §4.4).

4.2 Сведение интегро-дифференциального уравнения второго порядка к эволюционной задаче

Переход от задачи (36)–(37) к эволюционной задаче производится аналогично(см.§3.2) главе 3 настоящей работы. Прежде всего введём новое гильбертово пространство $\mathbb{H}$.

На $\mathbb{R}_+$ можно ввести неотрицательную меру ν:

$$\nu(\mathbb{A}) := \int_{\mathbb{A}} d\mu(\tau), \tag{164}$$

где $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}_+$ — борелевское множество. Интеграл (164) понимается в смысле Лебега-Стилтьеса. Рассмотрим теперь семейство гильбертовых пространств $H(\tau) := H$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Семейство гильбертовых пространств $H(\tau)$ образует ν-измеримое поле (см. [39], п. 2.3). Пространство

$$L_2(H, \mu) := \int_0^{+\infty} H(\tau) d\mu(\tau) \tag{165}$$

— пространство ν-почти всюду определённых измеримых (в сильном смысле) функций $f : \mathbb{R}_+ \to H$ таких, что

$$\|f\|^2_{L_2(H,\mu)} = \int_0^{+\infty} \|f(\tau)\|^2_H d\mu(\tau) < +\infty.$$

Пространство $L_2(H,\mu)$ является сепарабельным гильбертовым ([20], с. 148). Далее норма и скалярное произведение в пространстве H будут обозначаться $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ соответственно, а в пространстве $L_2(H,\mu)$ — $\|\cdot\|_2$ и $(\cdot,\cdot)_2$.

Рассмотрим операторы S, S^* и Γ, действующие в пространствах:

$$S : H \to L_2(H,\mu),$$

$$S^* : L_2(H,\mu) \to H,$$

$$\Gamma : \mathrm{Dom}(\Gamma) \subset L_2(H,\mu) \to L_2(H,\mu),$$

по следующим правилам:

$$Sh(\tau) := \frac{1}{\sqrt{\tau}} h, \quad h \in H,$$

$$S^* f := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} f(\tau) d\mu(\tau), \quad f \in L_2(H,\mu),$$

$$\Gamma f(\tau) := \tau f(\tau), \quad f \in L_2(H,\mu).$$

Отметим при этом, что операторы S и S^* — ограничены, что следует из неравенств:

$$\|Sh\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{\|h\|^2}{\tau} d\mu(\tau) < \|h\|^2,$$

$$\|S^* f\|^2 = \left\| \int_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\mu(\tau) \right\|^2 \leq \int_0^{+\infty} \|f\|^2 \, d\mu(\tau) \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \|f\|_2^2,$$

и являются взаимно сопряжёнными:

$$(Sh, f)_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(h, f(\tau)\right) d\mu(\tau) = \left(h, \int_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\mu(\tau)\right) = (h, S^* f).$$

Оператор Γ — самосопряжён как оператор умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве ([5], п.54), при этом является положительно определенным в пространстве $L_2(H,\mu)$, ввиду того, что носитель меры ν отделён от 0.

Определим пространство $\mathbb{H} := H \oplus H \oplus L_2(H,\mu)$ со скалярным произведением:

$$(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}} := (\cdot,\cdot) + (\cdot,\cdot) + (\cdot,\cdot)_2,$$

индуцирующим евклидову норму, относительно которой $\mathbb{H}$ полно. Таким образом, $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство.

Как указано в главе 1, из свойств (A) — (C) операторов вытекает, что оператор $\left(1-\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}d\tau\right)\cdot I+\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}$ является ограниченным, самосопряжённым, положительно определённым оператором, следовательно, определён оператор

$$\tilde{B} := \left(\left(1-\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}d\tau\right)I+\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\right)^{1/2}. \tag{166}$$

Введём теперь новые функции $v(t),\ \rho(t):\ \mathbb{R}_+\to H$ и $w(t,\tau):\ \mathbb{R}_+^2\to H$, определяемые равенствами

$$v(t)=\frac{du}{dt}(t), \tag{167}$$

$$\rho(t)=\tilde{B}A^{1/2}v(t), \tag{168}$$

$$w(t,\tau)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\tau(t-s)}A^{1/2}v(s)ds. \tag{169}$$

С помощью формулы интегрирования по частям, как и в §3.2, преобразуем уравнение (36):

$$\begin{aligned}(A+C)u(t)-\int_0^t K(t-s)Au(s)ds=\left(1-\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right)Au(t)+Cu(t)+\\ +\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}Au(t)-\int_0^t\left(\int_0^{+\infty}e^{-\tau(t-s)}d\mu(\tau)\right)Au(s)ds=\\ =\left(1-\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right)Au(t)+Cu(t)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\tau t}}{\tau}d\mu(\tau)Au(0)+\\ +\int_0^t\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\tau(t-s)}}{\tau}d\mu(\tau)\right)A\frac{du(s)}{ds}ds=A^{1/2}\tilde{B}\rho(t)-f(t)+\\ +A^{1/2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\int_0^t\frac{e^{-\tau(t-s)}}{\sqrt{\tau}}A^{1/2}v(s)ds\right)d\mu(\tau)=\\ =A^{1/2}\tilde{B}\rho(t)-f(t)+\left(A^{1/2}S^*w\right)(t),\end{aligned} \tag{170}$$

где $f(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\tau t}}{\tau}d\mu(\tau)Au(0)$. Полученное выражение подставим в (36) и добавим к нему следующие уравнения

$$\dot{\rho}(t)=\tilde{B}A^{1/2}v(t),$$

$$\dot{w}(t,\tau)=\frac{1}{\tau}A^{1/2}v(t)-\tau w(t,\tau),$$

причём последнее перепишем в операторном виде, рассматривая функцию $w(t) := w(t,\cdot)$ как отображение $w : \mathbb{R}_+ \to L_2(H,\mu)$:

$$\dot{w}(t) = SA^{1/2}v(t) - \Gamma w(t).$$

В итоге получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = A^{1/2}\left(-\alpha A^{1/2}v(t) - \tilde{B}\rho(t) - S^* w(t)\right) + f(t), \\ \dot{\rho}(t) = \tilde{B}A^{1/2}v(t), \\ \dot{w}(t) = SA^{1/2}v(t) - \Gamma w(t). \end{cases} \tag{171}$$

