

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

**Канин Евгений Алексеевич**

**Асимптотические модели процессов массопереноса в  
задаче роста трещины гидроразрыва**

Специальность 1.1.9 — Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:  
доктор физико-математических наук  
Осищов Андрей Александрович  
доктор физико-математических наук, профессор  
Карликов Владимир Павлович

Москва — 2023

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Модели роста трещины гидроразрыва пласта</b> . . . . .	21
1.1 Модель полубесконечной трещины . . . . .	21
1.1.1 Постановка задачи . . . . .	21
1.1.2 Система уравнений . . . . .	23
1.2 Модель радиальной трещины . . . . .	25
1.2.1 Постановка задачи . . . . .	25
1.2.2 Система уравнений . . . . .	26
1.3 Выводы . . . . .	29
<b>Глава 2. Трещина гидроразрыва пласта с утечками, зависящими от давления</b> . . . . .	30
2.1 Модель полубесконечной трещины . . . . .	32
2.1.1 Постановка задачи . . . . .	32
2.1.2 Асимптотические решения и структура общего решения . . . . .	34
2.1.3 Решение задачи . . . . .	42
2.1.4 Обсуждение решения задачи . . . . .	53
2.2 Модель радиальной трещины . . . . .	62
2.2.1 Постановка задачи . . . . .	62
2.2.2 Численный алгоритм . . . . .	64
2.2.3 Полученные результаты и обсуждение . . . . .	69
2.3 Выводы . . . . .	86
<b>Глава 3. Эффекты турбулентности при росте трещины гидроразрыва под влиянием “скользящей воды”</b> . . . . .	88
3.1 Модель полубесконечной трещины . . . . .	90
3.1.1 Постановка задачи . . . . .	90
3.1.2 Предельные режимы распространения трещины . . . . .	94
3.1.3 Решение задачи . . . . .	96
3.1.4 Обсуждение решения задачи . . . . .	102
3.2 Модель радиальной трещины . . . . .	108
3.2.1 Описание модели . . . . .	108

	Стр.
3.2.2	Метод решения задачи . . . . . 111
3.2.3	Примеры решения задачи, соответствующие типичным промышленным случаям . . . . . 115
3.2.4	Предельные режимы распространения трещины . . . . . 121
3.2.5	Запись системы уравнений в безразмерной форме . . . . . 126
3.2.6	Исследование параметрического пространства задачи . . . 128
3.3	Выводы . . . . . 136
<b>Глава 4.</b>	<b>Трещина гидроразрыва, распространяющаяся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли . . . . 138</b>
4.1	Постановка задачи . . . . . 140
4.2	Подход к моделированию . . . . . 142
4.2.1	Точное численное решение . . . . . 144
4.2.2	Приближенное полуаналитическое решение . . . . . 146
4.3	Концептуальное представление пространства решений . . . . . 149
4.3.1	Предельные режимы распространения трещины . . . . . 149
4.3.2	Представление параметрического пространства задачи . . 159
4.4	Полученные результаты и обсуждение . . . . . 161
4.4.1	Допустимые диапазоны значений безразмерных параметров задачи. . . . . 161
4.4.2	Анализ параметрического пространства задачи . . . . . 165
4.4.3	Количественные оценки объема недеформируемого ядра, формирующегося внутри канала трещины . . . . . 176
4.4.4	Моделирование роста трещины для типичных промышленных случаев . . . . . 179
4.5	Выводы . . . . . 182
<b>Заключение . . . . . 183</b>	
<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . . 190</b>	
<b>Список литературы . . . . . 191</b>	
<b>Список рисунков . . . . . 204</b>	

Список таблиц . . . . .	218
Приложение А. Верификация численного алгоритма, основанного на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа . . . . .	219
Приложение Б. Предельные режимы распространения радиальной трещины гидроразрыва, движущейся под влиянием вязкопластичной жидкости . . . . .	223

## Введение

### **Актуальность темы исследования.**

Гидроразрыв пласта (ГРП) представляет собой трещину нормального разрыва (I мода), распространяющуюся в твердом материале и заполненную нагнетаемой под высоким давлением жидкостью. В природе встречаются естественные трещины гидроразрыва, например, магматические дайки [1–5] и трещины в ледниках [6; 7]. Искусственные трещины гидроразрыва пласта, созданные при помощи нагнетания гидроразрывной жидкости под высоким давлением, применяются для интенсификации добычи углеводородов при разработке нефтяных и газовых месторождений [8; 9]. В последнее время распространено применение горизонтального бурения с многостадийным гидроразрывом пласта для разработки залежей с низкой проницаемостью и пористостью (сланцевые месторождения). В этом случае трещины гидроразрыва пласта обеспечивают большую площадь соединения между скважиной и резервуаром [10].

Гидроразрыв пласта является сложной и многоэтапной технологией. Для создания трещины гидроразрыва требуется большое количество воды, насосы высокой мощности, различные виды расклинивающих агентов (пропантов) и полимерных веществ, которые добавляются в воду для создания жидкости гидроразрыва с оптимальной реологией [11]. Математическое моделирование процедуры гидроразрыва является важным научным направлением, способствующим оптимизации и повышению эффективности гидроразрывных технологий. Цикл гидроразрыва состоит из нескольких фаз:

1. рост трещины [12]: жидкость гидроразрыва закачивается в резервуар под давлением, превышающим минимальное обжимающее напряжение, что приводит к разрушению горной породы, формированию трещины гидроразрыва и последующему ее распространению;
2. размещение пропанта вдоль трещины [13]: после создания канала трещины в нее закачивается жидкость, содержащая частицы пропанта, которые не позволяют трещине закрыться после остановки закачки. В результате, трещина представляет из себя раскрытый канал в флюидонасыщенном коллекторе, заполненный частицами пропанта и имеющий высокую проводимость;

3. очистка трещины [14] и добыча углеводородов [15]: после создания раскрытого канала трещины, который удерживается частицами проппанта, забойное давление на скважине снижается, что приводит к течению жидкости гидроразрыва из трещины в скважину и фильтрации поровой жидкости из пласта в трещину. Таким образом, жидкость гидроразрыва вымывается из канала трещины, скважина выходит на режим и начинается добыча углеводородов.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению ряда гидродинамических факторов, влияющих на динамику роста трещины. Эволюция трещины зависит от взаимного воздействия различных взаимосвязанных гидродинамических (течение жидкости внутри канала трещины, массообмен между трещиной и окружающим коллектором) и геомеханических (упругие деформации горной породы, ее разрушение на кончике трещины) процессов. Корректный учет их количественного вклада в закономерности роста трещины необходим для правильной оценки геометрических параметров трещины, которые впоследствии используются для оценки продуктивности скважины. Таким образом, правильная оценка геометрических параметров трещины очень важна при планировании работ по гидроразрыву пласта.

#### **Степень разработанности темы исследования.**

С течением времени было разработано большое количество моделей роста трещины гидроразрыва пласта, причем усложнение геометрии трещины происходило постепенно. Первые модели имели простую “эффективно одномерную” геометрию (пространственные характеристики трещины зависят от расстояния до источника нагнетания жидкости гидроразрыва): модель Перкинса - Керна - Нордгрена (РКН) [16; 17], модель Христиановича - Гиртсма - де Клерка (КГД) [18; 19] и модель радиальной трещины [20]. В последние два десятилетия активно развивались как аналитические, так и численные модели трещин с КГД и радиальной геометриями, направленные на корректный учет различных сопряженных физических процессов. Решения, полученные на основе этих моделей, можно рассматривать как эталонные, позволяющие верифицировать более сложные, численные трехмерные модели роста трещины гидроразрыва pseudo-3D [21–23] и planar-3D [24–28]. Помимо моделей для одиночной трещины гидроразрыва, в литературе также были предложены подходы для моделирования одновременного роста множества трещин, развивающихся от одной горизонтальной скважины [29–31]. В статьях [12; 32–34] приведены

подробные обзоры моделей роста трещины гидроразрыва пласта, а также детальные описания численных алгоритмов, применяемых для решения данной сопряженной гидро-геомеханической задачи с подвижной границей.

Как правило, в численных моделях роста трещины гидроразрыва предполагают, что линейно-упругая механика разрушения (ЛУМР) контролирует процесс роста трещины, несмотря на то что ее ограничения были подчеркнуты в ряде работ, например, [35; 36]. Согласно ее основам, трещина распространяется, когда коэффициент интенсивности напряжений в кончике трещины превышает критическое значение, известное как трещиностойкость горной породы [37]. Альтернативной формулировкой этого критерия является асимптотическое поведение профиля раскрытия трещины вблизи кончика пропорциональное квадратному корню от расстояния до фронта трещины и коэффициенту трещиностойкости (ЛУМР асимптота). В общем случае, данная асимптотика описывает поведение профиля раскрытия трещины вдоль ограниченной области, прилегающей к фронту [38]. Это связано с реализацией различных физических процессов, проявляющихся в процессе распространения трещины, помимо разрушения горной породы, например, поток вязкой жидкости в канале трещины, обмен жидкостью между трещиной и окружающим резервуаром. В численных симуляторах роста трещины гидроразрыва обычно задают грубую пространственную сетку для ускорения расчетов. Продвижение фронта трещины определяется на основе асимптотического решения вблизи кончика и значения раскрытия трещины в пространственной ячейке, прилегающей к ячейке, содержащей фронт трещины в текущий момент времени. В связи с ограниченностью области применимости ЛУМР асимптоты, необходимо использовать специальные модели кончика трещины для повышения точности численных расчетов. Таким образом, при помощи модели конечного элемента определяют положение фронта трещины в каждый момент времени, а также данная модель корректно описывает профили раскрытия и давления вблизи фронта и учитывает влияние всех физических процессов, реализующихся в модели, на распространение трещины (многомасштабная модель). Модель кончика трещины – это полубесконечная трещина гидроразрыва, распространяющаяся с постоянной скоростью, которую можно интерпретировать как мгновенную локальную скорость фронта родительской трещины конечной геометрии. Асимптотические решения для фронта трещины, соответствующие доминированию вязкостных эффектов и утечек в пласт, для трещины гидро-

разрыва, распространяющейся под влиянием жидкости со степенной реологией исследовались в работах [39; 40]. Эффекты, связанные с наличием лага, насыщенного парами жидкости гидроразрыва, в кончике трещины рассматривались в работах [41; 42]. Модель кончика трещины, учитывающая трещиностойкость горной породы, вязкость жидкости гидроразрыва и утечки в пласт была построена в работе [43]; затем в работе [44] была предложена аппроксимация этой модели, легко интегрируемая в трехмерную модель трещины ГРП *planar-3D*, как, например, это было сделано в работе [28]. В большинстве моделей роста трещины ГРП обмен жидкостью между трещиной и окружающим проницаемым коллектором описывается законом Картера. Однако модель кончика трещины может быть также рассмотрена с более сложным массообменом, а именно, механизмом утечек, зависящим от давления в канале трещины [45; 46]. В упомянутых моделях кончика трещины, течение жидкости внутри канала трещины предполагалось ламинарным. Влияние смены режима течения от ламинарного к турбулентному на рост трещины гидроразрыва изучалось в работах [47; 48]. Асимптотические решения для кончика трещины ГРП, распространяющейся под влиянием жидкости с неньютоновской реологией были построены в следующих работах: [49; 50] для степенной реологии, [51] для реологии Карро и [52] для реологии Гершеля-Балкли. Влияние когезионной зоны на рост трещины ГРП, а также анализ применимости линейно-упругой механики разрушения в задаче роста трещины гидроразрыва был проведен в работе [35]. Модель конечного элемента трещины ГРП с частицами пропанта внутри канала трещины была проанализирована в работе [53].

Модели кончика трещины могут быть также применимы для построения приближенных решений для трещины конечной геометрии. В основе приближенного подхода лежит идея о продолжении подходящего асимптотического решения вблизи кончика вдоль всей трещины. Используя приближенный профиль раскрытия, динамика роста трещины конечной геометрии определяется из уравнения баланса жидкости. Данный подход был применен для моделей трещины гидроразрыва радиальной геометрии и модели трещины ГРП плоской деформации в работах [35; 54; 55].

В настоящей диссертационной работе рассматривается два типа моделей роста трещины гидроразрыва. Первый тип – это модель полубесконечной трещины или модель конечного элемента, разновидности которой мы уже обсудили. Второй тип – это модель радиальной трещины гидроразрыва пласта,

и далее мы рассмотрим как эволюционировала данная модель с течением времени. Радиальная трещина формируется в плоскости, ориентация которой определяется направлением минимальных обжимающих напряжений, и ее геометрия является осесимметричной относительно источника. Численная модель радиальной трещины ГРП, распространяющейся в непроницаемом пласте под влиянием ламинарного потока Ньютоновской жидкости была изучена в работе [56]. Распространение радиальной трещины в проницаемом пласте в режиме доминирования трещиностойкости, т. е. когда вязкостью жидкости гидроразрыва можно пренебречь, было рассмотрено в статье [57]. Модель осесимметричной трещины с учетом лага, насыщенного парами жидкости гидроразрыва, была построена в работе [58]. Численная модель радиальной трещины, учитывающая влияние на рост трещиностойкости горной породы, вязкости жидкости гидроразрыва с Ньютоновской реологией, утечек в пласт, была представлена в работе [59]. Предельные режимы роста радиальной трещины в условиях трехмерного обмена жидкостью между трещиной и пластом, а также эффектов пороупругости были проанализированы в работах [46; 60]. Реализация турбулентного режима течения внутри канала радиальной трещины гидроразрыва была рассмотрена в работах [61; 62] для случая воды и в работе [48] для случая “скользящей воды” в случае непроницаемого резервуара. Влияние степенной реологии жидкости гидроразрыва на распространение радиальной трещины было изучено в работах [63; 64]. Степенная зависимость трещиностойкости от длины трещины ГРП была учтена в модели радиальной трещины в работе [65]. Важно подчеркнуть, что в данной публикации авторы использовали численный подход, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической интерполяции Лагранжа, обсуждаемый ранее в работе [66], который в случае конечной трещины ГРП не требует использования модели конечного элемента, а только лишь учета ЛУМР асимптоты.

Литературный обзор, проведенный в диссертации, показал, что роль ряда гидродинамических факторов, таких как, обмен жидкостью между трещиной и пластом, неламинарность течения внутри канала трещины и вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва, изучена недостаточно подробно, несмотря на практическую важность и значительное влияние указанных факторов на распространение трещины гидроразрыва в определенных условиях.

### **Цели и задачи работы.**

Целью диссертационной работы является исследование влияния следующих гидродинамических факторов на распространение трещины гидроразрыва:

- массообмен между трещиной и пластом при учете зависимости скорости массообмена от давления внутри канала трещины;
- смена режима течения внутри канала трещины от ламинарного к турбулентному с увеличением расстояния от кончика трещины;
- вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва.

В диссертации решаются следующие задачи:

1. Построение модели полубесконечной трещины гидроразрыва с учетом зависимости скорости массообмена между трещиной и пластом от давления внутри канала трещины. Получение аналитических решений для предельных режимов распространения и реализация численного алгоритма для нахождения общего решения задачи. Оценка относительной важности учета зависимости скорости обмена жидкостью от давления и нахождение границ применимости предельных решений. Нахождение диапазонов значений определяющих параметров, при которых построенное решение стремится к результатам классической модели полубесконечной трещины, в которой массообмен описывается законом утечек Картера, не учитывающим изменение давления внутри канала трещины.
2. Разработка численной модели радиальной трещины гидроразрыва, учитывающей зависимость скорости массообмена между трещиной и пластом от давления внутри канала трещины. Внедрение модели конечного элемента (задача 1) в численный алгоритм в качестве критерия распространения трещины. Сравнение построенного решения с результатами классической модели радиальной трещины, в которой массообмен описывается законом утечек Картера, для определения условий, при которых необходимо учитывать зависимость скорости массообмена от давления внутри канала трещины.
3. Построение модели конечного элемента трещины гидроразрыва, распространяющейся в проницаемой горной породе под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины. Вывод аналитических решений для предельных режимов распространения полубесконечной трещины и реализация численно-

го алгоритма для нахождения общего решения. Построение карт с областями применимости предельных решений и анализ положения границы перехода между ламинарным и турбулентным режимами течения.

4. Разработка модели радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся в проницаемом резервуаре под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины. Нахождение полуаналитических решений для предельных режимов распространения радиальной трещины и реализация численного алгоритма, рассчитывающего эволюцию распространения радиальной трещины в общем случае. Определение областей применимости предельных решений внутри параметрического пространства задачи и нахождение диапазонов значений определяющих параметров, при которых течение внутри канала трещины можно считать полностью турбулентным или полностью ламинарным.
5. Создание модели трещины гидроразрыва с радиально-симметричной геометрией, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли. Реализация численного и полуаналитического приближенного алгоритмов для расчета динамики роста трещины. Вывод полуаналитических решений для предельных режимов распространения радиальной трещины и анализ параметрического пространства задачи, включающего выделение областей применимости предельных решений, нахождение интервалов значений определяющих параметров, при которых наличие предела текучести жидкости гидроразрыва оказывает значительное воздействие на эволюцию радиальной трещины, и количественные оценки, связанные с недеформируемым ядром, формирующимся внутри канала трещины.

### **Научная новизна работы.**

В диссертационной работе впервые представлены следующие результаты:

1. Выявлены физические особенности трещины гидроразрыва, связанные с зависимостью скорости обмена жидкостью между трещиной и пластом от давления внутри канала трещины: (i) наличие зоны циркуляции поровой жидкости, т. е. области, вдоль которой поровая жидкость сначала втекает в трещину возле кончика, а затем утекает на некотором отдалении от фронта; (ii) конечное значение давления в кончике

- трещины, величина которого получена аналитически; (iii) увеличение интенсивности утечек в пласт вдоль основной части трещины конечной геометрии по сравнению с механизмом, не учитывающим изменение давления внутри канала трещины.
2. В модели полубесконечной трещины с массообменом, зависящим от давления, модифицировано предельное аналитическое решение, в котором доминируют эффекты трещиностойкости, а также аналитически получено новое предельное решение, характеризующееся доминированием эффектов вязкости и притока в трещину. Для модели радиальной трещины продемонстрировано, что при учете зависимости массообмена от давления, формируется более короткая и менее раскрытая трещина по сравнению с классической моделью с утечками по закону Картера.
  3. Найдены диапазоны значений определяющих параметров в модели полубесконечной трещины и в модели радиальной трещины с массообменом, зависящим от давления, при которых важно учитывать анализируемый гидродинамический эффект при моделировании распространения трещины гидроразрыва и, наоборот, определены условия, при которых данным эффектом можно пренебречь и пользоваться стандартным законом утечек Картера.
  4. Проанализировано влияние комбинированных эффектов ламинарно-турбулентного течения “скользкой воды”, т. е. водного раствора с полимерными добавками, снижающими трение, и утечек в пласт на распространение полубесконечной и радиальной трещин гидроразрыва. На основе модели радиальной трещины показано, что внутри канала трещины, как правило, существуют зоны и ламинарного, и турбулентного режимов течения. Ламинарный режим присутствует вблизи кончика, а турбулентный режим вблизи ствола нагнетательной скважины, причем размер ламинарной области увеличивается с течением времени. Выявлено, что наличие утечек продлевает воздействие эффектов турбулентности на эволюцию трещины гидроразрыва. При моделировании роста радиальной трещины получено, что турбулентный режим течения влияет на характеристики радиальной трещины вблизи ствола скважины в начальный период распространения причем интервал времени, в течение которого решение задачи отличается от ламинарного, различный для различных характеристик трещины.

5. В модели полубесконечной трещины и в модели радиальной трещины, распространяющихся в проницаемом резервуаре под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины, получены аналитические (для полубесконечной трещины) и полуаналитические (для радиальной трещины) решения для предельных режимов распространения, характеризующиеся доминированием турбулентного режима течения внутри канала трещины. Построены карты, изображающие области применимости предельных режимов. Для модели радиальной трещины на картах указаны области, внутри которых важно учитывать смену режима течения внутри канала трещины, и, наоборот, указаны диапазоны значений входных параметров, при которых можно использовать ламинарное решение.
6. Разработана модель радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли, на основе которой проведен детальный анализ влияния вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва на рост трещины. Выявлена физическая особенность трещины, связанная с наличием ненулевого предела текучести жидкости гидроразрыва, заключающаяся в формировании недеформируемого ядра посередине канала трещины, объем которого увеличивается с течением времени. Показано, что учет вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва приводит к трещине меньшего радиуса и большего раскрытия по сравнению с аналогичными характеристиками радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости гидроразрыва со степенной реологией. Получены полуаналитические решения для предельных режимов распространения радиальной трещины, характеризующиеся доминированием предела текучести. Построены карты режимов, на которых указаны области, в которых важно учитывать наличие предела текучести жидкости гидроразрыва при моделировании распространения трещины, и, наоборот, указаны диапазоны значений входных параметров, при которых можно пользоваться решением модели со степенной реологией жидкости гидроразрыва.

#### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Полученные в диссертационной работе результаты демонстрируют качественное и количественное влияние трех гидродинамических факторов: (i) массо-

обмена между трещиной и пластом, зависящего от давления внутри канала трещины, (ii) ламинарно-турбулентного течения “скользкой воды” внутри канала трещины и (iii) наличия ненулевого предела текучести жидкости гидроразрыва на характеристики радиальной трещины гидроразрыва в процессе ее эволюции. Приведенные карты режимов, иллюстрирующие области применимости предельных решений, дают представление о том, какие физические процессы доминируют при распространении радиальной трещины в интересующем случае. Найденные диапазоны значений определяющих параметров, при которых изучаемые гидродинамические эффекты оказывают значительное влияние на характеристики радиальной трещины, могут быть полезны при проектировании работ по гидроразрыву пласта. Приведенные результаты позволяют сделать вывод о необходимости модификации модели трещины гидроразрыва путем учета гидродинамических факторов (i)–(iii) в интересующем случае или использовании базовой модели, которая в случае (i) соответствует утечкам по закону Картера, в случае (ii) — ламинарному течению внутри канала трещины, а в случае (iii) — степенной реологии жидкости гидроразрыва. Проведенные исследования на основе асимптотических моделей полубесконечной трещины, учитывающих эффекты (i) и (ii), дают понимание какие физические процессы реализуются вблизи кончика трещины и какие новые особенности присутствуют в этой области трещины.

Разработанные модели радиальной трещины можно применять для расчета эволюции трещины гидроразрыва на начальном этапе закачки, а также использовать как эталонное решение для верификации симуляторов гидроразрыва пласта, например, в основе которых лежит трехмерная модель плоской трещины гидроразрыва *Planar3D*. Модели полубесконечной трещины (модели конечного элемента) могут быть встроены в модели конечной трещины гидроразрыва, например *Planar3D* или *EP3D*, в качестве критерия распространения, т.е. с их помощью определяется положение фронта трещины конечной геометрии на каждом временном шаге.

### **Методология и методы исследования.**

В диссертационной работе для формулирования математических постановок задач используются законы гидромеханики, линейной теории упругости, линейно-упругой механики разрушения и теории фильтрации. Вывод аналитических решений для предельных режимов распространения полубесконечной трещины проводится при помощи подхода из работы [43], а в случае радиальной

трещины гидроразрыва полуаналитические решения для предельных режимов распространения получены путем применения метода из работы [12]. Общее решение задачи о распространении полубесконечной трещины с массообменом, зависящим от давления, и с ламинарно-турбулентным течением “скользкой воды” внутри канала трещины, рассчитывается численно при помощи алгоритма из работы [43], который модифицирован с учетом рассматриваемых гидродинамических эффектов. Моделирование роста радиальной трещины с массообменом, зависящим от давления, проводится посредством модификации численного алгоритма из работы [54] и построенной модели конечного элемента. Численный алгоритм, описанный в работе [65] и модифицированный для учета утечек в пласт по закону Картера и реологии жидкости гидроразрыва отличной от ньютоновской, применяется для моделирования распространения радиальной трещины гидроразрыва, движущейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользкой воды” и жидкости гидроразрыва с вязкопластической реологией. В случае модели с жидкостью гидроразрыва с реологией Гершеля-Балкли был также применен приближенный подход, представленный в работах [54; 55] и адаптированный для учета наличия предела текучести и нелинейности напряжения сдвига.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. При учете массообмена, зависящего от давления, образуется зона циркуляции поровой жидкости, примыкающая к кончику трещины. Давление жидкости на фронте трещины имеет конечное значение. Наблюдаются более интенсивные утечки в пласт вдоль основной части трещины конечной геометрии по сравнению с законом утечек Картера, при этом радиальная трещина оказывается более короткой и менее раскрытой. Учет массообмена, зависящего от давления, оказывает определяющее влияние на структуру решения вблизи кончика полубесконечной трещины, а наибольшее воздействие на характеристики радиальной трещины проявляется при больших значениях параметра эффективности.
2. При распространении трещины гидроразрыва конечной геометрии внутри канала трещины, как правило, существуют зоны и ламинарного, и турбулентного режимов течения. Ламинарная зона расположена вблизи кончика трещины, длина этой зоны увеличивается с течени-

ем времени. Турбулентный режим возникает вблизи нагнетательной скважины, он влияет на параметры радиальной трещины в начальный период распространения, причем интервалы времени, в течение которых профили раскрытия и давления отличаются от ламинарного решения, различны. Утечки в пласт продлевают воздействие эффектов турбулентности.

3. Вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва способствует формированию недеформируемого ядра внутри канала трещины, объем этого ядра увеличивается с течением времени. Радиальная трещина, распространяющаяся под влиянием жидкости с пределом текучести, имеет меньший радиус и большее раскрытие по сравнению со случаем жидкости гидроразрыва со степенной реологией. Воздействие вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва на параметры радиальной трещины проявляется по прошествии конечного интервала времени от инициализации трещины.

#### **Степень достоверности результатов.**

Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, обеспечивается использованием классических законов гидромеханики, линейной теории упругости, линейно-упругой механики разрушения и теории фильтрации. Численные алгоритмы, реализованные в диссертации, верифицированы путем сравнения с известными аналитическими (для полубесконечной трещины) и полуаналитическими (для радиальной трещины) решениями, опубликованными в литературе. Для моделирования роста радиальной трещины гидроразрыва было реализовано два численных алгоритма и проведено сравнение их расчетов в случае модели с классическим набором предположений, представленных в Главе 1. При расчетах динамики роста радиальной трещины контролируется интегральный баланс жидкости.

#### **Апробация результатов.**

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Семинар по механике сплошных сред под руководством акад. РАН А.Г. Куликовского, проф. В.П. Карликова, члена-корреспондента РАН О.Э. Мельника и проф. А.Н. Осипцова (Москва, 2022).

2. Научно-исследовательский семинар кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством акад. РАН Р.И. Нигматулина (Москва, 2022).
3. Семинар лаборатории механики многофазных сред Института механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, 2022).
4. Совместный семинар Газпромнефть НТЦ и НГУ “Моделирование в нефтяном инжиниринге” (онлайн, 2023).
5. Международный семинар “Сопряженные гидро- и термодинамические задачи механики трещин” (Новосибирск, 2019).
6. Международная конференция AGU Fall Meeting (Сан-Франциско, 2019).
7. Всероссийская конференция молодых специалистов ООО “ЛУКОЙЛ-Инжиниринг” (онлайн, 2020).
8. Всероссийская конференция “Цифровые технологии в добыче и переработке углеводородов: от моделей к практике” (онлайн, 2020 и 2021).
9. Международная конференция AGU Fall Meeting (онлайн, 2020 и 2021).
10. Международная конференция EAGE ECOMOR XVII (онлайн, 2020).
11. Международная конференция 14th WCCM & ECCOMAS Congress (онлайн, 2021).
12. Международная конференция 82nd EAGE Annual (онлайн, 2021).

### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих рейтинговых (Топ-25%) международных журналах, индексируемых системами Web of Science и Scopus:

- Kanin E. A., Garagash D. I., Osiptsov A. A. The near-tip region of a hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off and leak-in // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2020. – Т. 892.
- Kanin E. A. et al. A radial hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2020. – Т. 143. – С. 104062.
- Kanin E. A. et al. A radial hydraulic fracture driven by a Herschel–Bulkley fluid // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. – 2021. – Т. 295. – С. 104620.

в сборнике материалов международной конференции, индексируемом в системе Scopus:

- Kanin E., Garagash D., Osiptsov A. Turbulent flow effects in a slickwater fracture propagation in permeable rock //ECMOR XVII. – European Association of Geoscientists & Engineers, 2020. – Т. 2020. – №. 1. – С. 1-18.

в монографии:

- Kanin E. A., Garagash D. I., Osiptsov A. A. Turbulent Flow Effects on Propagation of Radial Hydraulic Fracture in Permeable Rock //Mechanics of Hydraulic Fracturing: Experiment, Model, and Monitoring. — John Wiley & Sons, Ltd, 2022. — Гл. 10. С. 107–126.

### **Личный вклад автора.**

Все представленные в диссертации результаты получены автором лично. В постановке задач, обсуждении результатов и подготовке научных публикаций принимали участие научные руководители А.А. Осипцов, В.П. Карликов и научные консультанты Д.И. Гарагаш, Е.В. Донцов. Личный вклад автора в публикациях [67–71] составляет 4/5.

### **Благодарности.**

Автор глубоко признателен своим научным руководителям А.А. Осипцову и В.П. Карликову за идеи и советы, поддержку и терпение на протяжении выполнения научной работы и подготовки диссертации. Автор выражает благодарность научным консультантам Д.И. Гарагашу и Е.В. Донцову за предложения и обсуждения в рамках академического сотрудничества. Автор благодарит С.А. Боронина за ценные советы при подготовке диссертации и по представлению ее материалов.

### **Объем и структура работы.**

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 2 приложений. Полный объём диссертации составляет 225 страниц, включая 56 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 132 наименования.

В главе 1 представлены “классические постановки” задач и системы уравнений для модели радиальной трещины и модели полубесконечной трещины. Данные формулировки названы классическими, потому что они содержат предположения, часто используемые в литературных источниках. В последующих главах будет описано как классический набор предположений и системы уравнений в моделях модифицируются для исследования того или иного гидродинамического фактора.

Глава 2 посвящена анализу влияния массообмена, скорость которого зависит от давления внутри канала трещины, на рост трещины гидроразрыва в проницаемой горной породе. В разделе 2.1 рассматривается модель конечного элемента, выводятся аналитически предельные режимы распространения полубесконечной трещины и строится численный алгоритм для нахождения общего решения задачи. В секции проводится сравнение характеристик полубесконечной трещины в построенном решении с аналогичными параметрами в решении с утечками по закону Картера в целях определения областей внутри параметрического пространства задачи, внутри которых сопоставляемые решения значительно отличаются, означая важность учета рассматриваемого гидродинамического фактора при моделировании распространения полубесконечной трещины. Раздел 2.2 посвящен модели радиальной трещины. Мы реализуем численную схему, в которой в качестве критерия распространения используется модель конечного элемента из раздела 2.1. В секции сравнивается построенное решение с решением для радиальной трещины с утечками по закону Картера в терминах радиуса, раскрытия, давления и эффективности для определения диапазонов значений определяющих параметров, при которых необходимо учитывать анализируемый гидродинамический эффект, и, наоборот, выявляем случаи, когда им можно пренебречь.

В главе 3 изучается влияние ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” внутри канала трещины на ее распространение в проницаемом коллекторе. В секции 3.1, посвященной модели полубесконечной трещины, мы выводим аналитически предельные режимы распространения и реализуем численный алгоритм для нахождения общего решения. Сравнивая общее численное решение задачи с предельными режимами распространения, мы определяем их границы применимости. В разделе уделяется особое внимание положению границы между ламинарным и турбулентным режимами течения, которое мы рассчитываем для различных значений определяющих параметров. В разделе 3.2 рассматривается модель радиальной трещины гидроразрыва. Мы находим предельные режимы распространения полуаналитически и реализуем численный подход, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической интерполяции Лагранжа. В секции приводятся карты, на которых изображены области применимости предельных режимов распространения радиальной трещины, а также оцениваются интервалы значений определяющих параметров, при которых ре-

шение задачи, учитывающее смену режима течения внутри канала трещины, можно считать полностью турбулентным или полностью ламинарным.

Глава 4 посвящена разработке модели радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием вязкопластической жидкости, которую мы описываем реологической моделью Гершеля-Балкли. Для расчета динамики роста трещины гидроразрыва мы реализуем численный алгоритм, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической интерполяции Лагранжа, и полуаналитический подход, позволяющий получить быстрое приближенное решение. В разделе выведены полуаналитическим методом предельные режимы распространения и проводится детальный анализ параметрического пространства, в результате которого определяются области применимости предельных режимов и выделяются интервалы значений определяющих параметров, при которых наличие предела текучести жидкости гидроразрыва оказывает значительное влияние на рост трещины. В разделе также проводятся количественные оценки, связанные с недеформируемым ядром, формирующимся внутри канала трещины.

## Глава 1. Модели роста трещины гидроразрыва пласта\*

В настоящей главе диссертации мы рассмотрим формулировки моделей (постановки задач и основные уравнения) концевой трещины гидроразрыва и радиальной трещины гидроразрыва. Данные формулировки можно назвать классическими, так как заложенные в них предположения часто используются в литературных источниках. В последующих главах диссертации мы будем обсуждать только изменения в постановках задач, необходимые для описания анализируемого гидродинамического фактора.

### 1.1 Модель полубесконечной трещины

#### 1.1.1 Постановка задачи

Модель кончика трещины (или модель концевой трещины) представляется в виде полубесконечной трещины плоской деформации (рисунок 1.1), распространяющейся с постоянной скоростью  $V$ , которая представляет из себя мгновенную локальную скорость фронта родительской трещины. Так как скорость распространения трещины постоянная во времени, то можно перейти в движущуюся систему координат, в которой координата  $x$  будет означать расстояние от кончика трещины и постановка задачи будет стационарной.

Мы будем рассматривать полубесконечную трещину, распространяющуюся в проницаемой линейно-упругой породе, которая характеризуется модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Мы будем полагать, что характерный размер зоны, в которой энергия расходуется на разрушение горной породы [72], мал по сравнению с масштабами длины, относящимися к различным физическим процессам, которые проявляются вблизи кончика трещины (например, диссипация энергии при течении вязкой жидкости в канале трещины,

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [67; 68].

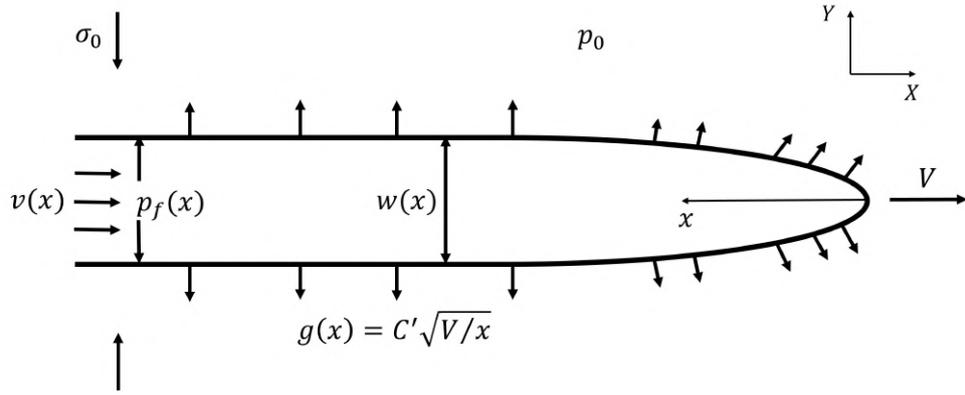


Рисунок 1.1 — Модель полубесконечной трещины (концевого элемента) с классическим набором предположений.

массообмен между трещиной и пластом). Это выполняется в случае, когда минимальные обжимающие напряжения  $\sigma_0$  значительно меньше предела прочности горной породы [35]. Поэтому мы можем применить линейную механику разрушения для моделирования квазистатического распространения трещины в породе с трещиностойкостью  $K_{Ic}$ .

Стенки трещины нагружены изнутри давлением жидкости гидроразрыва  $p_f(x)$ , в то же время в дальнем поле действует минимальное обжимающее напряжение  $\sigma_0$ . Профили эффективного давления  $p(x) = p_f(x) - \sigma_0$  и раскрытия  $w(x)$  полностью характеризуют полубесконечную трещину. Полагаем, что жидкость гидроразрыва имеет Ньютоновскую реологию и вязкость  $\mu$ . Поток жидкости внутри канала трещины является ламинарным и описывается лубрикационной теорией [73]. В классической формулировке задачи лаг, примыкающий к кончику трещины и насыщенный парами жидкости гидроразрыва, можно считать пренебрежимо малым, т. к. его максимальная длина  $\sim \mu V E^2 \sigma_0^{-3}$  [42] мала по сравнению с характерными масштабами длины в рассматриваемой задаче. Иными словами, фронт жидкости гидроразрыва и фронт трещины совпадают в модели.

Обмен жидкостью между каналом трещины и коллектором с пористостью  $\phi_r$  и проницаемостью  $k$  описывается законом утечек Картера [74] (одномерный механизм, независимый от давления). Согласно этому закону, скорость утечек пропорциональна обратному квадратному корню из времени 'экспозиции', то есть период между текущим моментом времени и моментом, когда кончик трещины достигает рассматриваемую точку в плоскости трещины. В случае, когда поровая жидкость обладает теми же свойствами, что и жидкость гидроразрыва (вязкость  $\mu$ , сжимаемость  $c_t$ ), коэффициент пропорциональности в законе Кар-

тера имеет следующий вид:  $C_L = k(\sigma_o - p_o)/(\mu\sqrt{\pi c})$ , где  $p_o$  поровое давление “на бесконечности”, а  $c = k/(\varphi_r c_t \mu)$  коэффициент пьезопроводности. Когда необходимо учесть формирование фильтрационной корки или (и) различные свойства жидкости гидроразрыва и поровой жидкости в случае утечек, независящих от давления, то можно воспользоваться формулами, приведенными в книге [8].

### 1.1.2 Система уравнений

Сначала нам необходимо ввести движущуюся систему координат  $(x, y)$ , связанную с кончиком трещины. Координаты в движущейся системе выражаются через координаты в фиксированной системе  $(X, Y)$  следующим образом:  $x = Vt - X$ ,  $y = Y$ . Необходимо отметить, что в движущейся системе рассматриваемая задача является стационарной. Система уравнений формулируется относительно профилей раскрытия  $w(x)$  и эффективного давления  $p(x)$ , которые зависят от расстояния до кончика трещины  $x \in (0, +\infty)$  и набора материальных параметров:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_{Ic}, \quad M' = 12\mu, \quad C' = 2C_L, \quad (1.1)$$

где  $E'$  модуль плоской упругой деформации,  $K'$  и  $M'$  параметры трещиностойкости и вязкости и  $C'$  параметр утечек.

#### Критерий распространения трещины

Согласно теории линейно-упругой механики разрушения, трещина распространяется квазистатически, когда коэффициент интенсивности напряжений достигает критического значения равного трещиностойкости горной породы  $K_I = K_{Ic}$  [75]. Альтернативная формулировка записывается в терминах поведения раскрытия трещины вблизи ее кончика [37]:

$$w(x) = \frac{K'}{E'}\sqrt{x}, \quad x \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

#### Уравнение упругости

Эффективное давление внутри канала трещины  $p(x)$  может быть выражено в интегральной форме через профиль раскрытия  $w(x)$  при помощи

уравнения упругости [76]:

$$p(x) = \frac{E'}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dw(s)}{ds} \frac{ds}{x-s}. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) можно записать в обратной форме [42] необходимой для имплементации численного алгоритма:

$$w(x) = \frac{K'}{E'} \sqrt{x} + \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty K(x,s) p(s) ds, \quad (1.4)$$

где интегральное ядро имеет вид:  $K(x,s) = \ln \left| \frac{\sqrt{x} + \sqrt{s}}{\sqrt{x} - \sqrt{s}} \right| - 2\sqrt{\frac{x}{s}}$ .

### Течение жидкости внутри канала трещины

Течение несжимаемой жидкости внутри канала трещины описывается уравнением неразрывности, усредненным по раскрытию трещины, и в движущейся системе координат оно имеет вид:

$$V \frac{dw}{dx} - \frac{d(wv)}{dx} + g = 0, \quad (1.5)$$

где  $g$  – скорость утечек, которая описывается законом Картера [74]:

$$g(x) = C' \sqrt{\frac{V}{x}}. \quad (1.6)$$

Подставляя уравнение (1.6) в (1.5) и интегрируя от кончика трещины ( $x = 0$ ) до некоторого расстояния  $x$ , мы получим следующее уравнение:

$$wv = wV + q_\perp. \quad (1.7)$$

В данном уравнении были также учтены граничные условия:  $w(0) = 0$  и  $(wv)|_{x=0} = 0$ . Уравнение (1.7) можно интерпретировать как поток жидкости внутри канала трещины на расстоянии  $x$  от ее кончика  $w(x)v(x)$  распределяется между объемом жидкости, находящемся внутри трещины  $w(x)V$ , и объемом, утекающим в пласт (кумулятивные утечки)  $q_\perp(x)$ . В случае закона Картера, последнее слагаемое имеет вид:

$$q_\perp = 2C' \sqrt{Vx}. \quad (1.8)$$

Завершающим уравнением в системе является закон Пуазёйля для ламинарного течения Ньютоновской жидкости внутри канала трещины:

$$v = \frac{w^2}{M'} \frac{dp}{dx}. \quad (1.9)$$

## 1.2 Модель радиальной трещины

### 1.2.1 Постановка задачи

Второй моделью роста трещины гидроразрыва пласта, которая будет рассмотрена в настоящей диссертации, является модель радиальной (осесимметричной) трещины, схематическое изображение которой представлено на рисунке 1.2. В данной модели трещина формируется вследствие нагнетания жидкости через точечный источник и распространяется вдоль плоскости, перпендикулярной обжимающему напряжению и содержащей источник. Все параметры трещины симметричны относительно оси, проходящей через источник и перпендикулярной плоскости распространения и являются функциями расстояния до источника  $r$  и времени  $t$ .

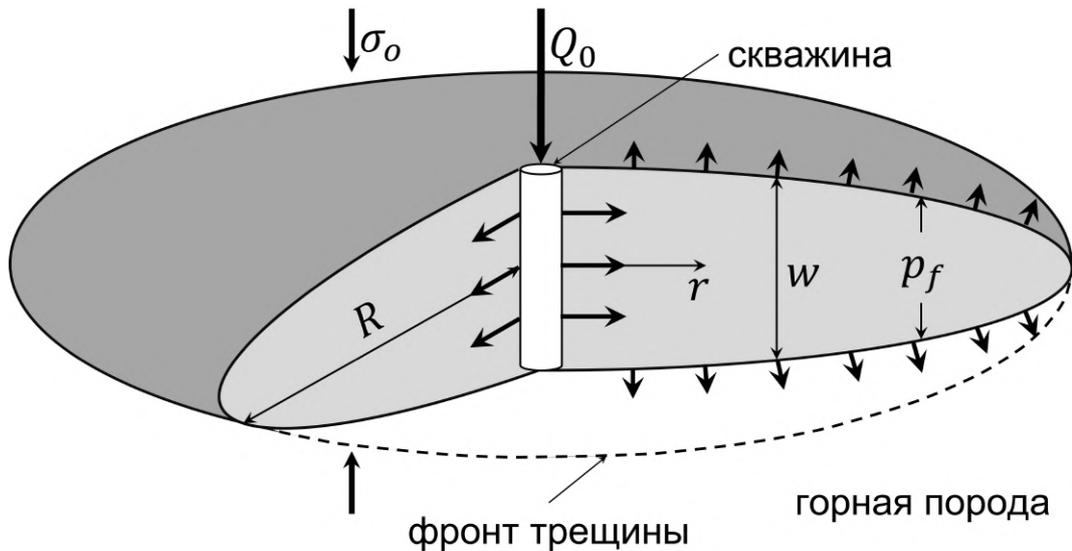


Рисунок 1.2 — Модель радиальной трещины с классическим набором предположений.

Будем считать, что нагнетание жидкости в пласт происходит с постоянным объемным расходом  $Q_0$ , означая, что объем жидкости, поступившей в пласт, зависит от времени  $t$  как  $V_{inj}(t) = Q_0 t$ . Предполагаем, что порода является однородной, линейно-упругой, характеризующейся модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Квазистатическое распространение трещины в горной породе с коэффициентом трещиностойкости  $K_{Ic}$  моделируется при помощи линейно-упругой теории механики разрушения. На стенки трещины с внешней

стороны в дальнем поле действует обжимающее напряжение  $\sigma_o$ , в то время как давление жидкости  $p_f(r, t)$  оказывает влияние с внутренней стороны. Радиальная трещина описывается следующим набором параметров: радиус  $R(t)$ , профили раскрытия  $w(r, t)$  и эффективного давления  $p(r, t) = p_f(r, t) - \sigma_o$ , эффективность  $\eta(t) = V_{\text{crack}}(t)/V_{\text{inj}}(t)$ , где  $V_{\text{crack}}(t)$  объем трещины. Параметр эффективности позволяет определить распределение закачанной гидроразрывной жидкости  $V_{\text{inj}}(t)$  между объемом трещины  $V_{\text{crack}}(t)$  и объемом жидкости, участвующим в массообмене  $V_{\text{fluid-exchange}}(t)$ , например, утекающим в окружающий проницаемый пласт.

В классической постановке задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва пласта, мы рассматриваем жидкость гидроразрыва с Ньютоновской реологией и вязкостью  $\mu$ . Поток жидкости в канале трещины контролируется лубрикационной теорией [73]; скорость потока обозначим за  $v(r, t)$ , а величину потока за  $q(r, t) = w(r, t)v(r, t)$ . Мы полагаем, что фронт жидкости гидроразрыва и фронт трещины совпадают в модели, т. е. лаг, насыщенный парами жидкости гидроразрыва [42], мал по сравнению с радиусом радиальной трещины.

Массообмен между трещиной и окружающим пластом (пористость  $\phi_r$  и проницаемость  $k$ ) моделируется при помощи закона утечек Картера, скорость  $g(r, t)$  которого пропорциональна обратному квадратному корню от времени экспозиции, а коэффициент пропорциональности (коэффициент Картера) в случае идентичных свойств у жидкости гидроразрыва и поровой жидкости имеет вид [77]:  $C_L = k(\sigma_o - p_o)/(\mu\sqrt{\pi c})$ , где  $p_o$  – поровое давление в дальнем поле, а  $c$  – коэффициент пьезопроводности.

### 1.2.2 Система уравнений

Далее мы переходим к обсуждению основных уравнений в модели радиальной трещины гидроразрыва. Система уравнений формулируется относительно динамики радиуса  $R(t)$ , профилей раскрытия  $w(r, t)$  и эффективного давления  $p(r, t)$ . Характеристики трещины зависят от времени  $t$ , от расстояния до источ-

ника  $r$  и набора материальных параметров:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_{Ic}, \quad M' = 12\mu, \quad C' = 2C_L \quad (1.10)$$

и объемного расхода  $Q_0$ . В уравнении (1.10),  $E'$  модуль плоской деформации,  $K'$  и  $M'$  параметры трещиностойкости и вязкости,  $C'$  параметр утечек.

### Уравнение упругости

Уравнение упругости связывает эффективное давление внутри канала трещины  $p(r, t)$  с профилем раскрытия  $w(r, t)$  и радиусом  $R(t)$  [56; 78; 79]:

$$p(r, t) = -\frac{E'}{2\pi R(t)} \int_0^{R(t)} G\left(\frac{r}{R(t)}, \frac{s}{R(t)}\right) \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} ds, \quad (1.11)$$

Интегральное ядро  $G(\rho, s)$  в уравнении (1.11) имеет следующий вид:

$$G(\rho, s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} K\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right) + \frac{\rho}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right), & \rho > s, \\ \frac{s}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{\rho^2}{s^2}\right), & \rho < s, \end{cases} \quad (1.12)$$

где  $K(x)$  и  $E(x)$  полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

### Течение жидкости внутри канала трещины

Используя лубрикационную теорию [73], мы запишем уравнение неразрывности (закон сохранения массы), усредненное по раскрытию трещины:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rq)}{\partial r} + g(r, t) = 0, \quad q(r, t) = w(r, t)v(r, t). \quad (1.13)$$

Уравнение для скорости утечек  $g(r, t)$  записывается при помощи закона Картера:

$$g(r, t) = \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}}, \quad (1.14)$$

где  $t_0(r)$  обратная функция к динамике радиуса:  $t_0(r) = R^{-1}(t)$  или  $R(t_0(r)) = r$ , т. е. отражает момент времени, когда фронт трещины достигает расстояние  $r$  от источника.

Выражение для скорости течения жидкости внутри канала трещины записывается на основе закона Пуазёйля для Ньютоновской жидкости:

$$v = -\frac{w^2}{M'} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.15)$$

Комбинируя уравнение неразрывности (1.13), закон Пуазёйля (1.15) и формулу для скорости утечек в пласт (1.14), мы получаем уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{M'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}}, \quad (1.16)$$

которое является ключевым уравнением при моделировании роста трещины гидроразрыва.

### Критерий распространения трещины

Из линейно-упругой механики разрушения нам известно, что трещина гидроразрыва пласта распространяется, когда коэффициент интенсивности напряжений в кончике равен трещиностойкости горной породы:  $K_I = K_{Ic}$ . Альтернативно, данный критерий может быть выражен в виде асимптотического поведения раскрытия трещины  $w(r, t)$  вблизи кончика [37]:

$$w = \frac{K'}{E'} \sqrt{R - r}, \quad r \rightarrow R. \quad (1.17)$$

### Граничные условия

Первое граничное условие задается на источнике, где объемный расход равен  $Q_0$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r q(r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r w(r, t) v(r, t) = Q_0. \quad (1.18)$$

Второе граничное условие ставится на кончике трещины и характеризуется нулевым раскрытием и потоком:

$$w(R, t) = 0, \quad q(R, t) = 0. \quad (1.19)$$

### Уравнение баланса жидкости

Интегрируя уравнение неразрывности (1.13) относительно времени и координаты и учитывая граничные условия (1.18), (1.19), мы получим уравнение баланса жидкости:

$$\underbrace{Q_0 t}_{V_{\text{inj}}} = \underbrace{2\pi \int_0^R r w(r, t) dr}_{V_{\text{crack}}} + \underbrace{2\pi \int_0^t ds \int_0^{R(s)} r g(r, s) dr}_{V_{\text{fluid-exchange}}}. \quad (1.20)$$

Слагаемое, связанное с обменом жидкостью между трещиной и пластом, в случае утечек по закону Картера имеет следующий вид:

$$V_{\text{fluid-exchange}} = 4\pi C' \int_0^R r \sqrt{t - t_0(r)} dr \quad (1.21)$$

Уравнение (1.20) можно интерпретировать как нагнетаемый объем жидкости гидроразрыва ( $V_{\text{inj}}$ ) распределяется между объемом трещины ( $V_{\text{crack}}$ ) и объемом жидкости, утекающей в пласт ( $V_{\text{fluid-exchange}}$ ).

### 1.3 Выводы

В настоящей главе мы обсудили постановки задач и системы уравнений в модели полубесконечной трещины и в модели радиальной трещины, которые содержат предположения, наиболее распространенные в литературных источниках. В последующих главах мы рассмотрим модификации формулировок, связанные с учетом анализируемого гидродинамического эффекта.

## Глава 2. Трещина гидроразрыва пласта с утечками, зависящими от давления\*

В настоящей главе мы будем обсуждать аспекты, связанные с обменом жидкостью между каналом трещины и окружающей проницаемой горной породой, а также связь массообмена с потоком жидкости внутри трещины и ее распространением. Поскольку массообмен влияет на объем трещины и величину давления внутри канала трещины, он оказывает значительное влияние на профиль раскрытия трещины и процесс ее роста. Описание массообмена осложняется априорно неизвестной величиной давления внутри трещины, изменяющейся во времени и пространстве, возникающим процессом диффузии порового давления в окружающем резервуаре, зависящими от времени эффектами пороупругости, формированием полимерной корки на стенках трещины. В результате во множестве работ использовалась феноменологическая модель Картера [74], которая предполагает, что локальная скорость утечек жидкости в пласт может быть аппроксимирована величиной, обратно пропорциональной квадратному корню из времени экспозиции (интервал между моментом достижения фронтом трещины рассматриваемой точки в пространстве и текущим временем). В основе закона Картера лежит предположение об инвариантном (постоянном в пространстве и времени) перепаде давления в жидкости внутри трещины и поровым давлением в дальнем поле,  $p_f - p_o \approx \text{const}$ . Данное предположение можно обосновать тем, что давление в трещине имеет порядок равный величине обжимающих напряжений в дальнем поле  $\sigma_o$  (необходимо для того, чтобы трещина оставалась открытой),  $p_f \approx \sigma_o$ , которое, в свою очередь, значительно больше, чем давление поровой жидкости в дальнем поле, т. е.  $\sigma_o > p_o$ , что приводит к приблизительно постоянной разности давлений между трещиной и окружающим резервуаром,  $p_f - p_o \approx \sigma_o - p_o$ . Несмотря на то, что данное рассуждение оправдано в среднем по длине трещины, оно не является корректным на локальном масштабе, когда рассматривается падение давления в жидкости внутри трещины по направлению к ее кончику. Действительно, модели кончика, в которых жидкость гидроразрыва полностью заполняет трещину,

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [67; 68].

распространяющуюся в проницаемом пласте, с утечками по закону Картера [40; 43], показывают, что возле фронта трещины давление жидкости бесконечно мало, означая реализацию бесконечного всасывания поровой жидкости. Таким образом, предположения закона Картера вблизи фронта недействительны; более того, в этой зоне должен реализовываться лаг между фронтом жидкости гидроразрыва и фронтом трещины, заполненный поровой жидкостью [45]. В ряде публикаций, посвященных численным исследованиям роста трещины гидроразрыва в проницаемой породе [80–82], не обсуждается приток поровой жидкости в трещину вблизи ее кончика, что связано с недостаточным пространственным разрешением фронта трещины в этих моделях. Учет массообмена, зависящего от давления внутри канала трещины, также необходим в основной части трещины гидроразрыва, где давление превышает величину обжимающего напряжения.

В разделе 2.1 мы обсудим модель кончика трещины гидроразрыва, распространяющейся в проницаемом резервуаре, в которой будет учитываться массообмен между трещиной и пластом, скорость которого зависит от давления в жидкости внутри канала трещины. Для формулировки задачи мы будем опираться на работы [45; 46]. Модель кончика рассматривается в виде стационарной задачи о полубесконечной трещине плоской деформации, распространяющейся с постоянной скоростью. Сначала мы сформулируем задачу и приведем основные уравнения. Затем мы обсудим различные асимптотические решения, что в дальнейшем позволит нам описать общую структуру искомого решения и его поведение в параметрическом пространстве. Далее мы введем характерные масштабы, относящиеся к предельным режимам распространения трещины, и общее параметрическое пространство в безразмерных переменных. Остальная часть раздела посвящена аналитическому и численному исследованию решения задачи о кончике трещины внутри параметрического пространства, включая анализ важности зависимости скорости массообмена между трещиной и пластом от давления в жидкости внутри канала трещины.

В разделе 2.2 мы рассмотрим численную модель радиальной трещины гидроразрыва, в которой будут учитываться утечки, зависящие от давления в трещине. Для точного описания физических процессов, происходящих вблизи фронта трещины, мы используем модель кончика, разработанную в разделе 2.1. Основной целью раздела 2.2 является сравнение параметров радиальной трещины (профили раскрытия, давления, динамики радиуса и эффективности),

полученные при помощи разрабатываемой модели с результатами, рассчитанными при помощи модели с утечками по закону Картера [54; 59], в целях уточнения случаев, для которых зависимостью массообмена от давления в трещине пренебречь нельзя. Сначала мы обсудим основные уравнения, описывающие радиальную трещину с утечками, зависящими от давления. Затем мы рассмотрим, как модель кончика трещины используется в качестве критерия распространения для моделирования роста радиальной трещины, и перечислим основные компоненты численного алгоритма для расчета параметров радиальной трещины с течением времени. Далее, мы представим полученные численные расчеты, сравнение с решением, соответствующим утечкам по закону Картера, а также аналитический анализ, который демонстрирует, для каких случаев утечки, зависящие от давления, играют большую роль.

## 2.1 Модель полубесконечной трещины

### 2.1.1 Постановка задачи

В данном разделе мы обсудим постановку задачи для модели кончика трещины ГРП с массообменом между трещиной и окружающим проницаемым резервуаром, зависящим от давления внутри канала трещины. На рисунке 2.1 показан схематический рисунок исследуемой задачи. Предположения модели конечного элемента, а также уравнения, приведенные в разделе 1.1, остаются прежними, за исключением тех, которые связаны с обменом жидкостью между трещиной и пластом. Именно на них мы сосредоточимся в текущей секции диссертации.

Процесс обмена жидкостью определяется перепадом давления между трещиной,  $p_f(x)$ , и поровым давлением в дальнем поле  $p_o$ . Мы будем моделировать массообмен при помощи одномерного механизма. Данный подход является аппроксимацией полноценной двумерной диффузии порового давления в пласте при массообмене [45], которая применима в предположении, что характерный размер зоны с возмущением порового давления меньше характерного размера

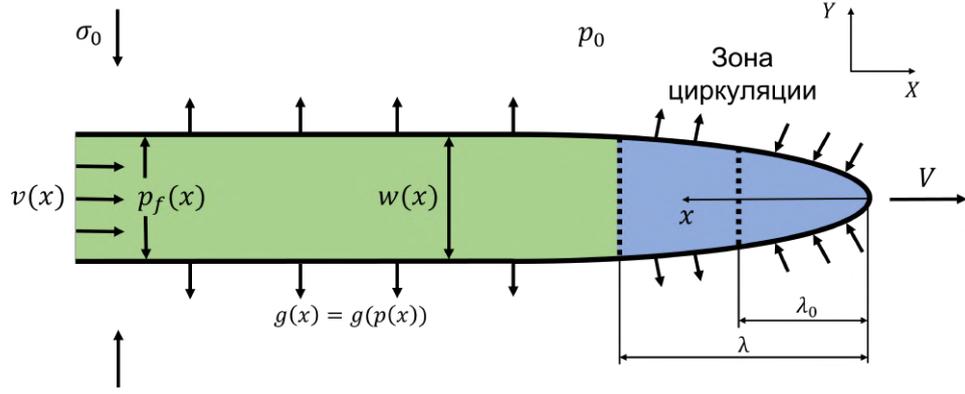


Рисунок 2.1 — Схематическое изображение модели концевой элемента трещины ГРП. В модели учитывается массообмен между трещиной и резервуаром, который зависит от давления внутри канала трещины.

рассматриваемой задачи о кончике трещины. При изучении модели мы также будем полагать, что поровая жидкость идентична жидкости гидроразрыва.

Давление в жидкости внутри трещины  $p_f(x)$  уменьшается по направлению к ее кончику. Если значение давления на фронте трещины,  $p_f(0)$  ниже  $p_0$ , то формируется зона, примыкающая к фронту, некоторой длины  $\lambda_0$ ,  $x \in [0, \lambda_0]$ , вдоль которой поровая жидкость втекает в трещину. На расстоянии  $x > \lambda_0$  давление жидкости в трещине увеличивается, позволяя поровой жидкости вытекать обратно в окружающий резервуар. Так как задача является стационарной в движущейся системе координат  $x$ , весь объем поровой жидкости, втекающий на интервале  $x \in [0, \lambda_0]$ , должен полностью утекать в пласт, тем самым формируя зону циркуляции с некоторой длиной  $\lambda > \lambda_0$  (рисунок 2.1). Канал трещины на полубесконечном интервале  $[\lambda, +\infty)$  заполнен жидкостью гидроразрыва, которая в силу непрерывности давления будет подвергаться утечкам в пласт.

Локальная скорость массообмена  $g(x)$  между трещиной и пластом имеет следующий вид в случае его зависимости от давления внутри трещины:

$$g(x) = Q' \sqrt{V} \left( \frac{p(0) + \sigma'_o}{2\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{dp}{dx'} \frac{dx'}{2\sqrt{x-x'}} \right), \quad (2.1)$$

где  $Q' = \frac{4k}{\mu\sqrt{\pi c}}$  коэффициент притока, зависящий от коэффициента пьезопроводности  $c$ , проницаемости резервуара  $k$ , вязкости жидкости  $\mu$ , величины эффективного давления на фронте трещины  $p(0) = p_f(0) - \sigma_o$ ;  $\sigma'_o = \sigma_o - p_0$  — эффективное обжимающее напряжение. Вывод формулы (2.1) описан в приложении А в работе [67].

Интегрируя уравнение (2.1) от кончика  $x = 0$  до некоторого расстояния  $x > 0$ , мы получим формулу для объема жидкости, участвующей в массообмене:

$$q_{\perp}(x) = Q' \sqrt{V} \int_0^x \frac{p(s) + \sigma'_o}{2\sqrt{x-s}} ds = C' \sqrt{Vx} + Q' \sqrt{V} \int_0^x \frac{p(s)}{2\sqrt{x-s}} ds. \quad (2.2)$$

Здесь  $C' = Q' \sigma'_o = 4k\sigma'_o / (\mu\sqrt{\pi c})$  коэффициент Картера, который в два раза больше, чем в формулировке, приведенной в разделе 1.1.2. Данное определение вводится таким образом, чтобы оно было эквивалентно коэффициенту  $C'$ , используемому в работе [43], с результатами которой мы будем проводить сравнение (решение для кончика трещины с утечками по Картеру).

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.2) соответствует утечкам в пласт по закону Картера, в то время как второе слагаемое является поправкой, зависящей от давления жидкости внутри канала трещины. Так как эффективное давление  $p(x) < 0$  (или  $p_f(x) < \sigma_o$ ) в задаче о полубесконечной трещине [42], то поправка отрицательна, иными словами, отвечает за приток к трещине.

## 2.1.2 Асимптотические решения и структура общего решения

### 2.1.2.1 Узловые решения

Два различных механизма определяют режим распространения конечной трещины ГРП [43]. Первый – это механизм баланса жидкости, заключающийся в разделении нагнетаемой в пласт жидкости между трещиной и резервуаром в результате процесса массообмена (трещина / резервуар). Второй механизм – это разделение суммарной диссипированной энергии между созданием новой поверхности трещины и трением вязкой жидкости о стенки трещины (трещиностойкость / вязкость).

В процессе роста трещины, баланс жидкости между трещиной и пластом, а также распределение диссипированной энергии между разрушением породы и трением о стенки меняются с течением времени, что приводит к реализации различных режимов, в которых преобладает один из механизмов баланса жидкости и один из механизмов диссипации энергии в различные моменты времени. Эти наблюдения также могут быть применены в случае полубесконечной трещины,

однако в этом случае распределения нагнетаемой жидкости и диссипированной энергии зависят от расстояния до фронта трещины.

Существует четыре предельных режима распространения, которые характеризуются одним механизмом баланса жидкости и одним механизмом диссипации энергии: трещиностойкость ( $M' = 0$ ), трещина-вязкость ( $C' = Q' = 0$ ,  $K' = 0$ ), утечки-вязкость ( $C' \rightarrow \infty$ ,  $K' = 0$ ), трещина-приток-вязкость ( $K' = 0$ ,  $C' > 0$ ,  $Q' < +\infty$ ). Соответствующие решения мы будем называть узловыми или узлами в параметрическом пространстве рассматриваемой задачи. Коэффициент притока  $Q'$  и коэффициент Картера  $C'$  определяют распределение нагнетаемой жидкости, в то время как параметр вязкости  $M'$  и параметр трещиностойкости  $K'$  отвечают за распределение диссипированной энергии.

Первые три узловых решения ( $k$ ,  $m$ ,  $\tilde{m}$ ) были выведены в работе [43] и представлены в таблице 1.

Предельное решение	раскрытие $w(x)$	эффективное давление $p(x)$	скорость $v(x)$
<b>k</b> Трещиностойкость	$\ell_k^{1/2} x^{1/2}$	0	$V + \frac{E'C'\sqrt{V}}{K'}$
<b>m</b> Трещина-вязкость	$\beta_0 \ell_m^{1/3} x^{2/3}$	$\delta_0 E' \left(\frac{\ell_m}{x}\right)^{1/3}$	$V$
<b><math>\tilde{m}</math></b> Утечки-вязкость	$\tilde{\beta}_0 \ell_{\tilde{m}}^{3/8} x^{5/8}$	$\tilde{\delta}_0 E' \left(\frac{\ell_{\tilde{m}}}{x}\right)^{3/8}$	$\frac{V}{\tilde{\beta}_0} \frac{\ell_{\tilde{m}}^{9/8}}{\ell_m x^{1/8}}$

Коэффициенты:  $\beta_0 = 2^{1/3} 3^{5/6}$ ,  $\delta_0 = \beta_0 f(2/3)$ ,  $\tilde{\beta}_0 = 2.534$ ,  $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\beta}_0 f(5/8)$ ,  
где  $f(\lambda) = \lambda \operatorname{ctg}(\pi\lambda)/4$ .

$\ell_k = (K'/E')^2$ ,  $\ell_m = VM'/E'$ ,  $\ell_{\tilde{m}} = \left(C'\sqrt{VM'/E'}\right)^{2/3}$ .

Таблица 1 — Предельные решения для полубесконечной трещины.

В свою очередь, четвертый узел мы обсудим в настоящем разделе. Зависимость скорости массообмена между трещиной и пластом от давления в трещине сопряжена с падением давления вдоль канала трещины по направлению к ее кончику (в случае  $M' > 0$ ). Этот факт свидетельствует о том, что приток к трещине преобладает вблизи фронта. Иными словами, можно ожидать, что вблизи кончика вновь образовавшийся объем трещины полностью заполняется поровой жидкостью, втекающей из окружающего резервуара, в то время как поток жидкости вдоль канала в этой области незначителен,  $v \approx 0$ . Однако, доминирование притока из пласта должно происходить в ограниченной области, примыкающей к фронту, т. к. уравнение упругости предполагает, что эффективное давление  $p(x)$  стремится к 0 при  $x \rightarrow \infty$  или  $p_f(x) \rightarrow \sigma_o > p_o$ , давая возможность реализоваться утечкам.

Узлы  $k$ ,  $m$ ,  $\tilde{m}$  являются решениями, выполняющимися вдоль всей полубесконечной трещины для соответствующих предельных значений материальных параметров. Они могут быть найдены из мономиального решения уравнения упругости (1.3), формула (3.1) в работе [43]), в которой коэффициенты для каждого предельного режима находятся из лубрикационного уравнения (1.7) путем подстановки соответствующих значений параметров  $C'$ ,  $M'$  и  $K'$ . Решение для  $k$  узла представляет из себя критерий распространения трещины (1.2), т. е. реализуется в ближнем поле. В общем параметрическом случае, вязкостная асимптота  $m$  реализуется в дальнем поле, а вязкостная асимптота  $\tilde{m}$  может аппроксимировать решение задачи в среднем поле (детальное рассуждение приведено в работе [43]).

Новое предельное решение, трещина-приток-вязкость, которое мы обозначим за  $\tilde{o}$ , реализуется в случае доминирования вязкостных эффектов ( $K' = 0$ ) и притока поровой жидкости из пласта в ближнем поле ( $x \rightarrow 0$ ). Оно соответствует классическому решению в отсутствии трещиностойкости породы: раскрытие  $w = B_{\tilde{o}}x^{3/2}$ , несингулярное давление  $p = -\sigma'_0 - \frac{3}{2}B_{\tilde{o}}\frac{V^{1/2}}{Q'}x$ . Коэффициент  $B_{\tilde{o}}$  (с размерностью  $1/\sqrt{m}$ ) является частью решения задачи. Таким образом асимптота  $\tilde{o}$  может реализовываться только в ближнем или среднем поле, т. к. не удовлетворяет уравнению упругости вдоль всей полубесконечной трещины.

Для ненулевой трещиностойкости  $K' > 0$ , профиль раскрытия полубесконечной трещины в ближнем поле ( $x \rightarrow 0$ ) задается  $k$  узлом согласно критерию распространения трещины (1.2). В этом случае профиль эффективного давления выглядит следующим образом:  $p(x \rightarrow 0) = -\sigma'_0 - \frac{K'V^{1/2}}{E'Q'}$ , что следует из уравнения неразрывности (1.7) путем баланса объема жидкости, участвующего в массообмене, с объемом трещины (потоком жидкости  $wv$  в трещине вблизи кончика трещины можно пренебречь). Таким образом, мы получили конечное давление на фронте трещины, что является значительным отличием от модели кончика с утечками по Картеру [43], где поведение давления имело сингулярность на фронте. Также мы можем выписать выражение для давление на фронте  $p_f(x \rightarrow 0) = p_o - K'\sqrt{V}/(E'Q')$ , которое показывает, что в случае медленного распространения трещины ( $V \rightarrow 0$ ) и в случае отсутствия трещиностойкости ( $K' \rightarrow 0$ ), давление в кончике трещины будет стремиться к начальному пластовому давлению  $p_o$ .

В таблице 2 мы резюмируем узловые решения  $k$  ( $K' > 0$ ) и  $\tilde{o}$  ( $K' = 0$ ).

	раскрытие $w(x)$	эффективное давление $p(x)$	скорость $v(x)$
$\mathbf{k}$ ( $K' > 0$ )	$\ell_k^{1/2} x^{1/2}$	$-\sigma'_0 - \frac{K'V^{1/2}}{E'Q'}$	0
$\tilde{\mathbf{o}}$ ( $K' = 0$ )	$B_{\tilde{o}} x^{3/2}$	$-\sigma'_0 - \frac{3}{2} B_{\tilde{o}} \frac{V^{1/2}}{Q'} x$	$-\frac{3}{2} B_{\tilde{o}}^3 \frac{V^{1/2}}{Q'M'} x^3$

$B_{\tilde{o}}$  – часть решения задачи.  $\ell_k = (K'/E')^2$ .

Таблица 2 — Асимптотические решения для кончика трещины в ближнем поле ( $x \rightarrow 0$ ).

### 2.1.2.2 Структура решения и масштабирование

Мы будем изучать общее решение задачи внутри параметрического пространства, которое можно представить в виде пирамиды  $m\tilde{m}\tilde{o}k$ , в вершинах которой находятся узловые решения (рисунок 2.2).

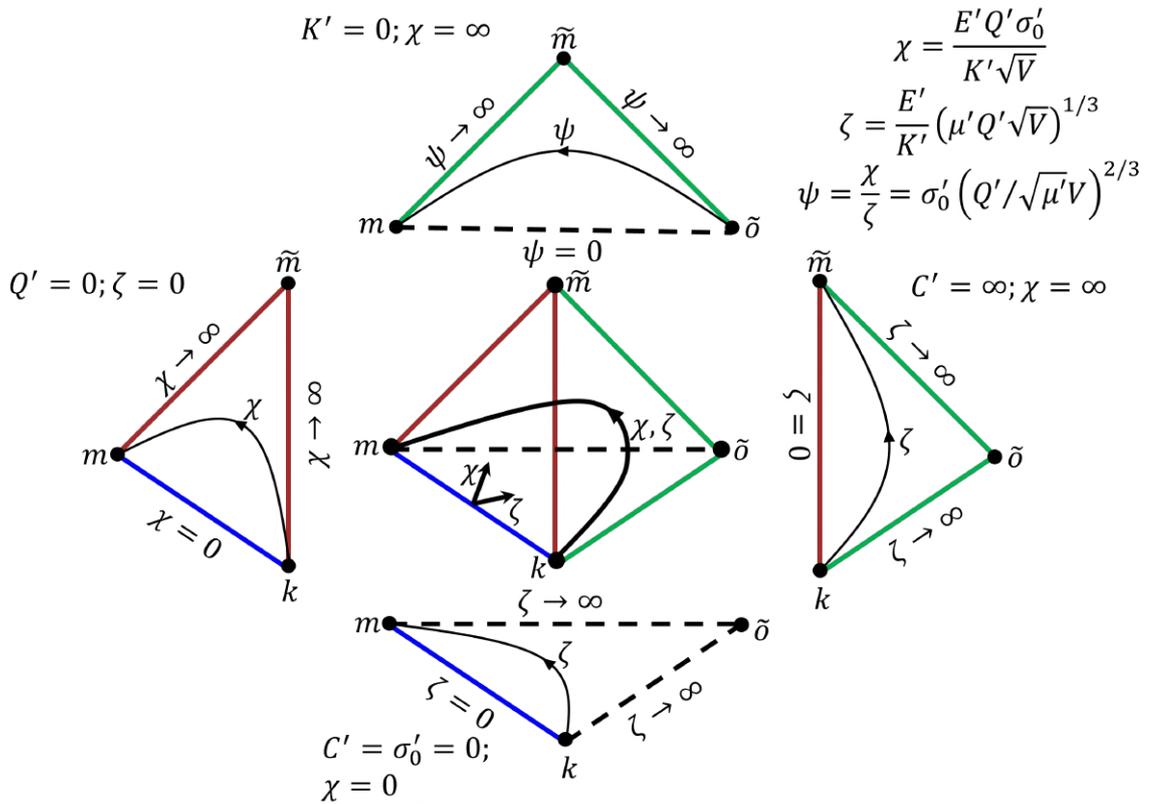


Рисунок 2.2 — Параметрическое пространство (пирамида  $m\tilde{m}\tilde{o}k$ ) и ее грани, характеризующиеся одним механизмом диссипации энергии или одним механизмом баланса жидкости. Траектории решения параметризуются безразмерными коэффициентами утечек  $\chi$  и притока  $\zeta$ , а также их отношением  $\psi$ .

Каждая из четырех граней пирамиды  $m\tilde{m}\tilde{o}k$  соответствует доминированию одного (из трех) механизма баланса жидкости или одного (из двух) механизма диссипации энергии:

- грань "трещина-утечки"  $m\tilde{m}k$ : приток к трещине незначителен,  $Q' = 0$ ;

- грань "трещина-приток"  $m\tilde{o}k$ : утечки в пласт незначительны,  $C' \propto \sigma'_o = 0$ ;
- грань "массообмен"  $\tilde{m}\tilde{o}k$ : объем трещины незначителен,  $C' \rightarrow \infty$ ;
- грань "вязкость"  $m\tilde{m}\tilde{o}$ : трещиностойкость незначительна,  $K' = 0$ .

Шесть ребер пирамиды  $m\tilde{m}\tilde{o}k$  образуются на пересечениях граней. Решение для каждого ребра соответствует доминированию одного (из трех) механизма баланса жидкости и одного (из двух) механизма диссипации энергии. Например, ребро  $\tilde{m}\tilde{o}$  можно назвать как "утечки-вязкость" оно характеризуется  $C' \rightarrow \infty$  и  $K' = 0$  и принадлежит грани "фдюдюобмен"  $\tilde{m}\tilde{o}k$  ( $C' \rightarrow \infty$ ) и грани "вязкость"  $m\tilde{m}\tilde{o}$  ( $K' = 0$ ), тем самым означая малый объем трещины и незначительную трещиностойкость.

Параметрическое пространство рассматриваемой задачи в виде пирамиды  $m\tilde{m}\tilde{o}k$  является обобщением параметрического пространства задачи о кончике трещины с утечками по Картеру в виде треугольника  $m\tilde{m}k$  [43]. Ребра пирамиды описывают переход между соответствующими предельными решениями при удалении от кончика трещины. Например, ребро  $\tilde{m}\tilde{o}$  соответствует переходу между  $\tilde{o}$  узлом и  $\tilde{m}$  узлом, реализующимися в ближнем и дальнем поле соответственно.

Как было упомянуто ранее узел  $\tilde{o}$  может реализовываться в ближнем поле полубесконечной трещины. Таким образом, ребро  $\tilde{o}k$  соответствует разложению решения возле  $k$  узла ( $w \propto x^{1/2}$ ), которое включает в себя поправку следующего порядка, являющуюся решением для  $\tilde{o}$  узла ( $w \propto x^{3/2}$ ); поправка начинает преобладать при увеличении расстояния до кончика трещины.

Два других ребра, включающие в себя узел  $\tilde{o}$ ,  $\tilde{m}\tilde{o}$  ( $K' = 0$ ,  $C' \rightarrow \infty$ ) и  $m\tilde{o}$  ( $K' = 0$ ,  $C' \propto \sigma'_o = 0$ ), представляют из себя решения задачи, соответствующие вышеуказанным значениям материальных параметров и реализующиеся вдоль всей полубесконечной трещины. Далее мы обсудим априорно неизвестный коэффициент  $B_{\tilde{o}}$ , входящий в профиль раскрытия для  $\tilde{o}$  узла,  $w = B_{\tilde{o}}x^{3/2}$  ( $x \rightarrow 0$ ). Используя обратную форму уравнения упругости (1.4) с  $K' = 0$  и взяв предел  $x \rightarrow 0$  от выражения под интегралом, мы получим:

$$B_{\tilde{o}} = \frac{8}{3\pi E'} \int_0^\infty \frac{p(s)}{s^{3/2}} ds. \quad (2.3)$$

Так как для  $\tilde{o}$  узла эффективное давление имеет вид  $p(s \rightarrow 0) = -\sigma'_o - \frac{3}{2}B_{\tilde{o}}\frac{V^{1/2}}{Q}s$  (таблица 2), интеграл для коэффициента (2.3) равен конечному значению для ребра  $m\tilde{o}$ , с случае которого  $\sigma'_o = 0$ , и расходится для ребра  $\tilde{m}\tilde{o}$ . Таким образом,

данная процедура не применима для ребра  $\tilde{m}\tilde{o}$ , однако, позволяет ограничить значение коэффициента  $B_{\tilde{o}}$  в случае ребра  $m\tilde{o}$ . Можно отметить, если профиль эффективного давления для ребра  $m\tilde{o}$  отрицателен вдоль всей трещины ( $p(s) < 0$  для  $\forall s > 0$ ), тогда из уравнения (2.3) следует  $B_{\tilde{o}} < 0$ , т. е. отрицательное раскрытие трещины вблизи кончика. Поэтому можно сделать вывод, что решения для ребра  $m\tilde{o}$  не существует или общее решение задачи не стремится к предельному решению в случае равенства нулю трещиностойкости и отсутствии утечек (или  $\sigma'_0 = 0$ ).

Общее решение задачи внутри параметрического пространства переходит от  $k$  до  $m$  узла при удалении от кончика трещины, которые реализуются в ближнем и дальнем поле соответственно. При этом в различных предельных случаях, указанных ранее, траектория может приближаться к определенным граням/ребрам пирамиды. Чтобы определить безразмерные параметры, фиксирующие определенную траекторию решения внутри параметрического пространства, мы применим методику, описанную в работе [43], которая заключается в определении характерных масштабов расстояния до кончика трещины  $\ell_*$ , раскрытия  $w_*$  и давления  $p_*$ , тесно связанных с эволюцией решения вдоль заданного ребра параметрической пирамиды между соответствующими узлами.

Масштабирования, связанные с ребрами  $mk$ ,  $\tilde{m}k$ ,  $m\tilde{m}$ , были получены в работе [43] путем нахождения точки пересечения  $x \sim \ell_*$  между профилями раскрытия  $w(x)$  или давления  $p(x)$  соответствующих узловых решений, между которыми осуществляется переход вдоль рассматриваемого ребра. Например, в случае ребра  $mk$ , характерный масштаб длины находится из сопоставления профилей раскрытия для  $k$  и  $m$  узлов,  $w_* = \ell_k^{1/2} \ell_*^{1/2} = \ell_m^{1/3} \ell_*^{2/3}$ , в то время как  $p_*$  находится из уравнения упругости,  $w_*/\ell_* = p_*/E'$ . Аналогично мы получим масштабирования, связанные с ребрами  $\tilde{m}\tilde{o}$  и  $\tilde{o}k$ , однако будем учитывать, что асимптота  $\tilde{o}$  зависит от траектории решения (включает в себя априорно неизвестный коэффициент). Характерный масштаб длины для ребра  $\tilde{m}\tilde{o}$  находим из сопоставления слагаемого ведущего порядка в профиле давления в узле  $\tilde{o}$  ( $p \approx -\sigma'_o$ ) и профиля давления в узле  $\tilde{m}$ ,  $p_* = \sigma'_o = E'(\ell_{\tilde{m}}/\ell_*)^{3/8}$ , а масштаб раскрытия  $w_*$  определяется из уравнения упругости. В масштабировании для ребра  $\tilde{o}k$  характеристическое давление берется равным  $p_* = \sigma'_o$ . Используя это значение, уравнение упругости и сопоставляя профили раскрытия для  $\tilde{o}$  и  $k$  узлов, мы можем найти, что  $\ell_* = K'^2/\sigma_o'^2$  и  $w_* = K'^2/E'\sigma_o'$ . В таблице 3 мы

перечислили все масштабирования для рассматриваемой задачи о кончике трещины с утечками, зависящими от давления в трещине.

Масштабирование	$\ell_*$	$w_*$	$p_*$
$mk$	$\ell_{mk} = \ell_k^3 / \ell_m^2$	$\ell_k^2 / \ell_m$	$E' \ell_m / \ell_k$
$m\tilde{m}$	$\ell_{m\tilde{m}} = \ell_{\tilde{m}}^9 / \ell_m^8$	$\ell_{\tilde{m}}^6 / \ell_m^5$	$E' (\ell_m / \ell_{\tilde{m}})^3$
$\tilde{m}k$	$\ell_{\tilde{m}k} = \ell_k^4 / \ell_{\tilde{m}}^3$	$\ell_k^{5/2} / \ell_{\tilde{m}}^{3/2}$	$E' (\ell_{\tilde{m}} / \ell_k)^{3/2}$
$\tilde{m}\tilde{o}$	$\ell_{\tilde{m}\tilde{o}} = (E' / \sigma'_0)^{8/3} \ell_{\tilde{m}}$	$(E' / \sigma'_0)^{5/3} \ell_{\tilde{m}}$	$\sigma'_0$
$\tilde{o}k$	$\ell_{\tilde{o}k} = (K' / \sigma'_0)^2$	$K'^2 / (E' \sigma'_0)$	$\sigma'_0$
$\ell_k = (K' / E')^2, \quad \ell_m = VM' / E', \quad \ell_{\tilde{m}} = \left( C' \sqrt{V} M' / E' \right)^{2/3}.$			

Таблица 3 — Характеристические масштабы расстояния до кончика трещины  $\ell_*$ , давления  $p_*$ , раскрытия  $w_* = (p_* / E') \ell_*$ , соответствующие пяти масштабированиям, реализующимся в задаче.

Сравнивая масштабы расстояния до кончика трещины, характеризующие переходы между узлами вдоль ребер параметрического пространства, для рассматриваемой грани пирамиды  $m\tilde{m}\tilde{o}k$ , мы можем определить число, параметризующее решение для этой грани.

К примеру, для грани  $m\tilde{m}k$ , можно ввести число, равное отношению двух любых масштабов расстояния, связанных с этой гранью ( $\ell_{mk}, \ell_{m\tilde{m}}, \ell_{\tilde{m}k}$ ) [43]:

$$\chi = \left( \frac{\ell_{m\tilde{m}}}{\ell_{mk}} \right)^{1/6} = \left( \frac{\ell_{mk}}{\ell_{\tilde{m}k}} \right)^{1/2} = \left( \frac{\ell_{m\tilde{m}}}{\ell_{\tilde{m}k}} \right)^{1/8} = \frac{C' E'}{K' V^{1/2}}. \quad (2.4)$$

Параметр  $\chi$  можно интерпретировать как безразмерный коэффициент утечек и при помощи него можно описывать траектории решения задачи о кончике трещины на грани  $m\tilde{m}k$ . Предельный случай  $\chi \rightarrow 0$  соответствует решению для ребра  $mk$ :

$$\text{отсутствие притока, } \chi = 0 : \quad k \xrightarrow{\ell_{mk}} m, \quad (2.5)$$

т. е. переходу между узлами  $k$  и  $m$  при удалении от кончика трещины, который осуществляется на расстоянии порядка  $\ell_{mk}$  (на рисунке 2.2 траектория изображена синим цветом). Другой предельный случай  $\chi \rightarrow \infty$  соответствует разделению масштабов расстояния,  $\ell_{\tilde{m}k} \ll \ell_{m\tilde{m}}$ , означая вложенную структуру решения, а именно, последовательную реализацию двух решений для ребер  $\tilde{m}k$  и  $m\tilde{m}$ :

$$\text{отсутствие притока, } \chi \rightarrow \infty : \quad k \xrightarrow{\ell_{\tilde{m}k}} \tilde{m} \xrightarrow{\ell_{m\tilde{m}}} m. \quad (2.6)$$

Таким образом, сначала мы наблюдаем переход от  $k$  к  $\tilde{m}$  узлу на расстоянии  $\ell_{\tilde{m}k}$  до кончика трещины, а затем переход от  $\tilde{m}$  к  $m$  узлу на расстоянии  $\ell_{m\tilde{m}}$  (данная траектория изображена коричневым цветом на рисунке 2.2).

Аналогично для грани "массообмен"  $\tilde{m}\tilde{o}k$ ,  $\chi \rightarrow \infty$ , мы определим другое число в терминах отношений любых двух масштабов расстояний, относящихся к этой грани ( $\ell_{\tilde{o}k}$ ,  $\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}$ ,  $\ell_{\tilde{m}k}$ ):

$$\zeta = \left( \frac{\ell_{\tilde{o}k}}{\ell_{\tilde{m}k}} \right)^{1/6} = \left( \frac{\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}}{\ell_{\tilde{o}k}} \right)^{1/2} = \left( \frac{\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}}{\ell_{\tilde{m}k}} \right)^{1/8} = \frac{E'}{K'} \left( M'Q'V^{1/2} \right)^{1/3}. \quad (2.7)$$

Число  $\zeta$  можно интерпретировать как безразмерный коэффициент притока, и оно параметризует траектории решения задачи внутри грани  $\tilde{m}\tilde{o}k$ . Предельный случай  $\zeta \rightarrow 0$  является решением для ребра  $\tilde{m}k$ . В свою очередь в пределе  $\zeta \rightarrow \infty$  происходит разделение масштабов расстояний,  $\ell_{\tilde{o}k} \ll \ell_{\tilde{m}\tilde{o}}$ , и формируется вложенная структура решения, отражающаяся в последовательной реализации решений для ребер  $\tilde{o}k$  и  $\tilde{m}\tilde{o}$  при удалении от кончика трещины:

$$\chi \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow \infty : \quad k \xrightarrow[\ell_{\tilde{o}k}]{} \tilde{o} \xrightarrow[\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}]{} \tilde{m}. \quad (2.8)$$

Для грани "вязкость"  $m\tilde{m}\tilde{o}$ ,  $\chi \rightarrow \infty$ , мы можем определить новое число в терминах отношения масштабов расстояния, определяющих переходы между узлами вдоль ребер  $\tilde{m}\tilde{o}$  и  $m\tilde{m}$ :

$$\psi = \left( \frac{\ell_{m\tilde{m}}}{\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}} \right)^{1/8} = \sigma'_o \left( \frac{Q'}{M'^{1/2}V} \right)^{2/3}. \quad (2.9)$$

Число  $\psi$  можно интерпретировать как безразмерное эффективное обжимающее напряжение. Необходимо отметить, что  $\psi$  можно выразить через безразмерный коэффициент утечек  $\chi$  и коэффициент притока  $\zeta$ ,  $\psi = \chi/\zeta$ . Данное число параметризует траектории решения задачи, лежащие на грани  $m\tilde{m}\tilde{o}$ . Например, в предельном случае  $\psi \rightarrow \infty$  происходит разделение масштабов расстояния,  $\ell_{\tilde{m}\tilde{o}} \ll \ell_{m\tilde{m}}$ , приводящее к последовательной реализации решений для ребер  $\tilde{m}\tilde{o}$  и  $m\tilde{m}$  при удалении от кончика трещины:

$$\chi \rightarrow \infty, \psi = \chi/\zeta \rightarrow \infty : \quad \tilde{o} \xrightarrow[\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}]{} \tilde{m} \xrightarrow[\ell_{m\tilde{m}}]{} m. \quad (2.10)$$

Другой предел  $\psi = 0$  должен соответствовать решению для ребра  $\tilde{m}\tilde{o}$ , которое, как обсуждалось ранее, не существует. Поведение решения для грани  $m\tilde{m}\tilde{o}$  для данного предела будет изучено на основе численных расчетов.

Можно заметить, что в случае комбинации условий (2.8), (2.10), т. е. когда  $\chi \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ , и  $\psi = \chi/\zeta \rightarrow \infty$ , три масштаба расстояния разделены,  $\ell_{\tilde{ok}} \ll \ell_{\tilde{m}\tilde{o}} \ll \ell_{m\tilde{m}}$ , и реализуется тройная вложенная структура решения:

$$\chi \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow \infty, \psi = \chi/\zeta \rightarrow \infty : \quad k \xrightarrow{\ell_{\tilde{ok}}} \tilde{o} \xrightarrow{\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}} \tilde{m} \xrightarrow{\ell_{m\tilde{m}}} m. \quad (2.11)$$

Эта траектория отмечена на рисунке 2.2 зеленым цветом.

Для последней четвертой грани пирамиды,  $m\tilde{ok}$ ,  $\chi = 0$ , мы можем использовать безразмерный коэффициент притока  $\zeta$  для параметризации траекторий решения. Случай  $\zeta = 0$  соответствует решению для ребра  $mk$ , а предел  $\zeta \rightarrow \infty$  означает стремление решения к несуществующим решениям для ребер  $m\tilde{o}$  и  $\tilde{ok}$ . (Необходимо отметить, что решение для ребра  $\tilde{ok}$  может реализовываться в ближнем поле или при переходе от ближнего к среднему полю. Однако, несуществующее решение для ребра  $m\tilde{o}$ , которое должно реализовываться при переходе от среднего к дальнему полю в пределе  $\zeta \rightarrow \infty$  будет означать отсутствие реализации решения для ребра  $\tilde{ok}$  при переходе от ближнего к среднему полю.)

### 2.1.3 Решение задачи

В данном разделе мы сначала сформулируем систему уравнений в безразмерном виде, используя различные масштабирования, которые обсуждались в предыдущем разделе (таблица 3). Затем будут представлены различные решения задачи: (i) непараметрические решения для ребер пирамиды, (ii) однопараметрические семейства решений для граней пирамиды, (iii) примеры двухпараметрических траекторий, расположенных внутри пирамиды.

#### 2.1.3.1 Уравнения в безразмерном виде

Определяя безразмерное расстояние до кончика трещины  $\xi = x/\ell_*$ , раскрытие  $\Omega = w/w_*$  и эффективное давление  $\Pi = p/p_*$ , мы можем записать

систему уравнений в модели концевой в безразмерном виде для различных масштабирований (таблица 3). Данные уравнения приведены в таблице 4.

Масштабирование	Лубрикация (1.7), (2.2), (1.9)	Распространение (1.2) $\xi \rightarrow 0$
$mk$	$\Omega^3 \frac{d\Pi}{d\xi} = \Omega + \chi \xi^{1/2} + \zeta^3 \int_0^\xi \frac{\Pi(s)ds}{2\sqrt{\xi-s}}$	$\Omega = \xi^{1/2}$
$m\tilde{m}$	$\Omega^3 \frac{d\Pi}{d\xi} = \Omega + \xi^{1/2} + \psi^{-3} \int_0^\xi \frac{\Pi(s)ds}{2\sqrt{\xi-s}}$	$\Omega = \chi^{-1} \xi^{1/2}$
$\tilde{m}k$	$\Omega^3 \frac{d\Pi}{d\xi} = \chi^{-1}\Omega + \xi^{1/2} + \zeta^3 \int_0^\xi \frac{\Pi(s)ds}{2\sqrt{\xi-s}}$	$\Omega = \xi^{1/2}$
$\tilde{m}\tilde{o}$	$\Omega^3 \frac{d\Pi}{d\xi} = \psi^{-1}\Omega + \xi^{1/2} + \int_0^\xi \frac{\Pi(s)ds}{2\sqrt{\xi-s}}$	$\Omega = \zeta^{-1} \xi^{1/2}$
$\tilde{o}k$	$\zeta^{-3} \Omega^3 \frac{d\Pi}{d\xi} = \chi^{-1}\Omega + \xi^{1/2} + \int_0^\xi \frac{\Pi(s)ds}{2\sqrt{\xi-s}}$	$\Omega = \xi^{1/2}$
Упругость (1.3): $\Pi(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\Omega(s)}{\xi-s}$		

Таблица 4 — Нормализованные уравнения, записанные в терминах безразмерного раскрытия  $\Omega = w/w_*$  и эффективного давления  $\Pi = p/p_*$ , зависящих от безразмерного расстояния до кончика трещины  $\xi = x/\ell_*$ , для различных масштабирований  $(\ell_*, w_*, p_*)$ , приведенных в таблице 3.

Уравнения в безразмерном виде зависят от пары безразмерных параметров, которая для различных систем масштабирования может быть  $(\chi, \zeta)$  или  $(\psi, \zeta)$  (определения параметров даны формулами (2.4), (2.7), (2.9)).

Для представления общего решения задачи мы будем пользоваться масштабированием  $mk$ , в котором заложен переход от  $k$  к  $m$  узлу, описывающих ближнее и дальнее поле соответственно. В предельных случаях, когда незначителен один из механизмов диссипации энергии или один из механизмов баланса жидкости, реализуются решения для граней параметрической пирамиды  $m\tilde{m}\tilde{o}k$  и для их представления мы будем пользоваться масштабированиями, учитывающими переход между соответствующими узлами в ближнем и дальнем поле. Например, решения для граней  $m\tilde{m}k$  ( $Q' = 0$ ) и  $\tilde{m}\tilde{o}k$  ( $C' \propto \sigma'_o = 0$ ) удобно представлять при помощи масштабирования  $mk$  с  $\zeta = 0$  (траектории параметризуются числом  $\chi$ ) и с  $\chi = 0$  (траектории параметризуются числом  $\zeta$ ), соответственно. Решение для грани  $\tilde{m}\tilde{o}k$  ( $C' = \infty$ ) можно представить в масштабировании  $\tilde{m}k$  с  $\chi = \infty$  и описывать траектории числом  $\zeta$ . В случае последней грани  $m\tilde{m}\tilde{o}$  мы будем использовать масштабирование  $\tilde{m}\tilde{o}$  с  $\zeta = \infty$  и параметризовать траектории числом  $\psi = \chi/\zeta$ , т. к. решения для ребра  $m\tilde{o}$  не существует.

Численное решение задачи находится при помощи расширенной версии численного алгоритма, приведенного в статье [43]. В данном подходе, мы учли

особенности, связанные с массообменом, зависящим от давления внутри канала трещины, включая несингулярность давления вблизи фронта трещины.

### 2.1.3.2 Решения для ребер параметрического пространства

Решения для ребер  $tk$ ,  $\tilde{m}k$ ,  $\tilde{m}t$  были получены в работе [43] и приведены на рисунке 3 в соответствующих этим ребрам масштабированиях. Решение для нового ребра  $\tilde{m}\tilde{o}$  в соответствующем масштабировании изображено на рисунке 2.3. Размерный коэффициент  $B_{\tilde{o}}$ , входящий в профиль раскрытия для узла  $\tilde{o}$  ( $w = B_{\tilde{o}}x^{3/2}$ ), который реализуется в ближнем поле рассматриваемого ребра, равен  $B_{\tilde{o}} \approx 3.322 \cdot w_{\tilde{m}\tilde{o}}/\ell_{\tilde{m}\tilde{o}}^{3/2}$ . Как было упомянуто ранее, решение для определенного ребра параметрического пространства (пирамида  $t\tilde{m}\tilde{o}k$ ) соответствует переходу между узлами пирамиды, относящимися к этому ребру. Таким образом, решение, изображенное на рисунке 2.3, показывает переход из  $\tilde{o}$  узла, находящегося в ближнем поле, к  $\tilde{m}$ , реализующегося в дальнем поле.

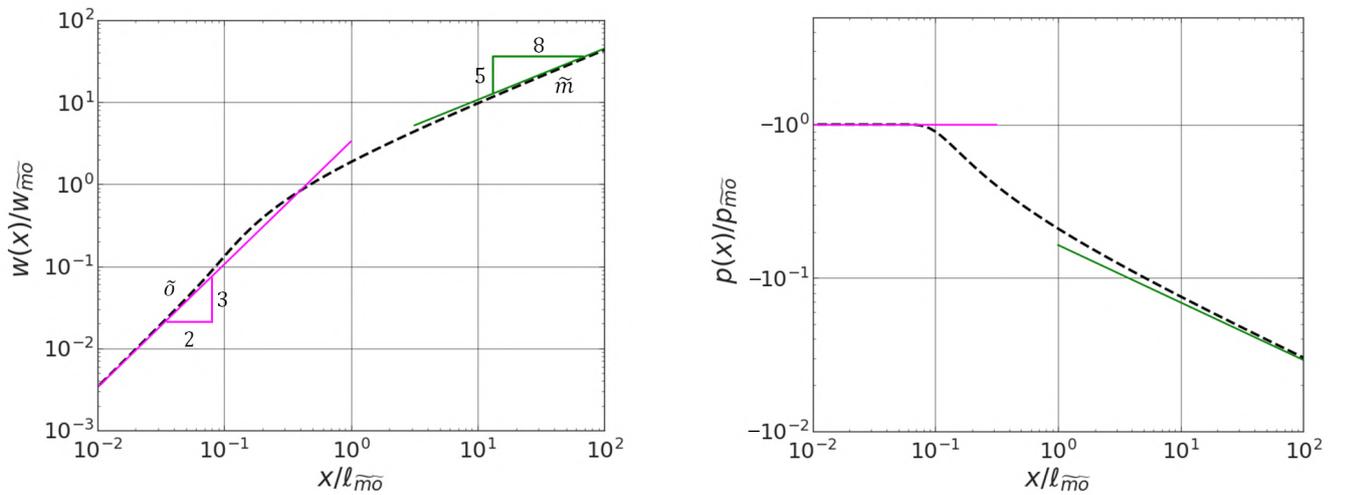


Рисунок 2.3 — Решение для ребра  $\tilde{m}\tilde{o}$ : раскрытие трещины (слева) и эффективное давление (справа) в зависимости от расстояния до кончика трещины, изображенные в надлежащем масштабировании (таблица 3). Узловые решения, выполняющиеся в ближнем и дальнем поле также изображены на графиках.