Наконец, запишем начальные условия

$$v(0) = u_1, \quad \rho(0) = \tilde{B}A^{1/2}u_0, \quad w(0) = 0. \tag{172}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -\tilde{B} & -S^* \\ \tilde{B} & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{173}$$

на области определения:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \left\{(u,\rho,v)^T \in \mathbb{H} : \ v \in \mathrm{Dom}(\Gamma), \ (-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^* v) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})\right\}. \tag{174}$$

Рассматривая вектор $(v(t),\rho(t),w(t))^T$ как вектор-функцию $x(t)$ со значениями в $\mathbb{H}$, запишем задачу (171) – (172) в виде

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + F(t), \tag{175}$$

$$x(0) = x_0, \tag{176}$$

где $x(t) = (v(t),\rho(t),w(t))^T$, $F(t) = (f(t),0,0)^T$, $x_0 = \left(u_1, \tilde{B}A^{1/2}u_0, 0\right)$.

Докажем, что новая задача Коши (175) – (176) имеет единственное классическое решение, аналитическое в некотором угле правой полуплоскости, которое при должных ограничениях на векторы u_0 и u_1 является решением исходной задачи (36)–(37).

4.3 Об аналитичности полугруппы операторов, порождаемой эволюционной задачей

В настоящем разделе будет доказано, что оператор $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей аналитической полугруппы. Результат этот опубликован в работе [52]. В целом, ход рассуждений в доказательстве во многом аналогичен проведённому в §3.3 с некоторыми уточнениями, касающимися некоммутирующих операторов. Сперва установим основные свойства оператора $\mathcal{A}$.

Лемма 4.3.1. $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ *всюду плотно в* $\mathbb{H}$. *При этом оператор* $\mathcal{A}$ *замкнут и диссипативен.*

Доказательство. Рассмотрим множество V векторов вида $(u, \rho, \tilde{v})^T$, где $u \in \mathrm{Dom}(A)$, $\rho \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, $\tilde{v}(\tau)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая значения в $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$, и $\tilde{v}(\tau) \equiv 0$ вне некоторого компакта $\mathbb{R}_+$, где 0 — элемент H. Заметим, что $V \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$. Действительно, $\tilde{B} = (1 - K(0))\, I + A^{-1/2} C A^{-1/2}$ на $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$ и $\tilde{B}\rho \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, при $\rho \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$. Далее,

$$\int_0^{+\infty} \|\tau \tilde{v}(\tau)\|^2 \, d\mu(\tau) = \int_K \|\tau \tilde{v}(\tau)\|^2 \, d\mu(\tau) < +\infty,$$

K — компакт в $\mathbb{R}_+$. Кроме этого,

$$\left\| A^{1/2} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{v}(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\mu(\tau) \right\| \leq \left(\int_0^{+\infty} \left\| A^{1/2} \tilde{v}(\tau) \right\|^2 d\mu(\tau) \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} <$$

$$< \left(\sum_{k=1}^{n} \left\| A^{1/2} v_i \right\|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

где v_i — различные ненулевые значения функции $\tilde{v}(\tau)$ в $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$. Множество V всюду плотно в $\mathbb{H}$. Действительно, $\mathrm{Dom}(A)$ и $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$ плотны в H, в силу самосопряжённости оператора A. Кусочно-постоянные функции с компактным носителем плотны в $L_2(H, \mu)$. Ввиду плотности $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$ в H, эти функции могут быть приближены функциями вида $\tilde{v}(\tau)$ со значениями в $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$. Следовательно, $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ плотно в $\mathbb{H}$. Первое утверждение леммы доказано.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ такую, что $x_n \to x \in \mathbb{H}$ и $\mathcal{A}x_n \to y \in \mathbb{H}$ при $n \to +\infty$. По определению замкнутости линейного оператора, нужно показать, что $x \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ и $y = \mathcal{A}x$.

Поскольку $x_n \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, то $x_n = (u_n, \rho_n, v_n)^T$, где $v_n \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$ и $(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, откуда, в частности, следует, что $u_n \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$. Пусть $x = (u, \rho, v)^T$, причём, очевидно, $u_n \to u$, $\rho_n \to \rho$ в H и $v_n \to v$ в $L_2(H, \mu)$ при $n \to +\infty$. Подействуем оператором $\mathcal{A}$ на вектор x_n:

$$\mathcal{A}x_n = \mathcal{A}\begin{pmatrix} u_n \\ \rho_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \\ \tilde{B}A^{1/2}u_n \\ SA^{1/2}u_n - \Gamma v_n \end{pmatrix} \to y := \begin{pmatrix} y_u \\ y_\rho \\ y_v \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $\tilde{B}A^{1/2}u_n \to y_\rho$, следовательно, $A^{1/2}u_n \to \tilde{B}^{-1}y_\rho$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$, $u \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$ и $A^{1/2}u = \tilde{B}^{-1}y_\rho$, следовательно, $y_\rho = \tilde{B}A^{1/2}u$.

Далее, ввиду ограниченности S, $SA^{1/2}u_n \to SA^{1/2}u$, следовательно, $\Gamma v_n \to (y_v - SA^{1/2}u) \in L_2(H, \mu)$, при $n \to +\infty$. Оператор Γ — самосопряжён в $L_2(H, \mu)$, следовательно, замкнут, отсюда следует, что $\Gamma v = SA^{1/2}u - y_v$, то есть $y_v = SA^{1/2}u - \Gamma v$.

Наконец, $A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \to y_u$, при этом $(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \to (-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v)$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$, $(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v) \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$ и $y_u = A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v)$. Замкнутость оператора $\mathcal{A}$ доказана.

Как и в работе [51] (лемма 2) проверяется непосредственно, что $\mathcal{A}$ является диссипативным, т.е. $\mathrm{Re}(\mathcal{A}h, h)_{\mathbb{H}} \le 0$ для любого $h \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$. Тем самым, лемма полностью доказана.

Для оператора $\mathcal{A}$ далее потребуются факторизации, аналогичные (124) и (125), доказанные в главе 4.