### 2.1.3.3 Решения для граней

Однопараметрические семейства решений (профили раскрытия и эффективного давления) для граней параметрического пространства (рисунок 2.2)  $m\tilde{m}k$ ,  $m\tilde{o}k$ ,  $\tilde{m}\tilde{o}k$ ,  $m\tilde{m}\tilde{o}$  изображены на рисунках 2.4-2.7 в подходящих масштабированиях (а) и в нормализованном виде, где в качестве нормировки использовалось узловое решение, реализующееся в дальнем поле (б). На графиках мы также отображаем узловые решения, реализующиеся в ближнем, дальнем и среднем (если применимо) полях рассматриваемого решения для грани.

Семейство решений для грани  $m\tilde{m}k$ , соответствующей случаю утечек по закону Картера ( $\zeta = 0$ ), изображено на рисунке 2.4 для различных значений параметра  $\chi$  от 0 до 100. Нижняя граница диапазона,  $\chi = 0$ , является ребром  $mk$  (траектория  $k \rightarrow m$ ), в то время как решение для верхней границы хорошо аппроксимируется решениями для ребер  $\tilde{m}k$  и  $m\tilde{m}$ , имеющими общую асимптоту  $\tilde{m}$ , реализующуюся в среднем поле траектории  $k \rightarrow \tilde{m} \rightarrow m$ .

На рисунке 2.5 приведено семейство решений для грани "трещина-приток"  $m\tilde{o}k$  ( $\chi = 0$ ) в масштабировании  $mk$  для различных значений безразмерного коэффициента притока  $\zeta$  от 0 до 20. Нижняя граница выбранного интервала соответствует решению для ребра  $mk$ . Из приведенных зависимостей можно увидеть, что с увеличением параметра  $\zeta$ , область доминирования асимптоты  $k$  в ближнем поле, включающая зону с фиксированным значением эффективного давления, расширяется в направлении от кончика трещины; в то же время переход к асимптоте  $m$  в дальнем поле становится все более резким. При больших значениях  $\zeta$ , эффективное давление сначала уменьшается при отдалении от кончика трещины, сигнализируя доминирование притока к трещине и обратное направление течения жидкости в канале, проходит минимум и в конечном итоге обращается в 0, когда решение стремится к асимптоте  $m$  в дальнем поле. Минимум давления показывает наличие эффективного защемления трещины в области между кончиком и данной точкой. Иными словами, в этой зоне трещина эффективно закрыта, и длина "закрытой" области растет с увеличением  $\zeta$ . Таким образом, эффективное положение фронта трещины совпадает с пространственным расположением минимума давления. Отсутствие реализации промежуточной асимптоты  $\tilde{o}$  при увеличении  $\zeta$  подтверждает предыдущие рассуждения о не существовании решения для ребра  $m\tilde{o}$  в пределе  $\zeta \gg 1$ .

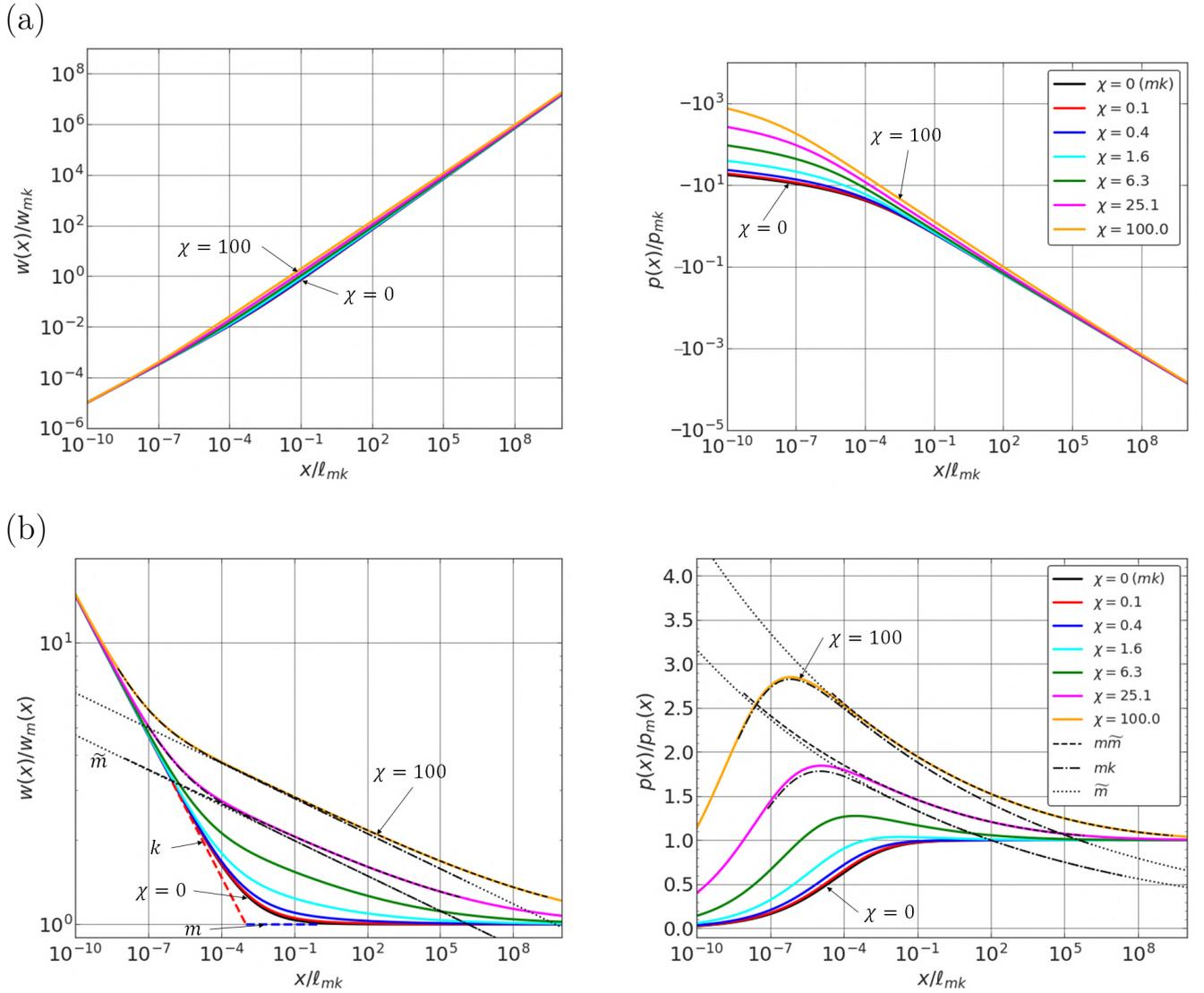


Рисунок 2.4 — Решение для грани "трещина-утечки"  $m\tilde{m}k$  ( $\zeta = 0$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании  $mk$  для различных значений безразмерного коэффициента утечек  $\chi$ . Решение представлено в явном виде (а) и в нормированной при помощи  $t$  асимптотики форме (б). Решения для ребер  $\tilde{m}k$ ,  $m\tilde{m}$ , а также для узлов  $k$ ,  $m$ ,  $\tilde{m}$  представлены на графиках (б).

Семейство решений для грани "массообмен"  $\tilde{m}\tilde{o}k$  ( $\chi = \infty$ ) изображено на рисунке 2.6 в масштабировании  $\tilde{m}k$  для различных значений коэффициента притока  $\zeta$  в диапазоне от 0 до 10. Нижняя граница диапазона соответствует решению для ребра  $mk$ . При увеличении числа  $\zeta$  мы получаем решения качественно похожие на результат для грани  $\tilde{m}\tilde{o}k$  (рисунок 2.5), т. е. увеличение зоны доминирования асимптоты  $k$  в ближнем поле, включающей область с постоянным эффективным давлением. Одним из важных отличий является монотонный рост эффективного давления вдоль всей полубесконечной трещины. При больших значениях коэффициента притока ( $\zeta = 10$ ) мы можем наблюдать

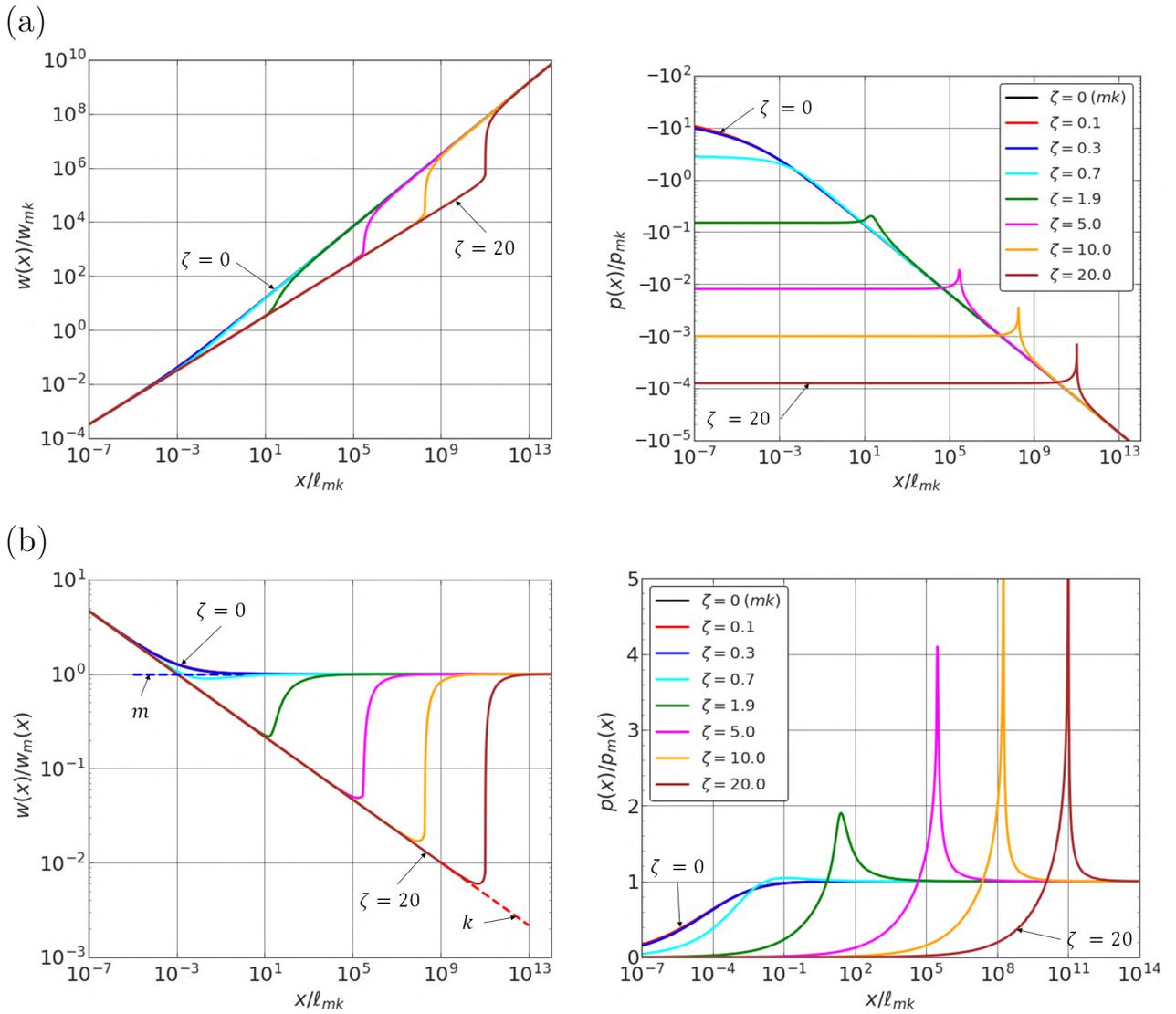


Рисунок 2.5 — Решение для грани "трещина-приток"  $m\tilde{o}k$  ( $\chi = 0$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании  $mk$  для различных значений безразмерного коэффициента притока  $\zeta$ : решения (а) в явном виде и (б) в нормированной при помощи  $m$  асимптотики форме (б). Решения для узлов  $k$  и  $m$  нанесены на графиках (б).

реализацию узлового решения  $\tilde{o}$  в среднем поле, сопровождающуюся сходимостью к двум решениям для ребер  $\tilde{o}k$ ,  $\tilde{m}\tilde{o}$  (траектория  $k \rightarrow \tilde{o} \rightarrow \tilde{m}$ ).

На рисунке 2.7 мы представили семейство решений для грани "вязкость"  $m\tilde{m}\tilde{o}$  ( $\chi = \infty$ ) в масштабировании  $\tilde{m}\tilde{o}$  для различных значений параметра  $\psi = \chi/\zeta$ , лежащих в диапазоне от 0.5 до 100. При малых значениях  $\psi$  решение "стремится" к несуществующему пределу в виде решения для ребра  $\tilde{m}\tilde{o}$ , которое, как обсуждалось ранее, характеризуется наличием минимума у профиля давления и точной эффективного закрытия трещины. При больших  $\psi$  решение стремится к структуре, состоящей из двух решений для ребер  $\tilde{m}\tilde{o}$  и  $m\tilde{m}$  (траектория  $\tilde{o} \rightarrow \tilde{m} \rightarrow m$ ).

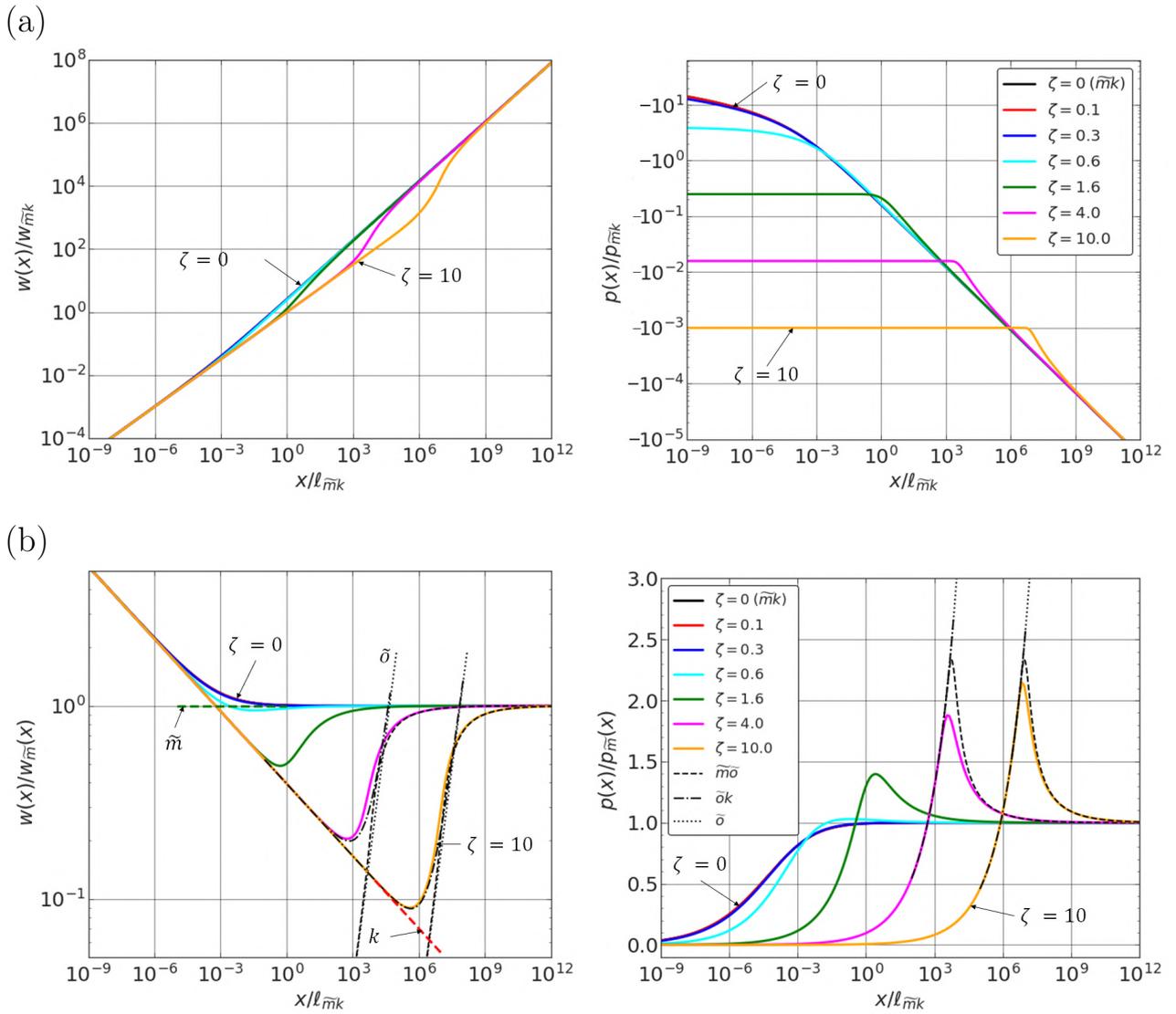


Рисунок 2.6 — Решение для грани "массообмен"  $\tilde{m}\tilde{o}k$  ( $\chi = \infty$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании  $\tilde{m}k$  для различных значений безразмерного коэффициента притока  $\zeta$ : решения (а) в явном виде и (б) в нормированной при помощи  $\tilde{m}$  асимптотики форме (б). Решения для ребер  $\tilde{m}\tilde{o}$ ,  $\tilde{o}k$  и узлов  $k$ ,  $\tilde{m}$  и  $\tilde{o}$  нанесены на графиках (б).

### 2.1.3.4 Примеры общего решения задачи (траектории внутри параметрического пространства)

Для демонстрации траекторий решения задачи внутри параметрической пирамиды (т. е. когда  $0 < \chi$  и  $\zeta < \infty$ ) мы выберем несколько значений безразмерного коэффициента утечек:  $\chi = 0.1, 1$  и  $10$ . Значения безразмерного коэффициента притока  $\zeta$  выбираются таким образом, чтобы отношение  $\chi/\zeta^3$  (соотношение интенсивностей утечек и притока) было равно 1; таким образом,  $\zeta = \chi^{1/3} = 0.46, 1, 2.15$ . Профили раскрытия и эффективного давления для вы-

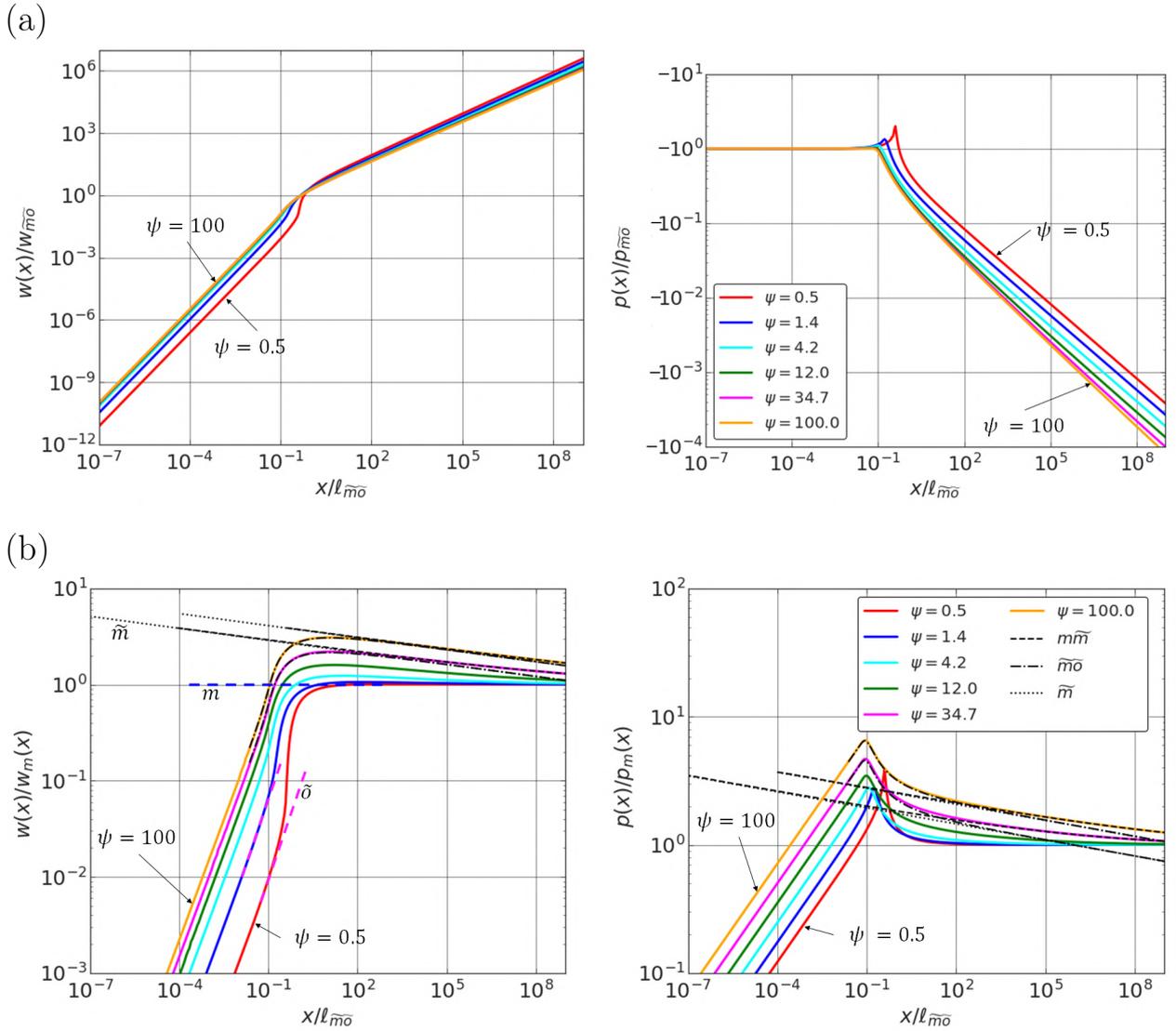


Рисунок 2.7 — Решение для грани "вязкость"  $m\tilde{m}\tilde{d}$  ( $\chi = \infty$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании  $m\tilde{d}$  для различных значений безразмерного коэффициента притока  $\psi = \chi/\zeta$ : решения (a) в явном виде и (b) в нормированной при помощи  $m$  асимптотики форме (b). Решения для ребер  $\tilde{m}\tilde{d}$ ,  $m\tilde{m}$  и узлов  $\tilde{d}$ ,  $m$  и  $\tilde{m}$  нанесены на графиках (b).

шеуказанных случаев изображены в  $mk$  масштабировании на рисунке 2.8 и в форме, полученной путем нормирования при помощи  $m$  асимптоты, на рисунке 2.9. Для сравнения на графиках приведены решения, соответствующие случаю утечек по закону Картера ( $\zeta = 0$ ). На рисунке 2.9 также изображены асимптотические разложения для  $k$  узла в ближнем поле,  $m$  узла в дальнем поле и  $\tilde{m}$  узла в среднем поле (уравнения для разложений выписаны в работе [67] в разделе 3.3). Разложения необходимы, чтобы отметить области, в которых общее решение хорошо аппроксимируется аналитическими формулами.

Важной отличительной особенностью полученного решения задачи о кончике трещины с утечками, зависящими от давления, по сравнению со случаем

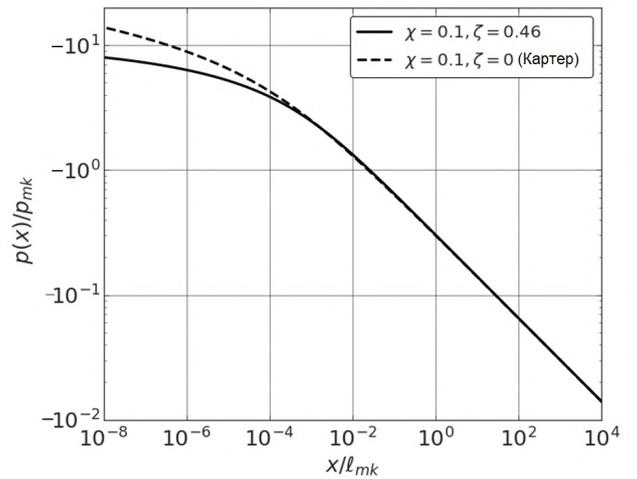
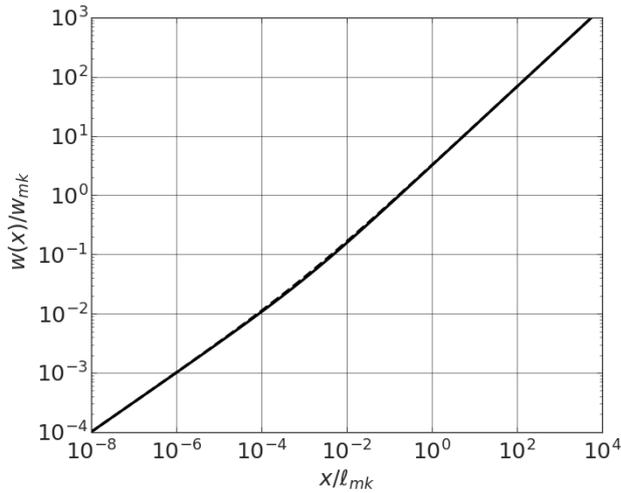
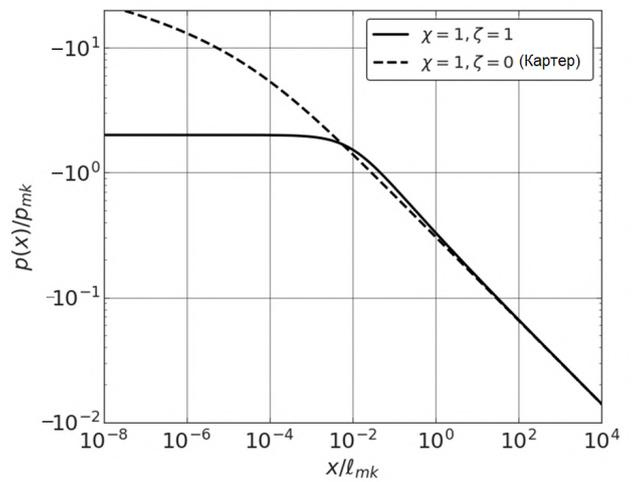
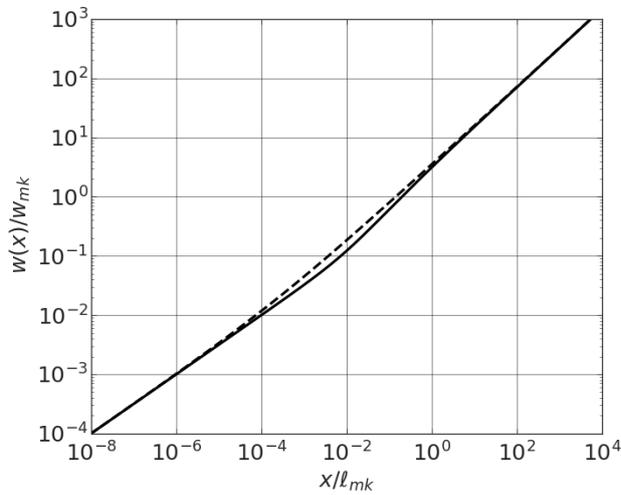
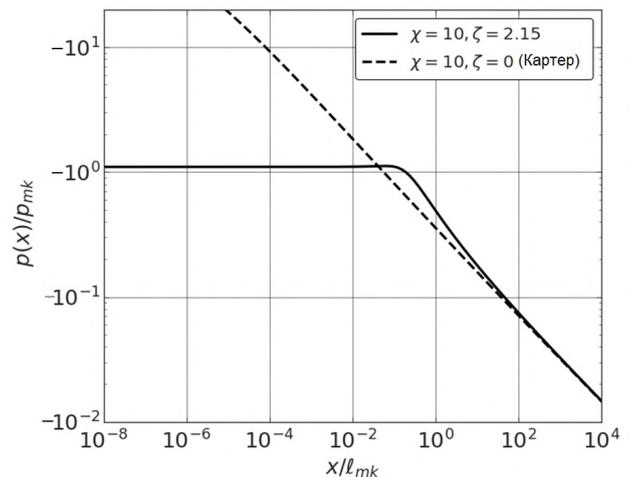
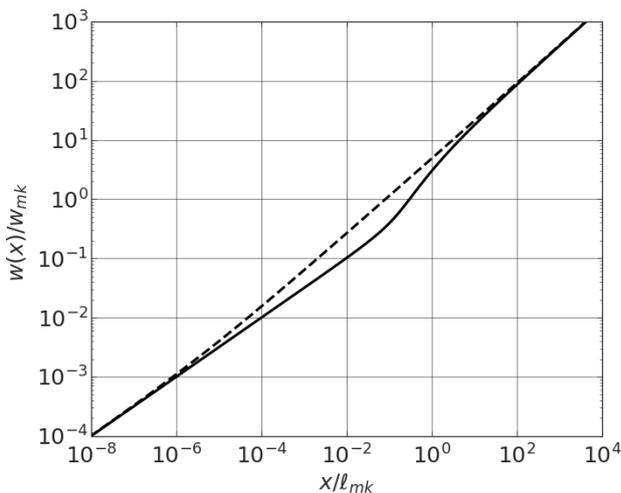
а)  $\chi = 0.1, \zeta = 0.46$ б)  $\chi = 1, \zeta = 1$ в)  $\chi = 10, \zeta = 2.15$ 

Рисунок 2.8 — Профили раскрытия (слева) и эффективного давления (справа) изображены в  $mk$  масштабировании для фиксированного отношения  $\chi/\zeta^3 = 1$  и различных значений  $\chi$ : (а)  $\chi = 0.1, \zeta = 0.46$ , (б)  $\chi = 1, \zeta = 1$ , (с)  $\chi = 10, \zeta = 2.15$ . Соответствующие решения для случая утечек по Картеру ( $\zeta = 0$ ) изображены черной пунктирной линией в целях сравнения.

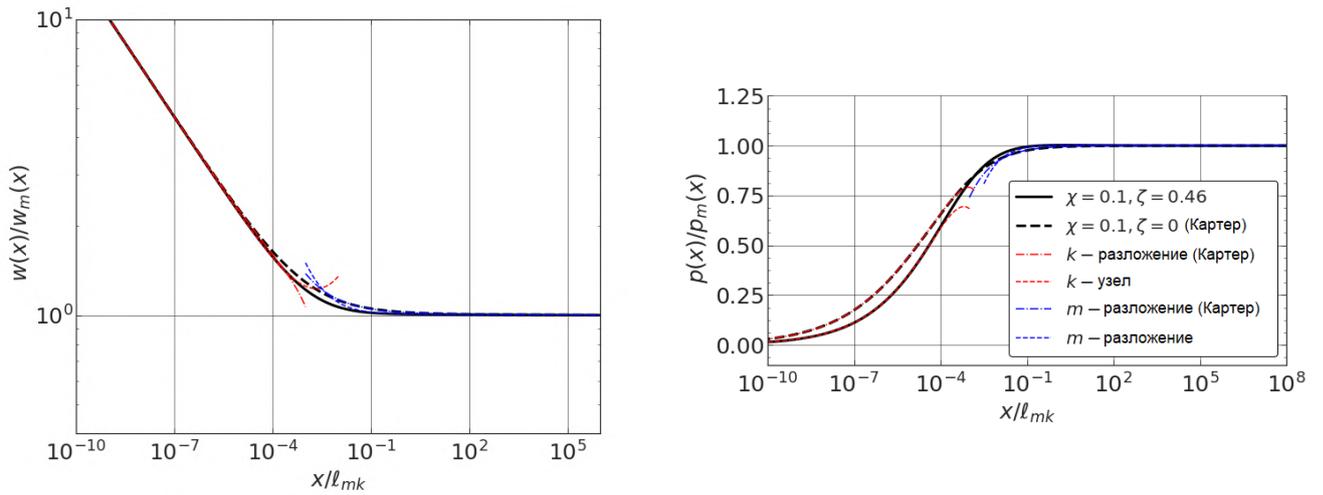
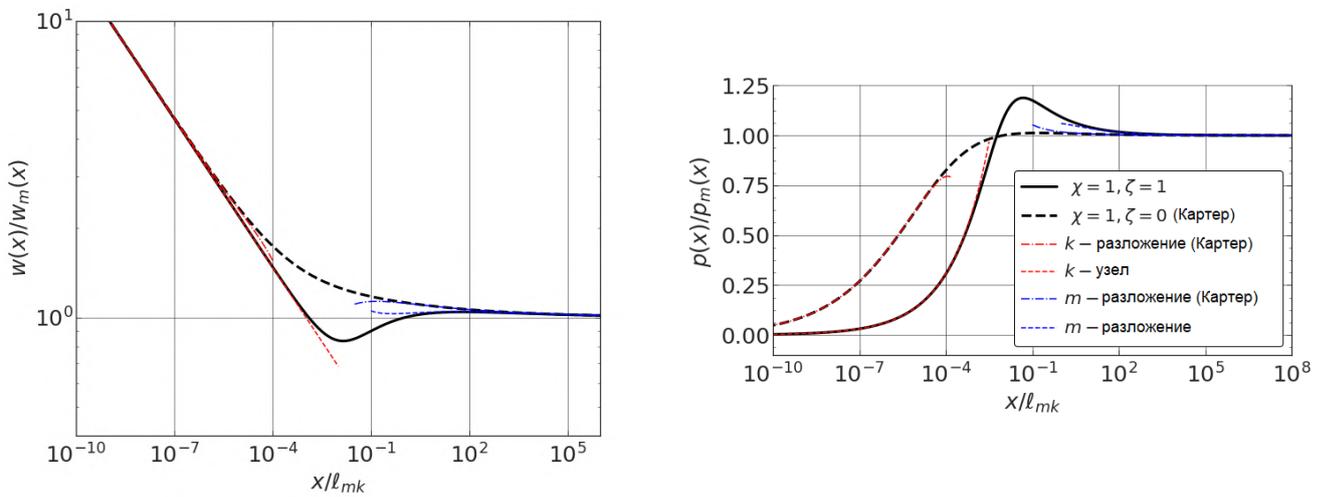
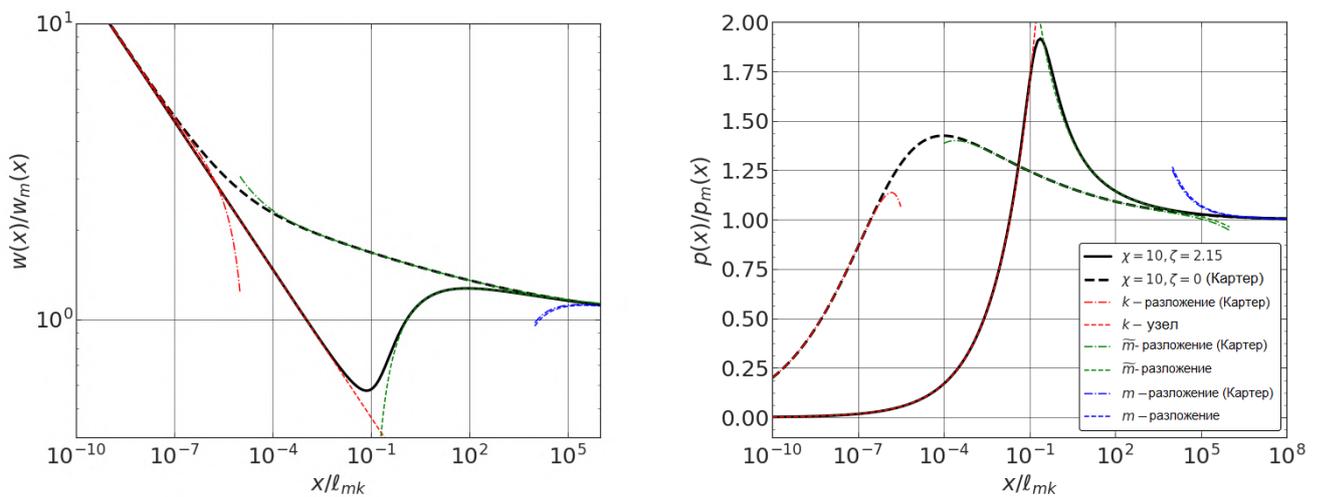
а)  $\chi = 0.1, \zeta = 0.46$ б)  $\chi = 1, \zeta = 1$ в)  $\chi = 10, \zeta = 2.15$ 

Рисунок 2.9 — Профили раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), изображенные на рисунке 2.8, нормированы при помощи асимптотики  $m$ , реализующейся в дальнем поле. Асимптотические разложения вблизи узловых решений в ближнем, среднем ( $\chi = 10$ ) и дальнем поле изображены цветными пунктирными линиями

утечек по Картеру является не сингулярное значение давления в кончике, которое в  $mk$  масштабировании равно  $p(0)/p_{mk} = -(\chi + 1)/\zeta^3$  (таблица 2). Из рисунков 2.8а, 2.9а можно увидеть, что отличие в профилях раскрытия и давления между сравниваемыми решениями невелико для  $\chi = 0.1$ , но для  $\chi = 1$  (рисунки 2.8б, 2.9б) и  $\chi = 10$  становится значительным (рисунки 2.8в, 2.9в).

Область применимости асимптотического разложения для  $m$  узла сужается с увеличением  $\chi$ ; однако, зона, в которой разложение для  $k$  узла аппроксимирует численное решение расширяется, причем ее длина значительно больше чем в случае утечек по Картеру. Ни  $\tilde{m}$ , ни  $\tilde{o}$  асимптоты не реализуются в среднем поле для выбранных диапазонов  $\chi \leq 10$  и  $\zeta \leq 2.15$ , т. к. условия их возникновения  $\chi, \psi = \chi/\zeta \gg 1$  and  $\chi, \zeta \gg 1$ , как следует из уравнений (2.8), (2.10). Однако, асимптотическое разложение для  $\tilde{m}$  узла хорошо аппроксимирует численное решение в среднем поле в случае  $\chi = 10$  (рисунок 2.9с). В случае больших значений безразмерного коэффициента утечек и притока (рисунок 2.10),  $\chi = 100, \zeta = 4.64$  и  $\chi = 1000, \zeta = 10$ , мы обнаружили, что общее решение аппроксимируется (i) решением для грани  $\tilde{m}\tilde{o}k$  и (ii) решением для ребра  $m\tilde{m}$ , которые состыкуются при помощи общей асимптоты  $\tilde{m}$ . Таким образом, приведенные решения близки к траектории  $k \rightarrow (\tilde{o}) \rightarrow (\tilde{m}) \rightarrow m$  (отмечена зеленым цветом на рисунке 2.2), где скобки указывают на реализацию соответствующих узловых решений в среднем поле общего численного решения.

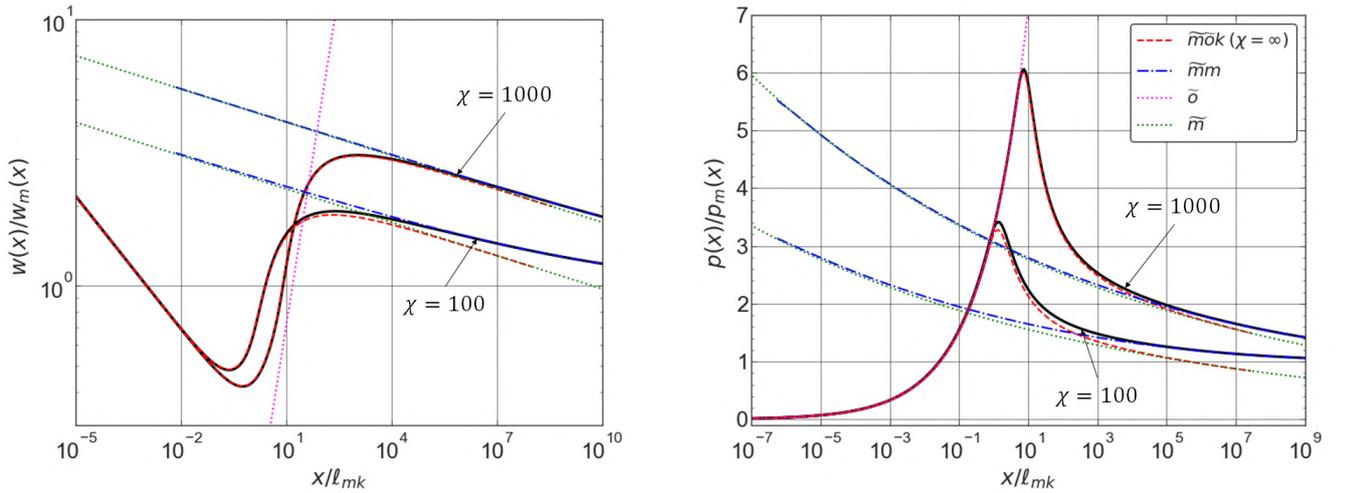


Рисунок 2.10 — Профили раскрытия и давления, нормализованные узловым решением  $m$  для следующих случаев:  $\chi = 100, \zeta = 4.64$  и  $\chi = 1000, \zeta = 10$ .

Для демонстрации зависимости решения задачи от безразмерного числа притока  $\zeta$ , мы построили график 2.11, на котором привели зависимости раскрытия и давления для  $\chi = 100$  и различных значений  $\zeta$ . Приведенные кривые

подтверждают, что с увеличением  $\zeta$  наблюдается все более значительное отклонение от решения для случая утечек по Картеру, проявляющееся в (i) поведении параметров трещины в ближнем поле ( $\sim \sqrt{x}$  зависимость раскрытия от расстояния до кончика и постоянное давление) и (ii) уменьшении давления и раскрытия в среднем поле.

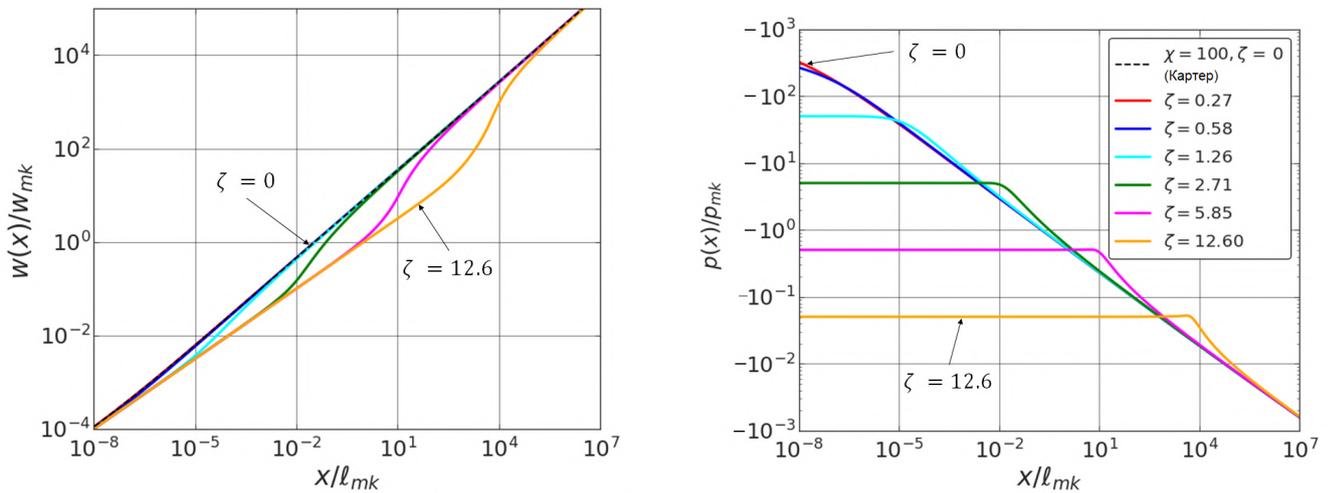


Рисунок 2.11 — Профили раскрытия и давления в  $mk$  масштабировании для  $\chi = 100$  и набора значений  $\zeta$ :  $\zeta = 0, 0.27, 0.58, 1.26, 2.71, 5.85, 12.6$ . Пунктирной линией изображено решение для случая утечек по Картеру.

## 2.1.4 Обсуждение решения задачи

### 2.1.4.1 Репрезентативные значения определяющих параметров задачи

Перед обсуждением полученного решения задачи, мы рассмотрим типичные значения/диапазоны значений размерных параметров модели, относящиеся к процедуре гидроразрыва пласта на нефтяных месторождениях, и оценим диапазоны значений безразмерных коэффициентов утечек  $\chi$  и притока  $\zeta$ . Мы выделим два типа нефтенасыщенных резервуаров: низкопроницаемый коллектор и песчаник, которые будут определять верхнюю и нижнюю границу диапазонов фильтрационно-емкостных свойств, в то время как механические

свойства пород будут схожими. Для рассмотрения мы выбрали следующие диапазоны:

- геомеханические свойства и напряжение – модуль плоской деформации  $E' = 30$  ГПа, полная сжимаемость горной породы и жидкости  $c_t = 1/$  ГПа (случай воды); трещиностойкость  $K_{Ic}$  варьируется между 0.3 и 1 МПа $\cdot\sqrt{м}$  [83], обжимающее напряжение  $\sigma_o = 30$  МПа;
- свойства коллектора – проницаемость варьируется в диапазоне  $k = 0.1 \div 100$  мД [84], диапазон пористостей  $\phi = 5 \div 25\%$  [85; 86], отношение начального порового давления и обжимающего напряжения  $p_o/\sigma_o = 0.95 \div 0.4$  [87] (границы соответствуют низкопроницаемому резервуару и песчанику; большее значение относится к случаю избыточного давления, меньшее – гидростатическое давление);
- свойства жидкости:  $\mu = 1$  сПз (вода), 5 сПз (скользкая вода);
- скорость распространения трещины:  $V$  варьируется между 0.1 и 1 м/с.

На рисунке 2.12 изображен многоугольник в координатной плоскости  $(\chi, \chi/\zeta^3)$ , который был получен путем варьирования размерных параметров независимо друг от друга в указанных выше диапазонах. На каждом ребре многоугольника один или два размерных параметра варьируются, а остальные зафиксированы, причем их значение соответствует либо нижней, либо верхней границе диапазона (в случае его наличия). Тенденция изменения параметров  $(\chi, \chi/\zeta^3)$  с увеличением определенного размерного параметра указана стрелкой.

В завершении мы рассмотрим четыре частных случая, соответствующих резервуару с избыточным давлением / с гидростатическим давлением, а также ГРП на основе скользкой воды и чистой воды. Трещиностойкость была взята равной  $K_{Ic} = 1$  МПа $\cdot\sqrt{м}$ , а скорость распространения трещины  $V = 1$  м/с. Полученные значения безразмерных параметров  $(\chi, \zeta, \chi/\zeta^3)$  для упомянутых случаев выписаны в таблице 5 и отмечены на рисунке 2.12 различными символами.

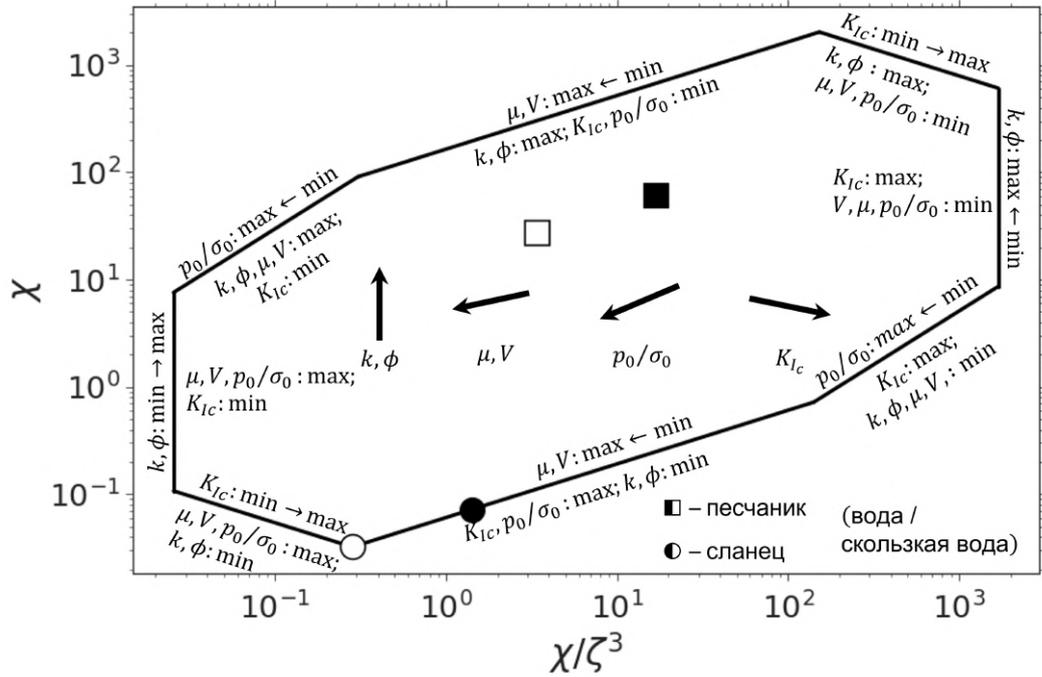


Рисунок 2.12 — Параметрический многоугольник в координатах  $\chi$ ,  $\chi/\zeta^3$ , получен варьированием размерных параметров в диапазонах, соответствующих процедуре гидроразрыва в целях увеличения нефтеотдачи. Символами обозначены частные случаи (песчаник vs низкопроницаемый коллектор, ГРП на основе скользкой воды vs водный ГРП (таблица 5)).

Параметр	Песчаник		Низкопроницаемый коллектор	
	Вода	Скользкая вода	Вода	Скользкая вода
$\chi$	61	27.3	0.07	0.03
$\zeta$	1.8	4	0.03	0.06
$\chi/\zeta^3$	17	3.4	1.4	0.3
$\lambda/\ell_{mk}$	$6 \cdot 10^{-5}$	0.01	0.02	2.2
$x_C/\ell_{mk}$	0.5	32	174	$2 \cdot 10^4$

Таблица 5 — Значения безразмерных параметров  $\chi$ ,  $\zeta$ ,  $\chi/\zeta^3$  для песчаника/низкопроницаемого коллектора и ГРП на основе воды/скользкой воды. Значения длины зоны циркуляции  $\lambda$  и границы применимости решения с утечками по Картеру ( $x > x_C$ ), нормализованные на характерный масштаб длины  $mk$ , который равен  $\ell_{mk} \approx 9$  м для случая водного ГРП и 0.4 м ГРП на основе скользкой воды.

#### 2.1.4.2 Анализ границ применимости предельных решений и важности механизмов описания массообмена

В данном разделе мы рассмотрим границы применимости асимптотических (узловых) решений внутри параметрического пространства задачи о кончике трещины. Граница асимптотического решения может быть определена

как расстояние до кончика трещины, на котором раскрытие трещины, наблюдающееся в общем решении задачи, отличается от рассматриваемого узлового решения на 5%. За  $x_0$  мы обозначим верхнюю границу области применимости  $k$  асимптотики,  $0 < x < x_0$ , а за  $x_\infty$  – нижнюю границу области применимости узлового решения  $m$ ,  $x_\infty < x < \infty$ . Аналогичным образом, можно определить границы областей, относящихся к аппроксимации общего решения узловыми решениями, наблюдающимися в среднем поле:  $\tilde{m} - \tilde{x}_\infty < x < \tilde{x}_0$  и  $\tilde{o} - \tilde{x}_\infty^o < x < \tilde{x}_0^o$ .

Чтобы охарактеризовать влияние массообмена на решение задачи о кончике трещины, мы определим границу  $x_S$  для области  $x_S < x < \infty$ , вдоль которой скорость кумулятивного обмена жидкостью между трещиной и пластом  $q_\perp$  составляет 5% от объема жидкости, находящегося в трещине  $wV$ ,  $q_\perp(x_S) = 0.05 \cdot w(x_S)V$ .

В противоположной области,  $0 < x < x_S$ , обменом жидкостью между трещиной и пластом пренебречь нельзя, и относительная важность слагаемых, отвечающих за утечки по Картеру и приток, зависящий от давления в трещине, входящих в  $q_\perp$ , может быть оценена при помощи следующей функции, зависящей от расстояния до кончика трещины:

$$\text{PDI}(x) = -\frac{1}{\sigma'_o \sqrt{x}} \int_0^x \frac{p(s)}{2\sqrt{x-s}} ds,$$

которую мы будем именовать как индекс зависимости массообмена от давления. Данная функция может быть использована для оценки длины зоны циркуляции  $\lambda$ , которая примыкает к кончику трещины,  $0 < x < \lambda$  (рисунок 2.1), так как

$$\text{PDI}(\lambda) = 1.$$

Данную функцию можно также применить для определения расстояния  $x_C$  для нижней границы зоны применимости утечек по закону Картера,  $x_C < x < \infty$ , а именно, как расстояния до кончика трещины, на котором поправка, зависящая от давления, составляет 5% от скорости кумулятивных утечек по Картеру, т. е.

$$\text{PDI}(x_C) = 0.05.$$

На рисунке 2.13 изображены карты режимов (слева) и различные области, связанные с массообменом (справа), в координатах безразмерное расстояние до кончика трещины  $(x/\ell_{mk})$  – безразмерный коэффициент утечек ( $\chi$ ) для четырех значений отношения коэффициентов утечек и притока:  $\chi/\zeta^3 = 0.1, 1, 10$ ,

1000. Для каждого  $\chi/\zeta^3$ , диапазон значений  $\chi$ , соответствующий типовым промысловым случаям (параметрическое пространство на рисунке 2.12) отмечено интервалом на оси  $\chi$ .

Из рисунка 2.13 (слева), можно увидеть, что область применимости  $k$  узла, наблюдающегося в ближнем поле, расширяется с увеличением интенсивности притока, соответствующего уменьшению параметра  $\chi/\zeta^3$  от 1000 (d) до 0.1 (a), на протяжении большей части рассматриваемого диапазона значений параметра  $\chi$  (вертикальная ось на рисунке 2.13). В свою очередь, размер области применимости  $m$  асимптотики ведет себя немонотонно, а именно, расширяется при переходе от  $\chi/\zeta^3 = 10$  (c) к 1 (b) и сужается при дальнейшем уменьшении параметра  $\chi/\zeta^3$  до 0.1 (a). Расширение зон применимости узлов  $k$  и  $m$  с уменьшением параметра  $\chi/\zeta^3$  связано с уменьшением эффектов утечек и исчезновением промежуточного узлового решения  $\tilde{m}$ . Сжатие области применимости  $m$  решения может быть вызвано усилением эффектов, связанных с утечками, зависящими от давления ( $\chi/\zeta^3 = 0.1$ , рисунок 2.13(a)). Асимптота  $\tilde{m}$  появляется только в случае  $\chi/\zeta^3 = 1000$ , когда эффекты зависимости массообмена от давления в трещине малы и утечки велики ( $\chi > 50$ ). Асимптота "вязкость-приток  $\tilde{o}$ , не аппроксимирует решение ни в одном из рассматриваемых случаев, т. к. условия ее реализации,  $\chi, \zeta \gg 1$ , не выполнены. Далее перейдем к рассмотрению влияния эффектов от массообмена на решение задачи (карты с индексом PDI на рисунке 2.13 (справа)). Граница зоны полубесконечной трещины, вдоль которой массообменом можно пренебречь ( $x > x_S$ ), сдвигается в направлении от фронта как при увеличении коэффициента утечек  $\chi$  при фиксированном отношении  $\chi/\zeta^3$ , так и при увеличении интенсивности притока (уменьшении параметра  $\chi/\zeta^3$ ). При увеличении интенсивности утечек можно также заметить общее увеличение индекса PDI, увеличение длины зоны циркуляции поровой жидкости  $\lambda$  и сужение области применимости утечек по закону Картера ( $x > x_C$ ).

Важность эффектов, связанных с зависимостью массообмена от давления в трещине, проявляющихся в процессе роста конечной трещины гидроразрыва, можно оценить путем сравнения положения границы  $x_C$  с характерным масштабом длины  $\ell$ , относящимся к конечной трещине (например, в случае радиальной трещины характерной длиной является радиус, а в случае трещины плоской деформации – полудлина). Если  $x_C \ll \ell$ , то зависимость массообмена от давления в трещине не важна на масштабе конечной трещины, так как данные эффекты проявляются в малой области, примыкающей к кончику, которая изолирована

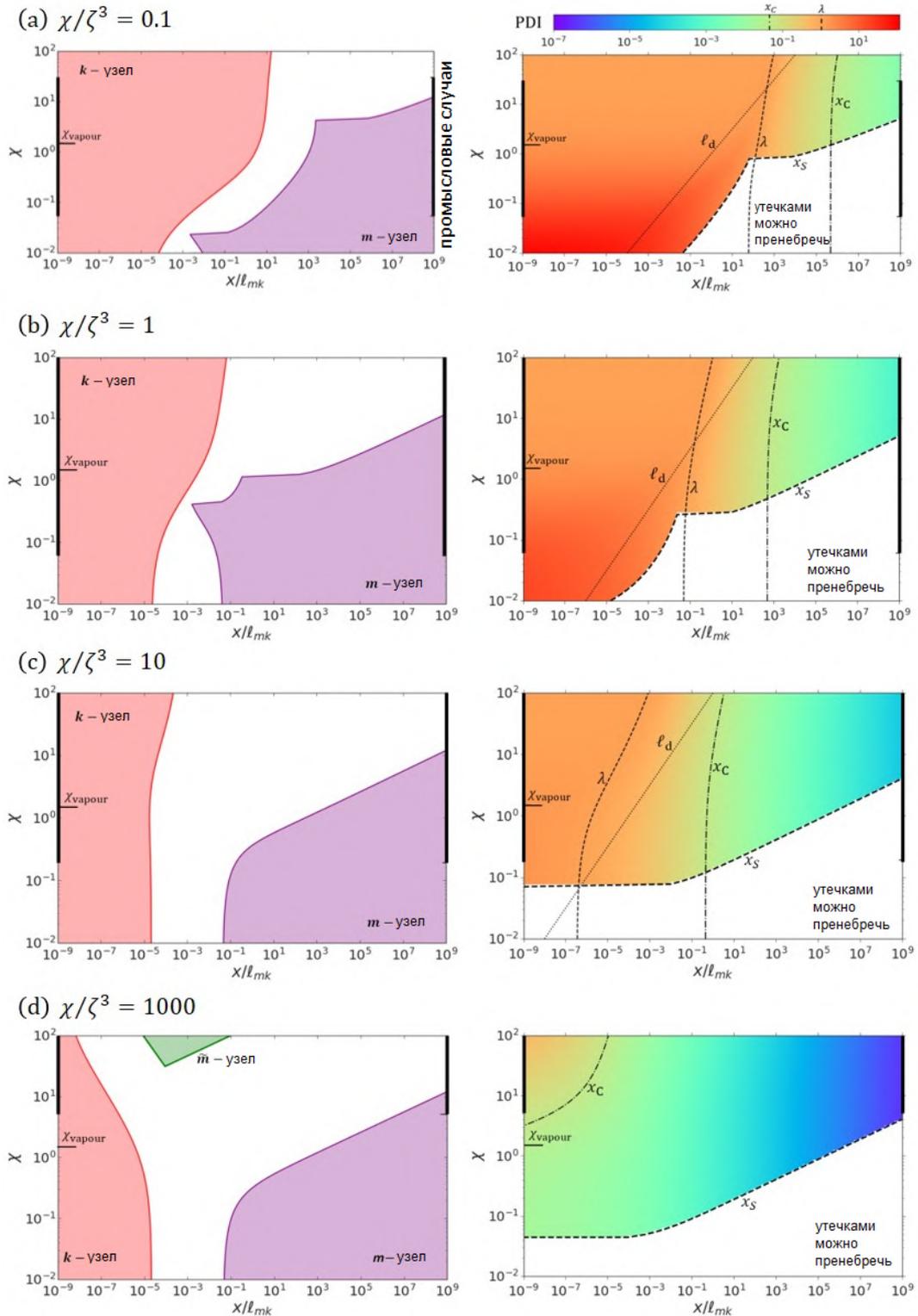


Рисунок 2.13 — Карты режимов (слева) с границами применимости предельных решений и карты с индексом зависимости массообмена от давления (справа), наряду с характерными масштабами длины ( $\lambda$ ,  $\ell_d$ ,  $x_c$ ,  $x_s$ ), в координатах безразмерное расстояние до кончика трещины  $x/\ell_{mk}$  – безразмерный коэффициент утечек  $\chi$  для фиксированных значений отношения  $\chi/\zeta^3$ :  $\chi/\zeta^3 = 0.1$  (a), 1 (b), 10 (c), и 1000 (d). На оси для  $\chi$  отмечен диапазон, соответствующий типичным промысловым случаям.

зоной доминирования утечек по закону Картера от остальной части трещины. В данном случае модель утечек по закону Картера хорошо аппроксимирует массообмен между трещиной и пластом. В обратном случае, когда  $x_C$  сравним с  $\ell$ , зависимость массообмена от давления оказывает влияние на распространение конечной трещины и замена ее моделью Картера некорректна. Так как граница применимости закона Картера  $x_C = \ell_{mk} \xi_C(\chi, \zeta)$  является динамической длиной (зависит от скорости распространения конечной трещины, которая входит в  $\ell_{mk}$ , а также безразмерные определяющие параметры), режим массообмена (зависимость от давления vs утечки по закону Картера) может меняться в процессе распространения конечной трещины, так как связан с отношением  $x_C/\ell$ .

Далее мы рассмотрим частный случай распространения полубесконечной трещины для значений определяющих параметров  $\chi = \zeta = 1$ , который, согласно рисунку 2.12 и таблице 5, соответствует трещине, заполненной скользкой водой, движущейся в резервуаре со средними фильтрационными свойствами (геометрическое среднее между низкопроницаемой породой и песчаником в таблице 5). Из рисунка 2.13b можно увидеть, что  $\lambda \approx \ell_{mk}$  и  $x_C \approx 3 \times 10^3 \ell_{mk}$ , в то время как масштаб длины  $\ell_{mk}$  варьируется в диапазоне от 0.4 до 40 метров с учетом рассматриваемого диапазона скоростей распространения  $V$  от 0.1 до 1 м/с ( $K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \times \text{м}^{1/2}$  и  $E' = 30 \text{ ГПа}$ ). Таким образом, в рассматриваемом случае, длина зоны циркуляции имеет метрический масштаб, а эффекты, связанные с зависимостью массообмена от давления, важны всегда, если только не рассматриваются нереалистичные километровые трещины гидроразрыва ( $\ell > x_C$ ). Если мы рассмотрим предельные случаи низкопроницаемой горной породы или песчаника (таблица 5), то придем к аналогичному выводу, что аппроксимация массообмена между трещиной и пластом законом Картера не является корректной (применимость данного закона требует нереалистичной по длине трещины) для случая гидроразрыва на основе скользкой воды. Однако, в случае низкопроницаемого резервуара, трещина стремится распространяться в режиме с пренебрежительно малым массообменом ( $\chi < 0.1$ ).

### 2.1.4.3 Ограничения модели

**1D диффузия порового давления** В разработанной модели кончика трещины массообмен между трещиной и окружающим проницаемым резервуаром описывается одномерным механизмом. Как указано в работе [45], применение 1D аппроксимации корректно, когда возмущение порового давления, возникающее из-за трещины гидроразрыва, содержится в пограничном слое, толщина которого мала по сравнению с характерным масштабом длины, на котором происходит изменение давления жидкости в канале трещины вдоль участка, где важен массообмен. В качестве последнего масштаба можно взять длину зоны циркуляции поровой жидкости  $\lambda$ , в то время как толщину пограничного слоя можно оценить по формуле  $\sqrt{ct}$ , где промежуток времени равен  $t = \lambda/V$  (т. е. время, в течение которого трещина преодолевает расстояние равное длине зоны циркуляции). Таким образом, критерий применимости одномерной аппроксимации процесса массообмена можно записать как

$$\lambda \gg \ell_d, \quad \ell_d = c/V$$

Для дальнейших оценок нам необходимо представить размер зоны диффузии порового давления в масштабировании  $mk$ :  $\ell_d/\ell_{mk} = cE'^4M'^2V/K'^6 = (\pi/16)(SE')^{-2}\zeta^6$ . В данной формуле произведение  $E'S = E'\varphi c_t$  можно считать слабо зависящим от типа горной породы, и согласно численным значениям, указанным в таблице 5, оно равно  $E'S \sim 3$ , что дает  $\ell_d/\ell_{mk} \sim 0.01\zeta^6$ . Данная оценка изображена на картах справа на рисунке 2.13, что дает возможность сравнить  $\ell_d/\ell_{mk}$  с длиной зоны циркуляции в безразмерном виде  $\lambda/\ell_{mk}$ . Из построенных карт можно увидеть, что критерий одномерной аппроксимации процесса обмена жидкостью выполнен для всех значений  $\chi$  в случае  $\chi/\zeta^3 = 0.1$  (рисунок 2.13(a)), при  $\chi \lesssim 0.1$  в случае  $\chi/\zeta^3 = 1$  (рисунок 2.13(b)) и при  $\chi \lesssim 5$  в случае  $\chi/\zeta^3 = 10$  (рисунок 2.13(c)). Иными словами, 1D аппроксимация корректна при больших значениях  $\zeta$  (малые  $\chi/\zeta^3$ ), т. е. когда эффекты зависимости массообмена от давления важны. Также необходимо отметить, что с увеличением  $\zeta$  длина зоны циркуляции  $\lambda$  увеличивается.

**Одинаковые свойства жидкости гидроразрыва и поровой жидкости**  
Используемое предположение об идентичности свойств поровой жидкости и жидкости гидроразрыва ограничивает практическое применение приведенного анализа (при параметрическом исследовании мы сосредоточились на случае гидроразрыва под действием скользкой воды). При традиционном гидроразрыве обычно используются полимерные гели, у которых вязкость на несколько порядков выше, чем у поровой жидкости. Более того, при утечках, твердые частицы и полимеры задерживаются на поверхности трещины, образуя низкопроницаемую корку. В работе [60] представлена модель трещины гидроразрыва, учитывающая формирование корки, а также включающая предположение, что фильтрат жидкости гидроразрыва (водная основа, очищенная от полимеров и твердых частиц) проходит пласт и вытесняет поровую жидкость. В результате, при описании процессов, происходящих в пласте, используется предположение идентичности свойств вытесняемой и вытесняющей жидкостей, т. е. поровой жидкости и фильтрата гидроразрывной жидкости.

**Потенциальное испарение поровой жидкости вблизи фронта трещины**  
Вблизи фронта давление жидкости внутри канала трещины меньше, чем начальное поровое давление  $p_o$ . Ранее мы определили, что давление в кончике равно

$$p_f(0) = p_o - \Delta p_{\text{und}}, \quad \Delta p_{\text{und}} = \frac{K'V^{1/2}}{E'Q'} = \frac{\sigma'_o}{\chi},$$

Жидкость испаряется, формируя лаг, который примыкает к фронту трещины, когда давление становится ниже давления насыщенного пара. Так как последнее мало по сравнению с  $p_o$ , то мы можем принять его равным 0 и записать условие образования лага с насыщенными парами в виде  $p_o < \Delta p_{\text{und}}$ , которое можно записать для параметра  $\chi$ :

$$\text{формирование лага: } \chi < \chi_{\text{vapour}} = \frac{\sigma'_o}{p_o} = \frac{\sigma_o}{p_o} - 1.$$

Пороговое значение  $\chi$  равно 1.5 для случая резервуара под гидростатическим давлением (изображено на картах на рисунке 2.13) и 0.05 для резервуара с избыточным давлением. Формирование лага с парами поровой жидкости не делает неверным построенное решение до тех пор, пока лаг мал по сравнению с размером зоны циркуляции  $\lambda$ .

## 2.2 Модель радиальной трещины

### 2.2.1 Постановка задачи

В настоящем разделе мы рассмотрим постановку задачи о радиальной трещине гидроразрыва пласта с массообменом между трещиной и окружающим проницаемым резервуаром, зависящим от давления жидкости в канале трещины. Схематическое изображение модели представлено на рисунке 2.14. Основные предположения модели и уравнения остаются такими же, как описаны в разделе 1.2, за исключением относящихся к массообмену. Именно они будут обсуждаться в этой части диссертации.

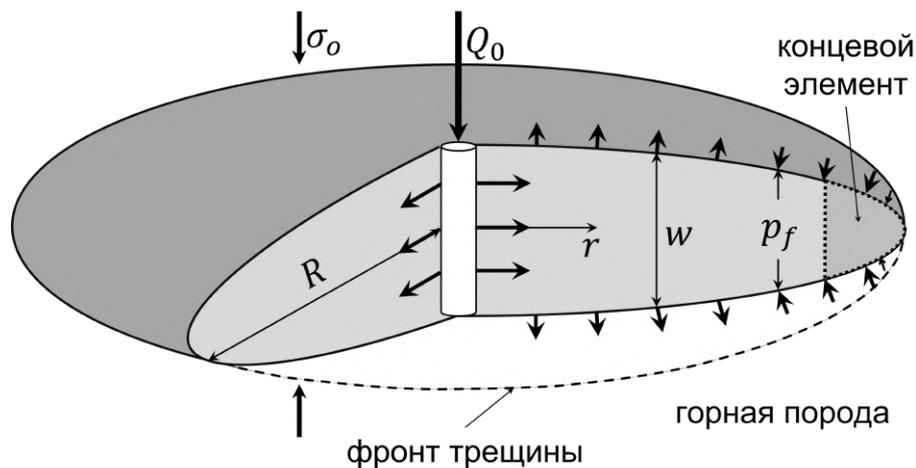


Рисунок 2.14 — Модель радиальной трещины гидроразрыва с массообменом между трещиной и окружающим проницаемым коллектором, скорость которого зависит от давления внутри канала трещины.

Для упрощения описания массообмена между трещиной и пластом будем полагать, что поровая и гидроразрывная жидкости являются эквивалентными ньютоновскими жидкостями, т. е. имеют одинаковые вязкости  $\mu$  и сжимаемости  $c_t$ . Помимо этого мы будем описывать массообмен одномерным механизмом. Скорость массообмена  $g(r, t)$  зависит от истории давления жидкости в канале трещины, которая в свою очередь определяется эволюцией ее роста, от свойств жидкости и коллектора (пористость  $\phi_r$ , проницаемость  $k$ , поровое давление в дальнем поле  $p_o$ ). Как было упомянуто в разделе 2.1 вблизи кончика трещины может сформироваться зона циркуляции поровой жидкости, т. е. область,

в которую втекает поровая жидкость вследствие условия  $p_f(r, t) < p_o$ , а затем вытекает обратно в пласт. Полагая, что давление в зоне циркуляции не опускается ниже давления насыщенного пара, в рассматриваемой модели радиальной трещины отсутствует лаг с парами [42].

Далее, мы перейдем к обсуждению изменений в системе уравнений, представленной в разделе 1.2.2. В текущей модели, решение задачи о радиальной трещине, состоящей из эволюции радиуса  $R(t)$  и профилей раскрытия  $w(r, t)$  и эффективного давления  $p(r, t)$ , зависит от времени  $t$ , расстояния до источника  $r$  (пространственно-временные характеристики), скорости нагнетания  $Q_0$  и расширенного набора материальных параметров:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_{Ic}, \quad M' = 12\mu, \quad Q' = \frac{2k}{\mu\sqrt{\pi c}}, \quad C' = Q'\sigma'_o, \quad (2.12)$$

где  $Q'$  – коэффициент, характеризующий зависимость массообмена от давления в трещине ( $c$  – коэффициент пьезопроводности, определяемый формулой  $c = k/(\varphi_r c_t \mu)$ ),  $C'$  – коэффициент утечек Картера ( $\sigma'_o = \sigma_o - p_o$  – эффективное обжимающее напряжение).

Локальная скорость массообмена, зависящего от давления в канале трещины, определяется по формуле:

$$g(r, t) = \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} + Q' \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial s} [H(s - t_0(r))p(r, s)] \frac{ds}{\sqrt{t - s}}. \quad (2.13)$$

Здесь  $H(x)$  – функция Хевисайда,  $t_0(r)$  – обратная функция к динамике радиуса трещины:  $t_0(r) = R^{-1}(t)$ . Из формулы (2.13) можно увидеть, что коэффициенты  $C'$ ,  $Q'$  определяют величину  $g(r, t)$ . В разделе 2.1 был введен коэффициент  $Q'$ . Он определяет насколько сильно скорость массообмена зависит от давления, т. е. отклоняется от закона Картера (первое слагаемое в уравнении (2.13)). Вывод формулы (2.13) приведен в приложении А статьи [68].

Используя уравнение неразрывности (1.13), закон Пуазёйля (1.15) и формулу (2.13) для скорости обмена жидкостью, мы получим уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{M'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} - Q' \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial s} [H(s - t_0(r))p(r, s)] \frac{ds}{\sqrt{t - s}}. \quad (2.14)$$

В завершении данного раздела, мы также запишем формулу для объема жидкости  $V_{\text{fluid-exchange}}$ , участвующего в массообмене, который является частью

уравнения глобального баланса (1.20):

$$V_{\text{fluid-exchange}} = \underbrace{4\pi C' \int_0^R r \sqrt{t - t_0(r)} dr}_{V_C} + \underbrace{2\pi Q' \int_0^R r dr \int_{t_0(r)}^t \frac{p(r, s) ds}{\sqrt{t - s}}}_{V_{\text{PDL}}}. \quad (2.15)$$

Можно отметить, что объем  $V_{\text{fluid-exchange}}$  состоит из кумулятивных утечек согласно закону Картера  $V_C$  и поправки  $V_{\text{PDL}}$ , зависящей от давления.

## 2.2.2 Численный алгоритм

В данном разделе диссертации будут обсуждаться основные особенности численного алгоритма, который применяется для нахождения общего решения задачи о распространении радиальной трещины гидроразрыва. Реализованная численная схема схожа с подходом, используемым в работе [54]. Алгоритм можно разделить на несколько этапов:

- дискретизация системы уравнений для модели радиальной трещины с массообменом, зависящим от давления (разделы 1.2 и 2.2.1);
- описание концевго элемента при помощи модели полубесконечной трещины (раздел 2.1);
- комбинация дискретизированной системы уравнений, дополненной соотношениями для концевго элемента;
- численное решение полученной системы уравнений.

Для дальнейшего обсуждения численной схемы, нам необходимо ввести нормализованную координату  $\rho = r/R(t)$ . Так как  $\rho$  зависит от времени, частные производные по времени и по пространственной координате должны быть переписаны в терминах  $\rho$  и  $t$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_r = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_\rho - \frac{\rho V(t)}{R(t)} \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \right|_t, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_t = \frac{1}{R(t)} \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \right|_t, \quad (2.16)$$

где были использованы следующие формулы для частных производных нормализованного расстояния:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho V(t)}{R(t)}$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{1}{R}$ .

Далее, мы перепишем уравнение упругости (1.11) и уравнение Рейнольдса (2.14), учитывая выражения для производных (2.16):

– Уравнение упругости:

$$p(\rho, t) = -\frac{E'}{2\pi R(t)} \int_0^1 G(\rho, s) \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} ds, \quad (2.17)$$

где ядро интеграла  $G(\rho, s)$  выписано в уравнении (1.12);

– Уравнение Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{V(t)}{R(t)} \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} &= \frac{1}{M'R(t)^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho w^3 \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(\rho R)}} - \\ &- Q' \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial s} [H(s - t_0(\rho R(t))) p(\rho, s)] \frac{ds}{\sqrt{t - s}} + \\ &+ Q' \int_{-\infty}^t \frac{\rho V(s)}{R(s)} \frac{\partial [H(s - t_0(\rho R(t))) p(\rho, s)]}{\partial \rho} \cdot \frac{ds}{\sqrt{t - s}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для дискретизации системы уравнений, мы вводим временную и пространственную сетки. Временной расчетный интервал делится на  $K$  шагов в логарифмическом масштабе:  $t_i = t_{\min} + 10^{i\Delta T}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , где  $\Delta T = \log_{10}(t_{\max}/t_{\min})/K$ ;  $t_{\min}$  соответствует начальному моменту времени, а  $t_{\max}$  – финальный момент времени. Пространственная нормализованная координата  $\rho$  делится на  $N$  одинаковых сегментов длиной  $\Delta\rho = 1/N$ . Узлы пространственной сетки располагаются в серединах сегментов:  $\rho_j = (j - 0.5)\Delta\rho$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Динамика радиуса трещины  $R(t)$ , а также ее скорость распространения  $V(t)$  представляются в виде кусочно-постоянных функций от времени, т. е.  $R(t) = R_i$ ,  $V(t_i) = V_i$  для сегмента  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Аналогично, пространственно-временные характеристики трещины, профили раскрытия  $w(\rho, t)$  и эффективного давления  $p(\rho, t)$ , представляются как кусочно-постоянные функции времени и безразмерного расстояния:  $w(\rho, t) = w_j^i$ ,  $p(\rho, t) = p_j^i$  для  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, \dots, K$  и  $\rho \in [\rho_{j-1/2}, \rho_{j+1/2}]$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $\rho_{j-1/2} = \rho_j - \Delta\rho/2$ ,  $\rho_{j+1/2} = \rho_j + \Delta\rho/2$  границы сегмента с порядковым номером  $j$ . Мы также определим вектор  $\mathbf{w}^i$ , состоящий из значений раскрытия трещины в каждом координатном сегменте на временном интервале  $i$ . Аналогичным образом определяется вектор значений эффективного давления  $\mathbf{p}^i$ .

В дискретном виде уравнение упругости (2.17) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^i &= \frac{CE'}{R_i} \mathbf{w}^i, \quad C_{mn} = \frac{1}{2\pi} \left[ G(\rho_m, \rho_{n+1/2}) - G(\rho_m, \rho_{n-1/2}) \right]; \\ m, n &= 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{C}$  безразмерная матрица упругости для рассматриваемой задачи.

Для дискретизации уравнения Рейнольдса (2.18) необходимо провести интегрирование уравнения по временному интервалу  $i : [t_{i-1}, t_i]$ , а затем усреднить по кольцу  $\mathcal{A}_\rho$  с границей  $\mathcal{C}_\rho : r \in [\rho_{j-1/2}, \rho_{j+1/2}]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Усреднение проводится следующим образом:

$$\frac{2\pi \int_{\rho_{j-1/2}}^{\rho_{j+1/2}} \rho f(\rho) d\rho}{\pi(\rho_{j+1/2}^2 - \rho_{j-1/2}^2)} \approx \frac{\int_{\rho_{j-1/2}}^{\rho_{j+1/2}} \rho f(\rho) d\rho}{\rho_j \Delta\rho}. \quad (2.20)$$

В результате вышеуказанных операций, мы получаем дискретное уравнение Рейнольдса в матричной форме:

$$\mathbf{w}^i - \mathbf{w}^{i-1} = \mathbf{B}\mathbf{w}^i + \left( \mathbf{A}(\mathbf{w}^i) + \hat{\mathbf{S}}^i \right) \mathbf{p}^i + \mathbf{S}^i, \quad i = 1, \dots, K. \quad (2.21)$$

Детали вывода уравнения (2.21) представлены в приложении В статьи [68].

В уравнении (2.21) слагаемые, стоящие слева, представляют производную профиля раскрытия по времени. Матрица  $\mathbf{B}$  относится к слагаемому пропорциональному скорости распространения трещины, образующегося вследствие введения движущейся координатной сетки. Матрица  $\mathbf{A}$  описывает потоковые слагаемые. Вектор  $\mathbf{S}^i$  включает в себя слагаемые, относящиеся к источнику, а также к массообмену, которые не зависят от решения задачи в рассматриваемый момент времени  $t_i$  (утечки по Картеру и история массообмена до текущего момента времени). Вектор  $\hat{\mathbf{S}}^i \mathbf{p}^i$  отражает зависимость массообмена от давления и содержит величины давления в рассматриваемый момент времени  $t_i$ . Представленная численная схема отличается от аналогичной схемы для задачи о радиальной трещине с утечками по закону Картера [54] слагаемым  $\hat{\mathbf{S}}^i \mathbf{p}^i$ , а также компонентами вектора  $\mathbf{S}^i$ , отвечающими за зависимость обмена жидкостью от истории давления в канале трещины. Выражения для матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{S}^i$ ,  $\hat{\mathbf{S}}^i$  выписаны в работе [68] в приложении В.

Уравнение (2.21) имеет специфический вид для конечного элемента, так как здесь необходимо учесть критерий распространения трещины гидроразрыва. В данном случае величина раскрытия в предпоследнем элементе ( $j = N - 1$ ) используется для расчета скорости движения кончика трещины  $V$ . Опираясь на рисунок 2.15, а также на материал раздела 2.1, можно записать неявное уравнение для скорости распространения на временном интервале  $i$ :

$$w_{N-1}^i = w_a \left( \frac{3}{2} \Delta\rho R_i, V_i, \mathcal{Q} \right), \quad (2.22)$$

где  $w_a = w_a(R-r, V, \mathcal{Q}) = w(r, t, Q_0, \mathcal{Q})$ ,  $R-r \ll R$  – асимптотика профиля раскрытия трещины вблизи кончика, которая зависит от расстояния до кончика трещины (в данном случае берем расстояние до середины элемента  $N-1$ ), скорости распространения трещины  $V$ , а также набора материальных параметров  $\mathcal{Q}$ . Уравнение (2.22) позволяет найти скорость распространения трещины по заданной величине раскрытия в  $N-1$  сегменте  $w_{N-1}^i$ . Когда скорость найдена, величина радиуса трещины обновляется согласно уравнению:

$$R_i = R_{i-1} + V_i \Delta t, \quad \Delta t = t_i - t_{i-1}. \quad (2.23)$$

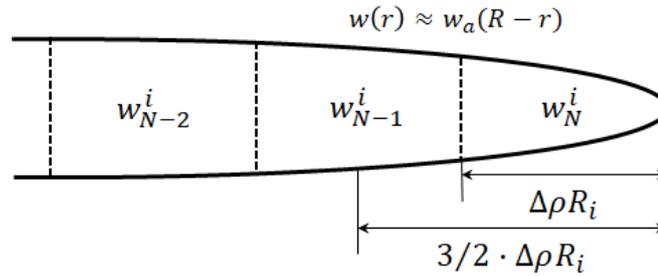


Рисунок 2.15 — Схематическое изображение дискретизации области трещины, примыкающей к фронту.

Так как мы полагаем, что асимптотическое решение для кончика трещины применимо для сегмента  $N-1$ , оно также должно быть применимо и для сегмента  $N$  (концевого элемента). Поэтому раскрытие трещины в конечном элементе получается на основе усреднения асимптотического профиля раскрытия согласно следующей формуле:

$$w_N^i = \frac{1}{R_i \Delta \rho} \int_0^{\Delta \rho R_i} w_a(s, V_i, \mathcal{Q}) ds. \quad (2.24)$$

Необходимо отметить, что давление в конечном элементе  $p_N^i$  будем полагать неизвестной величиной, чтобы количество уравнений в системе было равно количеству неизвестных ( $w_N^i$  – известная величина).

Далее нам необходимо определить объем жидкости, участвующий в массообмене вдоль конечного элемента, который обозначим как  $V_{\text{fluid-exchange}}^N$ . Данная величина может быть рассчитана при помощи асимптотического решения для кончика трещины с утечками, зависящими от давления (раздел 2.1):

$$\begin{aligned} V_{\text{fluid-exchange}}^N &= \Delta t \cdot 2\pi \int_{R_i(1-\Delta\rho)}^{R_i} s g_a(R_i - s) ds \approx \Delta t \cdot 2\pi \rho_N R_i q_{\perp} (\Delta \rho R_i) = \\ &= \Delta t \cdot 2\pi \rho_N R_i \left[ \frac{K'^4}{E'^3 M'} \cdot \Upsilon \left( \frac{\Delta \rho R_i}{\ell_{mk}}, \chi_i, \zeta_i \right) + 2Q' \sqrt{V_i} \sqrt{\Delta \rho R_i} \delta p^i \right]. \end{aligned}$$

В данном уравнении в первом слагаемом использована функция  $\Upsilon$ , которая определяется как:

$$q_{\perp}(R-r, V, \mathcal{Q}) = w_{mk} V \cdot \Upsilon \left( \frac{R-r}{\ell_{mk}}, \chi, \zeta \right),$$

$$\Upsilon(\xi, \chi, \zeta) = \chi \sqrt{\xi} + \zeta^3 \int_0^{\xi} \frac{\Pi_a(s, \chi, \zeta) ds}{\sqrt{\xi-s}}, \quad R-r \ll R,$$

где масштабы расстояния  $\ell_{mk}$ , раскрытия  $w_{mk}$ , безразмерный коэффициент утечек  $\chi$  и притока  $\zeta$  были определены в разделе 2.1, а  $\Pi_a$  – безразмерный асимптотический профиль давления:  $\Pi_a = p_a/p_{mk}$ . В свою очередь, второе слагаемое является поправкой, формирующейся из-за того, что область применимости асимптотического решения для профиля давления вблизи кончика трещины меньше, чем для профиля раскрытия, что требует введения поправки для величины давления  $\delta p^i$ :

$$\delta p^i = p_{N-1}^i - p_a \left( \frac{3}{2} \Delta \rho R_i, V_i, \mathcal{Q} \right) = p_{N-1}^i - \frac{E'^2 V_i M'}{K'^2} \cdot \Pi_a \left( \frac{3}{2} \frac{\Delta \rho R_i}{\ell_{mk}}, \chi_i, \zeta_i \right).$$

Величина  $V_{\text{fluid-exchange}}^N$  связана с элементом вектора  $[\mathbf{S}^i]_N$  следующим соотношением:  $[\mathbf{S}^i]_N = -V_{\text{fluid-exchange}}^N / (2\pi \rho_N \Delta \rho R_i^2)$ . В статье [68] в приложении В описаны вышеизложенные выводы в деталях.

Система уравнений для нахождения решения задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва состоит из  $N$  нелинейных уравнений. Так как раскрытие трещины в концевом элементе задается при помощи модели полубесконечной трещины, то удобно разделить неизвестные на внутренние и концевой элемент [26] следующим образом:

$$\mathbf{w}^i = [\mathbf{w}_c^i, w_N^i], \quad \mathbf{p}^i = [\mathbf{p}_c^i, p_N^i], \quad (2.25)$$

где вектора  $\mathbf{w}_c^i$  и  $\mathbf{p}_c^i$  обозначают раскрытия и эффективные давления во внутренних узлах ( $j = 1, \dots, N-1$ ), а величины  $w_N^i$ ,  $p_N^i$  относятся к концевому элементу ( $j = N$ ). Система уравнений линеаризуется и решается относительно величин  $\mathbf{w}_c^i$ ,  $p_N^i$  при помощи стандартного решателя для системы линейных уравнений совместно с применением метода простой итерации.

### 2.2.3 Полученные результаты и обсуждение

Основной фокус данного раздела диссертации будет направлен на изучение влияния массообмена, зависящего от давления в канале трещины гидроразрыва, на процесс ее роста. Будут рассчитаны общие решения задачи о радиальной трещине для различных значений входных параметров и будет проведено исследование поведения решения в безразмерном параметрическом пространстве задачи. Мы также проведем сравнение основных характеристик трещины гидроразрыва, полученных в рамках разработанной модели, с аналогичными характеристиками, посчитанными в предположении описания массообмена независимым от давления механизмом, т.е. законом Картера, что позволит глубже понять влияние предлагаемого описания обмена жидкостью на эволюцию трещины.

Для сравнения решений для радиальной трещины с утечками зависящими и независящими от давления, мы выбрали следующий набор параметров: максимальное раскрытие  $w(0, t)$ , эффективное давление на расстоянии половины радиуса трещины  $p(R(t)/2, t)$ , радиус трещины  $R(t)$  и эффективность  $\eta(t)$ , определяемая как отношение объема трещины к объему закачиваемой в пласт жидкости:

$$\eta(t) = \frac{V_{\text{crack}}}{V_{\text{inj}}} = \frac{2\pi}{Q_0 t} \cdot \int_0^R r w(r, t) dr. \quad (2.26)$$

Эффективность трещины является важной количественной величиной, позволяющей быстро оценить различные аспекты, связанные с массообменом.

#### 2.2.3.1 Примеры расчетов для входных параметров, соответствующих типичным промышленным случаям

Мы рассмотрим два набора входных параметров модели радиальной трещины гидроразрыва, которые отличаются значениями вязкости закачиваемой жидкости (считаем идентичным поровой жидкости):  $\mu_1 = 1$  сПз и  $\mu_2 = 10$  сПз.

Остальные параметры фиксированы:

$$\begin{aligned} E' &= 30 \text{ ГПа}, & K' &= 3.19 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}, & Q_0 &= 0.01 \text{ м}^3/\text{с}, & t_{\text{end}} &= 6000 \text{ с}, \\ \sigma_o &= 8 \text{ МПа}, & p_o &= 0.48 \text{ МПа}, & k &= 10 \text{ мД}, & \varphi_r &= 20\%, & c_t &= 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Далее мы проводим расчет для следующих величин коэффициента утечек Картера  $C'$  и коэффициента, характеризующего зависимость массообмена от давления в трещине  $Q'$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad Q'_1 &= 5.1 \cdot 10^{-2} \text{ мм}/(\sqrt{\text{с}} \cdot \text{МПа}), & C'_1 &= 1.63 \cdot 10^{-1} \text{ мм}/\sqrt{\text{с}}, \\ 2) \quad Q'_2 &= 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ мм}/(\sqrt{\text{с}} \cdot \text{МПа}), & C'_2 &= 5.2 \cdot 10^{-2} \text{ мм}/\sqrt{\text{с}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

На рисунке 2.16 изображены результаты численного расчета в терминах зависимостей следующих параметров от времени: радиуса трещины, максимального раскрытия, давления на расстоянии половины радиуса от источника и эффективности. Результаты моделирования роста трещины с утечками, зависящими от давления, изображены сплошными линиями, в то время как аналогичные характеристики трещины для случая утечек по Картеру ( $Q' = 0$ ) изображены штриховой линией в целях сравнения. Синий цвет используется для решений, соответствующих случаю жидкости гидроразрыва с меньшей вязкостью ( $\mu_1$ ), а зеленый цвет – для случая более вязкой ( $\mu_2$ ) жидкости. Из представленных решений можно сделать вывод, что радиус трещины и максимальное раскрытие переоцениваются при использовании модели с утечками по закону Картера. Это связано с отличием эффективности (или объема трещины) в рассматриваемых случаях. Однако, профили давления практически не отличимы. Относительная разница между значениями параметров радиальной трещины в момент завершения закачки для случая вязкости  $\mu_1 = 1$  сПз следующая: 2% для максимального раскрытия, 4.2% для радиуса, 1.9% для давления на расстоянии половины радиуса и 10.8% для эффективности; в случае более вязкой трещины гидроразрыва,  $\mu_2 = 10$  сПз, были получены следующие относительные разницы: 2.4% для  $w(0, t_{\text{end}})$ , 4.3% для  $R(t_{\text{end}})$ , 1.5% для  $p(R(t_{\text{end}})/2, t_{\text{end}})$  и 11.8% для  $\eta(t_{\text{end}})$ . Можно сделать вывод, что разница между сравниваемыми решениями для радиальной трещины с массообменом, зависящим от давления, и с утечками по закону Картера может быть значительной. В последующих разделах диссертации будет проведен более систематическое сравнение двух моделей.

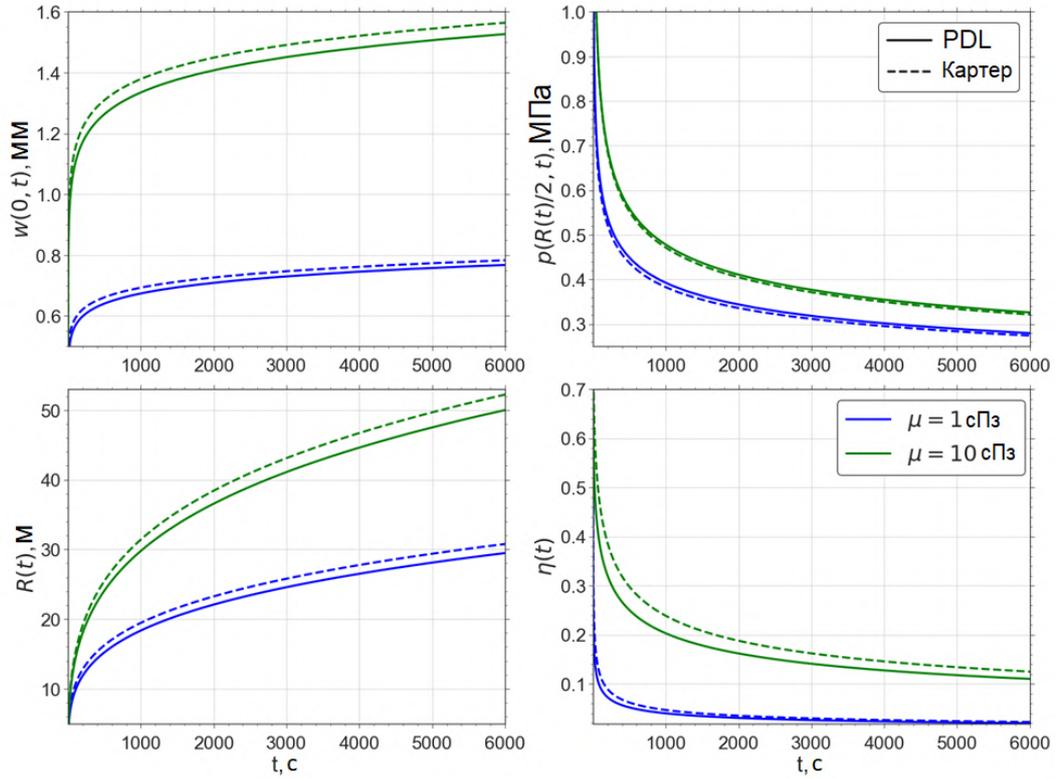


Рисунок 2.16 — Численное решение задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва в терминах радиуса  $R(t)$ , максимального раскрытия  $w(0, t)$ , давления на расстоянии половины радиуса от источника  $p(R(t)/2, t)$  и эффективности  $\eta(t)$ , зависящих от времени  $t$ . Решения посчитаны для наборов входных параметров (2.27) и (2.28). Синие линии соответствуют случаю вязкости  $\mu = 1$  сПз, а зеленые линии – для  $\mu = 10$  сПз. Решение для радиальной трещины с утечками, зависящим от давления (PDL, pressure-dependent leak-off), изображено сплошными линиями, а пунктирные линии используются для решения с утечками по закону Картера.

### 2.2.3.2 Характерные диапазоны значений параметров задачи

Чтобы уменьшить количество параметров задачи, удобно сформулировать систему уравнений в безразмерной форме. Для этого мы будем использовать  $mk$  масштабирование, предложенное в работах [12; 88] для модели радиальной трещины с утечками по закону Картера. Безразмерные параметры вводятся следующим образом:

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{t}{t_{mk}}, \quad \gamma(\tau) = \frac{R}{L}, \quad \Omega(\rho, \tau) = \frac{w}{\varepsilon L}, \quad \Pi(\rho, \tau) = \frac{p}{\varepsilon E'}, \quad (2.29)$$

где масштаб времени  $t_{mk}$ , масштаб длины  $L$  и малый безразмерный параметр  $\varepsilon$  определены как

$$t_{mk} = \left( \frac{M'^5 E'^{13} Q_0^3}{K'^{18}} \right)^{1/2}, \quad L = \left( \frac{Q_0^3 E' t_{mk}^4}{M'} \right)^{1/9}, \quad \varepsilon = \left( \frac{M'}{E' t_{mk}} \right)^{1/3}. \quad (2.30)$$

Решение задачи в безразмерной постановке будет зависеть от времени  $\tau$ , расстояния  $\rho$  и двух безразмерных чисел, коэффициента Картера,  $\varphi$ , и коэффициента, характеризующего массообмен,  $\psi$ :

$$\varphi = \frac{C'^4 E'^{11} M'^3 Q_0}{K'^{14}}, \quad \psi = \frac{Q'^4 E'^5 M'}{K'^2 Q_0}. \quad (2.31)$$

Параметр  $\psi$  показывает интенсивность зависимости массообмена от давления в канале трещины.