Лемма 4.3.2. *Пусть $\lambda \notin (-\infty, -d_0)$, $\lambda \neq 0$. Тогда справедливо разложение:*

$$\mathcal{A} - \lambda I = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\lambda}\tilde{B} & S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}\tilde{L}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma + \lambda I) \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ -(\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (177)$$

где $\tilde{L}(\lambda) = \overline{A^{-1/2}L(\lambda)A^{-1/2}}$, оператор-функция $L(\lambda)$ определена равенством (45). Кроме *того, справедливо разложение*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & \tilde{S}^*\Gamma^{-1} \\ -\tilde{B}T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{B}T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}\tilde{S} & 0 & I \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (178)$$

где $T = \alpha I + S^*\Gamma^{-1}S$.

Доказательство полностью повторяет рассуждения, проведённые при доказательстве леммы 3.3.4.

Лемма 4.3.3 *Пусть* $\lambda \notin (-\infty, d_0) \cup \{0\}$, *тогда оператор* $\mathcal{A} - \lambda I$ *и оператор-функция* $\tilde{L}(\lambda)$ *непрерывно обратимы одновременно.*

Доказательство. Заметим, что при λ из условия теоремы операторы

$$\begin{pmatrix} I & \frac{1}{\lambda}\tilde{B} & S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ -(\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}$$

ограничены. При этом легко проверить, что ограниченные операторы

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\lambda}\tilde{B} & -S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ (\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}$$

являются соответственно обратными к ним. Оператор

$$\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

непрерывно обратим, ввиду непрерывной обратимости $A^{1/2}$. Таким образом, $\mathcal{A} - \lambda I$ обратим тогда и только тогда, когда обратим

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}\tilde{L}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma + \lambda I) \end{pmatrix}$$

при λ из условия теоремы. Обратимость же последнего эквивалентна обратимости $\tilde{L}(\lambda)$. Теорема доказана.

Отметим ещё одно важное свойство оператора $\mathcal{A}$, следующее из разложения (178).

Лемма 4.3.4 *Оператор $\mathcal{A}$ непрерывно обратим.*

Доказательство. Для этого достаточно заметить, что

$$\begin{pmatrix} I & 0 & \tilde{S}^*\Gamma^{-1} \\ -\tilde{B}T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}\tilde{S} & 0 & I \end{pmatrix}$$

ограничены, а операторы

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -\tilde{S}^*\Gamma^{-1} \\ \tilde{B}T^{-1} & I & -\tilde{B}T^{-1}\tilde{S}^*\Gamma^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & -T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \Gamma^{-1}\tilde{S} & -\Gamma^{-1}\tilde{S}T^{-1}\tilde{B} & I \end{pmatrix}$$

являются к ним обратными. Из (178) следует, что оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор

$$\tilde{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{B}T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix},$$

для обратимости которого в свою очередь требуется непрерывная обратимость $T = \alpha I + S^*\Gamma^{-1}S$ и $\tilde{B}T^{-1}\tilde{B}$. Оператор T — ограниченный, самосопряжённый, положительно определённый. Далее

$$\|\tilde{B}h\| = \left\| \left((1-\hat{K}(0)) + \overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\right)^{1/2} h \right\| \geq \left(1-\hat{K}(0)\ - \left\|\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\right\|\right)^{1/2} \|h\|,$$

для любого $h \in H$. Из этого вытекает, что оператор $\tilde{B}T^{-1}\tilde{B}$ — ограниченный, самосопряжённый, положительно определённый. Тем самым, $\tilde{\mathcal{A}}$, а значит, и $\mathcal{A}$ — непрерывно обратим. Теорема доказана.

Лемма 4.3.4 позволяет свести изучение спектра оператора $\mathcal{A}$ к изучению спектра оператор-функции $\tilde{L}(\lambda)$. Опираясь теперь на результаты главы 2, докажем основную теорему раздела.

Теорема 4.3.1. *Пусть выполнено условие* (39) *и условия* (A) – (C), *тогда оператор* $\mathcal{A}$ *является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Более того, эта полугруппа является аналитической.*

Доказательство.

Обозначим за Λ_δ угол $\Lambda_\delta = \{|\arg\lambda| < \pi/2 + \delta\}$. Заметим, что найдётся число $\tilde{\delta} \in (0, \pi/2)$ такое, что $\sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}} = \emptyset$. Действительно, из теоремы 3.3.2 это справедливо для $\sigma(L)$. На $\mathrm{Dom}(A^{1/2})$ справедливо равенство

$$\tilde{L}^{-1}(\lambda) = A^{1/2}L^{-1}(\lambda)A^{1/2},$$

значит, $\mathrm{Dom}(A^{1/2}) \subseteq \mathrm{Dom}(\tilde{L}^{-1}(\lambda))$ при $\lambda \in \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}}$. Ввиду этого и замкнутости оператора $\tilde{L}(\lambda)$, получаем $\mathrm{Dom}(\tilde{L}^{-1}(\lambda)) = H$, откуда, с учётом замкнутости, немедленно вытекает непрерывная обратимость.

Проверим выполнение условий теоремы об аналитичности полугруппы для оператора $\mathcal{A}$ (см. (173)). Действительно, по лемме 4.3.1 оператор $\mathcal{A}$ — диссипативен. Далее, из лемм 4.3.2, 4.3.3 и 4.3.4 и вытекает, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет точек спектра при $\lambda > 0$, а следовательно, $\operatorname{Ran}(\mathcal{A} - \lambda I) = \operatorname{Dom}\left((\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}\right) = H$. Тем самым, условия теоремы 1.1 выполнены и $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы.

Теперь перейдём к проверке условий теоремы 1.2. Из леммы 4.3.3 и теоремы 2.3.2 следует, что спектр $\mathcal{A}$ содержится в $\mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}}$, $\tilde{\delta} \in (0, \pi/2)$. Осталось проверить, что

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| < \frac{M}{|\lambda|}. \tag{179}$$

Рассмотрим разложение (177) оператора $\mathcal{A} - \lambda I$, выпишем с его помощью явный вид резольвенты $R(\lambda, \mathcal{A})$:

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ (\Gamma + \lambda I)^{-1} S & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\lambda \tilde{L}^{-1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma + \lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\lambda}\tilde{B} & -S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{180}$$

и подействуем ей на произвольный элемент $(v, \rho, w)^T \in \mathbb{H}$:

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \begin{pmatrix} v \\ \rho \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\rho} \\ \tilde{w} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{v} = -\left(\lambda A^{-1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda) A^{-1/2} v - A^{-1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda) \tilde{B} \rho - \lambda A^{-1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda) S^* (\Gamma + \lambda I)^{-1} w\right), \tag{181}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\lambda}(\tilde{B} A^{1/2} \tilde{v} - \rho), \tag{182}$$

$$\tilde{w} = (\Gamma + \lambda I)^{-1} (S A^{1/2} \tilde{v} - w). \tag{183}$$

Для проверки (179) достаточно доказать:

$$\|A^{-1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda) A^{-1/2}\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|^2}, \tag{184}$$

$$\|A^{-1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{M_2}{|\lambda|}, \tag{185}$$

$$\|(\Gamma+\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M_3}{|\lambda|}, \tag{186}$$

$M_1, M_2, M_3 > 0$. Неравенство (184) немедленно следует из равенства $A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2} = L^{-1}(\lambda)$ и теоремы 2.3.3.