Далее, мы переходим к обсуждению параметрического пространства задачи о радиальной трещине с утечками по закону Картера, чтобы затем провести соотношение новых результатов с существующими исследованиями. Как следует из обзорной статьи [12], существуют четыре предельных режима распространения радиальной трещины: трещина-вязкость  $M$ , утечки-вязкость  $\widetilde{M}$ , трещина-трещиностойкость  $K$ , утечки-трещиностойкость  $\widetilde{K}$ . Данные режимы характеризуются одним механизмом диссипации энергии (вязкостные эффекты или разрушение горной породы) и одним механизмом баланса жидкости (малые утечки, т.е. малопроницаемая горная порода, или большие утечки). На рисунке 2.17(a) изображено параметрическое пространство задачи в координатах  $(\tau, \varphi)$  [54]. Цветными штриховыми линиями изображены границы зон применимости предельных решений. Полагается, что предельное решение аппроксимирует общее решение задачи, если относительная разница в значениях радиуса трещины и максимального раскрытия между общим решением и предельным составляет менее 1% [54]. Предельные решения для модели радиальной трещины с утечками по закону Картера были получены в работах [56; 57; 59]. На рисунке 2.17(b) изображено концептуальное представление параметрического пространства задачи в виде прямоугольника, а также несколько траекторий решений, зависящих от безразмерного коэффициента утечек  $\varphi$ , эволюционирующих во времени. Каждая траектория начинается в режиме трещина-вязкость  $M$  и заканчивается в режиме утечки-трещиностойкость  $\widetilde{K}$ . Таким образом,  $M$  режим аппроксимирует общее решение задачи в начальный период распространения трещины, в то время как  $\widetilde{K}$  по прошествии большого промежутка

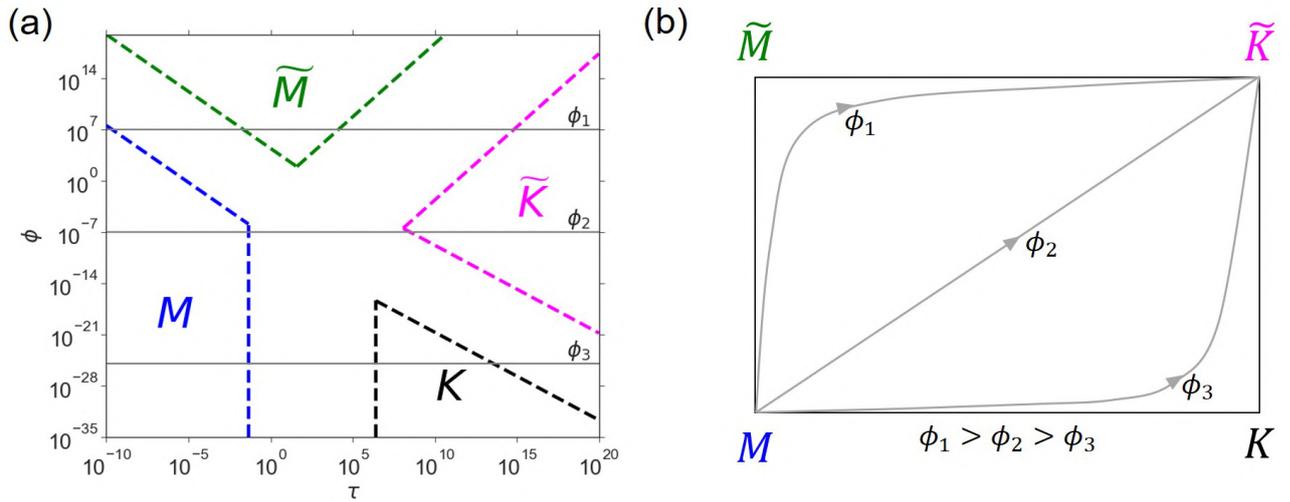


Рисунок 2.17 — Параметрическое пространство задачи о радиальной трещине с утечками по закону Картера в координатах  $(\tau, \varphi)$  (а) и его концептуальное представление (б). На рисунке (а) изображены границы применимости предельных режимов  $M$  (синяя штриховая линия),  $K$  (черная штриховая линия),  $\tilde{M}$  (зеленая штриховая линия) и  $\tilde{K}$  (пурпурная штриховая линия). На рисунке (а) также изображены траектории решений для различных значений безразмерного числа утечек  $\varphi$ .

времени. Остальные два предельных решения,  $K$  и  $\tilde{K}$ , могут реализовываться в промежуточные моменты времени в зависимости от значения параметра  $\varphi$ . При малых значениях  $\varphi$  траектория решения начинается в  $M$  режиме, затем проходит  $K$  режим и заканчивается в  $\tilde{K}$ . При средних значениях  $\varphi$  решение переходит из  $M$  в  $\tilde{K}$  напрямую. В случае больших значений  $\varphi$   $\tilde{M}$  режим аппроксимирует общее решение в промежуточные моменты времени.

Далее мы переходим к нахождению диапазонов значений параметров  $\varphi$  и  $\psi$ , соответствующих типичным промышленным случаям. Для этого, ряд параметров, которые варьируются слабо для различных месторождений, мы зафиксируем, а остальные будем изменять в определенных интервалах. Для исследования были выбраны следующие значения параметров:

- геомеханические характеристики:
  - модуль упругости в условиях плоской деформации:  $E' = 30$  ГПа;
  - трещиностойкость:  $K_{Ic} = 0.3 \div 1$  МПа  $\cdot \sqrt{\text{м}}$ ;
  - обжимающие напряжения:  $\sigma_o = 10 \div 30$  МПа;
- свойства резервуара:
  - проницаемость:  $k = 0.1 \div 100$  мД;
  - пористость:  $\varphi_r = 5 \div 25\%$ ;

- отношение порового давления к обжимающим напряжениям:  
 $p_o/\sigma_o = 0.95 \div 0.4$ ;
- свойства жидкости:
  - вязкость  $\mu = 1 \div 5$  сПз;
  - compressibility  $c_t = 10^{-3}$  МПа $^{-1}$ ;
- режим нагнетания:
  - $Q_0 = 0.01 \div 0.1$  м $^3$ /с;

Перечисленные параметры варьируются независимо в рамках указанных диапазонов. Безразмерные параметры  $\phi$  и  $\psi$  рассчитываются согласно формулам (2.31), в которых используются коэффициенты  $C'$  и  $Q'$  (2.12). В результате, была получена область, приведенная на рисунке 2.18(а), закрашенная голубым цветом. Используя иллюстрацию можно заметить, что безразмерные параметры задачи варьируются в интервалах:  $\phi \in [7.1 \cdot 10^{-8}, 3.1 \cdot 10^{15}]$  и  $\psi \in [2.4 \cdot 10^{-9}, 33.5]$ . Черные круглые и квадратные маркеры на рисунке 2.18(а) отображают случаи, которые обсуждались в разделе 2.2.3.1.

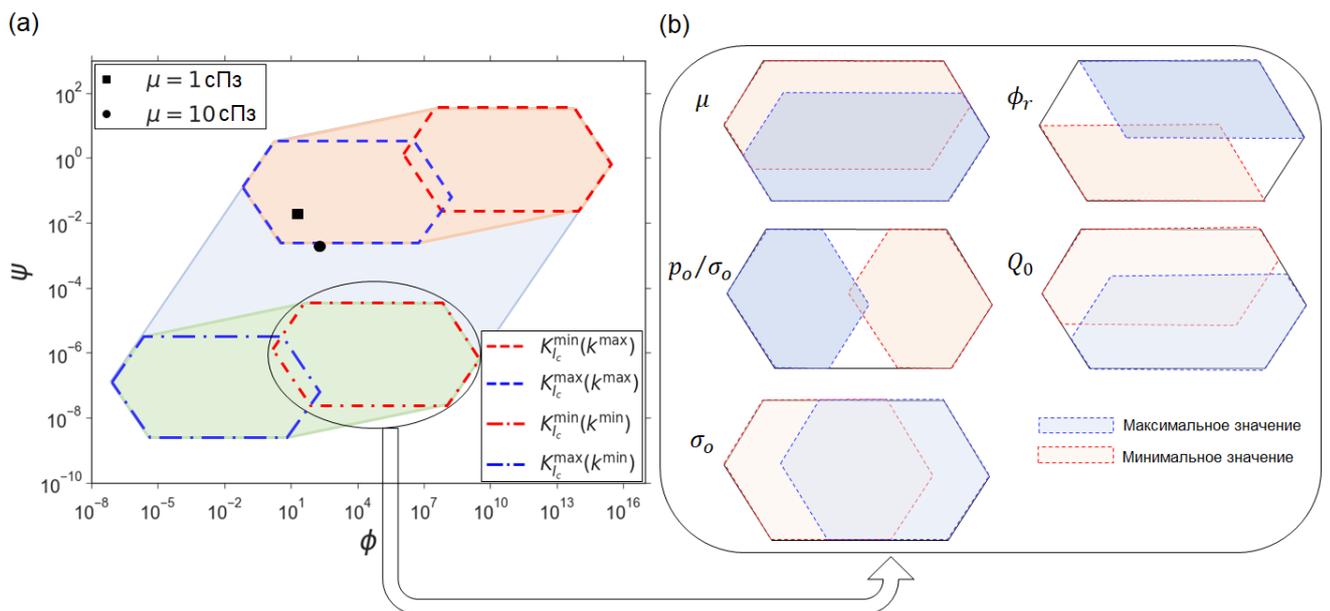


Рисунок 2.18 — Область значений безразмерных параметров  $\phi$  и  $\psi$ , соответствующих типичным промышленным случаям, изображена синим цветом на рисунке (а). Оранжевый и зеленый многоугольники на рисунке (а) соответствуют случаям с максимальным и минимальным значением проницаемости. Мы также выделяем области (шестиугольники), соответствующие максимальному и минимальному значениям трещиностойкости синим и красным цветами (пунктирная линия в случае максимальной проницаемости, а штрих-пунктирная линия в случае минимальной проницаемости). На рисунке (b) изображена внутренняя структура шестиугольника с учетом изменения каждого параметра. Черными квадратными и круглыми маркерами отмечены случаи, рассмотренные в разделе 2.2.3.1, соответствующие значениям вязкости жидкости гидроразрыва / поровой жидкости  $\mu = 1$  сПз и  $\mu = 10$  сПз.

Далее необходимо проанализировать внутреннюю структуру области значений параметров  $\varphi$  и  $\psi$ . Для этого мы рассмотрим под-области, соответствующие граничным значениям (максимальному и минимальному) рассматриваемых размерных параметров. Оранжевый многоугольник на рисунке 2.18(а) соответствует максимальному значению проницаемости ( $k = 100$  мД), в то время как зеленый многоугольник содержит точки, характеризующиеся минимальным значением проницаемости ( $k = 0.1$  мД). Следовательно, предельные значения безразмерного числа  $\psi$ , характеризующего интенсивность зависимости массообмена от давления, определяются диапазоном проницаемости. Многоугольник, соответствующий определенному значению проницаемости, состоит из двух шестиугольников, характеризующихся предельными значениями трещиностойкости горной породы. Например, два шестиугольника, соответствующих  $K_{Ic} = 0.3 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$  (штриховая красная линия) и  $K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$  (штриховая синяя линия), располагаются внутри оранжевого многоугольника (случай максимальной проницаемости). По аналогии изображены шестиугольники внутри зеленого многоугольника штрих-пунктирными линиями. Мы также проанализировали внутреннюю структуру обсуждаемого шестиугольника и представили на рисунке 2.18(б). Здесь представлены расположения точек для минимального (красный цвет) и максимального (синий цвет) значений следующих размерных параметров задачи:  $\mu$ ,  $\varphi_r$ ,  $p_o/\sigma_o$ ,  $Q_0$ ,  $\sigma_o$ . Используя рисунок 2.18, можно определить значения безразмерных параметров  $\varphi$  и  $\psi$  для интересных значений размерных физических параметров.

Так как решение задачи помимо параметров  $\varphi$  и  $\psi$  также зависит от безразмерного времени  $\tau$  (2.29), необходимо оценить его диапазон значений. Рассматривая типичную длительность закачки равную одному часу, мы получаем интервал для безразмерного времени:  $\tau \in [10^{-6}, 10^2]$ . Необходимо отметить, что рассматриваемый диапазон значений вязкости жидкости гидроразрыва довольно узкий, так как мы полагаем, что гидроразрывная и поровая жидкости идентичны. Более широкий диапазон изменения вязкости приведет к большему разбросу значений безразмерного времени  $\tau$ .

### 2.2.3.3 Численное решение задачи

Целью данного раздела диссертации является определение значений определяющих параметров  $\varphi$  и  $\psi$  при которых эффекты зависимости массообмена от давления играют важную роль при распространении трещины гидроразрыва. Иными словами, мы определим зоны внутри параметрического пространства задачи, в рамках которых использование закона Картера для описания обмена жидкостью между трещиной и пластом приводит к неточным результатам. С другой стороны, анализ позволит определить области, в которых традиционный подход позволяет получить результаты с приемлемой точностью, и уточнение описания механизма массообмена не требуется.

На основе иллюстрации 2.18, для анализа были выбраны следующие интервалы значений безразмерных параметров задачи

- время:  $\tau \in [10^{-5}, 10^4]$ ,
- коэффициент утечек:  $\varphi \in [10^{-10}, 10^2]$ ,
- коэффициент, характеризующий интенсивность зависимости массообмена от давления:  $\psi \in \psi_{\setminus} = \{10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 10^1\}$ .

Выбранные диапазоны значений  $\varphi$  и  $\psi$  соответствуют верхнему левому углу синей области на рисунке 2.18. В данной области значения параметра  $\psi$  относительно высокие, а параметра  $\varphi$  низкие, т.е. наиболее вероятно, что мы сможем увидеть сильное влияние утечек, зависящих от давления, на параметры радиальной трещины в процессе ее роста.

Далее мы проводим численное моделирование роста радиальной трещины гидроразрыва, рассматривая различные комбинации определяющих параметров  $\varphi$  и  $\psi$  в модели с массообменом, зависящим от давления. В целях сравнения мы также рассчитываем аналогичные решения для модели радиальной трещины с утечками по закону Картера, т. е.  $\psi = 0$ . Мы рассматриваем каждое значение параметра  $\psi$  в списке  $\psi_{\setminus}$  по отдельности, в то время как параметр  $\varphi$  варьируется логарифмически между минимальным и максимальным значениями. Впоследствии, мы рассчитываем относительную разницу между значениями параметров радиальной трещины в двух сопоставляемых случаях согласно формуле

$$\delta_A^{\varphi, \psi}(\tau) = |A - A_c|/|A_c|, \quad A = \{\Omega(0, \tau), \Pi(1/2, \tau), \gamma(\tau), \eta(\tau)\}, \quad (2.32)$$

где индекс ‘с’ относится к решению с утечками по Картеру, а параметр без индекса соответствует характеристикам трещины в случае утечек, зависящих от давления. Мы рассчитываем относительные разницы для следующих безразмерных параметров трещины: максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , эффективное давление на расстоянии половины радиуса от источника  $\Pi(1/2, \tau)$ , радиус трещины  $\gamma(\tau)$  и эффективность  $\eta(\tau)$ , которые определены в уравнении (2.26). Значения  $\delta_A^{\varphi, \psi}(\tau)$  можно использовать для количественной оценки применимости закона Картера для описания массообмена, изображая их на картах в координатах  $(\tau, \varphi)$  для фиксированного значения  $\psi$ .

Сначала мы рассмотрим случай  $\psi = 10^{-5}$ . На рисунке 2.19 представлены численные решения задачи о росте радиальной трещины с массообменом, зависящим от давления (сплошные линии), и утечками по закону Картера (штриховые линии) для различных значений безразмерного коэффициента утечек  $\varphi$ . На рисунке приведены обезразмеренные параметры трещины в зависимости от безразмерного времени: максимальное раскрытие, эффективное давление на расстоянии половины радиуса от источника, радиус и эффективность. Из результатов можно сделать вывод, что для малого значения  $\psi$  различие между двумя сравниваемыми решениями мало. Для более наглядного представления различий на рисунке 2.20 изображены относительные разницы между значениями характеристик радиальной трещины, рассчитанные по формуле (2.32). Из рисунка 2.20 можно сделать вывод, что различие между решениями распределено практически равномерно, за исключением случаев с малой эффективностью, в которых решение в модели с массообменом, зависящим от давления, стремится к решению с утечками по закону Картера. Из иллюстраций для радиуса и давления можно увидеть, что данные характеристики трещины в сопоставляемых решениях пересекаются. Используя значения  $\delta_A^{\varphi, \psi}(\tau)$ , мы можем провести усреднение относительных изменений параметров радиальной трещины по рассматриваемому интервалу времени и диапазону значений безразмерного параметра утечек. В результате получим, что средняя относительная разница между величинами максимального раскрытия и радиуса трещины в двух сравниваемых моделях составляет 2.5% и 2.9%, соответственно, в то время как среднее изменение в значениях эффективного давления на расстоянии половины радиуса от источника равно 2.8%. Так как и радиус и раскрытие влияют на эффективность трещины, то ее средняя относительная разница выше чем для этих двух параметров и равна 8.7%. Мы

также определили максимальные величины относительных изменений: 6.9% для  $\Omega(0, \tau)$ , 13.6% для  $\gamma(\tau)$ , 8.4% для  $\Pi(0.5, \tau)$  и 30.3% для  $\eta(\tau)$ .

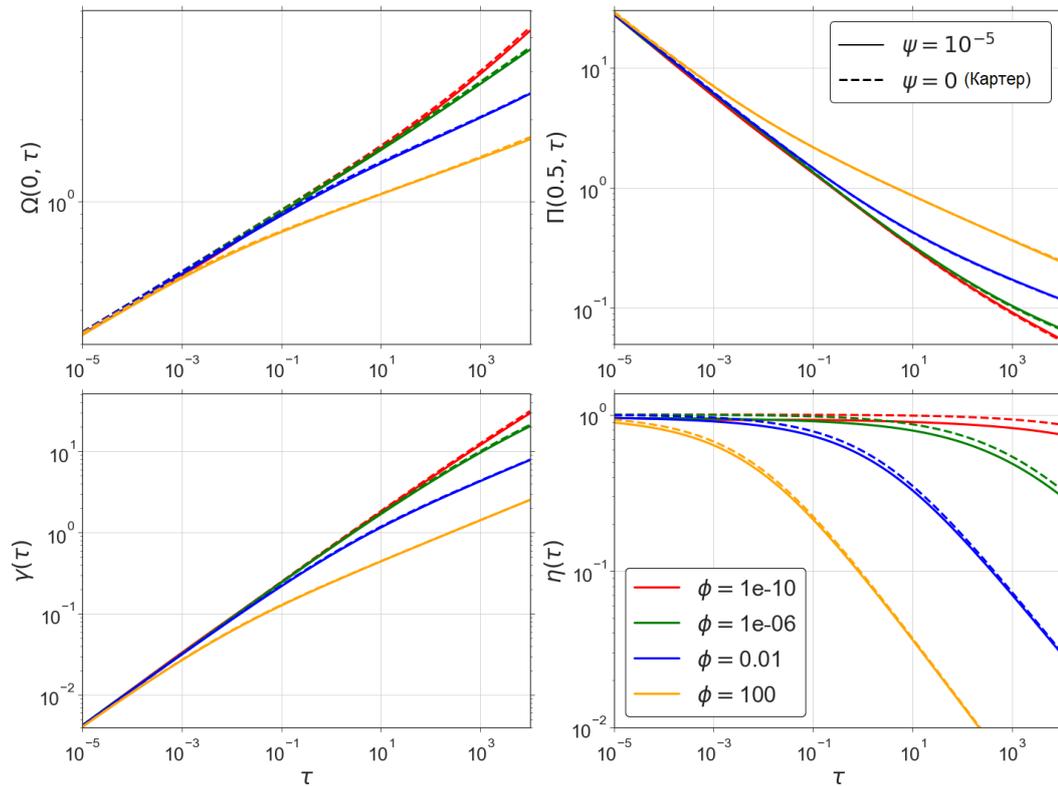


Рисунок 2.19 — Решение задачи для случая  $\psi = 10^{-5}$  и различных значений  $\phi$  в терминах безразмерного максимального раскрытия, безразмерного эффективного давления на расстоянии половины радиуса от источника, безразмерного радиуса трещины и эффективности, зависящих от безразмерного времени  $\tau$ . Сплошные линии используются для изображения решения задачи о распространении трещины с массообменом, зависящим от давления. Штриховые линии обозначают решение с утечками по закону Картера.

Далее мы рассмотрим случай  $\psi = 10^{-1}$ . Различные характеристики трещины, полученные в результате численного расчета, представлены на рисунке 2.21, а на рисунке 2.22 изображены карты с относительными отклонениями решения задачи с утечками, зависящими от давления, от решения с утечками по закону Картера. В данном случае влияние массообмена, зависящего от давления, является более заметным. Значения эффективности трещины в интересующем нас случае ниже чем для трещины с утечками по Картеру и, как результат, трещина является более короткой и узкой. Необходимо отметить, что учет зависимости скорости массообмена от давления приводит к утечкам большей интенсивности, чем в случае закона Картера; следовательно, формируется трещина с более низкой величиной эффективности и меньшими размерами. Так как эффективное давление внутри канала трещины  $p(r, t)$  преимущественно положительно, то слагаемое в уравнении Рейнольдса (2.14), отражающее

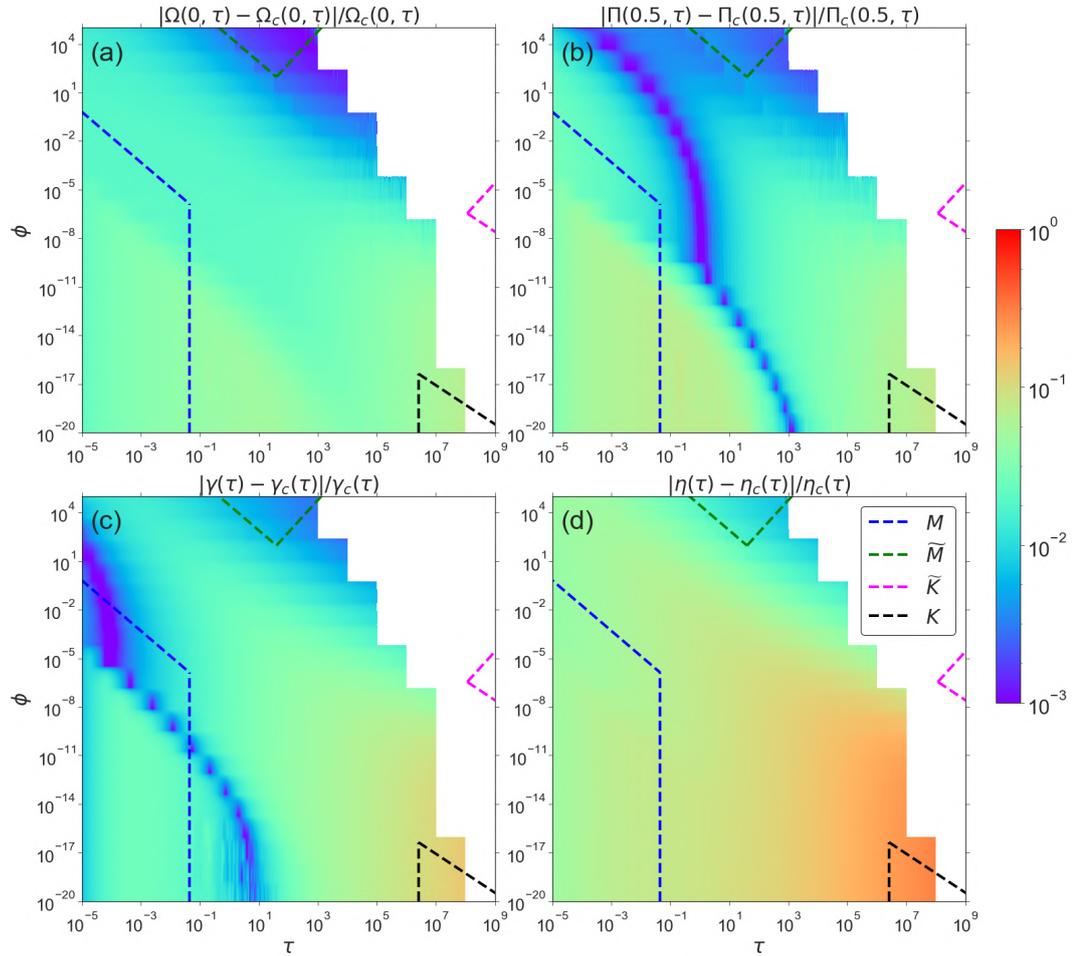


Рисунок 2.20 — Относительные разницы между значениями параметров трещины в модели с массообменом, зависящим от давления, и в модели с утечками по закону Картера, изображенные в координатах  $(\tau, \phi)$  для случая  $\psi = 10^{-5}$ . Границы применимости предельных решений в модели с утечками по закону Картера изображены цветными пунктирными линиями [54].

зависимость массообмена от давления, имеет тот же знак, что и аналогичное слагаемое, связанное с утечками по Картеру, т. е. интенсивность утечек увеличивается. Из графиков на рисунке 2.21 можно заметить, что при малых значениях  $\tau$  для каждого из рассматриваемых значений  $\phi$ , эффективность, максимальное раскрытие и радиус, полученные численно в модели с утечками, зависящими от давления, стремятся к асимптотическому поведению, которое отличается от модели с утечками по закону Картера. Различие между сопоставляемыми моделями уменьшается при больших  $\tau$  и  $\phi$ , где эффективность трещины мала. Из рисунка можно сделать вывод 2.22, что качественно поведение решений аналогично случаю с меньшим значением  $\psi$ , однако различия между сравниваемыми моделями более значительны. Средняя относительная разница между величинами максимального раскрытия и эффективного дав-

ления на расстоянии половины радиуса от источника равны 13.6%, а среднее изменение в значениях радиуса и эффективности составляют 22.9% и 49.4%. Максимальные величины относительных изменений равны: 38% для  $\Omega(0, \tau)$ , 61.9% для  $\gamma(\tau)$ , 62.9% для  $\Pi(0.5, \tau)$  и 91% для  $\eta(\tau)$ .

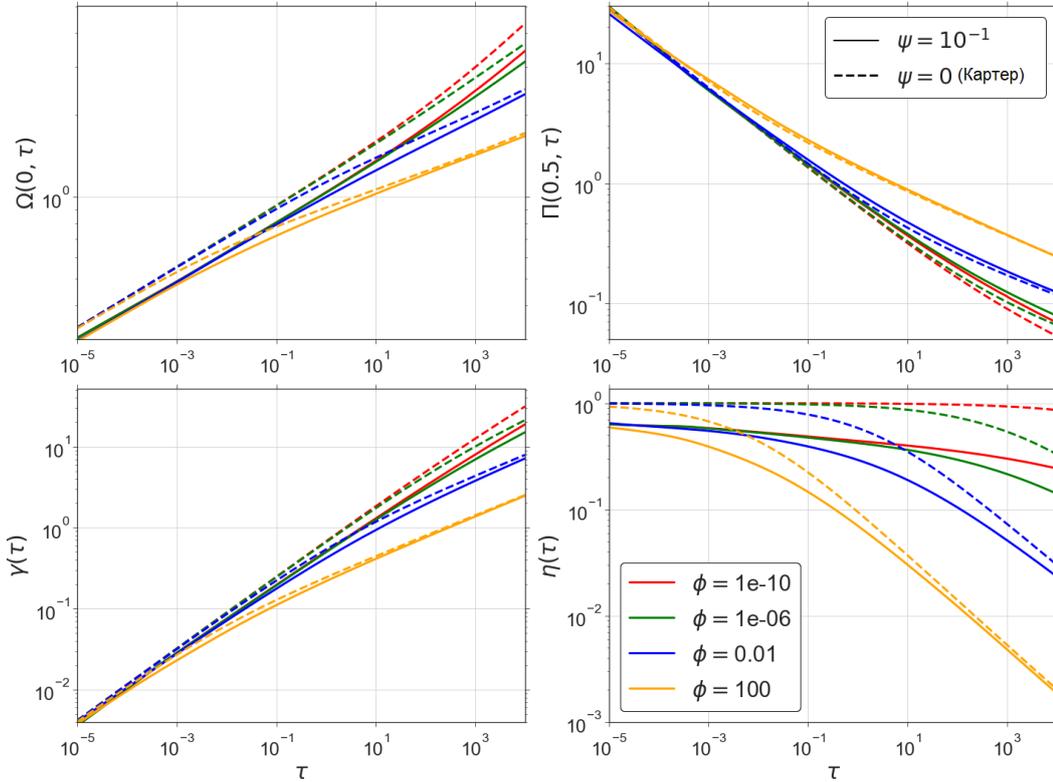


Рисунок 2.21 — Решение задачи для случая  $\psi = 10^{-1}$  и различных значений  $\phi$  в терминах безразмерного максимального раскрытия, безразмерного эффективного давления на расстоянии половины радиуса от источника, безразмерного радиуса трещины и эффективности, зависящих от безразмерного времени  $\tau$ . Сплошные линии используются для изображения решения задачи о распространении трещины с массообменом, зависящим от давления. Штриховые линии обозначают решение с утечками по закону Картера.

Чтобы резюмировать усредненные и максимальные относительные разницы между двумя сравниваемыми моделями, мы приводим таблицу 6, в которой записаны данные величины для максимального раскрытия, эффективного давления, радиуса и эффективности для различных значений параметра  $\psi$ . Различия существенны при больших значениях  $\psi$  и становятся незначительными при малых значениях безразмерного параметра, характеризующего интенсивность зависимости массообмена от давления.

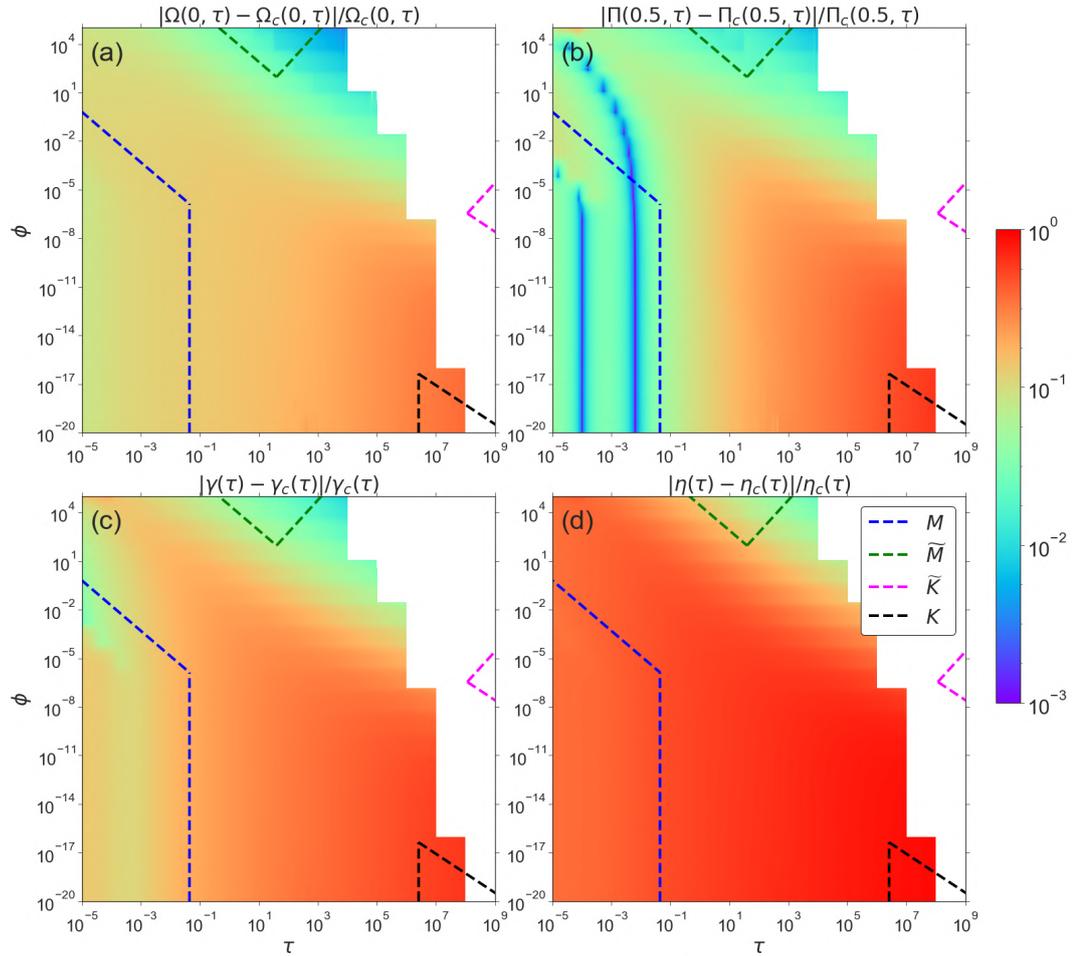


Рисунок 2.22 — Относительные разницы между значениями параметров трещины в модели с массообменом, зависящим от давления, и в модели с утечками по закону Картера, изображенные в координатах  $(\tau, \phi)$  для случая  $\psi = 10^{-1}$ . Границы применимости предельных решений в модели с утечками по закону Картера изображены цветными пунктирными линиями [54].

	Относительная разница (в %)							
	Усредненное значение				Максимальное значение			
$\psi$	$\Omega(0, \tau)$	$\Pi(0.5, \tau)$	$\gamma(\tau)$	$\eta(\tau)$	$\Omega(0, \tau)$	$\Pi(0.5, \tau)$	$\gamma(\tau)$	$\eta(\tau)$
$10^{-5}$	2.5	2.8	2.9	8.7	6.9	8.4	13.6	30.3
$10^{-3}$	5.9	4.6	8.4	23.3	18.5	23.6	34.0	64.6
$10^{-1}$	13.6	13.6	22.9	49.4	38.0	62.9	61.9	91.0
$10^1$	26.8	42.5	47.0	78.1	56.6	134.0	81.5	98.5

Таблица 6 — Усредненные и максимальные значения относительной разницы между параметрами радиальной трещины в модели с утечками, зависящими от давления, и аналогичной модели с утечками по закону Картера.

#### 2.2.3.4 Оценка важности эффектов, связанных с массообменом, зависящим от давления, в процессе роста трещины гидроразрыва на основе модели радиальной трещины с утечками по закону Картера

радиальной трещины с массообменом, зависящим от давления, отличается значительно от решения аналогичной задачи с утечками по закону Картера, для фиксированного значения параметра  $\psi$ . Исследование начнем с анализа всего параметрического пространства  $(\tau, \varphi)$ , используя решение задачи о росте радиальной трещины с утечками по закону Картера [54]. Затем, проведем оценки для предельных режимов распространения трещины  $M, \widetilde{M}, K, \widetilde{K}$  при помощи их точных решений.

Мы определим  $\psi_\alpha = \psi_\alpha(\tau, \varphi)$  как значение параметра  $\psi$ , при котором объем жидкости  $V_{\text{PDL}}$  составляет малую долю от закачанного объема  $V_{\text{inj}}$ :  $\alpha = V_{\text{PDL}}/V_{\text{inj}}$ , в момент времени  $\tau$  и при коэффициенте утечек  $\varphi$ . Значения  $\psi_\alpha$  при малой величине  $\alpha$  позволяют изобразить зоны внутри параметрического пространства  $(\tau, \varphi)$ , в которых эффекты утечек, зависящих от давления, проявляются наиболее сильно при распространении трещины.

Используя приближенное решение для радиальной трещины с утечками по закону Картера [54], мы получаем численно значения  $V_{\text{PDL}}(\tau, \varphi, \psi)$  и соответствующие им  $\psi_\alpha(\tau, \varphi)$  для  $\alpha = 5\%$ . Затем полученные  $\psi_\alpha$  изображаем на рисунке 2.23а. На иллюстрации максимальное значение  $\psi_\alpha$  равно 100, поэтому область  $(\tau, \varphi)$  с  $\psi_\alpha > 100$  закрашена белым цветом. На рисунке 2.23а мы также изображаем набор изолиний  $\psi_\alpha(\tau, \varphi) = \psi$ , на которых  $\psi = 10^{-9}, 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 10$ . Рассмотрим изолинию  $\psi = 10^{-5}$ , изображенную на рисунке 2.23а черным цветом. Параметрическая область  $\psi_\alpha(\tau, \varphi) \geq \psi$ , ограниченная данной изолинией и располагающаяся в направлении градиента  $\psi_\alpha$  (указана стрелками), соответствует зоне, где описывающий утечки закон Картера позволяет получить решение с приемлемой точностью для выбранного значения параметра  $\psi$ , характеризующего интенсивность зависимости массообмена от давления. С противоположной стороны от изолинии, где  $\psi_\alpha(\tau, \varphi) < \psi$ , необходимо в явном виде моделировать утечки, зависящие от давления, из-за их значительного влияния на решение задачи.

Далее мы получим формулы для  $\psi_\alpha$  в случае предельных режимов распространения радиальной трещины с утечками по закону Картера. На рисунке 2.23а границы областей применимости предельных решений выделены цветными штриховыми линиями. Предельные решения в терминах безразмерного давления и радиуса трещины ( $mk$  масштабирование) выглядят следующим об-

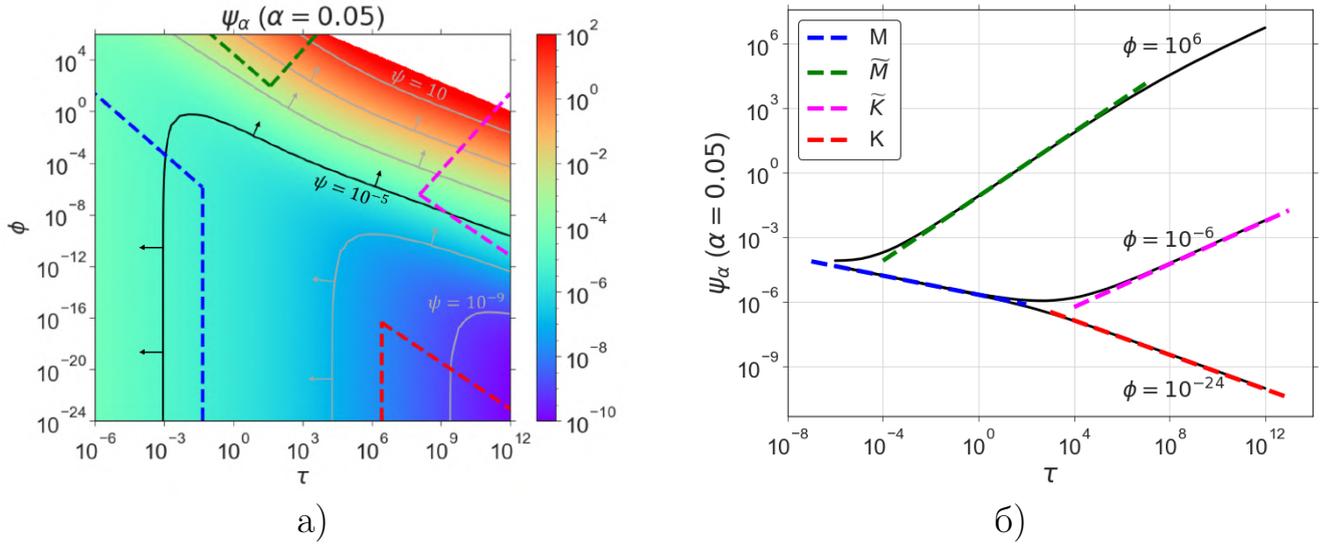


Рисунок 2.23 — (а) Значения параметра  $\psi$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau$  и параметра утечек  $\phi$ , при которых массообмен, зависящий от давления, вносит вклад  $\alpha = 0.05$  в баланс жидкости. Значения  $\psi_\alpha(\tau, \phi)$  рассчитаны на приближенного решения для радиальной трещины с утечками по закону Картера [54]. Границы применимости предельных решений в модели радиальной трещины с утечками по закону Картера изображены цветными штриховыми линиями на рисунке (а) в целях сравнения. Набор изолиний  $\psi_\alpha = \{10^{-9}, 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 10^1\}$  представлен серым/черным цветом. Область  $\psi_\alpha(\tau, \phi) \geq \psi$ , ограниченная определенной изолинией и находящаяся по направлению градиента  $\psi_\alpha$  (указано стрелками) соответствует зоне, где утечки по закону Картера хорошо описывают процесс массообмена для рассматриваемого значения параметра  $\psi$ . (б) Изменения  $\psi_\alpha$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau$  для различных значений параметра утечек  $\phi = \{10^{-24}, 10^{-6}, 10^6\}$ , посчитанные при помощи решения для радиальной трещины с утечками по закону Картера [54] (черные сплошные линии). На рисунке (б) также представлены аналогичные кривые, посчитанные при помощи узловых решений [56; 57; 59] (цветные штриховые линии).

разом [56; 57; 59]:

$$\Pi_k = \frac{\pi}{2^{7/2} \sqrt{\gamma_k}}, \quad \gamma_k = \left( \frac{9}{2\pi^2} \right)^{1/5} \tau^{2/5},$$

$$\Pi_{\tilde{k}} = \frac{\pi}{2^{7/2} \sqrt{\gamma_{\tilde{k}}}}, \quad \gamma_{\tilde{k}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \tau^{1/4} \phi^{-1/8},$$

$$\Pi_m = \left[ A_1 \left( A_2 - \frac{2}{3} (1 - \rho^{-1/3}) \right) - A_3 \left( \ln \left( \frac{\rho}{2} \right) + 1 \right) \right] \tau^{-1/3}, \quad \gamma_m = 0.6955 \tau^{4/9},$$

$$\Pi_{\tilde{m}} = \left[ B_1 (4 - (1 - \rho^2)^{-3/8}) - B_2 (3(2\rho^2 - 1) - 1) + B_3 \left( \ln \left( \frac{2}{\rho} \right) - 1 \right) \right] \tau^{-3/16} \phi^{3/32},$$

$$\gamma_{\tilde{m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \tau^{1/4} \phi^{-1/8},$$

где  $A_1 = 0.3581$ ,  $A_2 = 2.479$ ,  $A_3 = 0.09269$ ,  $B_1 = 0.2596$ ,  $B_2 = 0.0169$ ,  $B_3 = 0.1403$ .

На следующем шаге нам необходимо получить  $V_{\text{PDL}}$  для каждого предельного режима распространения трещины. Для этого представим  $\Pi$  и  $\gamma$  в форме  $\Pi = Af(\rho)\tau^\alpha\varphi^\beta$ ,  $\gamma = B\tau^\delta\varphi^\varepsilon$  и подставим в формулу (2.15). В результате получим выражение:

$$V_{\text{PDL}} = 2\pi\psi^{1/4} \cdot AB^2\tau^{\alpha+1/2+2\delta}\varphi^{\beta+2\varepsilon} \int_0^1 \rho f(\rho) \left[ \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} - B \left( \rho^{1/\delta}; \alpha+1, \frac{1}{2} \right) \right] d\rho, \quad (2.33)$$

где мы использовали гамма-функцию Эйлера  $\Gamma(x)$  и неполную бета-функцию  $B(x; a, b)$ . Пространственный интеграл находится аналитически в случае режимов  $K$  и  $\tilde{K}$ . Для остальных двух режимов используется численное интегрирование.

Считая, что  $V_{\text{PDL}} = \alpha V_{\text{inj}}$ , мы получим:

$$\begin{aligned} K - : \quad \alpha\tau &= 1.04\psi^{1/4}\tau^{11/10} \implies \psi_\alpha = 0.845\alpha^4\tau^{-2/5}, \\ \tilde{K} - : \quad \alpha\tau &= 0.43\psi^{1/4}\tau^{7/8}\varphi^{-3/16} \implies \psi_\alpha = 27.8276\alpha^4\tau^{1/2}\varphi^{3/4}, \\ M - : \quad \alpha\tau &= 1.32\psi^{1/4}\tau^{19/18} \implies \psi_\alpha = 0.33\alpha^4\tau^{-2/9}, \\ \tilde{M} - : \quad \alpha\tau &= 0.82\psi^{1/4}\tau^{13/16}\varphi^{-5/32} \implies \psi_\alpha = 2.25\alpha^4\tau^{3/4}\varphi^{5/8}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В целях верификации  $\psi_\alpha$ , полученных численно, мы сравниваем значения  $\psi_\alpha$ , когда траектория решения проходит с течением времени через тот или иной узел. Результаты представлены на рисунке 2.23б. На иллюстрации изображены черными сплошными линиями зависимости  $\psi_\alpha$  от безразмерного времени  $\tau$  для различных значений безразмерного коэффициента утечек  $\varphi = 10^{-24}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^6$ . Аналогичные кривые, полученные на основе формул (2.34) изображены цветными штриховыми линиями. Из рисунка можно увидеть, что численное решение совпадает с асимптотическими решениями в рамках их границ применимости.

Из результатов, представленных на рисунке 2.23а можно увидеть, что решение задачи о росте радиальной трещины с массообменом, зависящим от давления, отличается от решения с утечками по закону Картера внутри зоны применимости  $K$  режима уже при малых значениях параметра  $\psi$ , порядка  $10^{-9}$ . Более того,  $\psi_\alpha$  является убывающей функцией безразмерного времени  $\tau$  в этой области. Внутри зоны применимости  $M$  режима утечки, зависящие от давления, начинают значительно влиять на решение задачи при значениях  $\psi$

порядка  $10^{-5}$ . Аналогично  $K$ , в области применимости  $M$  режима,  $\psi_\alpha$  убывающая функция от безразмерного времени  $\tau$ . В случае предельных режимов, в которых доминируют утечки ( $\widetilde{M}$  и  $\widetilde{K}$ ), анализируемый эффект влияет на решение задачи при значительно больших значениях  $\psi$ . Можно также отметить, что предельные режимы  $M$ ,  $\widetilde{M}$  и  $\widetilde{K}$  постепенно “вытесняются” при увеличении значения параметра  $\psi$ , однако продолжают существовать в определенных областях параметрического пространства. Однако,  $K$  режим, начиная с некоторого малого значения  $\psi$ , полностью пропадает. Это происходит из-за того, что  $\psi_\alpha$  убывает с увеличением  $\tau$  и не зависит от значения безразмерного параметра  $\varphi$  для  $K$  режима. Таким образом, максимальное значение  $\psi$ , при котором  $K$  все еще реализуется соответствует  $\psi_\alpha$  на вертикальной границе области применимости  $K$  режима. Таким образом, если  $\psi$  превышает это значение,  $K$  режим полностью пропадает. Можно также отметить, что функция  $\psi_\alpha$  имеет минимум, который в зависимости от значения параметра  $\varphi$  достигается при разных  $\tau$ . Например, при увеличении  $\varphi$  минимум сдвигается в сторону меньших  $\tau$  ( $\varphi = 10^{-6}$  по сравнению с  $\varphi = 10^6$  на рисунке 2.23б). Результаты, изложенные в текущем разделе, согласуются с представленными ранее численными расчетами на рисунке 2.22 для  $\psi = 10^{-1}$ . Относительная разница между значениями параметров трещины в случае массообмена, зависящего от давления, и в случае утечек по закону Картера выше 5% практически в любой области параметрического пространства  $(\tau, \varphi)$  (кроме зоны с большими значениями коэффициента утечек  $\varphi$ ). Действительно, смотря на рисунок 2.23а, становится понятно, что значения  $\psi_\alpha$  в большинстве точек параметрического пространства ниже  $10^{-1}$ . Вывод, что влияние утечек, зависящих от давления, на решение задачи в случае больших значений  $\varphi$  также согласуется с наблюдениями, описанными в предыдущем разделе диссертации.

Рисунок 2.23а можно использовать для ответа на вопрос необходимо ли учитывать массообмен, зависящий от давления, при моделировании роста радиальной трещины гидроразрыва. Для этого необходимо рассчитать значения безразмерных параметров  $\tau$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , используя уравнения (2.29)–(2.31), на основе значений размерных входных параметров. Затем значение  $\psi_\alpha$  находится из рисунка 2.23а для полученных  $\tau$  и  $\varphi$ . Если значение  $\psi$  для интересующих параметров задачи выше  $\psi_\alpha$ , то рекомендуется учесть утечки, зависящие от давления, при моделировании распространения трещины в проницаемой горной породе. С другой стороны, если  $\psi$  ниже чем  $\psi_\alpha$ , то обсуждаемым эффектом

можно пренебречь, и решение задачи с утечками по закону Картера будет иметь приемлемую точность.

### 2.3 Выводы

В настоящей главе проведен анализ влияния массообмена, зависящего от давления, на распространение трещины гидроразрыва с полубесконечной и радиально-симметричной геометриями. В разделе 2.1 мы рассмотрели модель полубесконечной трещины, детально охарактеризовали параметрическое пространство задачи, концептуальное представление которого имеет вид тетраэдра. Предельные режимы распространения, находящиеся в узлах тетраэдра, выведены аналитически, а решения для ребер, граней и траекторий внутри тетраэдра получены численно. Мы описали физические особенности модели концевой элемента, связанные с зависимостью скорости обмена жидкостью между трещиной и пластом от давления внутри канала трещины: наличие зоны циркуляции поровой жидкости, примыкающей к кончику трещины, и конечное значение давления на фронте. Путем сравнения профиля раскрытия полубесконечной трещины в построенном решении с аналогичной характеристикой в решении с утечками по закону Картера мы определили области внутри параметрического пространства задачи, внутри которых сопоставляемые решения значительно отличаются, означая важность учета утечек, зависящих от давления, при моделировании распространения полубесконечной трещины, и, наоборот, указали зоны, где решения близки друг к другу, и возможно использование базовой модели с утечками по закону Картера. В разделе 2.2 мы изучили модель радиальной трещины, в рамках которой был реализован численный подход, включающий в себя модель концевой элемента из раздела 2.1 в качестве критерия распространения. Мы выявили, что массообмен, зависящий от давления, увеличивает интенсивность утечек в пласт вдоль основной части радиальной трещины по сравнению с механизмом, не учитывающим изменение давления внутри канала трещины. В результате формируется радиальная трещина более короткая и менее раскрытая по сравнению с моделью с утечками по закону Картера. В секции проведено сравнение построенного решения с решением для радиальной трещины с утечками по закону Картера в терминах

радиуса, максимального раскрытия, давления на расстоянии половины радиуса от источника и эффективности, в результате которого мы определили диапазоны значений определяющих параметров, при которых необходимо учитывать массообмен, зависящий от давления, и, наоборот, выявлены случаи, когда данным гидродинамическим эффектом можно пренебречь.