Неравенство (185) следует из соотношений

$$\left\|A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\right\| = \left\|\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\right\| = \left\|A^{1/2}L^{-1}(\lambda)\right\| < M\left\|AL^{-1}(\lambda)\right\| < \frac{M_2}{|\lambda|}.$$

Последнее неравенство доказано в теореме 2.3.3.

Наконец,

$$\|\Gamma+\lambda I\| \leq \frac{1}{\cos\tilde{\delta}|\lambda|}.$$

при $\lambda \in \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}}$. Таким образом, неравенства (184), (185), (186) доказаны, условия теоремы 1.2 выполнены, следовательно, $\mathcal{A}$ действительно является генератором аналитической полугруппы в угле $\left\{|\arg\,\lambda| < \tilde{\delta}\right\}$. Теорема доказана.

Полученный результат позволит установить классическую корректую разрешимость задачи (36)–(37) в следующем разделе.

4.4 О корректной разрешимости интегро-дифференциального уравнения с интегральным ядром вольтерровой свёртки и некоммутирующими операторными слагаемыми

Результаты настоящего раздела являются обобщениями результатов §3.4. Определение понятия классической разрешимости задачи (36)–(37) полностью аналогично определению классической разрешимости задачи (101)–(102).

Определение 4.4.1. Функция $u \in C^2(\mathbb{R}_+, H) \cap C^1(\mathbb{R}_+, A)$ называется классическим решением задачи (101)–(102), если для каждого $t \geq 0$ функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (36) и начальным условиям (37).

Используя результат §4.3, установим классическоую разрешимость задачи (171)–(172), определяемую следующим образом.

Определение 4.4.2. Функции $(v(t), \rho(t), w(t))$, $v, \rho : \mathbb{R}_+ \to H$, $w : \mathbb{R}_+ \to L_2(H, \mu)$ называются классическим решением задачи (171) – (172), если эти функции непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$ и, кроме этого, справедливо $\alpha A^{1/2}v(t) + \beta\rho(t) + S^*w(t) \in C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$, $w \in C\left(\mathbb{R}_+, \Gamma\right)$. При этом указанные функции для всех $t \geq 0$ удовлетворяют уравнениям (171) и начальным условиям (172).

Ввиду доказанной в §4.3 теоремы 4.3.1 справедлив следующий результат о корректной разрешимости задачи (175) – (176) ([37], см. гл. 3, п. 5).

Теорема 4.4.1. *Пусть* $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, *функция* $F(t)$ *локально гёльдерова, тогда задача* (175)–(176) *имеет единственное решение* $x \in C^1\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+, \mathcal{A}_0\right)$, *удовлетворяющее уравнению* (175) *для любого* $t \geq 0$ *и начальному условию* (176).

Из указанной теоремы очевидным образом (см. §4.2) следует разрешимость в смысле определения 4.4.2 задачи (171)–(172) в случае, когда $f(t)$ — локально гёльдерова.

Далее сформулируем и докажем промежуточный результат о представлении решения задачи (171)–(172). Рассмотрим следующие вектор-функции

$$\tilde{v}_0(\lambda) := -\lambda L^{-1}(\lambda)u_1 + A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{B}A^{1/2}u_0, \tag{187}$$

где оператор-функция $\tilde{L}(\lambda)$, как и ранее, определена равенством $\tilde{L}(\lambda) = \overline{A^{-1/2}L(\lambda)A^{-1/2}}$,

$$\tilde{\rho}_0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}A^{1/2}u_0 + \frac{1}{\lambda}\tilde{B}A^{1/2}\tilde{v}_0(\lambda), \tag{188}$$

$$\tilde{w}_0(\lambda) = \left(\Gamma + \lambda I\right)^{-1} SA^{1/2}\tilde{v}_0(\lambda), \tag{189}$$

$$\tilde{f}_1(\lambda, s) = \lambda L^{-1}(\lambda)f(s), \tag{190}$$

$$\tilde{f}_2(\lambda, s) = -\tilde{B}A^{1/2}L^{-1}(\lambda)f(s), \tag{191}$$

$$\tilde{f}_3(\lambda, s) = -\lambda\left(\Gamma + \lambda I\right)^{-1} SA^{1/2}L^{-1}(\lambda)f(s). \tag{192}$$

Теорема 4.4.2. *Пусть начальные условия* (172) *такие, что* $A^{1/2}u_1 + \tilde{B}A^{1/2}u_0 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$, *а* $f(t)$ *— локально гёльдерова. Тогда задача* (171) – (172) *имеет единственное решение в смысле определения* 4.4.2, *которое при этом допускает аналитическое продолжение в угол* $D_\delta := \{|\arg\lambda| < \delta\}$. *При* $t > 0$ *для этого решения справедливо следующее представление:*

$$v(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}\tilde{v}_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}\tilde{f}_1(\lambda, s)d\lambda\, ds, \tag{193}$$

$$\rho(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}\tilde{\rho}_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}\tilde{f}_2(\lambda, s)d\lambda\, ds, \tag{194}$$

$$w(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}\tilde{w}_0(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}\tilde{f}_3(\lambda, s)d\lambda\, ds, \tag{195}$$

где Λ_δ *— граница угла из леммы* 4.4.1 (см. §4.4), δ *— число из интервала* $(0, \pi/2)$, *при котором выполнены условия теоремы* 4.3.1.

Доказательство. В §4.2 показано, что задача (171) – (172) может быть записана в виде задачи (175)–(176) с неизвестной функцией $x(t) = (v(t), \rho(t), w(t))^T$, начальным условием $x_0 = \left(u_1, A^{1/2}u_0, 0, \right)^T$, оператором $\mathcal{A}$, определённым равенством (173), с областью определения (174) и функцией $F(t) = (f(t), 0, 0)^T$. Проверим выполнение условий теоремы 4.4.1 для полученной задачи.

Локальная гёльдеровость $F(t)$ очевидным образом следует из локальной гёльдеровости функции $f(t)$. Из условия $A^{1/2}u_1 + \tilde{B}A^{1/2}u_0 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$ вытекает, что $x_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$. Таким образом, все условия теоремы 4.4.1 выполнены, и задача (175)–(176) имеет единственное решение $x(t)$ в смысле определения 4.4.1.

По теореме 4.3.1 оператор $\mathcal{A}$ является генератором аналитической в угле D_δ полугруппы операторов $U(t)$. Для функции $x(t)$ справедливо равенство ([37], гл. 1 теорема 6.1):

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_0^t U(t-s)F(s)ds, \tag{196}$$

где для $U(t)$ справедливо ([37], гл. 1 теорема 1.3):

$$U(t)f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, \mathcal{A})f d\lambda, \; f \in \mathbb{H}. \tag{197}$$

Из оценки резольвенты $\mathcal{A}$ (179) и леммы 3.4.1 и представления полугруппы $U(t)$ (197) выражение (196) при $t > 0$ принимает вид

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda t}R(\lambda, \mathcal{A})x_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \int_{\Lambda_\delta} e^{\lambda(t-s)}R(\lambda, \mathcal{A})F(s)d\lambda\, ds. \tag{198}$$

Используя разложение (180), а также равенства (181)–(183), запишем $R(\lambda, \mathcal{A})x_0$ в переменных задачи (171) – (172):

$$R(\lambda, \mathcal{A})x_0 = \begin{pmatrix} \tilde{v}_0(\lambda) \\ \tilde{\rho}_0(\lambda) \\ \tilde{w}_0(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{v}_0(\lambda)$, $\tilde{\rho}_0(\lambda)$, $\tilde{w}_0(\lambda)$ определены равенствами (187) — (189). Аналогично запишем $R(\lambda, \mathcal{A})F(s)$:

$$R(\lambda, \mathcal{A})F(s) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\lambda, s) \\ \tilde{f}_2(\lambda, s) \\ \tilde{f}_3(\lambda, s) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{f}_1(\lambda, s)$, $\tilde{f}_2(\lambda, s)$, $\tilde{f}_3(\lambda, s)$ определены в (190) — (192). С учётом равенства (198) получаем представления (193) — (195).

Аналитичность в угле $v(t)$, $\rho(t)$ и $w(t)$ непосредственно вытекает из аналитичности $x(t)$. Теорема доказана.

Перейдём, наконец, к заключительному результату настоящей работы — классической корректной разрешимости задачи Коши (36) – (37). Будем отталкиваться от результатов о разрешимости системы (171)–(172). Функция $u(t)$, удовлетворяющая равенствам $\dot{u}(t) = v(t)$ и $\rho(t) = A^{1/2}u(t)$ на $\mathbb{R}_+$, где $v(t)$ и $\rho(t)$ входят в решение системы (171)–(172), будет принимать значения в более широкой области пространства H, чем это требуется по определению 4.4.1. В следующей теореме будет доказано, что для разрешимости задачи (36)–(37) в смысле определения 4.4.1 достаточно, чтобы u_0 и u_1 принадлежали области определения оператора A. Отметим, что необходимость этого условия для разрешимости в смысле определения 4.4.1 вытекает из требования, что уравнение (36) выполнялось в точке 0 и непрерывности решения в нуле.

Теорема 4.4.3. *Пусть* $u_0, u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$, *а также выполнено условие* (62). *Тогда задача* (36)–(37) *имеет единственное решение в смысле определения* 4.4.1. *При этом существует число* $\delta \in (0, \pi/2)$ *такое, что решение* $u(t)$ *допускает аналитическое продолжение в угол* $D_\delta = \{|\arg \lambda| < \delta\}$, *и справедлива оценка*

$$\|\dot{u}(t+is)\|^2 + \left\|A^{1/2}u(t)\right\|^2 \le Me^{-2\gamma t}\left(\|u_1\|^2 + \left\|A^{1/2}u_0\right\|^2 + t^2\|Au_0\|^2\right), \tag{199}$$

где M, γ *— положительные постоянные.*

Доказательство.

В задаче (171) – (172) положим $f(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau t}}{\tau} d\mu(\tau) Au_0$. В силу условия (62) функция $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, следовательно, является локально гёльдеровой. Далее из условия $u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$ и $u_0 \in \mathrm{Dom}(A)$ вытекает $\alpha A^{1/2}u_1 + \tilde{B}A^{1/2}u_0 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$.

Пусть $(v(t), \rho(t), w(t))$ — решение задачи (171) – (172). Отметим, что ввиду $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$ имеем, что функция $v \in C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$. Из второго уравнения (111) выразим $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \tilde{B}A^{1/2}u_0 + \int_0^t \tilde{B}A^{1/2}v(s)ds. \tag{200}$$

Из третьего уравнения (171) для функции $w(t)$ справедливо равенство.

$$w(t) = \int_0^t U_\Gamma(t-s)SA^{1/2}v(s)ds, \tag{201}$$

где $U_\Gamma(t)$ — полугруппа операторов в $L_2(H, \mu)$, генерируемая оператором $-\Gamma$, причём

$$\|U_\Gamma(t)\| \leq K(0)e^{-d_0 t}.$$

В силу теоремы 4.4.1 и равенства (174) функция $\alpha A^{1/2}v(t) + B\rho(t) + S^*w(t) = \alpha A^{1/2}v(t) + \tilde{B}^2A^{1/2}u_0 + \displaystyle\int_0^t \left(\tilde{B}^2 + S^*U_\Gamma(t-s)SA^{1/2}v(s)\right)ds \in C(\mathbb{R}_+, A^{1/2})$.