### Глава 3. Эффекты турбулентности при росте трещины гидроразрыва под влиянием “скользящей воды”\*

При использовании жидкости гидроразрыва на водной основе с низкой вязкостью (1 - 10 сПз) скорость закачки может быть довольно высокой для того, чтобы избежать нежелательных эффектов, например, осаждения частиц пропанта, и чтобы создать раскрытие трещины, достаточное для распределения частиц пропанта вдоль нее [89]. Таким образом, число Рейнольдса для потока жидкости гидроразрыва в канале трещины вблизи ствола скважины становится выше критического значения, что означает реализацию турбулентного режима течения. В остальной же части трещины, т. е. в области от границы смены режима течения до фронта трещины, реализуется ламинарный режим. Поскольку число Рейнольдса для плоского канала зависит от его ширины, то ламинарный режим течения всегда присутствует вблизи кончика трещины, где величина раскрытия стремится к нулю.

Впервые анализ турбулентного режима течения в канале трещины гидроразрыва обсуждался в работе [16] для случая РКН геометрии. Впоследствии, в работе [90] рассматривалась трещина плоской деформации (KGD), распространяющаяся под влиянием нагнетания газа. Важно подчеркнуть, что в работе [90] обсуждается трансформация режима течения внутри канала трещины из турбулентного в ламинарный при приближении к кончику трещины. Предельные режимы распространения трещины, связанные с турбулентным режимом течения внутри магматических даек, были получены в работах [91; 92]. Далее исследователи [6] рассмотрели трещину плоской деформации в леднике, которая распространяется под воздействием турбулентного потока талой воды. Различные аспекты влияния турбулентного режима течения на рост трещины гидроразрыва с геометрией РКН обсуждаются в работах [93–95]. Кроме того, ряд исследований турбулентного режима течения в трещине проводится для других геометрий, например, для трещины плоской деформации [96; 97], для радиальной трещины [48; 62; 98], для плоской трехмерной трещины [99]. В вышеуказанных работах рассматриваются трещины конечных геометрий. Однако,

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [69; 70].

в ряде работ проводилось изучение полубесконечной трещины (модель кончика трещины), внутри которой осуществляется трансформация режима течения. Например, в статье [47] была разработана модель концевого элемента трещины гидроразрыва, заполненной водой, в то время как случай “скользящей воды” рассматривается в работе [48].

Закачка жидкости в пласт при высоком объемном расходе требует значительных энергозатрат [100], особенно при одновременном росте нескольких трещин (горизонтальная скважина с многостадийным гидроразрывом). Снижение энергетических затрат может быть достигнуто путем добавления специфических полимеров в водный раствор. Образующаяся смесь называется “скользящей водой”. Полимеры незначительно повышают вязкость жидкости и значительно снижают трение о стенки канала трещины и скважины, вплоть до 70% по сравнению с чистой водой [101]. Результаты экспериментов, приведенных в работах [102; 103] демонстрируют, как снижается коэффициент сопротивления потоку в зависимости от типа полимерных молекул и их концентрации. Также установлено, что снижение трения имеет определенный предел, называемый асимптотой максимального снижения сопротивления (maximum drag reduction, MDR) или асимптотой Вирка, и данный предел может быть достигнут при сравнительно небольшой концентрации полимеров.

Раздел 3.1 посвящен модели концевого элемента трещины гидроразрыва, распространяющейся в проницаемой горной породе. В данной модели учитывается возможный переход режима течения из ламинарного в турбулентный при удалении от фронта трещины на некотором расстоянии от него, где число Рейнольдса для потока внутри канала трещины становится равным критическому значению. Трещина распространяется под влиянием “скользящей воды”, и мы полагаем, что MDR асимптота описывает коэффициент сопротивления турбулентному потоку. При формулировании задачи мы будем опираться на работу [48], в которой авторы исследовали аналогичную задачу для случая распространения полубесконечной трещины в непроницаемой горной породе под влиянием ламинарно-турбулентного потока “скользящей воды”. В данной части диссертации, анализируется как утечки в пласт, описываемые законом Картера, влияют на трансформацию режима течения внутри канала трещины. Сначала мы обсудим постановку задачи и систему уравнений. Затем будут получены предельные режимы распространения полубесконечной трещины. Впоследствии будут представлены частные решения задачи в терминах профиля раскры-

тия и эффективного давления, и мы проведем сравнение решений задачи о распространении полубесконечной трещины в проницаемом и непроницаемом резервуарах [48]. В завершении раздела мы проанализируем параметрическое пространство задачи, построив карты с предельными режимами распространения полубесконечной трещины, и изучив зависимость положения точки смены режима течения внутри канала трещины при различных условиях роста трещины.

В разделе 3.2 рассматривается модель радиальной трещины ГРП, распространяющейся в проницаемом пласте под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды”. Основной целью исследования является анализ комбинированных эффектов ламинарно-турбулентного течения водного раствора с полимерными добавками, понижающими трение, и утечек жидкости в пласт. Сначала мы приведем формулировку задачи, опираясь на работу [48], и опишем численную схему. Затем представим решения задачи, соответствующие типичным промысловым случаям. На следующем шаге мы рассмотрим предельные режимы роста трещины, и в завершении, изучим параметрическое пространство задачи.

### **3.1 Модель полубесконечной трещины**

#### **3.1.1 Постановка задачи**

В данном разделе мы обсудим постановку задачи о кончике трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения внутри канала трещины. На рисунке 3.1 представлен схематический рисунок рассматриваемой модели. Основные предположения модели и уравнения совпадают с упомянутыми в разделе 1.1 за исключением относящихся к течению жидкости внутри канала трещины. Именно их мы рассмотрим детально в текущем разделе.

В данной задаче жидкостью гидроразрыва является “скользящая вода”, которую можно охарактеризовать как Ньютоновская жидкость с вязкостью  $\mu$  и

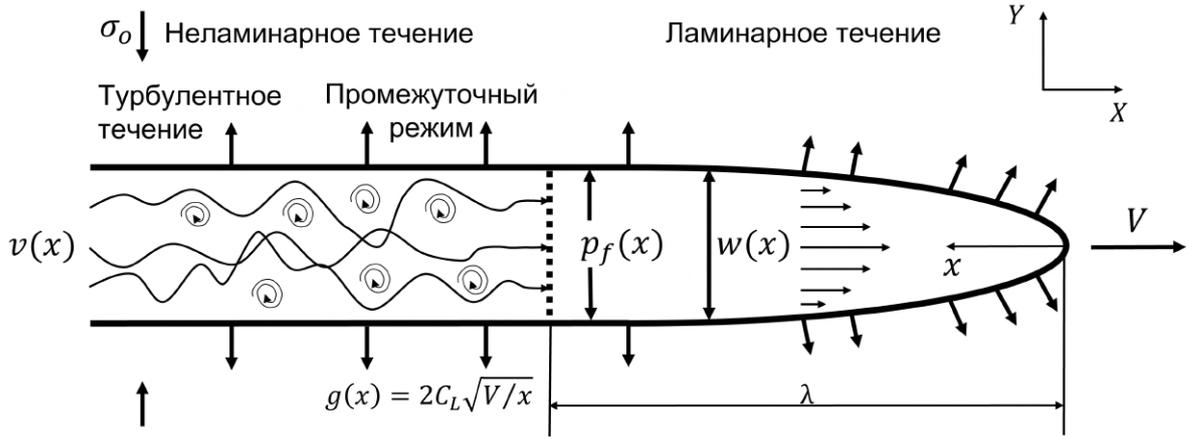


Рисунок 3.1 — Схематическое изображение модели кончика трещины, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения.

плотностью  $\rho$  при ламинарном режиме течения. Реология “скользкой воды” в турбулентном режиме течения будет обсуждаться в данном разделе позднее.

Далее мы определим число Рейнольдса для течения в плоском канале как  $Re = \rho v w / \mu$ , где  $v$  скорость течения. Число Рейнольдса изменяется от 0 до  $+\infty$  при удалении от фронта трещины. Трансформация режима течения от ламинарного режима к турбулентному происходит, когда число Рейнольдса равно критическому значению:  $Re = Re_c$ . Предположим, что точка перехода находится на расстоянии  $x = \lambda$  от фронта трещины (это значение является частью решения). Следовательно, ламинарный режим течения наблюдается в диапазоне  $x \in (0, \lambda)$ , где  $Re < Re_c$ , в то время как неламинарное течение, т. е. переходный режим и развитая турбулентность, реализуется в полубесконечной области  $x \in (\lambda, +\infty)$ , характеризующейся  $Re > Re_c$ . Преобразование режима течения учтено в модели через коэффициент сопротивления  $f$ .

Далее мы рассмотрим закон сохранения импульса, усредненный по ширине канала трещины:

$$v^2 = \frac{w}{\rho f} \frac{dp}{dx}, \quad (3.1)$$

где  $f$  коэффициент сопротивления Фаннинга. В случае ламинарного режима течения, уравнение (3.1) имеет вид закона Пуазейля, приведенный в уравнении (1.9). Сравнивая уравнения (3.1) и (1.9), можно получить формулу для коэффициента сопротивления при ламинарном режиме течения:  $f^{\text{lam}} = 12/Re$ . Коэффициент сопротивления Фаннинга для ламинарного течения в трубе круглого сечения равен  $f_d^{\text{lam}} = 16/Re_d$ , где  $Re_d = \rho v d / \mu$  — число Рейнольдса. В результате, мы получим связь числа Рейнольдса для течения в круглой трубе

и плоском канале:  $Re_d = 4/3 \cdot Re$ . Данное соотношение необходимо для преобразования кривых для коэффициента сопротивления, полученных для трубы круглого сечения [104], чтобы их можно было применить для течения в плоском канале (трещина гидроразрыва), т. е.  $f = f(Re_d) = f(4/3 \cdot Re)$  [48]. Далее мы определим нормализованный коэффициент сопротивления  $\tilde{f} = f/f^{\text{lam}}$  [47] и перепишем уравнение (3.1) к виду:

$$v = \frac{w^2}{M' \tilde{f}} \frac{dp}{dx}, \quad (3.2)$$

Мы уже рассмотрели ламинарный режим течения, и сейчас перейдем к обсуждению турбулентного режима, для которого  $Re > Re_c$ . Так как жидкость гидроразрыва является “скользкой водой”, то мы будем полагать, что ее реологические свойства в турбулентном режиме течения описываются MDR асимптотой – феноменологическим соотношением для коэффициента сопротивления, предложенным в работах [102; 103] на основе экспериментальных данных:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 19 \log_{10} (Re_d \sqrt{f}) - 32.4, \quad (3.3)$$

В модели кончика трещины и в модели радиальной трещины, которая будет обсуждаться позднее, мы будем использовать аппроксимацию уравнения (3.3), предложенную в работе [48]:

$$f = f_0 Re_d^{-n} = f'_0 Re^{-n}, \quad (3.4)$$

где  $f_0 = 1.78$ ,  $n = 0.7$  и  $f'_0 = f_0(4/3)^{-n} = 1.46$ .

На рисунке 3.2 изображена функция  $f(Re)$  для ламинарного и турбулентного режимов течения в традиционных координатах (а) и в координатах Прандля-Кармана (b). Ламинарная ветвь представлена синей линией; асимптота Вирка (3.3) нарисована зеленой линией, а ее аппроксимация (3.4) – красной линией. Путем сравнения красной и зеленой линий можно увидеть, что аппроксимация MDR асимптоты применима с точностью 5% в зоне  $Re \in (10^3, 1.5 \cdot 10^4)$ . Также мы привели корреляцию Блаузиуса (оранжевая линия), описывающую поведение ньютоновской жидкости (например, чистой воды) при турбулентном течении в трубе с гладкими стенками.

Далее мы определим функцию для коэффициента сопротивления во всем диапазоне чисел Рейнольдса, т. е. от ламинарного режима до турбулентного по

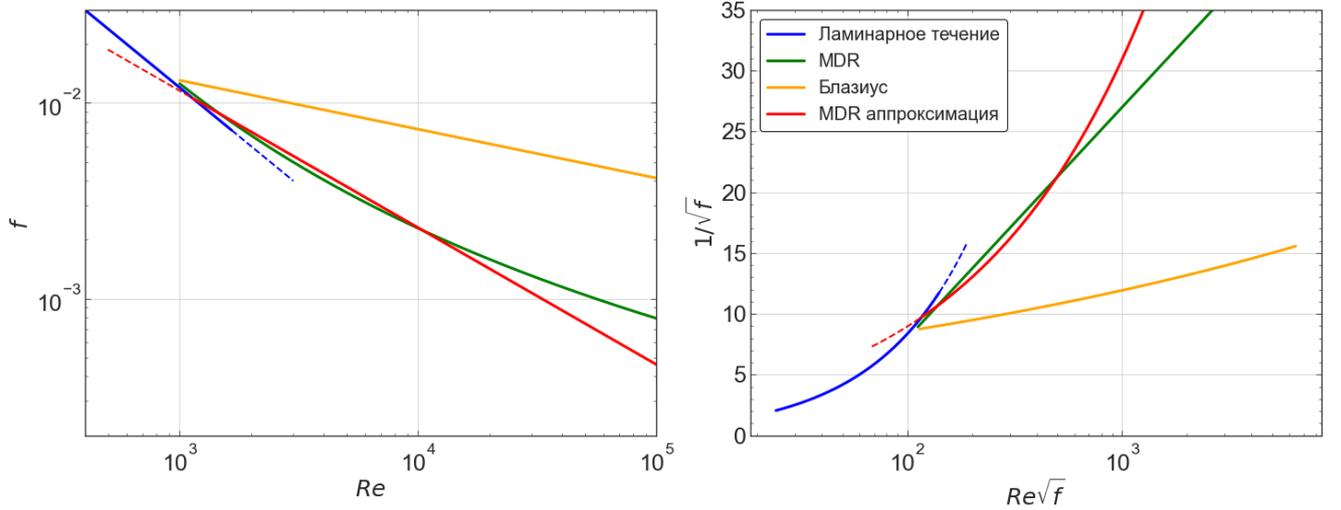


Рисунок 3.2 — Коэффициент сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса в традиционных координатах (a) и в координатах Прандля-Кармана (b). Ламинарная ветвь изображена синим цветом, MDR асимптота (3.3) и ее аппроксимация (3.4) зеленым и красным цветами, соответственно. Корреляция Браузиуса для турбулентного течения ньютоновской жидкости в трубе с гладкими стенками изображена оранжевым цветом. Штриховые линии используются для изображения продолжением ламинарной ветви и аппроксимации MDR асимптоты за пределами их точки пересечения.

аналогии с работой [48]:

$$f = \begin{cases} 12/Re, & Re \leq Re_c, \\ f'_0 Re^{-n}, & Re > Re_c, \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $Re_c$  критическое число Рейнольдса для течения “скользящей воды”. Данное критическое значение определяется из пересечения ламинарной и турбулентной (3.4) ветвей, чтобы получившаяся функция  $f(Re)$  была непрерывна:  $Re_c = (12/f'_0)^{1/(1-n)} = 1132.6$ . Коэффициент сопротивления  $f(Re)$ , записанный в уравнении (3.5), представлен на рисунке 3.2 комбинацией синей (ламинарная часть) и красной (турбулентная часть) линий.

Аналогично уравнению (3.5) мы запишем выражение для нормализованного коэффициента сопротивления  $\tilde{f}$ :

$$\tilde{f} = \begin{cases} 1, & Re \leq Re_c, \\ f''_0 \cdot Re^{1-n}, & Re > Re_c, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $f''_0 = f'_0/12 = 0.122$ .

В завершении раздела мы сравним значения критического числа Рейнольдса для течения “скользящей воды” и чистой воды. Известно, что при

течении воды в трубе круглого сечения критическое число Рейнольдса равно  $(Re_d)_c \approx 2100$ , означая, что трансформация режима течения в случае плоского канала происходит при  $Re_c = 3/4 \cdot (Re_d)_c \approx 1575$ . Таким образом, переход от ламинарного режима к турбулентному для “скользящей воды” осуществляется при меньшем числе Рейнольдса, чем для чистой воды.

### 3.1.2 Предельные режимы распространения трещины

В разделе 2.1 мы обсуждали концепцию предельных режимов роста трещины гидроразрыва, которая заключалась в идее, что предельный режим (называемый также узловым решением) реализуется при доминировании определенных механизмов диссипации энергии и баланса жидкости. Обсуждение проводилось для полубесконечной трещины с утечками, зависящими от давления. В настоящем разделе диссертации мы рассмотрим узловые решения для модели кончика трещины с ламинарно-турбулентным течением и утечками в пласт.

Коэффициент утечек  $C'$  контролирует разделение нагнетаемой в пласт жидкости между трещиной и резервуаром, а параметры  $M'$  и  $K'$  влияют на разделение диссипируемой энергии. В данной модели у нас также присутствует число Рейнольдса, которое показывает какой режим течения реализуется. В данной модели мы можем различить пять предельных случаев: три из них относятся к модели с ламинарным режимом течения внутри канала трещины, в то время как оставшиеся два режима связаны с полубесконечной трещиной, распространяющейся под влиянием турбулентного режима течения.

**k:** Трещиностойкость ( $M' = 0$ );

**m:** Трещина-вязкость-ламинарное течение ( $C' = 0$ ,  $K' = 0$ ,  $Re < Re_c$ );

**$\tilde{m}$ :** Утечки-вязкость-ламинарное течение ( $C' \rightarrow \infty$ ,  $K' = 0$ ,  $Re < Re_c$ );

**t:** Трещина-вязкость-ламинарное течение ( $C' = 0$ ,  $K' = 0$ ,  $Re > Re_c$ );

**$\tilde{t}$ :** Утечки-вязкость-турбулентное течение ( $C' \rightarrow \infty$ ,  $K' = 0$ ,  $Re > Re_c$ ).

В разделе 2.1 мы приводили решения для предельных режимов  $k$ ,  $m$ ,  $\tilde{m}$ . Однако, необходимо отметить, что при добавлении в модель кончика трещины смены режима течения, область с ламинарным режимом ограничена и располагается вблизи фронта трещины ( $Re \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ ). Таким образом, можно

ожидать, что область применимости узлового решения  $m$  должна сместиться в среднее поле.

Далее, мы обсудим турбулентные узловые решения  $t$  и  $\tilde{t}$ . В работе [47] данные решения приведены для случая полубесконечной трещины, распространяющейся под влиянием чистой воды, а в работе [48] получено решение для  $t$  асимптоты в случае “скользящей воды”, реология которой описывалась MDR асимптотой. В дальнейшем мы выпишем формулы для узлового решения  $t$ , а также выведем выражения для характеристик полубесконечной трещины в режиме  $\tilde{t}$ .

Подставляя выражение для нормализованного коэффициента сопротивления  $\tilde{f}$  для турбулентного режима течения (3.6) в лубрикационное уравнение (3.2) и используя формулу (1.7), мы получим выражение, аналогичное случаю течения степенной жидкости в канале трещины [39]:

$$\left( V + 2C' \frac{\sqrt{Vx}}{w} \right)^m = \frac{w^{n+1}}{c} \frac{dp}{dx}, \quad (3.7)$$

где  $m = 2 - n$  и  $c = f_0' \mu^n \rho^{1-n}$ .

Используя рассуждения, приведенные в работе [43] для модели кончика трещины с ламинарным течением, мы можем предположить, что  $t$  режим представляет собой асимптотическое поведение общего решения задачи в дальнем поле. Чтобы получить аналитически решение для  $t$  узла, необходимо мономиальное решение (приведено в работе [43]) подставить в уравнение (3.7) и сопоставить слагаемое  $V^m$  с правой частью. В результате мы получим выражение, приведенное ранее в работе [48],

$$w_t = \beta_t \ell_t^{n/(n+2)} x^{2/(n+2)}, \quad p_t = \delta_t E' (\ell_t/x)^{n/(n+2)}; \quad \ell_t = (cV^m/E')^{1/n}, \quad (3.8)$$

где  $\ell_t$  характерный масштаб длины, связанный с асимптотой  $t$ , а коэффициенты равны следующим величинам:

$$\beta_t = \left( \frac{2(n+2)^2}{n} \operatorname{tg} \left( \frac{-2\pi}{n+2} \right) \right)^{1/(n+2)}, \quad \delta_t = \beta_n f \left( \frac{2}{n+2} \right). \quad (3.9)$$

Используя уравнения (3.8) и (3.9), можно заметить, что асимптота  $t$  принимает вид асимптоты  $m$ , когда  $n = m = 1$  и  $c = M'$  (степени и коэффициенты соответствуют случаю ламинарного режима течения внутри канала трещины).

Далее мы рассмотрим предельное решение утечки-вязкость-турбулентное течение  $\tilde{t}$ , которое, как можно ожидать, будет реализовываться в среднем поле общего решения задачи, когда эффекты турбулентности и утечек в пласт оказывают значительное влияние на процесс распространения полубесконечной трещины (мы будем оценивать данные эффекты количественно при помощи безразмерных чисел  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ , которые будут определены в следующем разделе). Для вывода предельного решения  $\tilde{t}$  аналитически, мы сопоставляем слагаемое, отвечающее за утечки по Картеру, с правой частью уравнения (3.7) и ищем решение в мономиальной форме [43], что приводит к следующему результату:

$$w_{\tilde{t}} = \tilde{\beta}_{\tilde{t}} \ell_{\tilde{t}}^{(m+2n)/(2(m+n+2))} x^{(m+4)/(2(m+n+2))}, \quad p_{\tilde{t}} = \tilde{\delta}_{\tilde{t}} E' (\ell_{\tilde{t}}/x)^{(m+2n)/(2(m+n+2))}; \quad (3.10)$$

где  $\ell_{\tilde{t}} = (2^m c C^m V^{m/2} / E')$  масштаб длины, связанный с  $\tilde{t}$  режимом ( $w_{\tilde{t}}(\tilde{t}) \sim \ell_{\tilde{t}}$ ), а коэффициенты равны следующим величинам:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{\tilde{t}} &= \left( \frac{2^4 (m+n+2)^2}{(m+4)(m+2n)} \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi(m+4)}{2(m+n+2)} \right) \right)^{1/(m+n+2)}, \\ \tilde{\delta}_{\tilde{t}} &= \tilde{\beta}_n f \left( \frac{m+4}{2(m+n+2)} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если мы подставим значения  $s$ ,  $n$ ,  $m$ , соответствующие ламинарному режиму течения, в уравнение (3.10), (3.11), мы получим решение для предельного режима  $\tilde{m}$ .

### 3.1.3 Решение задачи

#### 3.1.3.1 Система уравнений в безразмерной форме

В данном разделе мы рассмотрим систему уравнений, описывающую модель кончика трещины, распространяющейся под воздействием ламинарно-турбулентного течения в проницаемой горной породе, в обезразмеренном виде. Нормализация системы необходима для сокращения числа параметров задачи.

Для нормализации мы воспользуемся масштабированием  $mk$ , в котором масштабы длины, раскрытия и давления имеют вид:

$$\ell_{mk} = \frac{\ell_k^3}{\ell_m^2} = \frac{K'^6}{E'^4 V^2 M'^2}, \quad w_{mk} = \frac{\ell_k^2}{\ell_m} = \frac{K'^4}{E'^3 V M'}, \quad p_{mk} = \frac{E' \ell_m}{\ell_k} = \frac{E'^2 V M'}{K'^2}, \quad (3.12)$$

Безразмерное расстояние до кончика трещины, раскрытие и эффективное давление определяются следующим образом:

$$\xi = x/\ell_{mk}, \quad \Omega = w/w_{mk}, \quad \Pi = p/p_{mk}. \quad (3.13)$$

Используя параметры (3.13), мы перепишем систему уравнений:

– Критерий распространения:

$$\Omega = \sqrt{\xi}, \quad \xi \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

– Уравнение упругости:

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\Omega}{ds} \frac{ds}{\xi - s}. \quad (3.15)$$

– Лубрикационное уравнение:

$$\frac{\Omega^2}{\tilde{f}} \frac{d\Pi}{d\xi} = 1 + \frac{\chi\sqrt{\xi}}{\Omega}, \quad (3.16)$$

где мы ввели безразмерный коэффициент Картера:

$$\chi = \frac{2C'E'}{\sqrt{V}K'}, \quad (3.17)$$

и использовали нормализованный коэффициент сопротивления  $\tilde{f}$ :

$$\tilde{f} = \begin{cases} 1, & \xi \leq \Lambda, \\ f_0'' \cdot \mathcal{R}^{1-n} (\Omega + \chi\sqrt{\xi})^{1-n}, & \xi > \Lambda, \end{cases} \quad (3.18)$$

В уравнение (3.18), мы также определили характеристическое число Рейнольдса по аналогии с работой [48]:

$$\mathcal{R} = 12\rho K'^4 / (E'^3 M'^2) \quad (3.19)$$

и  $\Lambda(\chi, \mathcal{R}) = \lambda/\ell_{mk}$  – расстояние до кончика трещины, при котором происходит смена режима из ламинарного в турбулентный при движении от фронта

трещины. Для величины  $\Lambda$  мы также запишем следующее соотношение, исходя из факта, что число Рейнольдса в обсуждаемой точке равно критическому значению:

$$\Omega(\Lambda) + \chi\sqrt{\Lambda} = Re_c/\mathcal{R}. \quad (3.20)$$

Система уравнений (3.14) – (3.18) формулируется относительно профилей раскрытия  $\Omega(\xi, \chi, \mathcal{R})$  и эффективного давления  $\Pi(\xi, \chi, \mathcal{R})$ , зависящих от двух безразмерных параметров  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ , а также безразмерного расстояния до кончика трещины  $\xi$ . Рассматриваемая модель имеет два предельных случая: 1) когда  $\chi \rightarrow 0$  она переходит в модель [48] для ламинарно-турбулентного кончика трещины в непроницаемой горной породе; 2) в случае  $\mathcal{R} \rightarrow 0$  модель трансформируется в ламинарный случай [43]. Общее решение системы уравнений (3.14) – (3.18) находим численно, используя алгоритм, описанный в работе [43], с модификациями, учитывающими специфику рассматриваемой модели. В алгоритме используется явная форма общего решения задачи в ближнем и дальнем поле, и данном случае это асимптоты  $k$  и  $t$  соответственно. Используя масштабирование  $mk$ , мы запишем асимптоты в безразмерном виде (в случае  $k$  решения воспользуемся первым ненулевым слагаемым в разложении):

$$\begin{aligned} \text{Ближнее поле } (k): \quad \Omega_k &= \xi^{1/2}, \quad \Pi_k = (1 + \chi) \ln(\xi/\xi_0); \\ \text{Дальнее поле } (t): \quad \Omega_t &= \beta_t \xi^{2/(n+2)} \mathcal{R}^{(1-n)/(n+2)} f_0''^{1/(2+n)}, \\ \Pi_t &= \delta_t \xi^{-n/(n+2)} \mathcal{R}^{(1-n)/(n+2)} f_0''^{1/(2+n)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где коэффициент  $\xi_0$  является частью решения задачи.

Варьируя значения размерных параметров задачи в рамках диапазонов, свойственных типичным промысловым случаям, можно оценить значения безразмерных параметров  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ . Для этого будем использовать подход, описанный в секции 2.1. На основе диапазонов, приведенных в разделе 2.1, и, полагая, что плотность жидкости гидроразрыва равна плотности воды, мы получим  $\mathcal{R} \in (0.1, 320.2)$  и  $\chi \in (0.007, 2032.4)$ . Трещиностойкость горной породы  $K_{Ic}$  оказывает наибольшее воздействие на параметр  $\mathcal{R}$ , в то время как проницаемость горной породы во многом определяет диапазон значений параметра  $\chi$ .

### 3.1.3.2 Примеры решения задачи

В данном разделе диссертации будут представлены примеры общего решения задачи, посчитанные численно, в виде нормализованных профилей раскрытия  $\Omega$  и давления  $\Pi$ , зависящих от безразмерного расстояния до кончика трещины  $\xi$  и соответствующих определенным значениям параметров  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ .

Сначала мы рассмотрим случай, в котором безразмерный коэффициент утечек равен  $\chi = 500$ , а характеристическое число Рейнольдса равно  $\mathcal{R} = 100$ . На рисунке 3.3 представлены полученные результаты. Профили раскрытия и давления в  $mk$  масштабировании изображены на рисунках (a) и (b), в то время как эти характеристики трещины, нормализованные на асимптоту дальнего поля (узловое решение  $t$ ) показаны на рисунках (c) и (d). Помимо решения задачи, соответствующего  $\chi = 500$  и  $\mathcal{R} = 100$ , которое изображено сплошной линией, мы также представили решение для  $\chi = 0$  и  $\mathcal{R} = 100$ , т. е. для случая непроницаемого резервуара, штриховой линией. В целях сравнения, мы также привели ламинарное решение для случая проницаемого пласта пунктирной линией. На рисунках 3.3(c) и (d) цветные пунктирные линии используются для изображения асимптот.

Далее мы обсудим профили раскрытия, представленные на рисунках 3.3 (a) и (c). Решения для ламинарно-турбулентного кончика трещины с и без утечек в пласт имеют одинаковые асимптотические поведения в ближнем (красная штриховая линия) и дальнем (коричневая штриховая линия) поле, представленные асимптотами  $k$  и  $t$ , соответственно. Из рисунка 3.3(c) видно, что области применимости этих асимптот шире в случае  $\chi = 0$ , чем при наличии утечек в окружающий резервуар (случай  $\chi = 500$ ). В среднем поле сопоставляемые решения отличаются значительно друг от друга, а именно, раскрытие трещины больше при любом  $\xi$  в случае ненулевых утечек. Решение для непроницаемого пласта ( $\chi = 0$ ) аппроксимируется в среднем поле асимптотой  $m$  (синяя штриховая линия), что согласуется с результатами, полученными в работе [48]. В свою очередь, решение для проницаемого пласта  $\chi = 500$  может быть приближено двумя асимптотическими решениями в среднем поле: асимптотой  $\tilde{m}$  (зеленая штриховая линия) ближе к кончику трещины и впоследствии асимптотой  $\tilde{t}$  (пурпурная штриховая линия). Из иллюстрации 3.3, можно заметить, что расстояние до кончика трещины, на котором происходит трансформация режима

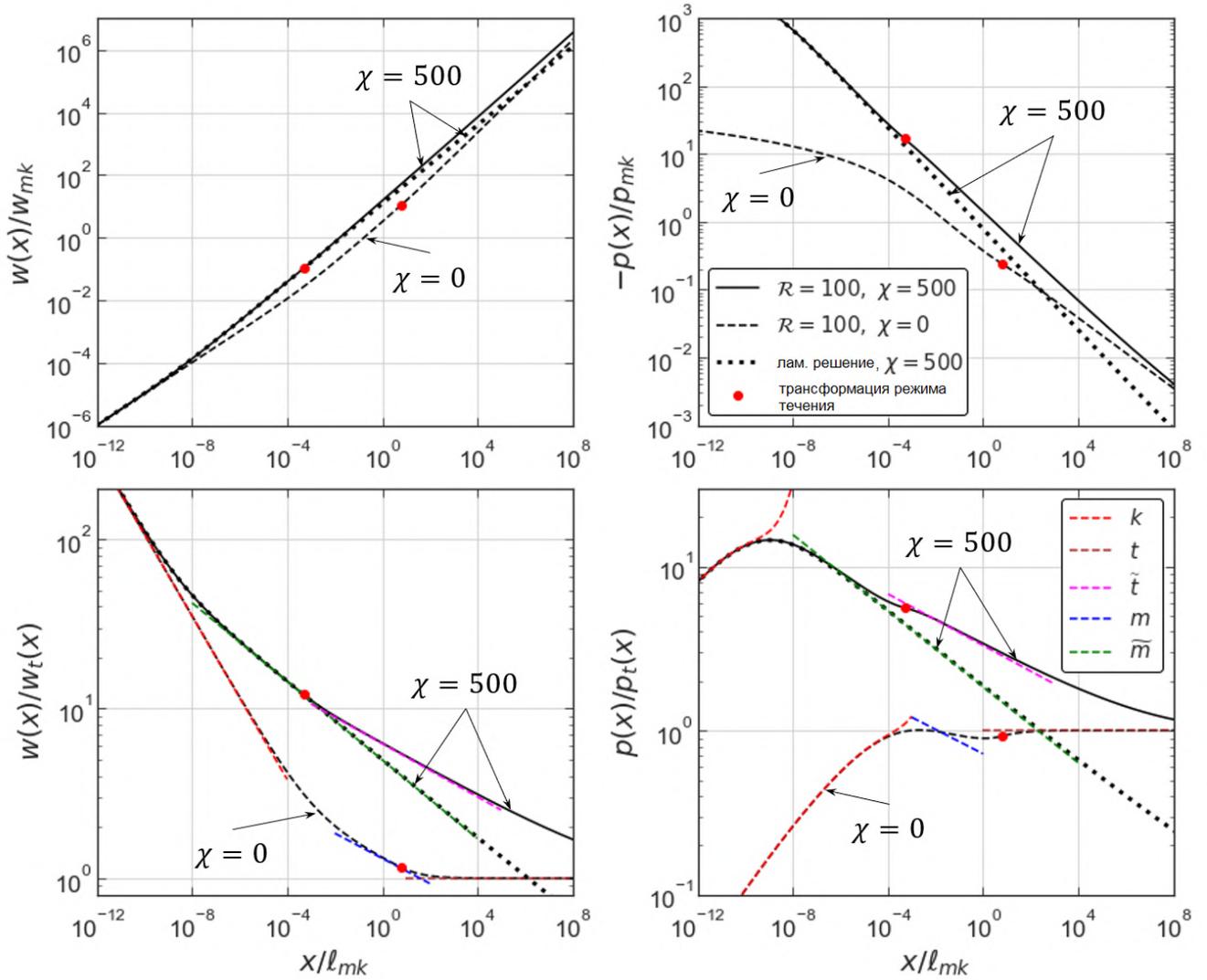


Рисунок 3.3 — Решение задачи для случая  $\chi = 500$ ,  $\mathcal{R} = 100$  в терминах нормализованных профилей раскрытия (а) и эффективного давления (б) в  $mk$  масштабировании. На рисунках (с) и (д) представлены аналогичные профили, нормализованные на асимптоту дальнего поля ( $t$  узловое решение). Аналогичное решение для случая непроницаемого резервуара ( $\chi = 0$ ) представлено черной штриховой линией. Ламинарное решение для проницаемого резервуара ( $\chi = 500$ ) изображено черной пунктирной линией. На рисунках (с) и (д), узловые решения показаны цветными штриховыми линиями. На рисунке (д) асимптотическое разложение для узла  $k$  (красная штриховая линия) нарисовано дважды: для случая с и без утечек. Красный маркер отмечает местонахождения точки, в которой происходит трансформация режима течения.

течения, располагается ближе к фронту в случае проницаемой горной породы ( $\Lambda(500, 100) \approx 5 \cdot 10^{-4}$  и  $\Lambda(0, 100) \approx 6.7$ ). Сравнивая ламинарное ( $n = 1$ ,  $f_0'' = 1$ ) и ламинарно-турбулентное ( $\mathcal{R} = 100$ ) решения для проницаемого резервуара ( $\chi = 500$ ), можно отметить, что они совпадают в ламинарной области ( $\xi < \Lambda(500, 100)$ ), в то время как за пределами точки перехода  $\xi > \Lambda(500, 100)$  раскрытие трещины с ламинарно-турбулентным течением больше, чем у трещи-

ны с ламинарным течением внутри канала. Среднее поле ламинарного решения с утечками аппроксимируется  $\tilde{m}$  узловым решением (рисунок 3.3(c)).

Далее мы перейдем к обсуждению профилей эффективного давления (рисунки 3.3(b) и (d)). Можно заметить, что поведение профиля давления для  $\mathcal{R} = 100$  и проницаемого пласта отличается от аналогичного случая для непроницаемого пласта в ближнем и среднем поле, однако, данные решения имеют одинаковое асимптотическое поведение в дальнем поле, которое описывается  $t$  асимптотой. Так как эффективное давление в  $k$  узле равно 0, мы воспользуемся следующим членом в асимптотическом разложении [43], который зависит от безразмерного коэффициента утечек  $\chi$  (мы полагаем, что область применимости  $k$  решения располагается внутри зоны с ламинарным течением). Поэтому на рисунке 3.3(d) приведены две красные штриховые линии, соответствующие различным  $\chi$ . Из иллюстрации можно увидеть, что общее решение в среднем поле может быть приближено асимптотическими решениями  $m$ ,  $\tilde{m}$  и  $\tilde{t}$ , однако, области из применимости для профилей давления значительно меньше чем для профилей раскрытия. Аналогично профилям раскрытия, профили давления в ламинарном и ламинарно-турбулентном случаях с ненулевыми утечками совпадают внутри области  $\xi < 10^{-6}$ , однако ее длина значительно меньше  $\Lambda$ .

Зависимость решения задачи от определяющих параметров  $\chi$  и  $\mathcal{R}$  исследуется на рисунке 3.4. На рисунке 3.4(a) мы проиллюстрировали как раскрытие

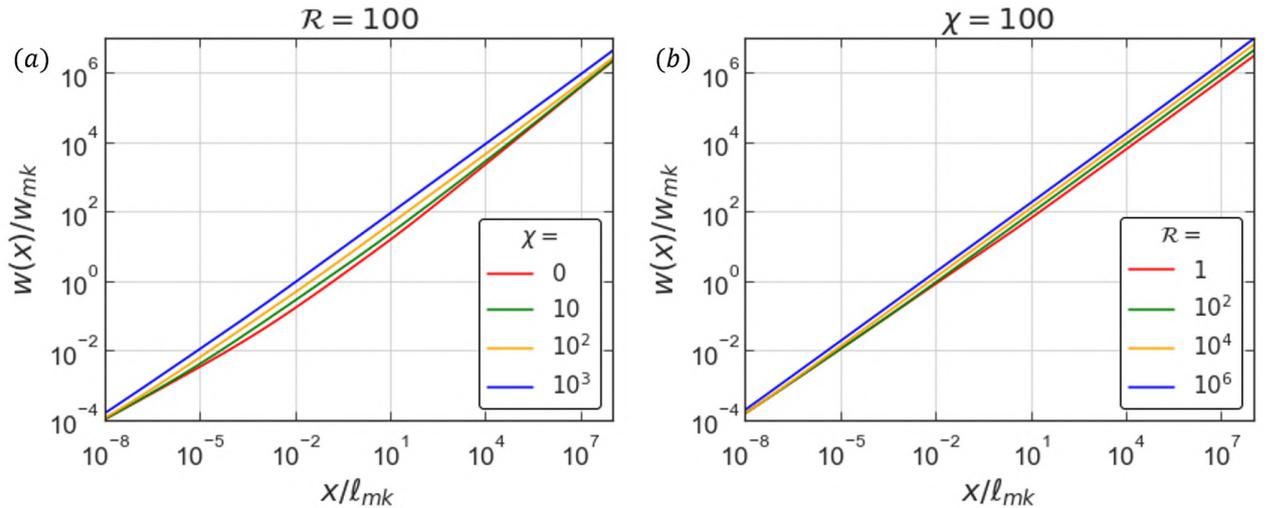


Рисунок 3.4 — Solutions for the fracture opening in the  $mk$ -scaling corresponding to (a):  $\mathcal{R} = 100$  and  $\chi = 0, 10, 10^2, 10^3$  and (b):  $\chi = 100$  and  $\mathcal{R} = 1, 10^2, 10^4, 10^6$ .

трещины изменяется при различных значениях безразмерного коэффициента

утечек  $\chi$ , в то время как характеристическое число Рейнольдса зафиксировано. Все профили в ближнем поле начинаются с  $k$  асимптоты, а в дальнем поле они имеют общую  $t$  асимптоту. В среднем поле трещина становится шире с увеличением  $\chi$ . На рисунке 3.4(b) мы привели исследование зависимости раскрытия трещины от характеристического числа Рейнольдса при фиксированном значении  $\chi$ . В ближнем поле зависимости раскрытия от расстояния до кончика трещины имеют общую асимптоту  $k$ , а в дальнем поле их поведение различно, т. к.  $t$  асимптота зависит от характеристического числа Рейнольдса  $\Omega_t \sim \mathcal{R}^{(1-n)/(n+2)}$ , т. е. чем больше  $\mathcal{R}$ , тем больше раскрытие трещины в дальнем поле.

### 3.1.4 Обсуждение решения задачи

#### 3.1.4.1 Анализ положения точки трансформации режима течения внутри канала трещины

В данном разделе мы проведем исследование как положение точки перехода между ламинарным и турбулентным режимами течения, которое в  $mk$  масштабировании обозначается как  $\Lambda(\chi, \mathcal{R})$ , зависит от определяющих параметров задачи. Данное характеристическое расстояние до кончика трещины является решением нелинейного уравнения (3.20), которое решается с учетом полученного численно профиля раскрытия полубесконечной трещины.

Когда утечки учитываются в модели кончика трещины, эффективно скорость потока жидкости внутри канала трещины  $v(x)$  увеличивается за счет слагаемого, полученного из закона Картера, и число Рейнольдса становится выше критического значения  $Re_c$  ближе к фронту трещины. Данная концепция подтверждается численными расчетами, представленными в предыдущем разделе, где значения  $\Lambda(500, 100) = 5 \cdot 10^{-4}$  и  $\Lambda(0, 100) = 6.7$  указывают, что область с ламинарным течением в случае  $\chi > 0$  меньше, чем в случае непроницаемой горной породы или, иными словами, зона с турбулентным течением занимает большую часть трещины в случае проницаемого резервуара.

Далее мы исследуем поведение  $\Lambda$  во всем параметрическом пространстве  $(\chi, \mathcal{R})$ . На рисунке 3.5(a) представлена карта со значениями  $\Lambda(\chi, \mathcal{R})$ , а на рисунках 3.5(b) и (c) показаны зависимости положения точки перехода при фиксированном характеристическом числе Рейнольдса и при фиксированном коэффициенте утечек, соответственно. Таким образом, графики 3.5(b) и (c) являются сечениями карты 3.5(a) вдоль осей. Используя рисунки 3.5(a) и (b),

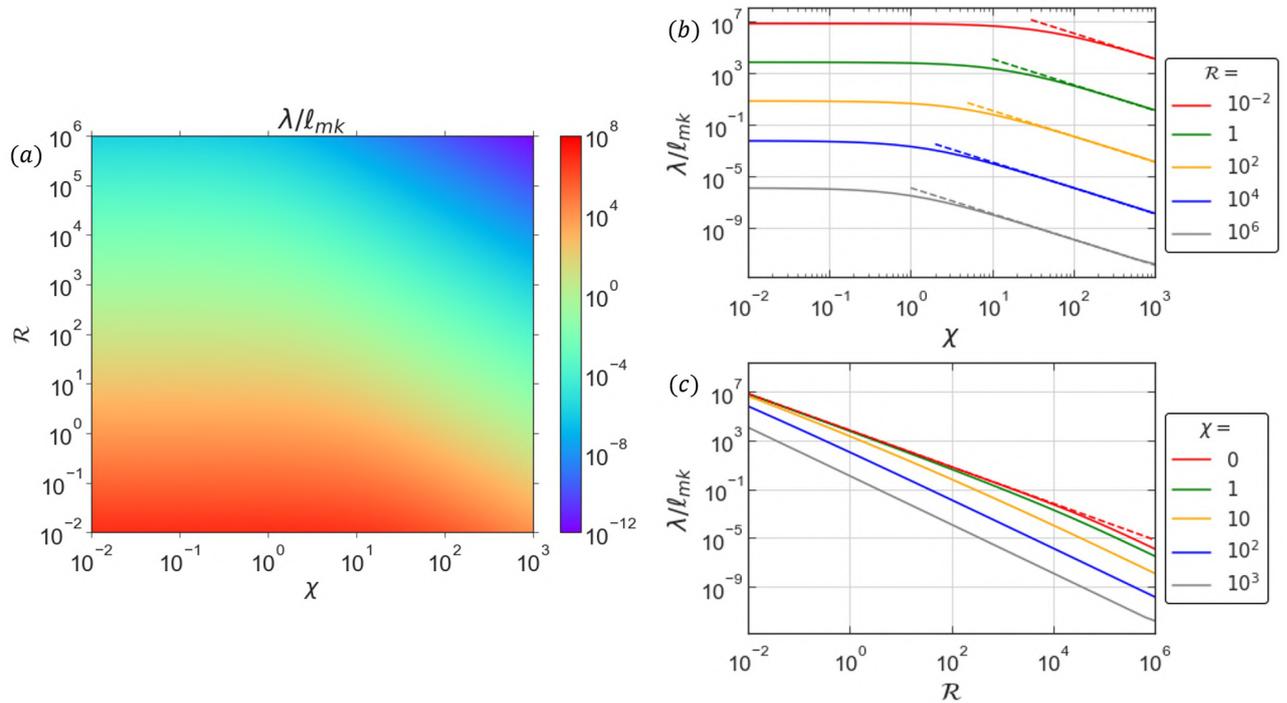


Рисунок 3.5 — Расстояние до кончика трещины, на котором происходит смена режима течения из ламинарного в турбулентный, в зависимости от безразмерных параметров  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ . Карта со значениями  $\Lambda(\chi, \mathcal{R})$  изображена на рисунке (a). Сечения карты вдоль осей изображены на рисунках (b) и (c): на иллюстрации (b) зафиксировано характеристическое число Рейнольдса, а на иллюстрации (c) зафиксирован коэффициент утечек. Цветные штриховые линии используются для асимптотик, полученных аналитически:  $\Lambda(\chi \gg 1, \mathcal{R} = \text{const})$  на рисунке (b) и  $\Lambda(0, \mathcal{R})$  на рисунке (c).

можно заметить, что для любого значения характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R}$ , положение точки смены режима течения в канале трещины остается неизменным до определенного значения параметра утечек  $\chi$ . Таким образом, в некотором диапазоне значений  $\chi$  утечки не влияют на смену режима течения. Если интенсивность утечек увеличивается, то точка перехода приближается к фронту трещины, т. е. область трещины, внутри которой реализуется ламинарный режим течения сужается. Из кривых на рисунке 3.5(c), можно увидеть, что  $\Lambda$  является убывающей функцией характеристического числа Рейнольдса при фиксированном коэффициенте утечек. Функция  $\Lambda$  хорошо аппроксимируется

аналитической зависимостью  $\Lambda \sim Re_c^2(\mathcal{R}\chi)^{-2}$  при  $\chi \gg 1$  (цветная штриховая линия на рисунке 3.5(b)). В свою очередь функция  $\Lambda(0, \mathcal{R})$  аппроксимируется зависимостью  $\Lambda \sim Re_c^{3/2}(\beta_0\mathcal{R})^{-3/2} = 6826\mathcal{R}^{-3/2}$  при  $\mathcal{R} < 10^4$  (красная штриховая линия на рисунке 3.5(c)). В работе [48] авторы использовали степенную функцию  $\sim \mathcal{R}^{-3/2}$  для аппроксимации  $\Lambda(0, \mathcal{R})$  во всем диапазоне значений  $\mathcal{R}$  и получили  $\Lambda \sim 5000\mathcal{R}^{-3/2}$ .

### 3.1.4.2 Границы применимости узловых решений

В настоящем разделе, мы определим зоны, внутри которых общее решение задачи может быть описано с приемлемой точностью тем или иным предельным (узловым) решением. Аналогично работе [43] границу применимости асимптотического решения мы будем определять как расстояние до кончика трещины, на котором профиль раскрытия в общем решении задачи отличается от узлового решения на 1%. Верхнюю границу применимости  $k$  узла мы обозначим за  $x_k$ , т. е. данный узел довольно точно описывает общее решение задачи внутри интервала  $x \in (0, x_k)$ . Нижнюю границу области применимости  $t$  узла мы обозначим как  $x_t$ , и это узловое решение описывает общее решение задачи в рамках полубесконечного интервала  $x \in (x_t, +\infty)$ . Схожим образом мы определим области применимости узловых решений в среднем поле:  $x \in (x_m^0, x_m^\infty)$  –  $m$  узел,  $x \in (x_{\tilde{m}}^0, x_{\tilde{m}}^\infty)$  –  $\tilde{m}$  узел,  $x \in (x_{\tilde{t}}^0, x_{\tilde{t}}^\infty)$  –  $\tilde{t}$  узел. Также мы определим несколько дополнительных границ. Во-первых, граница  $x_S = \xi_S \ell_{mk}$ :  $\Omega(\xi_S) = \chi\sqrt{\xi_S}/0.05$ , которая является расстоянием до кончика трещины, начиная с которого,  $x > x_S$ , утечками в пласт можно пренебречь. Во-вторых, т. к. аппроксимация MDR асимптоты (3.4) применима для чисел Рейнольдса в диапазоне  $Re < 1.5 \cdot 10^4$ , то мы определим границу  $x_B = \xi_B \ell_{mk}$ , связанную с указанным пределом  $\Omega(\xi_B) + \chi\sqrt{x_B} = 1.5 \cdot 10^4/\mathcal{R}$ , которая определит область  $x < x_B$  внутри которой аппроксимация (3.4) описывает реологию “скользящей воды” с приемлемой точностью.