Поскольку $u_0 \in \mathrm{Dom}(A)$, имеем

$$\tilde{B}^2A^{1/2}u_0 = \left(\left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right) I + \overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\right) A^{1/2}u_0 =$$
$$= \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right) A^{1/2}u_0 + A^{-1/2}Cu_0 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2}),$$

следовательно,

$$\alpha A^{1/2}v(t) + \int_0^t \left(\tilde{B}^2 + S^*U_\Gamma(t-s)SA^{1/2}v(s)\right)ds =: g(t) \in C(\mathbb{R}_+, A^{1/2}). \tag{202}$$

Требуется доказать, что $\dot{u} = v \in C(\mathbb{R}_+, A)$, т.е. $\tilde{v}(t) = A^{1/2}v(t) \in C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$. Иными словами, интегральное уравнение

$$\alpha\tilde{v}(t) + \int_0^t \left(\tilde{B}^2 + S^*U_\Gamma(t-s)S\tilde{v}(t)\right)ds = g(t) \tag{203}$$

разрешимо в пространстве $C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$ при $g(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$. Интегральный оператор $\mathcal{K}$, задаваемый равенством

$$\mathcal{K}f(t) := \int_0^t \left(\tilde{B}^2 + S^*U_\Gamma(t-s)S\right) f(s)ds,$$

является вольтерровым в пространстве $C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$, поскольку ядро этого оператора есть ограниченный оператор в H. Из этого по теореме Фредгольма заключаем, что интегральное уравнение (203) однозначно разрешимо в пространстве $C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$, следовательно, $A^{1/2}v(t) = \tilde{v}(t) \in C\left(\mathbb{R}_+, A^{1/2}\right)$. Таким образом, установлено, что функция $v(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, A)$ при $u_0 \in \mathrm{Dom}(A)$, $u_1 \in \mathrm{Dom}(A)$.

Рассмотрим функцию $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$. Покажем, что эта функция является решением задачи (36) – (37) в смысле определения 4.4.1. Выполенение начальных условий (37) очевидным образом следует из непрерывности функции $v(t)$. Для проверки же выполнения равенства (36) при $t \geq 0$ достаточно подставить выражения (200) и (201) в первое уравнение системы (171) с $f(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau t}}{\tau} d\mu(\tau) A u_0$:

$$\dot{v}(t) = A^{1/2}\left(-\alpha A^{1/2}v(t) - \tilde{B}^2 A^{1/2}u_0 - \int_0^t \left(\tilde{B}^2 A^{1/2}v(s) - S^* U_\Gamma(t-s) S A^{1/2} v(s)\right) ds\right) - \\ - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau t}}{\tau} d\mu(\tau) A u_0. \quad (204)$$

По доказанному оператор $A^{1/2}$ в правой части можно занести в скобки. Для интегральных слагаемых имеем:

$$\int_0^t A^{1/2}v(s)ds = A^{1/2}u(t) - A^{1/2}u_0,$$

$$\int_0^t S^*U_\Gamma(t-s)SA^{1/2}v(s)ds = S^*SA^{1/2}u(t) - S^*U_\Gamma(t-s)SAu_0 - \int_0^t S^*\Gamma U_\Gamma(t-s)SA^{1/2}u(s)ds.$$

Подставляя полученные равенства в (156) и, пользуясь замкнутостью $A^{1/2}$ и равенством

$$A^{1/2}S^*SA^{1/2}h = A^{1/2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} A^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} h d\mu(\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} Ah, \quad h \in \mathrm{Dom}(A),$$

получим

$$\ddot{u}(t) + \alpha A\dot{u}(t) + \tilde{B}^2 Au(t) + \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} Au(t) + \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau(t-s)}}{\tau} d\mu(\tau)\right) Au(s)ds = 0.$$

С учётом $\tilde{B}^2 = 1 - \left(\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right) I + \overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}$, получаем уравнение (36).

Таким образом, из разрешимости (171) – (172) вытекает разрешимость (36) – (37). Обратное доказано в §4.2. Оценка (199) доказывается аналогичным образом, как при доказательстве оценки (151). Теорема доказана.

Доказанный результат является заключительным результатом настоящей главы, однако здесь следует упомянуть одно важное замечание, касательно свойств операторов A и C, сформулированных в §2.1.

Замечание о свойствах операторов A и C.

Свойства (A) и (B) операторов A и C, сформулированнные в §2.1 проистекают из конкретных реализаций уравнения (36) как интегро-дифференциального уравнения с частными производными в приложениях. Свойство (C) в этом смысле является некоторым дополнительным ограничением, гарантирующим экспоненциальную устойчивость решений задачи (36) – (37). Вообще говоря, оператор $\left(1-\int_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right)A+C$ может иметь конечное число отрицательных точек, что повлечёт за собой существование конечного числа положительных точек спектра оператор-функции $L(\lambda)$, как показано в работе [41]. Отсюда ввиду леммы 4.3.3 будет вытекать конечное число положительных точек спектра генератора полугруппы.

4.5 Выводы к четвёртой главе

В настоящей главе была исследована задача (36) –(37) с ненулевым оператором C и слагаемым свёртки с интегральным ядром на предмет классической разрешимости. Для изучения этого вопроса был использован полугрупповой подход, а именно: задача Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка была представлена в виде системы линейных дифференциальных уравнений (171) – (172) в новом гильбертовом пространстве. Эта система имеет вид эволюционной задачи (175) – (176) с операторной матрицей $\mathcal{A}$ (173).

Основное содержание настоящей главы составляет спектральный анализ оператора, задаваемого матрицей $\mathcal{A}$, который в свою очередь сводится к исследованию спектра оператор-функции $L(\lambda)$ (см. гл. 2). Это было доказано применением к операторной матрице $\mathcal{A}-\lambda I$ разложения Шура-Фробениуса (см. лемма 4.3.2). На основании полученных результатов было показано, что оператор $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей C_0-полугурппы, аналитичной в угле (см. §4.3, т. 4.3.1).

Как следствие теоремы об аналитичности полугруппы 4.3.1 получен результат о классической корректной разрешимости задачи (36) – (37) (теорема 4.4.3). При этом решение допускает аналитическое продолжение в некоторый угол левой полуплоскости, в котором имеются оценки нормы этого решения. Отметим, что для результата об экспоненциальном убывании решения существенно условие (C) (см. §2.1). Его нарушение может привести к экспоненциальному росту решения уравнения (см. замечание к §4.4).

Заключение

В диссертации изучен спектр оператор-функции, являющейся символом абстрактного интегро-дифференциального уравнения (1), а также исследованы свойства ассоциированной с этим уравнением полугруппы операторов. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Установлена локализация спектра символа интегро-дифференциального уравнения (1), а также получена оценка её резольвенты.

2. Построена эквивалентная задаче (1) – (2) эволюционная задача (28) и доказано, что полугруппа операторов сдвига вдоль траектории решения этой задачи является сильно непрерывной, аналитической в некотором угле.

3. На основе полученных результатов установлена корректная разрешимость задачи (1) – (2) в классическом смысле (см. определение 2) и в случае, когда оператор C нулевой, а ядро свёртки представлено в виде ряда (4), получено представление решения.

Изложенные результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по спектральной теории оператор-функций. Кроме этого, полученные выводы могут быть использованы в ряде прикладных задач наследственной механики.

Из перспективных направлений для дальнейшего исследования можно выделить следующее:

1. Уточнение асимптотики невещественных точек спектра символа интегро-дифференциального уравнения.

2. Исследование геометрических свойств систем собственных и присоединённых векторов генератора полугруппы, ассоциированной с задачей (28) – (29).

3. Оценка скорости сходимости ряда в представлении решения задачи (1) – (2).

4. Изучение задачи (1) – (2) в случае, когда ядра свёртки имеют более общий вид, например, в случае ядер Работнова.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Власову Виктору Валентиновичу и доценту Надежде Александровне Раутиан за постановку задачи, постоянное внимание к работе, многочисленные обсуждения и ценные рекомендации.

Автор глубоко благодарен всем участникам семинара под руководством профессора Власова В.В. за полезные замечания и плодотворные дискуссии.

Список литературы

[1] *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.*, Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта // *Мат. заметки.* — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 924–928.

[2] *Дж. Э. Аллахвердиев*, О несамосопряженных операторах, рационально зависящих от спектрального параметра // *ДАН СССР.* — 1969. — Т.186, №4. — С. 743–746.

[3] *Алгазин С.Д., Кийко И.А.,* Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006.

[4] *Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И.,* К задаче о движении вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // *Функциональный анализ и его приложения.* — 1968. — Т. 2, №2. — С.21–32.

[5] *Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — Харьков, 1977.

[6] *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.*, Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // *СМФН.* — 2012. — Т. 45. — С.43–61.

[7] *Власов В. В., Раутиан Н. А.*, Об асимптотическом поведении решений интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // *Дифференциальные уравнения.* — 2013. — Т. 49, № 6. — С.718–730.

[8] *В.В. Власов, Н.А. Раутиан*, О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена // *Труды Московского математического общества.* — 2014. — Т.75, №2. — С.219–243.

[9] *Власов В. В., Перез О. Р.*, Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике // *Мат. заметки.* — 2015. — Т. 98, № 4. — С.630–634.

[10] *Власов В. В., Раутиан Н. А.*, Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // *СМФН.* — 2015. — Т.58. — С.22–42.

[11] *Власов В.В., Раутиан Н.А.*, Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Совр. математика. Фунд. направления, 2016, Т.62, с.53–71.

[12] *В.В. Власов, Н.А. Раутиан*, Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.:Макс Пресс, 2016.

[13] *В.В. Власов, Н.А. Раутиан*, Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // *Труды Московского математического общества.* — 2019. — Т.80, №2. — С.197–220.

[14] *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // *Труды семинара им. И.Г. Петровского.* — 2019. — Т.32. — С.91–110.

[15] *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // *ДАН.* — 2019. — Т. 488, № 5. — С.103–107.

[16] *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // *Дифференциальные уравнения.* — 2019. —- Т. 55, № 4. — С.574–587.

[17] *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и представление решений интегро–дифференциальных уравнений с дробно–экспоненциальными ядрами // *Труды Московского математического общества* — 2019. — Т.80, № 2. — С.197–220.

[18] *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // *Дифференциальные уравнения.* 2021ю — Т.57, № 4. — С.536–551.

[19] *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Полугруппы операторов, порождаемые интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // *СМФН.* — 2021. — Т.67, № 3. — С. 507–525.

[20] *Гельфанд И.М., Виленкин М.Я.*, Обобщённые функции. – М.:Физматгиз, 1961

[21] *Голдстейн Дж.,* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.:Выща школа, 1989.

[22] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.*, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.

[23] *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.,* О свойствах спектра оператор-пучка, возникающего в теории вязкоупругости // *Мат. заметки.* — 2018. — Т.103, № 5. — С.774–778.

[24] *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.*, Исследование операторных моделей Кельвина-Фойгта // *Дифференциальные уравнения.* — 2018. — Т.54, №12. — С.1663–1677

[25] *Закора Д. А., Копачевский Н. Д.*, О малых движениях и нормальных колебаниях гидросистемы «вязкая жидкость + система идеальных жидкостей» // *Матем. физ., анал., геом..* — 2002. — Т.9, № 3. — С.420–426

[26] *Закора Д.А.*, Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // *Мат. заметки.* — 2018. — Т.103, № 5. — С.702–719

[27] *Закора Д.А.*, Модель сжимаемой жидкости Олдройта // *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН.* — 2016. — Т.61. — С.41–66

[28] *Закора Д.А.*, Модель сжимаемой жидкости Максвелла // *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН.* — 2017. — Т.63, №2. — С. 247–265

[29] *Закора Д.А.*, Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // *Дифференциальные уравнения.* — 2019. — Т.55, №9. — С. 1195—1208

[30] *Закора Д.А.,* Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа // *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН.* — 2015. — Т.57. — С. 31–64

[31] *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.:Наука, 1970.

[32] *Каратеодори К.,* Конформное отображение. — М.:ОНТИ, 1934.

[33] *Като Т.*, Теория возмущений линенйных операторов. – М.:Мир, 1972.

[34] *Келдыш М.В.,* О собственных значениях и собственных функциях некторых классов несамосопряжённых уравнений // *ДАН СССР.* — 1951. — Т. 77, №1. — С. 11–14

[35] *Келдыш М.В.,* О полноте собственных функций некторых классов несамосопряжённых операторов // *УМН.* — 1971. — Т.24. — С. 15–41

[36] *Крейн С.Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // *ДАН СССР.* — 1964. — Т.159, №2. — С. 262–265

[37] *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.:Наука, 1967.