На рисунке 3.6 изображены карты режимов внутри параметрического пространства  $(\chi, \mathcal{R})$  для следующих значений безразмерного коэффициента утечек:  $\chi = 0, 0.1, 1, 10, 50, 100, 500$  и  $1000$ . Границы применимости узловых решений нарисованы цветными линиями; расстояние до кончика, на котором происходит

смена режима течения внутри канала трещины отмечено черной штриховой линией; границы  $x_S$  и  $x_B$  отображены штрих-пунктирной и пунктирной черной линией, соответственно.

На рисунке 3.6(a) представлена карта режимов для случая непроницаемого резервуара и полученные результаты согласуются со статьей [48]. Сначала мы обсудим ближнее и дальнее поле, представленное асимптотами  $k$  и  $t$ . Из рисунков 3.6(a)–(h) можно сделать вывод, что граница  $\xi_k = x_k/\ell_{mk}$ , показанная красной линией, является функцией только безразмерного коэффициента утечек в рамках рассматриваемого диапазона значений характеристического числа Рейнольдса, т. е. коэффициент  $\mathcal{R}$  не влияет на узловое решение  $k$ . Таким образом, функция  $\xi_k(\chi)$ , полученная численно в данной диссертации, совпадает с аналогичным результатом, описанным в статье [43], в модели кончика трещины с ламинарным режимом течения внутри канала. Данное наблюдение можно объяснить следующим фактом, что  $k$  узел реализуется всегда внутри области трещины с ламинарным течением для анализируемой области параметрического пространства. Однако, для значений характеристического числа Рейнольдса больше  $10^6$  (решения для данных значений  $\mathcal{R}$  не приводятся), верхняя граница  $k$  режима начинает зависеть от коэффициента  $\mathcal{R}$ . С увеличением интенсивности утечек область применимости асимптоты ближнего поля сужается, т. е. граница  $x_k$  сдвигается в направлении фронта трещины. Обратное поведение наблюдается для нижней границы  $t$  режима (коричневая линия), которая удаляется от фронта трещины (на рисунках 3.6(g) и (h) данная граница находится за пределами расчетной области). Положение границы  $\xi_t = x_t/\ell_{mk}$  является нелинейной функцией определяющих параметров  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ . На рисунках 3.6(a) и (b) можно наблюдать реализацию  $m$  режима в среднем поле (граница обозначена синей линией), и этот режим возникает при  $\chi < 0.5$ . Начиная с  $\chi = 80$ , мы замечаем возникновение асимптоты  $\tilde{m}$  (рисунки 3.6(f)–(g), зеленая линия), а при значениях безразмерного коэффициента утечек  $\chi > 120$ , узловое решение  $\tilde{t}$  (пурпурная линия) описывает общее решение задачи в определенном диапазоне безразмерного расстояния до кончика трещины. Когда мы увеличиваем значение коэффициента  $\chi$ , области применимости асимптотик  $\tilde{m}$  и  $\tilde{t}$  расширяются.

Далее мы перейдем к обсуждению характеристических границ, представленных на рисунке 3.6. Положение точки трансформации режима течения внутри канала трещины ( $\lambda$ ) отмечено черной штриховой линией. Из иллюстраций можно сделать вывод, что область трещины, занятая ламинарным режимом

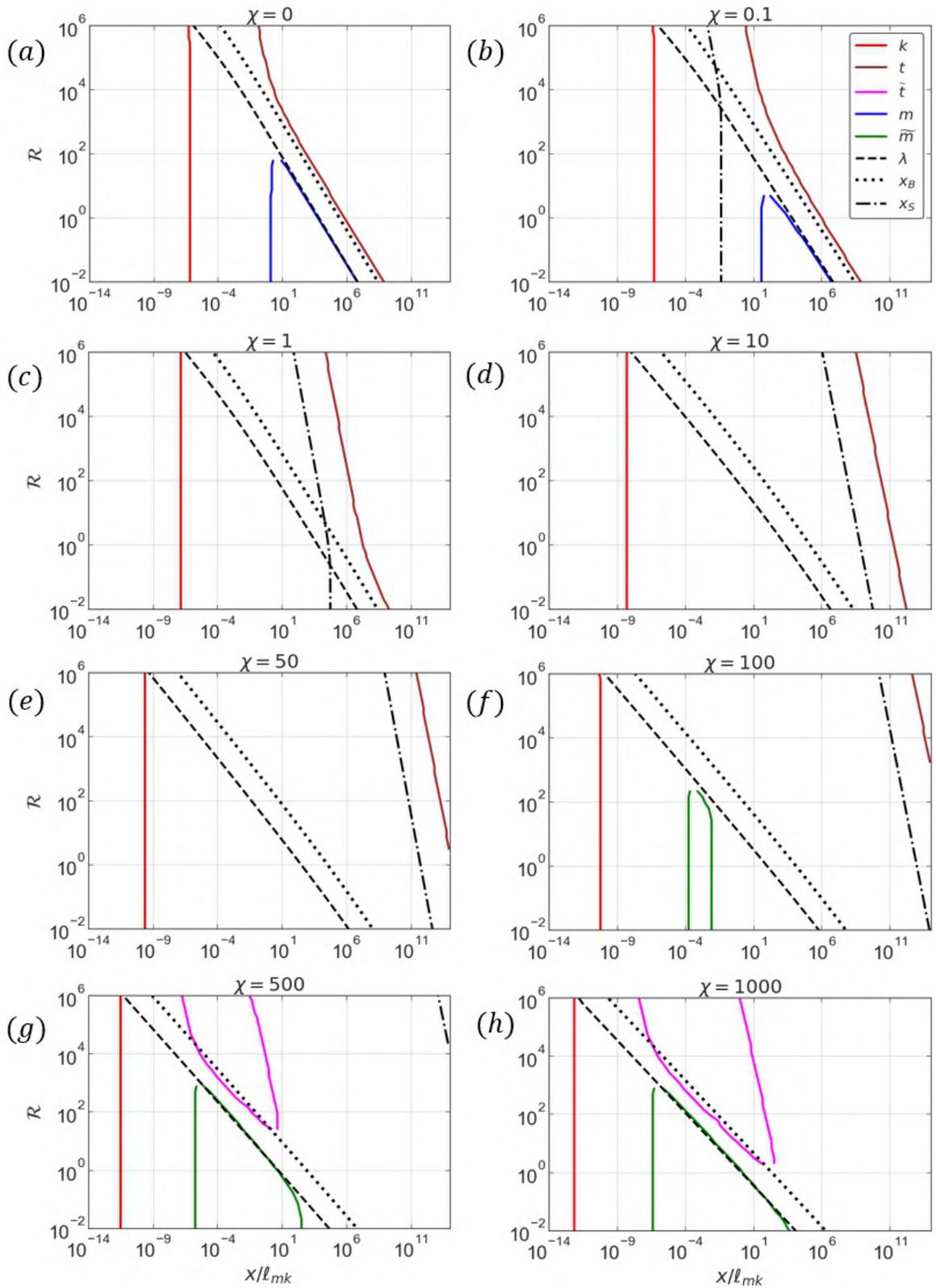


Рисунок 3.6 — Карты режимов, изображающие границы применимости предельных (узловых) решений, в координатах  $(x/\ell_{mk}, \mathcal{R})$  для различных значений безразмерного коэффициента утечек  $\chi$ . Расстояние от точки трансформации режима течения внутри канала трещины до фронта  $\lambda$  отмечено черной штриховой линией. Границы важности учета утечек  $x_S$  и правильности аппроксимации MDR асимптоты  $x_B$  изображены черной штрих-пунктирной и пунктирной линиями, соответственно.

течения, уменьшается при увеличении безразмерного коэффициента утечек  $\chi$ , т. е. граница между ламинарным и турбулентным режимами смещается ближе к фронту трещины. В результате можно сделать вывод, что в проницаемом резервуаре турбулентный режим течения внутри канала трещины оказывает более значительное влияние на свойства полубесконечной трещины, так как реализуется вдоль большей части трещины по сравнению со случаем непроницаемой горной породы [48]. На картах на рисунке 3.6 штрихпунктирной линией мы изобразили границу  $x_S$ , начиная с которой ( $x > x_S$ ), утечки в пласт не оказывают значительного влияния на решение задачи. Из результатов, показанных на рисунке 3.6, можно заметить, что граница  $x_S$  движется в направлении от кончика трещины при увеличении коэффициента  $\chi$ . Далее мы обсудим границу  $x_B$ , которая обозначена черной пунктирной линией. Данное характеристическое расстояние до кончика трещины означает верхнюю границу области применимости аппроксимации MDR асимптоты (3.4). Внутри интервала  $x \in (0, x_B)$  разработанное решение позволяет получить характеристики полубесконечной трещины с приемлемой точностью. Однако, в диапазоне  $x > x_B$  свойства трещины будут соответствовать случаю реологии “скользящей воды” с заниженным коэффициентом трения (рисунок 3.2). Можно отметить, что граница  $x_B$  параллельна (в двойном логарифмическом масштабе) границе между ламинарным и турбулентным режимами течения, а размер области с ‘корректным’ решением уменьшается с увеличением коэффициента утечек.

Далее мы обсудим ориентацию границ предельных решений, изображенных на рисунке 3.6. Мы аппроксимируем границы при помощи степенных функций  $\mathcal{R} \sim \xi^\alpha$ , где степень определим аналитически, а коэффициент пропорциональности будем находить численно. Известно, что ориентация границ определяется характерными масштабами длины, связанными с переходами между узловыми решениями.

На рисунках 3.6(a) и (b), граница  $x_m^0$  находится внутри зоны с ламинарным течением, т. е. она не зависит от характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R}$  (вертикальная линия). Аналогичное объяснение можно привести для границ предельного режима  $\tilde{m}$  (рисунки 3.6(f) – (h)):  $x_m^0$  и  $x_m^\infty$  (участки ниже положения точки трансформации режима течения внутри канала трещины). Далее мы рассмотрим границы  $x_m^\infty$  и  $x_t$  (участки  $\mathcal{R} < 100$  при  $\chi = 0$  и  $0.1$ ;  $\mathcal{R} < 1$  при  $\chi = 1$ ), которые имеют определенный угол наклона, который мы получим при помощи следующих рассуждений. Масштаб расстояния до кончика тре-

щины  $\ell_{tm}$ , на котором происходит переход  $tm$ , можно найти из сопоставления соответствующих профилей раскрытия:  $w_m(\ell_{tm}) \sim w_t(\ell_{tm})$ . Он пропорционален  $\ell_{tm} \sim \mathcal{R}^{-3/2} \ell_{mk}$ . Каждая из обсуждаемых границ соответствует постоянной величине  $x/\ell_{tm}$ , которые оцениваются численно. Используя выражение для  $\ell_{tm}$ , мы получим, что границы  $x_m^\infty$  и  $x_t$  ( $\mathcal{R} < 100$  при  $\chi = 0$  и  $0.1$ ;  $\mathcal{R} < 1$  при  $\chi = 1$ ) описываются формулой:  $\mathcal{R} \sim \xi^{-2/3}$ . Далее мы рассмотрим переход  $tk$ , и характерный масштаб в данном случае равен  $\ell_{tk} \sim \mathcal{R}^{(2n-2)/(2-n)} \ell_{mk}$ . Полагаясь на это выражение и на численные расчеты, мы получим, что граница  $x_t$  ( $\mathcal{R} > 10^4$  при  $\chi = 0$  и  $0.1$ ;  $\mathcal{R} > 100$  при  $\chi = 1$ ;  $\chi = 10, 50, 100$ ) соответствует определённой константе  $x/\ell_{tk}$  и описывается уравнением  $\mathcal{R} \sim \xi^{-(2-n)/(2-2n)}$ . Более того, мы можем предположить, что граница  $x_k$  описывается этим соотношением, когда располагается внутри области с турбулентным режимом течения, например при  $\mathcal{R} > 10^6$  и  $\chi = 0, \dots, 1000$ . Далее мы обсудим переход  $\tilde{t}k$  и в этом случае характерный масштаб длины пропорционален  $\ell_{\tilde{t}k} \sim \mathcal{R}^{(2n-2)/(2-n)} \chi^{-2} \ell_{mk}$ . В результате, граница  $x_{\tilde{t}}^0$  при  $\mathcal{R} > 10^4$  (рисунок 3.6(g) и (h)) имеет вид:  $\mathcal{R} \sim \xi^{-(2-n)/(2-2n)}$  (коэффициент утечек  $\chi$  постоянный на каждой карте и поэтому не входит в формулу). Если мы рассмотрим переход  $t\tilde{t}$ , то получим  $\ell_{t\tilde{t}} \sim \mathcal{R}^{(2n-2)/(2-n)} \chi^{-2(n+2)/(2-n)} \ell_{mk}$ , означая, что  $x_{\tilde{t}}^\infty$  параллелен границе  $x_{\tilde{t}}^0$  ( $\mathcal{R} > 10^4$ ). Далее мы получим угол наклона для границ  $x_{\tilde{t}}^0$  ( $\mathcal{R} < 10^4$ ) и  $x_{\tilde{n}}^\infty$  (участки, совпадающие с границей между режимами течения внутри канала трещины). Для их определения мы посмотрим на переход  $\tilde{t}\tilde{m}$ , для которого характерный масштаб длины  $\ell_{\tilde{t}\tilde{m}} \sim \mathcal{R}^{-2} \chi^{-2} \ell_{mk}$ . Учитывая, что каждая из границ соответствует постоянной величине  $x/\ell_{\tilde{t}\tilde{m}}$ , мы получим  $\mathcal{R} \sim \xi^{-1/2}$ .

## 3.2 Модель радиальной трещины

### 3.2.1 Описание модели

В настоящем разделе диссертации мы обсудим постановку задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения в проницаемой горной породе. Схематическое изображение модели представлено на рисунке 3.7. В отличие от классической

постановки задачи для модели радиальной трещины, описанной в разделе 1.2, в которой предполагалось, что поток ньютоновской жидкости внутри канала трещины является ламинарным, текущая модель учитывает возможную смену режима течения из ламинарного на турбулентный при удалении от кончика трещины. Впоследствии мы более детально сфокусируемся на этом явлении. Предположения модели и уравнения, которые не будут упомянуты в данной главе, остаются теми же как и в разделе 1.2.

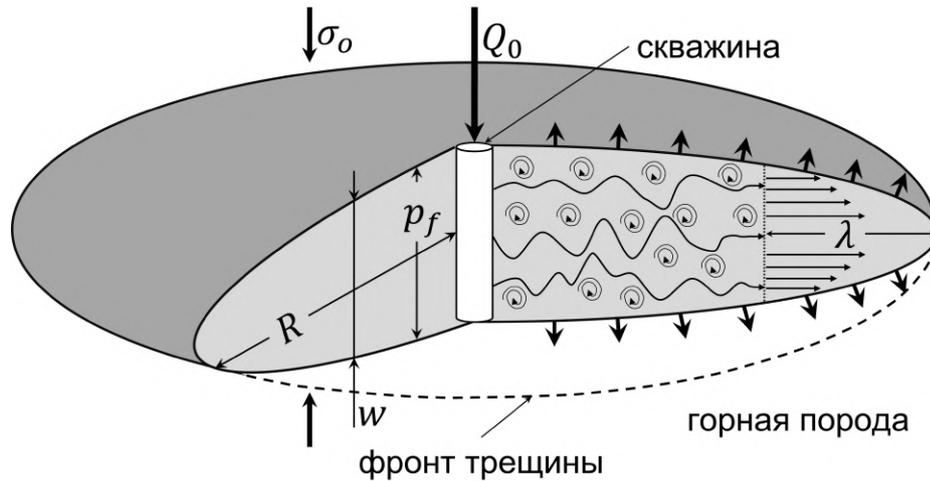


Рисунок 3.7 — Модель радиальной трещины с ламинарно-турбулентным течением внутри канала и утечками в окружающую проницаемую горную породу.

Жидкость гидроразрыва в данной модели является “скользящей водой”, которая имеет вязкость  $\mu$ , плотность  $\rho$  и ведет себя как ньютоновская жидкость при ламинарном режиме течения. Когда возникает турбулентное течение, реология “скользящей воды” описывается MDR асимптотой. Число Рейнольдса для течения в плоском канале,  $Re = \rho v w / \mu$ , увеличивается при удалении от фронта трещины, где оно равно 0. Трансформация режима течения от ламинарного режима к турбулентному происходит на расстоянии  $\lambda$  от кончика трещины (является частью решения задачи), когда число Рейнольдса равно критическому значению:  $Re = Re_c$ . Следовательно, область трещины, занятая ламинарным течением, располагается внутри интервала  $r \in (R - \lambda, R)$ , где  $Re < Re_c$ . В тоже время неламинарное течение (переходный и турбулентный режимы) реализуются внутри интервала  $r \in (0, R - \lambda)$ , где  $Re > Re_c$ . Преобразование режима течения имплементировано в модели через коэффициент сопротивления  $f(Re)$ .

Используя закон сохранения импульса, усредненный по ширине трещины, в котором инерционными членами можно пренебречь [48], мы получаем выра-

жение для скорости течения жидкости внутри трещины  $v(r, t)$ :

$$v|v| = -\frac{w}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.22)$$

где  $f$  – коэффициент сопротивления Фаннинга.

Как мы знаем из раздела 3.1.1, для ламинарного потока ( $Re < Re_c$ ) в плоском канале коэффициент сопротивления имеет вид:  $f^{\text{lam}} = 12/Re$ . Используя определение нормализованного коэффициента сопротивления  $\tilde{f} = f/f^{\text{lam}}$ , мы перепишем уравнение (3.22) в следующем виде:

$$v = -\frac{w^2}{M' \tilde{f}} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (3.23)$$

Комбинируя уравнение неразрывности (1.13), закон сохранения импульса (3.23) и закон Картера (1.14), мы получим уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{M'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r w^3}{\tilde{f}} \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}}. \quad (3.24)$$

Мы полагаем, что в турбулентном режиме течения ( $Re > Re_c$ ), сопротивление потоку “скользкой воды” описывается MDR асимптотой. Данная асимптота уже обсуждалась в разделе 3.1.1, и ее явный вид и аппроксимация представлены уравнениями (3.3) и (3.4), соответственно.

Используя результаты анализа, приведенные в разделе 3.1.1, в текущем разделе мы выпишем поведение коэффициента сопротивления в явном  $f$  и нормализованном  $\tilde{f} = f/f^{\text{lam}}$  виде вдоль всего диапазона значений числа Рейнольдса:

$$f = \begin{cases} 12/Re, & Re \leq Re_c, \\ f'_0 Re^{-n}, & Re > Re_c, \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} 1, & Re \leq Re_c, \\ f''_0 \cdot Re^{1-n}, & Re > Re_c, \end{cases} \quad (3.25)$$

где коэффициент  $f''_0 = f'_0/12$ . Критическое число Рейнольдса для течения “скользкой воды” внутри канала трещины оценивается из пересечения ламинарной и турбулентной ветвей для обеспечения непрерывности функции  $f(Re)$ :  $Re_c = (12/f'_0)^{1/(1-n)}$ .

В завершении данного раздела мы приведем численные значения параметров, используемых в реологических соотношениях (3.4), (3.25), для “скользкой воды” (аппроксимация MDR асимптоты степенным законом) и для чистой воды

(корреляция Блаузиуса), опираясь на работы [48] and [105]:

$$\begin{aligned}
 \text{slickwater:} & \quad f_0 = 1.78, \quad n = 0.7, \quad f'_0 = 1.46, \quad f''_0 = 0.122, \quad Re_c = 1132.6; \\
 \text{water:} & \quad f_0 = 0.079, \quad n = 0.25, \quad f'_0 = 0.074, \quad f''_0 = 0.006, \quad Re_c = 1650.
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

Критическое число Рейнольдса для течения Ньютоновской жидкости внутри канала трещины оценивается, исходя из аналогичной величины для течения жидкости в трубе круглого сечения, и равно  $Re_c = 1650$ .

### 3.2.2 Метод решения задачи

В настоящем разделе приведено описание численного алгоритма, который был применен для расчета характеристик радиальной трещины в процессе ее роста. Алгоритм основан на квадратурном интегрировании методом Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа. Первоначально в статье [66] данная методология была предложена для решения различных задач, посвященных концевому элементу трещины гидроразрыва. Затем в статье [65] была проведена адаптация данного метода на случай конечных трещин гидроразрыва, таких как плоская (KGD) и радиальная. Важно отметить, что численная схема не требует имплементации аппроксимационного решения вблизи кончика трещины (кроме критерия распространения из линейной теории механики разрушения), что отличает данный алгоритм от ряда распространённых методов, использующих концевой элемент в качестве критерия распространения трещины, например в работах [26–28; 54; 106]. В текущей работе мы расширили подход [65] и учли особенности реологии жидкости гидроразрыва и утечки в пласт.

Сначала мы определим безразмерное расстояние от источника как  $\xi = r/R(t)$ ,  $\xi \in [0, 1]$  и перепишем систему уравнений, используя переменную  $\xi$  и преобразование производных по времени и по координате:  $\partial/\partial t|_r = \partial/\partial t|_\xi - [\xi V(t)/R(t)] \cdot \partial/\partial \xi|_t$ ,  $\partial/\partial r|_t = R(t)^{-1} \partial/\partial \xi|_t$ ,  $V = dR/dt = \dot{R}$ . Необходимо отметить, что применение квадратурного интегрирования методом Гаусса-Чебышева подразумевает рассмотрение задачи на координатном отрезке  $\xi \in [-1, 1]$ . Таким образом, нам необходимо «отобразить» характеристики

трещины на интервал  $\xi \in [-1, 0)$  симметричным образом, а также учесть расширение координатного интервала в записи системы уравнений. Например, модифицированная форма уравнения упругости (1.11) имеет следующий вид:

$$p(\xi, t) = -\frac{E'}{4\pi R(t)} \int_{-1}^1 G(\xi, s) \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} ds, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (3.27)$$

где интегральное ядро, приведенное [65] в работе, выглядит как

$$G(\xi, s) = \begin{cases} \text{sign}(\xi, s) \left[ \frac{1}{\xi} \mathbf{K} \left( \frac{s^2}{\xi^2} \right) + \frac{1}{s-\xi} \mathbf{E} \left( \frac{s^2}{\xi^2} \right) \right], & |\xi| > |s|, \\ \frac{1}{s-\xi} \mathbf{E} \left( \frac{\xi^2}{s^2} \right), & |\xi| < |s|. \end{cases} \quad (3.28)$$

Мы представим производную по координате от профиля раскрытия следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \mathcal{W}(\xi) F(\xi, t), \quad \mathcal{W}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \xi \in [-1, 1],$$

где сингулярная весовая функция  $\mathcal{W}(\xi)$  выбрана согласно поведению профиля раскрытия вблизи фронта трещины  $\partial w / \partial \xi \sim 1 / \sqrt{1-|\xi|}$ ,  $\xi \rightarrow \pm 1$ , а  $F(\xi, t)$  – искомая регулярная функция. Так как  $w(\xi, t)$  и  $\mathcal{W}(\xi)$  являются четными функциями, то функция  $F(\xi, t)$  должна быть нечетной.

На следующем шаге интервал пространственной координаты  $\xi \in [-1, 1]$  дискретизируется при помощи двух систем узлов, связанных с выбранной весовой функцией [66]: основная  $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=1}^N = \{\cos[\pi(j-1/2)/N]\}_{j=1}^N$  и вспомогательная  $\mathbf{z} = \{z_i\}_{i=1}^M = \{\cos(\pi i/N)\}_{i=1}^M$ ,  $M = N - 1$ . Основная и вспомогательная системы узлов являются корнями полиномов Чебышёва первого и второго рода. Значения функции  $F(\xi, t)$  мы будем определять в основных узлах  $\mathbf{F} = \{F(s_j, t)\}_{j=1}^N$ , а значения раскрытия  $w(\xi, t)$ , эффективного давления  $p(\xi, t)$  и скорости течения внутри канала трещины  $v(\xi, t)$  во вспомогательных узлах:  $\mathbf{w} = \{w(z_i, t)\}_{i=1}^M$ ,  $\mathbf{p} = \{p(z_i, t)\}_{i=1}^M$ ,  $\mathbf{v} = \{v(z_i, t)\}_{i=1}^M$ .

Далее переходим к дискретизации системы уравнений. Здесь мы остановимся только на уравнении Рейнольдса и баланса жидкости, так как остальные уравнения (упругости, критерий распространения и граничные условия) полностью совпадают с рассмотренными в работе [65] (уравнения (3), (10), (8)). Мы начнем с интегрирования уравнения Рейнольдса (3.24) по координате  $\xi$  между

каждым узлом  $z_i$  и фронтом трещины, т. е.,  $\xi = 1$ , применяя дискретизированное уравнение упругости (формула (41) в работе [65]):

$$-\frac{\mathbf{z}^2}{2} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbb{S} \times (\mathbf{s}^2 \mathbf{F})] + \frac{V}{R} (\mathbb{S} \times (\mathbf{s}^2 \mathbf{F})) - \frac{\mathbf{z} \mathbf{w} \mathbf{v}}{R} + C' \mathbb{R} \times \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{t - t_0(\mathbf{z}R)}} = 0,$$

$$\mathbf{w} = \mathbb{S} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{w}^2}{M' \tilde{f} R} \mathbf{p}_\xi,$$

$$\mathbf{p}_\xi = \frac{E'}{4R} \mathbb{D} \times (\mathbb{G}_2 \times \mathbf{F}), \quad \tilde{f} = \begin{cases} 1, & \mathbf{Re} \leq Re_c, \\ f_0'' \mathbf{Re}^{1-n}, & \mathbf{Re} > Re_c, \end{cases}, \quad \mathbf{Re} = \frac{12\rho \mathbf{w} \mathbf{v}}{M'}.$$

В этом уравнении знак ' $\times$ ' означает матричное умножение. Компоненты матриц  $\mathbb{S}$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{G}_2$  приведены в работе [65] в уравнениях (34), (39), (43), а элементы матрицы  $\mathbb{R}$ , определенной в данной работе, выглядят как

$$\mathbb{R} = \{R_{ii'}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} [\Psi_k(1) - \Psi_k(z_i)] B_{ki'} \right\}, \quad \Psi_k(z) = \cos [(k+1)\theta]/(k+1),$$

$$\theta = \arccos z, \quad B_{ki'} = 2/N \cdot \sin(\pi i'/N) \sin(\pi i'(k+1)/N).$$

На следующем шаге мы добавляем уравнение баланса (1.20) в систему уравнений. Для этого мы находим производную уравнения баланса по времени:

$$\frac{Q_0}{\pi} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{2tV}{R^3} \right) = -\mathbb{S}_H \times (\mathbf{s}^2 \dot{\mathbf{F}}) + 2C' \mathbb{R}_H \times \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{t - t_0(\mathbf{z}R)}} - \frac{2C'V}{R^3} \int_0^t \frac{R^2(s) ds}{\sqrt{t-s}},$$

где матрица  $\mathbb{S}_H$  выписана в уравнении (38) в работе [65], а матрица  $\mathbb{R}_H$  выглядит следующим образом:

$$\mathbb{R}_H = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} [\Psi_k(1) - \Psi_k(0)] B_{ki'} \right\}.$$

Интегрирование по времени в правой части уравнения баланса производится при помощи правила Симпсона.

Дискретизированные уравнение Рейнольдса и уравнение баланса можно объединить в одну систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbb{A}(\mathbf{X}, t) \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{B}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \{R, \mathbf{F}\},$$

где  $\mathbf{X}$  вектор решения. Когда решение системы уравнений найдено, мы знаем динамику радиуса трещины  $R = R(t)$ , а профили раскрытия и эффективного давления, а также эффективность определяем при помощи соотношений,

используя функцию  $F(\xi, t)$ :

$$\mathbf{w} = \mathbb{S} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{p} = \frac{E'}{4R} \mathbf{G}_2 \times \mathbf{F}, \quad \eta(t) = -\frac{\pi R^2}{Q_0 t} \{ \mathbb{S}_A \times (\mathbf{s}^2 \mathbf{F}) \},$$

где матрица  $\mathbb{S}_A$  определена в работе [65] в уравнении (37).

Ввиду формы уравнения упругости, приведенном в работе [65], число основных узлов  $N$  должно быть нечетным. Функция  $F(\xi, t)$  также нечетна, что приводит к следующему виду искомого вектора:  $\mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_{(N-1)/2}, 0, -F_{(N-1)/2}, \dots, -F_1\}$ . Общее число независимых неизвестных параметров равно  $(N-1)/2 + 1$ , что означает, что система обыкновенных дифференциальных уравнений должна состоять из уравнений Рейнольдса, соответствующих вспомогательным узлам  $z_1, \dots, z_{(N-1)/2-1}$ , уравнения баланса жидкости и критерия распространения. Мы выбрали  $N = 101$ , а начальное условие представлено режимом турбулентным режимом распространения, в котором доминирует диссипация энергии при течении вязкой жидкости в канале трещины и малы утечки (трещина-вязкость). Данный режим представлен в работе [48], и мы также обратим на него внимание в дальнейшем. Интервал времени делится логарифмически, и мы применяем метод решения системы обыкновенных дифференциальных внутри каждого временного интервала. Численный алгоритм реализован на языке программирования Python, система дифференциальных уравнений решается с помощью функции `solve_ivp` из библиотеки SciPy.

В приложении А представлены результаты верификации численного подхода, описанного в настоящем разделе, в случае роста радиальной трещины гидроразрыва под влиянием ламинарного течения жидкости с ньютоновской реологией в проницаемой горной породе. Верификация проведена путем сравнения результатов моделирования с численным референсным решением, а так с полуаналитическими и аналитическими решениями в предельных режимах распространения.

### 3.2.3 Примеры решения задачи, соответствующие типичным промышленным случаям

В настоящем разделе мы продемонстрируем результаты моделирования роста радиальной трещины гидроразрыва, в которых мы рассматриваем значения входных параметров, соответствующих типичным полевым случаям. В процессе моделирования мы хотим достичь следующих целей. Во-первых, мы должны исследовать как трансформация режима течения внутри канала трещины от ламинарного к турбулентному режиму изменяет решение задачи по сравнению с полностью ламинарным случаем как для непроницаемых, так и для проницаемых коллекторов. Кроме того, мы проведем расчеты не только для “скользящей воды”, но и для чистой воды, чтобы исследовать влияние реологического поведения жидкости в турбулентном режиме течения.

Мы рассмотрим повышенную скорость нагнетания жидкости гидроразрыва в резервуар  $Q_0 = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$  (например, диапазоны значений расхода можно найти в работах [89; 107]). Для простоты рассмотрим случай, когда полимерные добавки не меняют вязкость растворителя (чистая вода), а меняются только реологические свойства при турбулентном режиме течения (асимптота MDR вместо корреляции Блазиуса). Мы выберем следующие свойства горной породы и воды:

$$\begin{aligned} E' &= 20 \text{ ГПа}, & K_{Ic} &= 1 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}, & \sigma_o &= 10 \text{ МПа}, & p_o &= 6 \text{ МПа}, \\ \mu &= 1 \text{ сПз}, & c_t &= 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, & \rho &= 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ k &= 10 \text{ мД (проницаемая горная порода)}, & \phi &= 20\%. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Используя набор параметров (3.29), мы можем оценить значение коэффициента Картера в случае проницаемой горной породы:  $C' = 2.04 \cdot 10^{-4} \text{ м}/\sqrt{\text{с}}$  (в случае непроницаемого коллектора  $C' = 0$ ).

На рисунках 3.8(a), (b) и (c) представлены ламинарно-турбулентные решения в зависимости от времени для радиуса  $R(t)$ , максимального раскрытия трещины  $w(0, t)$  и эффективного давления  $p(0.1, t)$  на расстоянии  $r = 0.1 \text{ м}$ , которые нормализуются соответствующими ламинарными решениями (рисунок 3.9). В результате ламинарные решения на этих рисунках тождественно равны единице для всех моментов времени. Выбор расстояния  $r = 0.1 \text{ м}$  для наблюдения за давлением обусловлен сингулярностью давления при  $r = 0$  и значением

типичного радиуса скважины. Необходимо подчеркнуть, что на рассматриваемом временном интервале справедливо следующее неравенство:  $R(t) \gg 0.1$  м, т. е. эффекты, возникающие из-за прохождения кончика трещины через  $r = 0.1$  м не проявляются.

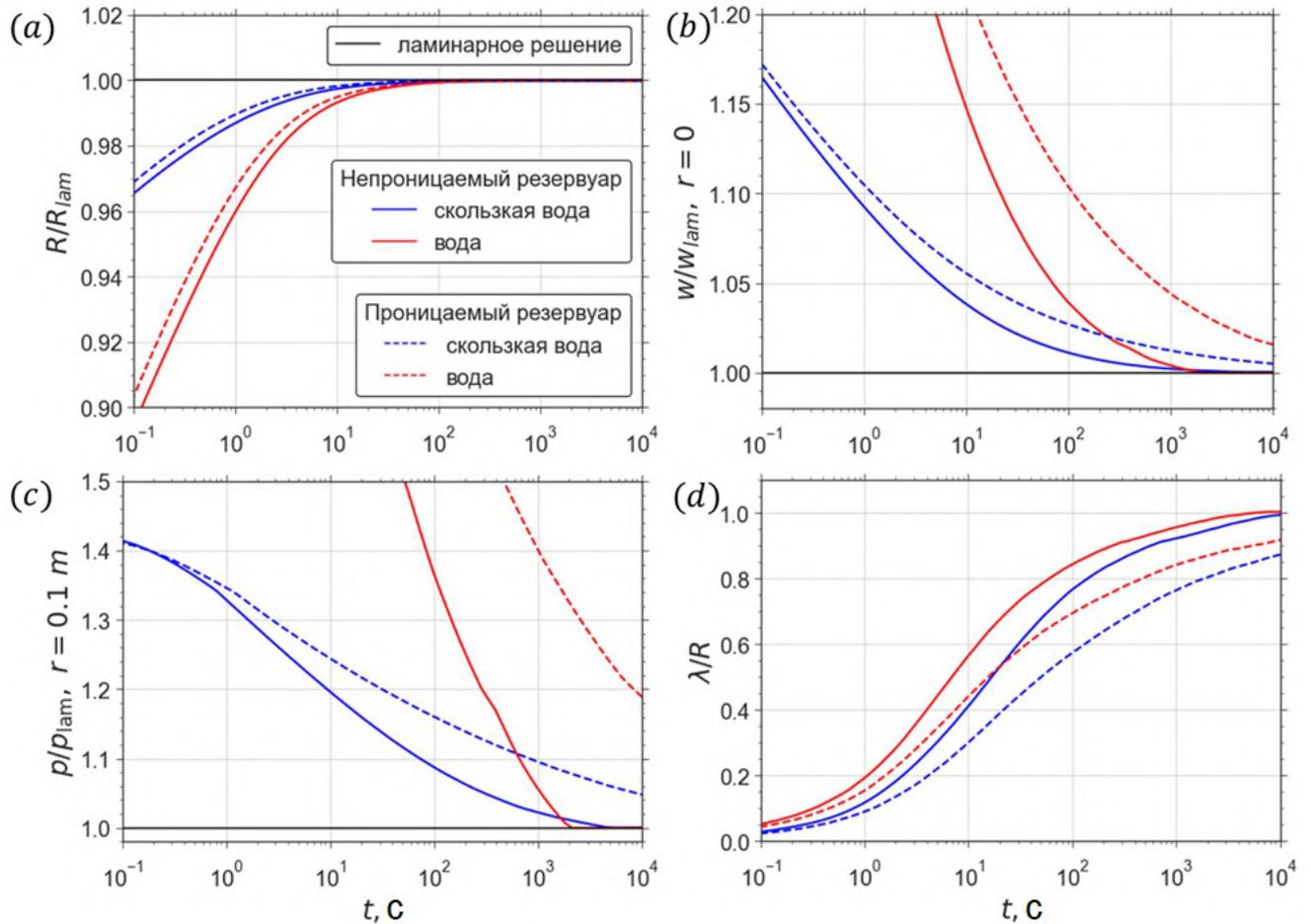


Рисунок 3.8 — Графики (а)-(с) показывают решение задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва с ламинарно-турбулентным течением внутри канала в терминах динамики радиуса  $R(t)$ , максимального раскрытия  $w(0, t)$  и эффективного давления на расстоянии 10 см от скважины  $p(0.1, t)$  в зависимости от времени. Решения нормализованы на характеристики трещины в ламинарном случае (черная сплошная линия). График (d) изображает длину части трещины  $\lambda(t)$ , занимаемой ламинарным режимом течения и нормализованную на величину радиуса трещины  $R(t)$  (зона с ламинарным течением расположена внутри интервала длины  $\lambda$ , примыкающим к фронту трещины, рисунок 3.7). Характеристики трещины, распространяющейся под влиянием “скользящей воды” (чистой воды) изображены синим (красным) цветом: для непроницаемого резервуара сплошными линиями и штриховыми для проницаемой горной породы.

Используя рисунок 3.8, можно заметить, что трансформация режима течения внутри канала трещины влияет на характеристики трещины в начальные моменты ее роста, приводя к меньшему значению радиуса, большим значениям максимального раскрытия и эффективного давления на расстоянии  $r = 0.1$  м

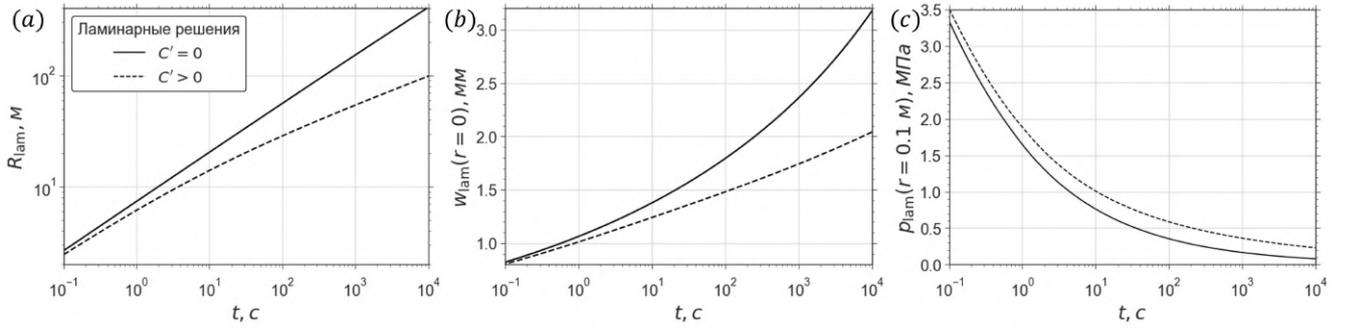


Рисунок 3.9 — Решение задачи о росте радиальной трещины, распространяющейся под влиянием ламинарного потока внутри канала: динамика радиуса трещины  $R(t)$ , (а), максимального раскрытия  $w(0, t)$ , (б), и эффективного давления  $p(0.1, t)$  на расстоянии  $r = 0.1 m$  от источника. Сплошные (штриховые) линии обозначают случай непроницаемой (проницаемой) горной породы.

Таблица 7 — Значения времени  $t_*$  в секундах, показывающего, когда относительная разница между характеристиками трещины  $R(t)$ ,  $w(0, t)$ ,  $p(0.1, t)$  в ламинарно-турбулентном и ламинарном решениях составляет 5%.

		$t_*, s$			
Жидкость гидроразрыва		“скользящая вода”		вода	
тип горной породы		непроницаемая	проницаемая	непроницаемая	проницаемая
А	$R(t)$	0.03	0.02	0.7	0.5
	$w(0, t)$	5.5	14.2	70.5	745.3
	$p(0.1, t)$	308	8933	1079	67383

по сравнению с ламинарным решением 3.9. Через определенный промежуток времени эффекты турбулентности исчезают, и оба решения, т. е. ламинарно-турбулентное и ламинарное, становятся идентичными. Важно подчеркнуть, что “пороговое” значение времени отличается для радиуса, раскрытия и эффективного давления для конкретного выбора значений входных параметров модели.

Далее мы определим момент времени  $t_*$ , когда характеристика трещины  $\mathcal{A}(t)$  (радиус, раскрытие, давление), зависящая от времени и соответствующая ламинарно-турбулентному решению, может быть аппроксимирована аналогичным параметром из ламинарного решения  $\mathcal{A}_{\text{lam}}(t)$ , следующим образом:  $|\mathcal{A}(t_*) - \mathcal{A}_{\text{lam}}(t_*)| / |\mathcal{A}_{\text{lam}}(t_*)| = 5\%$ . Полученные значения времени  $t_*$  для характеристик трещины, представленных на рисунке 3.8, для всех рассмотренных случаев, а именно для гидроразрыва под воздействием “скользящей воды” (синие линии) и чистой воды (красные линии) в непроницаемом (сплошные цветные линии) и проницаемом (штриховые цветные линии) коллекторах приведены в таблице 7.

Анализируя значения из таблицы 7, мы можем увидеть, что заметная разница между профилями  $R(t)$  и  $R_{\text{lam}}(t)$  во всех проведенных расчетах проявляется на временном масштабе менее одной секунды, означая, что мы можем пренебречь расхождением в значениях радиуса в ламинарно-турбулентном и ламинарном решениях. Трансформация режима течения оказывает воздействие на максимальное раскрытие трещины приблизительно в течение 5 и 15 секунд при гидроразрыве с использованием “скользящей воды” в непроницаемой и проницаемой горной породе, соответственно. Эти величины для гидроразрыва с применением чистой воды составляют около 1 и 12 минут. Исходя из результатов для  $w(0, t)$ , можно сделать следующие выводы: (i) утечки увеличивают продолжительность влияния турбулентного режима течения на раскрытие трещины вблизи ствола скважины, и (ii) эффекты турбулентности более значительны для случая гидроразрыва с применением чистой воды, так как их продолжительность более длительна по сравнению со случаем “скользящей воды”. Однако даже если геометрия трещины (радиус и раскрытие) одинаковы в ламинарно-турбулентном и в ламинарном случаях, значения давления вблизи ствола скважины (на расстоянии  $r = 0.1$  м) все равно могут существенно отличаться. Мы можем сделать следующую интерпретацию данного явления: для создания трещины, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения, необходимо существенное большее количество энергии по сравнению со значением, предсказанным при помощи ламинарной модели. Из рисунка 3.8 и таблицы 7 мы определяем для случая “скользящей воды”  $p \approx p_{\text{lam}}$  (отличие меньше 5%) через 5 минут после начала роста трещины в непроницаемом пласте, в то время как в проницаемой породе этот период достигает 2.5 часа. В свою очередь, когда жидкость гидроразрыва чистая вода, выравнивание давлений происходит через полчаса и 18 часов.

Точка перехода между режимами течения является важной характеристикой рассматриваемой модели, поскольку она количественно определяет долю трещины, занимаемой турбулентным потоком. На рисунке 3.8(d) изображен размер области с ламинарным течением  $\lambda(t)$  (располагается в интервале  $r \in (R - \lambda, R)$ ), нормализованный на значение радиуса трещины  $R(t)$ , в зависимости от времени. Это возрастающая функция от времени, эволюционирующая от  $\lambda/R \approx 0$  в начале развития трещины и принимающая значения  $\lambda/R \approx 1$  при больших значениях времени. Иными словами, турбулентный режим течения реализуется вдоль всей трещины в начале распространения; обратная же ситу-

ация наблюдается в конце закачки жидкости. Однако, в случае проницаемой горной породы небольшая доля трещины  $\sim 0.1R$  вблизи ствола скважины остается занятой турбулентным режимом течения при  $t \sim 10^4$  с, а в остальной части трещины  $\sim 0.9R$  реализуется ламинарное течение. Также необходимо отметить, что размер области трещины с турбулентным режимом течения меньше в случае непроницаемой горной породы. Из результатов, представленных на рисунке 3.8(d), можно заметить, что турбулентный режим реализуется вдоль большей части трещины в случае “скользящей воды” по сравнению со случаем чистой воды, т. е. величина  $\lambda/R$  в любой момент времени меньше для гидроразрыва на основе “скользящей воды”. Однако, отличия между параметрами трещины  $R(t)$ ,  $w(0, t)$ ,  $p(0.1, t)$  в ламинарно-турбулентной и ламинарной моделях более значительны для трещины, распространяющейся под влиянием чистой воды.

Далее мы обсудим, как изменяются во времени профили раскрытия трещины и эффективного давления как функции пространственной координаты  $r$ . Результаты расчетов для трех моментов времени:  $t = \{1, 10, 100\}$  с представлены на рисунке 3.10. Как уже упоминалось, радиальная трещина, распространяющаяся под влиянием ламинарно-турбулентного потока, имеет меньшее значение радиуса в начальные моменты распространения по сравнению с ламинарной моделью; профили раскрытия и эффективного давления для  $t = 1$  с, изображенные на рисунке 3.10 подтверждают этот факт. В последующие моменты времени, т. е.  $t = 10$  и  $100$  с, значения  $R(t)$  и  $R_{\text{lam}}(t)$  неразличимы. Ламинарно-турбулентные решения становятся очень близкими к своим ламинарным “аналогам”, начиная с некоторого расстояния от источника. В свою очередь, в остальной части трещины, т. е. в зоне вблизи ствола скважины, наблюдается значительная разница между профилями, уменьшающаяся с течением времени, где ламинарно-турбулентное решение имеет большее значение раскрытия и эффективного давления. В общем случае трещина гидроразрыва в проницаемой породе (рисунки 3.10(b) и (d)) имеет меньший объем (из-за утечек), чем трещина в непроницаемом резервуаре, что приводит к меньшему радиусу и раскрытию; кроме того, профиль эффективного давления имеет большие значения в случае с утечками.

Используя рисунки 3.10(c) и (d), можно увидеть наличие сингулярностей в профиле эффективного давления возле ствола скважины и на фронте трещины. Например, поведение давления вблизи скважины ( $r \ll R$ ) выглядит как  $p \sim |\log r|$  в случае полностью ламинарной трещины, в тоже время зависимости

$p \sim r^{-3/10}$  и  $p \sim r^{-3/4}$  описывают профиль давления в зависимости от расстояния до источника для ламинарно-турбулентной трещины, распространяющейся под влиянием “скользящей воды” и чистой воды, соответственно. Решение для области трещины вблизи фронта ( $R - r \ll R$ ) имеет многомасштабную структуру, означая, что асимптотическое поведение свойств трещины зависит как от длины трещины, так и от скорости ее распространения. В случае доминирования эффектов трещиностойкости поведение давления имеет вид  $p \sim -|\log r|$ , а в случае доминирования вязкостных эффектов реализуется  $m$  асимптота [43]. Для ламинарной трещины  $m$  асимптота выглядит как  $p \sim -(R - r)^{-1/3}$  [39], а для полностью турбулентной трещины –  $p \sim -(R - r)^{-7/27}$  в случае “скользящей воды” или  $p \sim -(R - r)^{-1/9}$  для гидроразрыва на основе чистой воды [48].