[38] *Крейн С.Г.* К задаче о движениях вязкой жидкости в открытом сосуде // Функциональный анализ и его приложения, 1968, Т.2, №1, с. 40–50.

[39] *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.*, Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.:Мир, 1971.

[40] *Лыков А.В.,* Проблема тепло- и массопереноса.— Минск:Наука и техника, 1976

[41] *Милославский А.И.*, О спектре неустойчивости операторного пучка // *Мат. заметки.* — 1991. — Т.49, №4. — С.88–94.

[42] *Милославский А.И.,* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости // *Деп. в Укр. НИИНТИ.* — 13.07.1987. — №1229-УК87. — С.53.

[43] *Пивоварчик В.Н.* Краевая задача, связанная с колебаниями стержня с внутренним и внешним трением // *Вест. МГУ Сер. 1, матем., мех.* — 1987. — №3. С.68–71.

[44] *Работнов Ю.Н.,* Элементы наследственной механики твёрдых тел. — М.:Наука, 1977.

[45] *Радзиевский Г.В.*, Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // *УМН.* — 1982. — Т.37, №2. — С.81–145.

[46] *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // *Дифференциальные уравнения.* — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1255–1272.

[47] *Раутиан Н.А.*, Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т.56, №9. — С.1226–1244.

[48] *Рисс Ф., Сёкифальви-Надь Б.,* Лекции по функциональному анализу. — М.:Мир, 1979.

[49] *Россовский Л.Е.*, Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // *СМФН.* — 2014. — Т.54. — С. 3–138.

[50] *Россовский Л.Е.*, О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *Матем. заметки.* — 2011. — Т.90, №6. — С.885–901.

[51] *Тихонов Ю.А.* Об аналитичности полугруппы операторов, возникающей в задачах теории вязкоупругости. // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т.56 , № 6. — С.808–822.

[52] *Тихонов Ю.А.,* О свойствах одной полугруппы операторов, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением, возникающим в теории вязкоупругости // *Дифференциальные уравнения.* — 2022. — Т.58, № 5. — С. 669—685.

[53] *Тихонов Ю.А.,* О локализации спектра оператор-функции, возникающей при изучении колебаний вязкоупругого трубопровода с учетом трения Кельвина–Фойгта // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* — 2022. — № 2. — С. 23—34.

[54] *И.В. Романов, А.С. Шамаев*, О задачах распределенного и граничного управления некоторыми системами с интегральным последействием // *Тр. сем. им. И. Г. Петровского.* — 2016. — Т. 31. — С. 134–157.

[55] *И.В. Романов, А.С. Шамаев,* О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием // *Автомат. и телемех.* — 2013. — Т. 11. — С.49–61.

[56] *А.С. Шамаев, В.В. Шумилова*, О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т.53, №2. — С.282–290.

[57] *А.С. Шамаев, В.В. Шумилова,* Усреднение уравнений состояния для гетерогенной среды, состоящей из слоев двух ползучих материалов // *Труды МИАН.* — 2016. — Т.295. — С.229–240.

[58] *Шкаликов А.А., Гринив Р.О.*, О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением // *Мат. заметки.* — 1994. — Т.56, № 2. — С.114–131.

[59] *Amendola G.,Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. — NY:Springer New York, 2012.

[60] *Davydov A.V.*, Asymptotics of the Spectrum of an Integro-Differential Equation, Arising in the Study of the Flutter of a Viscoelastic Plate //*Russian Journal of Mathematical Physics.* — 2021. Vol.28, no. 2. — P. 188–197.

[61] *Davydov A.V.,* Spectral Analysis of Integrodifferential Operators Arising in the Study of Flutter of a Viscoelastic Plate // *Moscow Univ. Math. Bull.* — 2020. — Vol.75, no. 2. — P. 65–71.

[62] *Dafermos C. M.*, Asymptotic stability in viscoelasticity. // *Arch. for Rational Mech.and Anal.* — 1970. — V. 37. — P. 297–308.

[63] *Dafermos C.M.,* An abstract Volterra equation with applications in viscoelasticity // Archive of Rational Mechanics and Analysis, 1970, V.7, №3, P.544–569.

[64] *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations. — Springer, 1999.

[65] *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of Gurtin-Pipkin type equations // *SIAM J. Math. Anal.* — 2011. — Vol. 43. — P. 2296–2306.

[66] *Fabrizio M., Giorgi C., Pata V.*, A New Approach to Equations with Memory // *Arch. for Rational Mech. and Anal.* — 2010. — Vol. 198. — P. 189–232.

[67] *Fabrizzio M., Lazzari B.,* On the existence and the asympthotics stability of solutions for linearly viscoelastic solids // *Archive of Rational Mechanics and Analysis.* — 1991. — Vol.116. — P.139–152.

[68] *Kopachevsky N.D., Krein S.G.,* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 2: Non-selfadjoint Problems for Viscous Fluids. — Springer Basel, 2003.

[69] *Kopachevsky N.D., Syomkina E.V.*, Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative // *Eurasian Mathematical Journal.* — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 64–87

[70] *Lancaster P., Shkalikov A.*, Damped vibrations of beams and related spectral problems // *Canad. Appl. Math. Quart.* — 1994. — Vol.2, no. 1. — P. 45–90

[71] *Pandolfi L., Ivanov S.*, Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // *J. of Math. and Appl.* — 2009. — Vol. 355. — P. 1–11.

[72] *Pandolfi L.*, The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach // *Appl. Math. and Optim.* — 2005. — Vol. 52. — P.143–165.

[73] *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A General theory of heat conduction with finite wave speeds // *Arch. for Rational Mech. and Anal.* — 1968. — Vol. 31. — P.113–126.

[74] *Rivera J.E.M., Naso M.G.*, On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indefinite Dissipation // *Asympt. Anal.* — 2006. — Vol. 49. — P. 189–204.

[75] *Rivera J.E.M., Naso M.G., Vegni F.M.*, Asymptotic behaviour of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory// *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2003. — Vol. 286. — P. 692–704.

[76] *Shkalikov A.A.,* Elliptic equations in hilbert space and associated spectral problems // *Journal of Soviet Mathematics.* — 1990. Vol.51, № 4, — P. 2399 – 2467.

[77] *Tretter C.*, Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. — London, 2008.