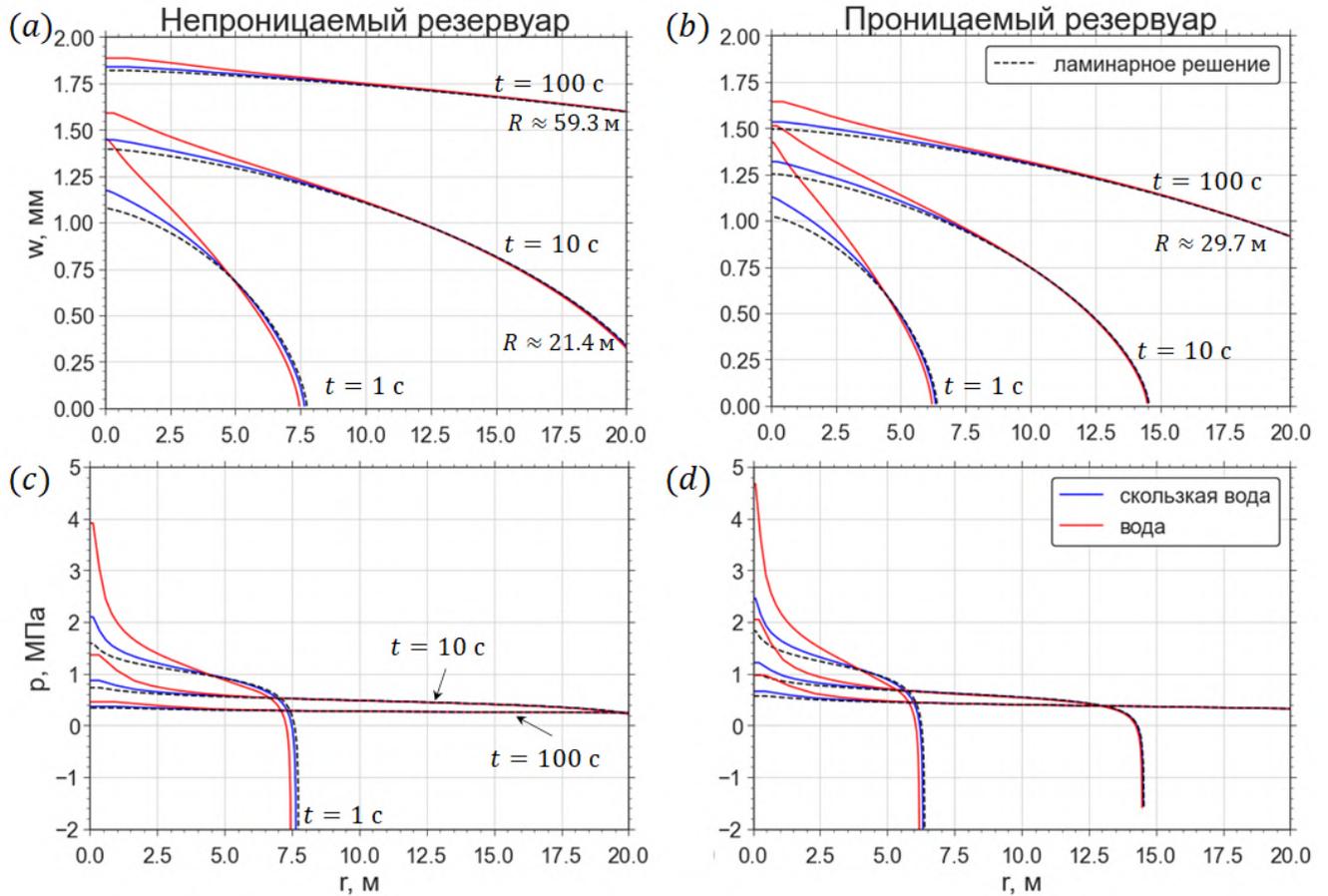


Рисунок 3.10 — Профили раскрытия (верхний ряд) и эффективного давления (нижний ряд) в зависимости от расстояния от источника  $r$  для моментов времени  $t = \{1, 10, 100\}$  с. Графики (a) и (c) относятся к случаю непроницаемой горной породы, в то время как графики (b) и (d) отображают результаты для случая проницаемого коллектора. Решение для “скользящей воды” (чистой воды) нарисованы сплошными синими (красными) линиями.

Ламинарное решение представлено черной прерывистой линией.

### 3.2.4 Предельные режимы распространения трещины

Два различных механизма контролируют режим роста трещины гидроразрыва. Первый из них связан с диссипацией энергии, которая происходит при разрушении горной породы в кончике трещины и при течении вязкой жидкости внутри канала трещины. Вторым механизмом связан с разделением объема закаченной жидкости между каналом трещины и проницаемым пластом, в который жидкость гидроразрыва попадает в результате утечек. При росте трещины распределение диссипированной энергии и закачиваемого объема может изменяться во времени, что приводит к реализации предельных режимов распространения, характеризующихся одним механизмом диссипации (из двух) и одним механизмом баланса жидкости (из двух). На механизм диссипации энергии влияют параметры  $M'$  и  $K'$ , а параметр утечек  $C'$  влияет на распределение нагнетаемой жидкости.

В настоящей модели радиальной трещины мы можем различить 6 предельных режимов роста, которые также известны как узловое решения. Четыре из них наблюдаются в модели радиальной трещины, распространяющейся под влиянием ламинарного течения вдоль всей длины трещины [12]:

- **M** – трещина-вязкость-ламинарное течение –  $C' = K' = 0$ ,  $Re \leq Re_c$ ;
- **$\tilde{M}$**  – утечки-вязкость-ламинарное течение –  $C' \rightarrow +\infty$ ,  $K' = 0$ ,  $Re \leq Re_c$ ;
- **K** – трещина-трещиностойкость –  $C' = M' = 0$ ;
- **$\tilde{K}$**  – утечки-трещиностойкость –  $C' \rightarrow +\infty$ ,  $M' = 0$ .

Режимы, связанные с диссипацией энергии при разрушении горной породы  $K$  и  $\tilde{K}$  не зависят от режима течения внутри канала трещины. Остальные два режима возникают в случае доминирования вязкостных эффектов, когда вдоль всей трещины реализуется турбулентное течение:

- **T** – трещина-вязкость-турбулентное течение –  $C' = K' = 0$ ,  $Re > Re_c$ ;
- **$\tilde{T}$**  – утечки-вязкость-турбулентное течение –  $C' \rightarrow +\infty$ ,  $K' = 0$ ,  $Re > Re_c$ .

Несмотря на то, что ламинарное течение всегда существует вблизи кончика трещины, размер зоны, в котором оно находится, становится пренебрежимо малым при реализации турбулентных режимов роста трещины.

Узловые решения  $M$  и  $K$  были получены в статье [56], а предельные решения, связанные с доминированием утечек,  $\tilde{K}$  и  $\tilde{M}$ , приведены в работах [57] и [26; 59]. В статье [54] автором предложена аппроксимационная форма для всех узловых решений, реализуемых в модели с ламинарным течением внутри канала трещины. Предельный режим трещина-вязкость-ламинарное течение ( $T$ ) был получен в статье [48] в полуаналитической и аппроксимацией формам.

Далее мы рассмотрим процедуру вывода размерных коэффициентов в формулах для характеристик трещины в предельных режимах роста, опираясь на работы [12] и [48]. Для этого мы введем безразмерный радиус  $\gamma$ , раскрытие  $\Omega$ , эффективное давление  $\Pi$  и скорость течения жидкости внутри канала трещины  $\mathcal{V}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} R(t) &= L(t)\gamma(\mathcal{P}), & w(r, t) &= \varepsilon(t)L(t)\Omega(\xi, \mathcal{P}), \\ p(r, t) &= E'\varepsilon(t)\Pi(\xi, \mathcal{P}), & v(r, t) &= L(t)\mathcal{V}(\xi, \mathcal{P})/t, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $\xi = r/R(t)$  безразмерное расстояние до источника,  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$  безразмерные эволюционные параметры, зависящие от времени, материальных параметров (1.10), плотности жидкости гидроразрыва  $\rho$  и скорости нагнетания  $Q_0$ .  $L(t)$  является характерной длиной, имеющей тот же порядок что и радиус трещины, и  $\varepsilon(t)$  малый параметр.

Мы подставляем формулы (3.30) в систему уравнений и получаем их вид в нормализованной форме:

– уравнение упругости:

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^1 G(\xi, s) \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds; \quad (3.31)$$

– уравнение Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_v \left( \left[ \frac{\dot{\varepsilon}t}{\varepsilon} + \frac{\dot{L}t}{L} \right] \Omega + \dot{\Omega}t - \xi \left( \frac{\dot{L}t}{L} + \frac{\dot{\gamma}t}{\gamma} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right) + \frac{\mathcal{G}_c}{\sqrt{1 - \tau_0(\xi L \gamma)}} = \\ - \frac{1}{\gamma \xi} \frac{\partial (\xi \Omega \tilde{\mathcal{V}})}{\partial \xi}; \\ \tilde{\mathcal{V}} = G_v \mathcal{V} = \begin{cases} -(\mathcal{G}_m^{\text{lam}})^{-1} \Omega^2 \gamma^{-1} \nabla \Pi, & \mathcal{R}|\mathcal{V}|\Omega \leq Re_c, \\ -(\mathcal{G}_m^{\text{turb}})^{-1} \text{sign}(\nabla \Pi) [\Omega^{n+1} \gamma^{-1} |\nabla \Pi|]^{1/(2-n)}, & \mathcal{R}|\mathcal{V}|\Omega > Re_c; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

– критерий распространения:

$$\Omega = \mathcal{G}_k \sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \xi}, \quad \xi \rightarrow 1; \quad (3.33)$$

– граничные условия:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \Omega \mathcal{V} = \frac{\mathcal{G}_v^{-1}}{2\pi\gamma}, \quad \Omega(1, t) = 0, \quad \Omega(1, t) \mathcal{V}(1, t) = 0; \quad (3.34)$$

– уравнение баланса:

$$\frac{1}{\pi\gamma^2} = 2\mathcal{G}_v \int_0^1 \Omega \xi d\xi + 4\mathcal{G}_c \int_0^1 \sqrt{1 - \tau_0(\xi\gamma L)} \xi d\xi; \quad (3.35)$$

где  $\tau_0(t) = t_0(r)/t$  безразмерная функция обратного радиуса,  $\nabla\Pi = \partial\Pi/\partial\xi$  градиент давления, а  $\mathcal{R} = 12\rho\varepsilon L^2/(M't)$  характеристическое число Рейнольдса.

Также мы определим 5 безразмерных групп:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_v &= \frac{\varepsilon L^3}{Q_0 t}, & \mathcal{G}_c &= \frac{C' L^2}{Q_0 \sqrt{t}}, & \mathcal{G}_k &= \frac{K'}{E' \varepsilon \sqrt{L}}, & \mathcal{G}_m^{\text{lam}} &= \frac{M' Q_0}{E' L^3 \varepsilon^4}, \\ \mathcal{G}_m^{\text{turb}} &= \left( \frac{f_0'' (12\rho)^{1-n} M^n Q_0^{2-n}}{E' L^{4-n} \varepsilon^4} \right)^{1/(2-n)} = \left( f_0'' \mathcal{G}_m^{\text{lam}} (\mathcal{R}/\mathcal{G}_v)^{1-n} \right)^{1/(2-n)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Параметры  $\mathcal{G}_v$  и  $\mathcal{G}_c$  определяют количественно объем жидкости, находящийся в трещине, и объем, утекающий в окружающий пласт, по отношению к объему закачиваемой жидкости гидроразрыва. Распределение диссипированной энергии между разрушением горной породы и течением вязкой жидкости в канале трещины масштабируется числами  $\mathcal{G}_k$ ,  $\mathcal{G}_m^{\text{lam}}$ ,  $\mathcal{G}_m^{\text{turb}}$ , означающими безразмерную трещиностойкость, вязкость жидкости гидроразрыва и эквивалентную вязкость при турбулентном режиме течения.

Для вывода масштабирований, т. е. характерной длины  $L(t)$  и малого параметра  $\varepsilon(t)$  в уравнении (3.30), связанных с предельными режимами, мы должны положить один из параметров ( $\mathcal{G}_v$ ,  $\mathcal{G}_c$ ) равным 1, и один из параметров ( $\mathcal{G}_m^{\text{lam}}$ ,  $\mathcal{G}_m^{\text{turb}}$ ,  $\mathcal{G}_k$ ) равным 1. Остальные параметры будут эволюционными  $\mathcal{P}$  и когда их значения стремятся к 0 в определенном масштабировании, мы сможем наблюдать реализацию соответствующего узлового решения.

Мы начнем с построения масштабирования для  $T$  режима (масштабирование трещина-вязкость-турбулентное течение), в котором подразумеваем, что  $\mathcal{G}_v = \mathcal{G}_m^{\text{turb}} = 1$ . Другими словами, закачиваемый объем жидкости преимущественно остается внутри трещины, а энергия рассеивается при турбулентном

течении вязкой жидкости, причем турбулентный режим занимает всю трещину. В результате мы получаем следующие формулы для масштаба длины и малого параметра:

$$L_t = \left( \frac{E't^4 Q_0^{n+2}}{(12\rho)^{1-n} f_0'' M'^n} \right)^{1/(8+n)}, \quad \varepsilon_t = \frac{Q_0 t}{L_t^3}. \quad (3.37)$$

в то время как эволюционные параметры  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{G}_k$ ,  $\mathcal{G}_c$ ,  $\mathcal{G}_m^{\text{lam}}$ ) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t &= K' \left( \frac{t^{4-2n}}{(12\rho)^{5-5n} (f_0'')^5 E'^{11+2n} M'^{5n} Q_0^{6-3n}} \right)^{1/(16+2n)}, \\ \mathcal{C}_t &= C' \left( \frac{E'^4 t^{8-n}}{(12\rho)^{4-4n} (f_0'')^4 M'^{4n} Q_0^{8-2n}} \right)^{1/(16+2n)}, \\ \mathcal{M}_t &= \left( \frac{E'^{1-n} M'^{8-8n} t^{4-4n}}{(12\rho)^{9-9n} (f_0'')^9 Q_0^{6-6n}} \right)^{1/(8+n)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Решение для  $T$  режима находим из уравнений в безразмерном виде (3.31)–(3.35), записанных в масштабировании, свойственном для  $T$  режима, в которых эволюционные параметры (3.38) равны 0. Решение находим численно при помощи подхода, описанного в разделе 3.2.2. Полученные зависимости радиуса, максимального раскрытия и давления на расстоянии половины радиуса от источника в зависимости от времени выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} R_t(t) &= 0.759 L_t, \quad w_t(0, t) = 1.11 \left( \frac{(f_0'')^2 (12\rho)^{2-2n} M'^{2n} Q_0^{4-n} t^n}{E'^2} \right)^{1/(8+n)}, \\ p_t(R_t(t)/2, t) &= 0.5 \left( \frac{(f_0'')^3 E'^{n+5} M'^{3n} (12\rho)^{3-3n} Q_0^{2-2n}}{t^{4-n}} \right)^{\frac{1}{n+8}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Масштабирование, связанное с режимом трещина-вязкость-ламинарное течение, соответствует  $\mathcal{G}_v = \mathcal{G}_m^{\text{lam}} = 1$ . Параметры  $L_m$  и  $\varepsilon_m$  можно определить, подставив  $n = f_0'' = 1$  в выражения (3.37) для  $L_t$ ,  $\varepsilon_t$ . Параметры трещины в  $M$  режиме ( $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_c = \mathcal{G}_m^{\text{turb}} = 0$ ) выглядят следующим образом [56]:

$$\begin{aligned} R_m(t) &= 0.699 \left( \frac{E' Q_0^3 t^4}{M'} \right)^{1/9}, \quad w_m(0, t) = 1.188 \left( \frac{M'^2 Q_0^3 t}{E'^2} \right)^{1/9}, \\ p_m(R_m(t)/2, t) &= 0.62 \left( \frac{E'^2 M'}{t} \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где, как и в предыдущем случае, численные коэффициенты определяются численно.

Далее перейдем к анализу  $\tilde{T}$  режима. В данном случае реализуется турбулентный режим течения вдоль всей трещины, диссипация энергии происходит при течении вязкой жидкости, и практически весь объем нагнетаемой жидкости утекает в окружающий пласт. Таким образом,  $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_m^{\text{turb}} = 1$ , и мы получаем следующий масштаб длины и величину малого параметра:

$$L_{\tilde{t}} = t^{1/4} \sqrt{\frac{Q_0}{C'}}, \quad \varepsilon_{\tilde{t}} = \frac{(12\rho)^{(1-n)/4} (f_0'')^{1/4} C'^{(4-n)/8} M^{n/4}}{E^{1/4} Q_0^{n/8} t^{(4-n)/16}}. \quad (3.41)$$

Параметры трещины в  $\tilde{T}$  режиме выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\tilde{t}}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} L_{\tilde{t}}, \quad w_{\tilde{t}}(0, t) = \frac{(12\rho)^{\frac{1-n}{4}} (f_0'')^{1/4} M^{n/4} Q_0^{(4-n)/8} t^{n/16}}{E^{1/4} C'^{n/8}}, \\ p_{\tilde{t}}(R_{\tilde{t}}(t)/2, t) &= 0.75 \left( \frac{E'^{12} (f_0'')^4 C'^{8-2n} M'^{4n} (12\rho)^{4-4n}}{Q_0^{2n} t^{4-n}} \right)^{1/16}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где коэффициенты для раскрытия и эффективного давления определяются численно, исходя из решения системы уравнений (3.31)–(3.35), записанной в масштабировании  $\tilde{T}$ , в которой учитывается  $\mathcal{G}_v = \mathcal{G}_k = \mathcal{G}_m^{\text{lam}} = 0$ . Коэффициент в динамике радиуса находим аналитически.

Подстановка  $n = f_0'' = 1$  в выражения (3.41) для  $L_{\tilde{t}}$ ,  $\varepsilon_{\tilde{t}}$  приводит к формулам для  $L_{\tilde{m}}$  и  $\varepsilon_{\tilde{m}}$ , т. е. к масштабированию, связанного с режимом утечки-вязкость-ламинарное течение,  $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_m^{\text{lam}} = 1$ . Параметры трещины в режиме  $\tilde{M}$  находим с учетом  $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_v = \mathcal{G}_m^{\text{turb}} = 0$ :

$$\begin{aligned} R_{\tilde{m}}(t) &= R_{\tilde{t}}(t), \quad w_{\tilde{m}}(0, t) = 1.05 \left( \frac{M'^4 Q_0^6 t}{C'^2 E'^4} \right)^{1/16}, \\ p_{\tilde{m}}(R_{\tilde{m}}(t)/2, t) &= 0.84 \left( \frac{E'^{12} C'^6 M'^4}{Q_0^2 t^3} \right)^{1/16}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где коэффициенты в формулах для раскрытия и давления рассчитываются на основе численного решения задачи.

Предельные режимы распространения  $K$  и  $\tilde{K}$  не зависят от реализуемого режима течения внутри канала трещины, поскольку они связаны с диссипацией энергии при разрушении горной породы. Для полноты изложения выпишем

уравнения для функций радиуса, максимального раскрытия и давления (одинаково вдоль всей трещины) в этих режимах [56; 57]:

$$R_k = \left( \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5} \left( \frac{E'Q_0t}{K'} \right)^{2/5}, \quad w_k(0, t) = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/5} \left( \frac{K'^4Q_0t}{E'^4} \right)^{1/5},$$

$$p_k(t) = \left( \frac{\pi^6}{2^{17}3} \cdot \frac{K'^6}{tE'Q_0} \right)^{1/5}; \quad (3.44)$$

$$R_{\tilde{k}}(t) = R_{\tilde{i}}(t), \quad w_{\tilde{k}}(0, t) = \frac{1}{2^{1/4}\sqrt{\pi}} \left( \frac{K'^8Q_0^2t}{C'^2E'^8} \right)^{1/8}, \quad p_{\tilde{k}}(t) = \frac{\pi^{3/2} C'^{1/4}K'}{2^{15/4}Q_0^{1/4}t^{1/8}}. \quad (3.45)$$

### 3.2.5 Запись системы уравнений в безразмерной форме

Решение задачи (3.30) в одном из масштабирований, представленных в разделе 3.2.4, зависит от трех безразмерных эволюционных параметров, которые количественно определяют отклонение общего решения от соответствующего узлового решения. Любой из этих трех параметров можно рассматривать в качестве безразмерного времени. В качестве альтернативы можно ввести смешанное масштабирование [54; 57; 59; 108] для расчета эволюции решения задачи во времени между предельными случаями.

Одним из таких масштабирований является  $mk$  [12], который определяется через масштаб времени  $t_{mk}$ , означающий характерное время перехода между режимами  $M$  и  $K$ , определяющееся из условия  $L_k(t) = L_m(t)$ . Масштаб длины и малый параметр определяются согласно  $L_{mk} = L_m(t_{mk}) = L_k(t_{mk})$  и  $\varepsilon_{mk} = \varepsilon_m(t_{mk}) = \varepsilon_k(t_{mk})$ . В результате мы можем записать выражения для  $mk$  масштабирования :

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{t}{t_{mk}}, \quad \gamma = \frac{R}{L_{mk}}, \quad \Omega = \frac{w}{\varepsilon_{mk}L_{mk}}, \quad \Pi = \frac{p}{E'\varepsilon_{mk}}, \quad \mathcal{V} = \frac{v}{L_{mk}/t_{mk}}, \quad (3.46)$$

где масштабы времени, длины и малый параметр выглядят как:

$$t_{mk} = \sqrt{\frac{E'^{13}M'^5Q_0^3}{K'^{18}}}, \quad L_{mk} = \left( \frac{E'Q_0^3t_{mk}^4}{M'} \right)^{1/9}, \quad \varepsilon_{mk} = \left( \frac{M'}{E't_{mk}} \right)^{1/3}. \quad (3.47)$$

Для нахождения общего решения задачи можно использовать как масштабирования из раздела 3.2.4, так и смешанное  $mk$  масштабирование. В данном

разделе мы воспользуемся масштабированием  $mk$ , так как оно позволяет получить решение более понятное при интерпретации.

Подстановка выражений (3.46), (3.47) в исходную систему уравнений позволяет получить ее форму в безразмерном виде:

– уравнение упругости:

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^1 G(\xi, s) \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds;$$

– уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - \frac{\xi \dot{\gamma}}{\gamma} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi \gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \Omega \mathcal{V}) + \frac{\varphi^{1/4}}{\sqrt{\tau - \tau_0 (\xi L_{mk} \gamma)}} = 0,$$

$$\mathcal{V} = -\frac{\Omega^2}{\tilde{f} \gamma} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi},$$

$$\tilde{f} = \begin{cases} 1, & \mathcal{R} \Omega |\mathcal{V}| \leq Re_c, \\ f_0'' (\mathcal{R} \Omega |\mathcal{V}|)^{1-n}, & \mathcal{R} \Omega |\mathcal{V}| > Re_c; \end{cases}$$

– критерий распространения:

$$\Omega = \sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \xi}, \quad \xi \rightarrow 1;$$

– граничные условия:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \Omega \mathcal{V} = \frac{1}{2\pi\gamma}, \quad \Omega(1, t) = 0, \quad \Omega(1, t) \mathcal{V}(1, t) = 0;$$

– уравнения баланса:

$$\frac{\tau}{\pi\gamma^2} = 2 \int_0^1 \xi \Omega d\xi + 4\varphi^{1/4} \int_0^1 \xi \sqrt{\tau - \tau_0 (\xi \gamma L_{mk})} d\xi.$$

Таким образом, параметры радиальной трещины в безразмерной постановке задачи зависят от двух безразмерных параметров – коэффициента утечек  $\varphi$  и характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R}$ , помимо времени  $\tau$  и пространственной координаты  $\xi$ :

$$\varphi = \frac{C'^4 E'^{11} M'^3 Q_0}{K'^{14}}, \quad \mathcal{R} = \frac{12K'^4 \rho}{E'^3 M'^2}. \quad (3.48)$$

Далее, мы оценим диапазоны значений параметров  $\varphi$  и  $\mathcal{R}$ , соответствующих типичным промысловым случаям. В качестве размерных входным параметров мы выберем следующие интервалы:

- геомеханические параметры:
  - $E' = 10 \div 50$  ГПа;
  - $K_{Ic} = 0.5 \div 2.5$  МПа  $\cdot \sqrt{\text{м}}$ ;
  - $\sigma_o = 10 \div 30$  МПа;
- параметры пласта:
  - $k = 0.1 \div 100$  мД;
  - $\varphi = 5 \div 25\%$ ;
  - $p_o/\sigma_o = 0.4 \div 0.95$ ;
- параметры жидкости (гидроРАЗРЫВНАЯ и поровая жидкости имеют одинаковые свойства):
  - $\mu = 1 \div 5$  сПз;
  - $c_t = 10^{-3}$  МПа $^{-1}$ ;
  - $\rho = 10^3$  кг/м $^3$ ;
- скорость нагнетания жидкости:
  - $Q_0 = 0.01 \div 0.1$  м $^3$ /с

Путем вариации размерных параметров внутри выбранных диапазонов, мы получили следующие интервалы для безразмерных параметров:  $\varphi \in [1.1 \cdot 10^{-18}, 6.7 \cdot 10^{14}]$ ,  $\mathcal{R} \in [0.2, 3.4 \cdot 10^5]$ . Модуль плоской деформации и трещиностойкость горной породы оказывают наибольшее воздействие на диапазоны параметров  $\varphi$  и  $\mathcal{R}$ . Учитывая, что типичное время закачки жидкости гидроРАЗРЫВА в пласт  $t_{\text{end}} = 1$ , мы получим диапазон для значений безразмерного времени закачки:  $\tau_{\text{end}} \in [2.5 \cdot 10^{-6}, 3 \cdot 10^8]$ .

### 3.2.6 Исследование параметрического пространства задачи

В данном разделе мы проведем исследование параметрического пространства модели радиальной трещины, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного потока “скользкой воды” как в непроницаемом, так и в проницаемом коллекторах. Анализ проводится с использованием постановки задачи в безразмерной форме, представленной в предыдущем разделе. В данном случае пространство параметров трехмерное с осями: время  $\tau$ , коэффициент утечек  $\varphi$  и характеристическое число Рейнольдса  $\mathcal{R}$ .

Сначала, мы определим области применимости предельных режимов распространения трещины (раздел 3.2.4) и представим их в виде карт режимов. Такой анализ полезен для анализа общего решения, а именно, его сопоставления с предельными случаями, что приводит к лучшему пониманию условий роста трещины в рассматриваемый момент времени. По аналогии с анализом, проведенным в работе [54], мы будем использовать следующий критерий для определения зоны применимости режима  $i$  внутри параметрического пространства:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_i(0, \tau)}{\Omega(0, \tau)}\right)^2 + \left(1 - \frac{\gamma_i(\tau)}{\gamma(\tau)}\right)^2} < 0.01, \quad (3.49)$$

где индекс  $i$  может быть  $M$ ,  $\tilde{M}$ ,  $K$ ,  $\tilde{K}$ ,  $T$ ,  $\tilde{T}$ . Другими словами, мы оцениваем относительную разницу между значениями радиуса в общем решении задачи и в предельном режиме  $i$ . Аналогичное вычисление проводим для максимального раскрытия и затем объединяем их по формуле, стоящей в левой части уравнения (3.49). Если полученное отклонение меньше 1%, то мы считаем, что трещина распространяется в условиях предельного случая  $i$ , и это узловое решение аппроксимирует общее решение задачи в момент времени  $\tau$  с приемлемой точностью.

Далее мы продемонстрируем ряд решений, зависящих от времени, для различных характеристик трещины, таких как  $\gamma(\tau)$ ,  $\Omega(0, \tau)$ ,  $\Pi(0.5, \tau)$ ,  $\eta(\tau)$ , фиксируя один (из двух) безразмерных параметров (например,  $\mathcal{R}$ ), в то время как оставшийся параметр (например,  $\varphi$ ) изменяется в определенном интервале.

### 3.2.6.1 Решение задачи для случая непроницаемой горной породы

В работе [48] данный случай уже был рассмотрен, однако авторы не построили карту режимов для сечения параметрического пространства задачи  $(\tau, \varphi, \mathcal{R})$  плоскостью  $\varphi = 0$ , и цель данного раздела диссертации заполнить этот пробел. На рисунке 3.11(а) представлена карта режимов, реализующихся в рассматриваемой модели: здесь присутствуют предельные случаи  $T$ ,  $M$ ,  $K$ . Общее решение задачи эволюционирует от  $T$  к  $K$  режиму, в то время как  $M$  узел реализуется в промежуточные моменты времени при  $\mathcal{R} < 10^2$ . При увеличении

характеристического числа Рейнольдса зона применимости  $T$  режима расширяется, а область  $M$  режима уменьшается. Имплементация трансформации режима течения внутри канала трещины не влияет на границу применимости решения для выбранного диапазона значений характеристического числа Рейнольдса. Однако эта кривая движется в сторону больших моментов времени при  $\mathcal{R} > 10^6$ .

Далее мы хотели бы уточнить, как именно мы определяем границы применимости узловых решений, показанных на рисунке 3.11(а). Мы находим численно положение точек, лежащих на границах применимости узловых решений, согласно критерию (3.49). Затем мы проводим интерполяцию, учитывающую ориентацию границ, углы наклона, которые можно вывести аналитически, исходя из времени перехода между предельными режимами. В качестве примера рассмотрим  $T$  узел, область применимости которого изображена оранжевым цветом на рисунке 3.11(а). Обсуждаемая зона ограничена двумя степенными функциями от времени, которые являются прямыми линиями в двойном логарифмическом масштабе. Первая кривая находится в области  $\mathcal{R} < 10^4$  и относится к  $TM$  переходу, то есть между узлами  $T$  и  $M$ . Используя временной масштаб  $t \sim t_{mt}$  (решение уравнения  $L_t(t) = L_m(t)$ ), мы определяем ориентацию этой границы:  $\tau \sim t_{mt}/t_{mk} = \mathcal{R}^{9/4}$ , а коэффициент в данной формуле рассчитывается численно при помощи критерия (3.49). Функциональная зависимость для второй границы (аналогично без числового коэффициента) получается из анализа перехода  $TK$  и имеет следующий вид:  $\tau \sim t_{tk}/t_{mk} = \mathcal{R}^{(5n-5)/(2n-4)}$ . Далее мы продлеваем обе кривые до точки пересечения, приводящей к форме зоны применимости, представленной на рисунке 3.11(а). Использование только уравнения (3.49) приводит аналогичной области, но с более сглаженной формой.

Помимо зон применимости предельных решений на рисунке 3.11(а) также изображены две временные границы. Первая граница  $\tau_0(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  (черная штриховая линия) соответствует моменту времени, при котором  $\lambda = \lambda_0 = R/25$ , т. е. размер области трещины с ламинарным течением составляет малую долю от радиуса трещины равную  $R/25$ . Иными словами, мы можем приближенно считать, что внутри всей трещины реализуется турбулентный режим течения во временном интервале  $\tau < \tau_0(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  (и, соответственно,  $\lambda < \lambda_0$ ). Можно заметить, что функция  $\tau_0(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  является возрастающей, т. е. длительность временного интервала, в рамках которого размер области с ламинарным течени-

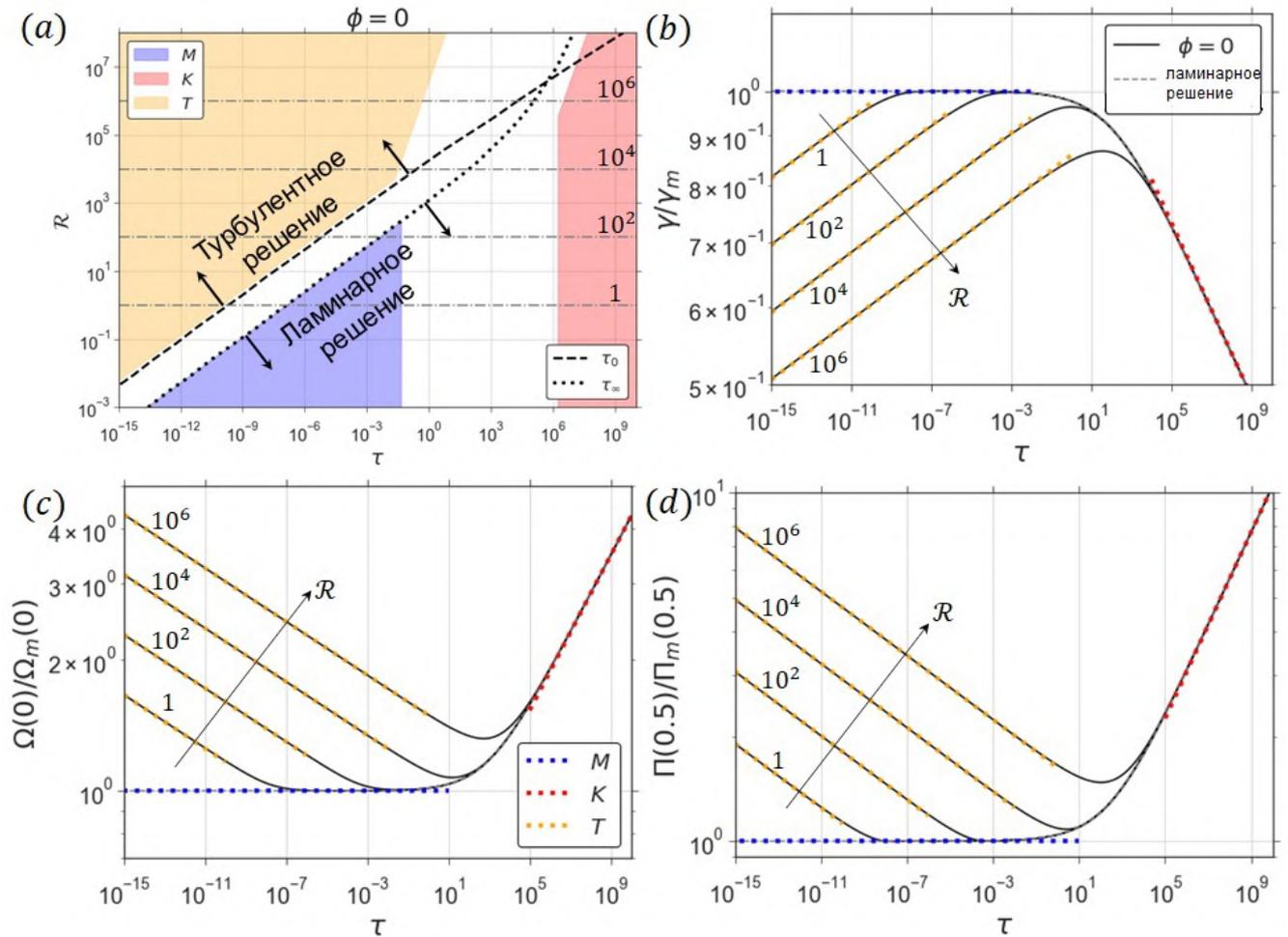


Рисунок 3.11 — Решение задачи для радиальной трещины, распространяющейся в непроницаемой горной породе ( $\phi = 0$ ) под воздействием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды”. На графике (a) представлена карта режимов в координатах  $(\tau, \mathcal{R})$ , на которой цветом закрашены области применимости предельных решений задачи. Также на рисунке (a) изображены две временные границы: (i) момент времени  $\tau_0(\mathcal{R})$  (черная штриховая линия), до которого граница между ламинарным и турбулентным режимами располагается на малом расстоянии от кончика трещины, т. е. зона трещины с ламинарным течением занимает малую часть трещины  $\lambda < \lambda_0 = R/25$  при  $\tau < \tau_0(\mathcal{R})$ ; (ii) момент времени  $\tau_\infty(\mathcal{R})$  (черная пунктирная линия), начиная с которого различие между геометриями трещины (радиус и максимальное раскрытие) в ламинарно-турбулентном и ламинарном случаях пренебрежимо мало. Различные характеристики трещины (радиус  $\gamma(\tau)$ , максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$  и давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$ ) нормализованные  $M$  узловым решением изображены на графиках (b)–(d) сплошными черными линиями для различных значений характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R} = \{1, 10^2, 10^4, 10^6\}$ . Ламинарное решение изображено серой штриховой линией. Цветными пунктирными линиями мы изобразили узловое решение. На рисунке (a), серые штрихпунктирные линии изображают траектории решений с постоянным  $\mathcal{R}$ , изображенные на рисунках (b)–(d).

ем мал, и эффекты турбулентности являются доминирующими, увеличивается с увеличением характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R}$ . При  $\mathcal{R} < 10^3$ , чер-

ная штриховая линия близка к границе  $T$  режима. Вторая временная граница  $\tau_\infty(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  (черная пунктирная линия) соответствует моменту времени, начиная с которого геометрия трещины гидроразрыва (радиус и раскрытие) в ламинарно-турбулентном и ламинарном случаях одинаковы. Иными словами, можно полагать, что поток внутри канала трещины полностью ламинарный на временах  $\tau > \tau_\infty(\mathcal{R}, \varphi = 0)$ . Для определения расположения границы  $\tau_\infty$  мы используем уравнение (3.49), в котором  $i$  будет означать ламинарное решение. Функция  $\tau_\infty(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  является возрастающей и при  $\mathcal{R} < 10^2$  черная пунктирная линия совпадает с границей  $M$  режима.

Мы переходим к обсуждению границы  $\tau_0(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  в контексте концепции концевго элемента трещины гидроразрыва. Модель концевго элемента используется в качестве критерия распространения трещины во множестве численных моделей [26; 27; 54; 55; 106]. Предполагается, что модель концевго элемента работает корректно вдоль небольшой области трещины, примыкающей к ее фронту. В случае 1D моделей (например, трещина плоской деформации и радиальная трещина) типичная длина концевго элемента равна  $\lambda_0$ . Когда мы анализируем положение границы между ламинарным и турбулентным режимами, существует два варианта для модели концевго элемента. В первом случае, когда  $\lambda > \lambda_0$  или при  $\tau > \tau_0(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  ламинарный режим течения реализуется во всем концевом элементе, и мы можем воспользоваться моделями [43] или [44] при расчете эволюции конечной трещины гидроразрыва. Во втором случае, когда  $\lambda < \lambda_0$  или при  $\tau < \tau_0(\mathcal{R}, \varphi = 0)$  рекомендуется использовать ламинарно-турбулентную модель, предложенную в работе [48].

Далее мы переходим к рисункам 3.11(b) – (d), на которых изображены радиус  $\gamma(\tau)$ , максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$  и давление на расстоянии половины радиуса трещины  $\Pi(1/2, \tau)$ . Профили нормализованы соответствующими зависимостями из  $M$  предельного решения. Ламинарно-турбулентные решения соответствуют следующим значениям характеристического числа Рейнольдса:  $\mathcal{R} = \{1, 10^2, 10^4, 10^6\}$ , и они изображены сплошными черными линиями, а серые линии обозначают профили из ламинарного решения. Учет трансформации режима течения приводит к меньшему значению радиусу, большему раскрытию и давлению в начале распространения трещины по сравнению со значениями, предсказанными ламинарной моделью. Промежуток времени, когда ламинарно-турбулентное и ламинарное решения существенно различаются,

растет с увеличением характеристического числа Рейнольдса; такое же поведение наблюдается и для относительной разности между профилями.

### 3.2.6.2 Решение задачи для случая проницаемой горной породы

На рисунке 3.12 представлена карта режимов для модели радиальной трещины, распространяющейся в проницаемой горной породе под воздействием ламинарного течения внутри канала ( $\mathcal{R} = 0$ ), в координатах  $(\tau, \varphi)$ . В свою очередь, на рисунке 3.13 изображены карты режимов для ламинарно-турбулентной модели, соответствующие различным значениям характеристического числа Рейнольдса:  $\mathcal{R} = \{1, 10^2, 10^4, 10^6\}$ . В ламинарно-турбулентном случае профили решения начинаются  $T$  режиме и заканчиваются в узле  $\tilde{K}$ . В промежуточные моменты времени решение задачи может быть аппроксимировано следующими предельными решениями:  $M, K, \tilde{M}, \tilde{T}$  в зависимости от значений определяющих параметров  $\varphi, \mathcal{R}$  и момента времени  $\tau$  (траектории  $\varphi = \text{const}$  на рисунке 3.13(b), изображенные серыми штрихпунктирными линиями). Используя рисунки 3.13(a) и (b), можно заметить, что с увеличением характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R}$ , области применимости предельных решений  $T$  и  $\tilde{T}$  расширяются, сдвигаясь к большим моментам времени, и постепенно уменьшают зоны применимости режимов  $M$  and  $\tilde{M}$  вплоть до их полного исчезновения (см. рисунки 3.13(c) и (d)). Аналогичное поведение наблюдается и в отношении режимов  $K$  и  $\tilde{K}$ , исходя из рисунка 3.13(d); однако эти узлы реализуются в модели при всех значениях  $\mathcal{R}$ .

В разделе 3.2.6.1, мы уже обсуждали физический смысл временных границ  $\tau_0$  и  $\tau_\infty$ . В текущем разделе мы проанализируем их поведение при изменении определяющих параметров  $\varphi$  и  $\mathcal{R}$ . При  $\mathcal{R} = \text{const}$  обе границы не зависят от параметра  $\varphi$ , когда он принимает малые значения. Однако, когда значения  $\varphi$  большие, временные границы описываются функциональной зависимостью  $\tau_0, \tau_\infty \sim \varphi^2$ . При увеличении  $\mathcal{R}$ , границы  $\tau_0, \tau_\infty$  сдвигаются в сторону больших времен. Это связано с тем, что турбулентное течение преобладает внутри канала трещины в течение более длительного промежутка времени при больших значениях характеристического числа Рейнольдса. Необходимо отметить, что рекомендуется использовать ламинарно-турбулентную асимптотику, описанную

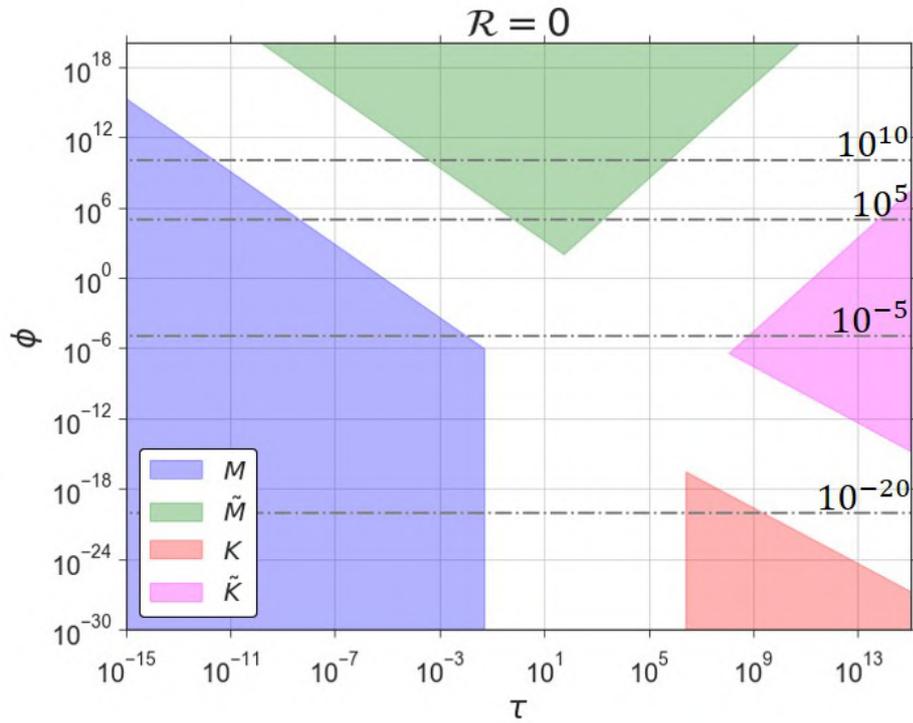


Рисунок 3.12 — Параметрическое пространство в модели радиальной трещины, распространяющейся в пронизаемом пласте ( $\varphi > 0$ ) под влиянием ламинарного течения ( $\mathcal{R} = 0$ ). Карты режимов изображены в координатах  $(\tau, \varphi)$ . Области применимости предельных решений закрашены различными цветами. Серые штрихпунктирные линии изображают траектории решений, которые обсуждаются в текущем разделе.

в разделе 3.1, в качестве критерия распространения конечной трещины гидроразрыва (например, в модели Planar3D), когда область трещины, занимаемая ламинарным течением, мала по сравнению с радиусом трещин, что соответствует области параметрического пространства  $\tau < \tau_0(\mathcal{R}, \varphi)$  (рисунок 3.13).

Рисунок 3.14 демонстрирует характеристики трещины, полученные при помощи ламинарно-турбулентной модели и соответствующие значению  $\mathcal{R} = 10^2$ , при помощи черных сплошных линий. В свою очередь, ламинарное решение изображено серыми прерывистыми линиями. В обоих случаях мы использовали следующий набор значений параметра утечек  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-5}, 10^5, 10^{10}\}$ . Поскольку "интенсивность" турбулентного потока зафиксирована, мы исследуем, как процесс утечек влияет на ламинарно-турбулентное решение. Для нормализации кривых для радиуса  $\gamma(\tau)$ , раскрытия  $\Omega(0, \tau)$  и давления  $\Pi(1/2, \tau)$  на рисунках 3.14(a) – (c) мы применили предельное решение  $M$ . Увеличение значения параметра  $\varphi$  приводит к сокращению интервала времени, внутри которого радиус трещины в ламинарно-турбулентном случае сильно отличается от величины радиуса в ламинарной модели (т. е., когда эффекты турбулентности

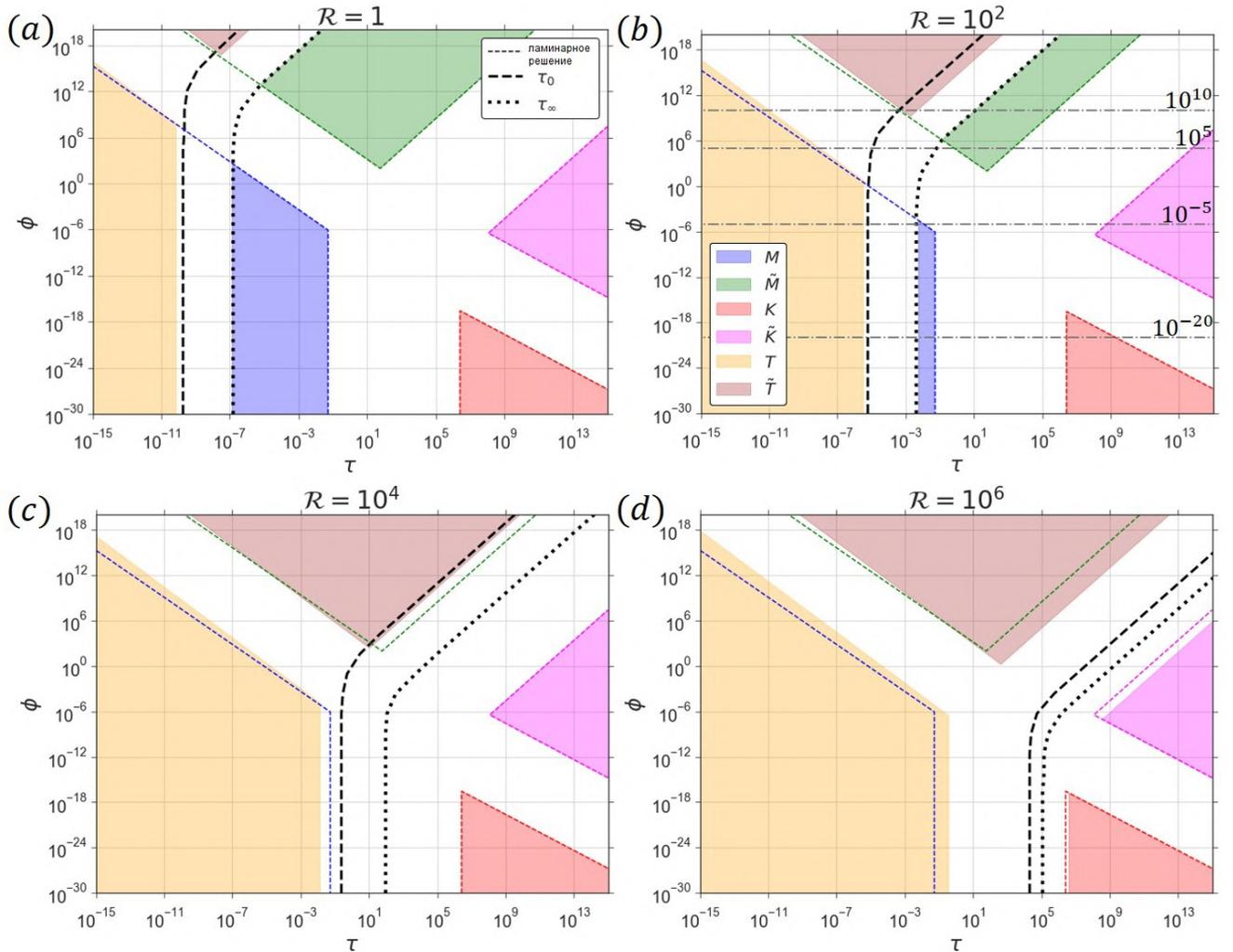


Рисунок 3.13 — Параметрическое пространство в модели радиальной трещины, распространяющейся в пронизаемом пласте ( $\phi > 0$ ) под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды”. Карты режимов изображены в координатах  $(\tau, \phi)$  для различных значений характеристического числа Рейнольдса:  $\mathcal{R} = \{1, 10^2, 10^4, 10^6\}$ . Области применимости предельных решений закрашены различными цветами. В целях сравнения мы добавили на графики границы режимов, соответствующих ламинарной модели, цветными прерывистыми линиями. Черная штриховая линия показывает момент времени  $\tau_0(\mathcal{R}, \phi)$ , до которого граница между ламинарным и турбулентным режимами располагается на малом расстоянии от кончика трещины, т. е. зона трещины с ламинарным течением занимает малую часть трещины  $\lambda < \lambda_0 = R/25$  при  $\tau < \tau_0(\mathcal{R}, \phi)$ . Черная пунктирная линия изображает момент времени  $\tau_\infty(\mathcal{R}, \phi)$ , начиная с которого различие между геометриями трещины (радиус и максимальное раскрытие) в ламинарно-турбулентном и ламинарном случаях пренебрежимо мало. На рисунке (b) серые штрихпунктирные линии изображают траектории решений, которые обсуждаются в текущем разделе.

оказывают наибольшее воздействие на величину радиуса). Противоположная ситуация наблюдается для максимального раскрытия и давления на расстоянии половины радиуса (рисунки 3.14(b) и (c)), для которых увеличение интенсивности утечек продлевает длительность влияния эффектов турбулентности.

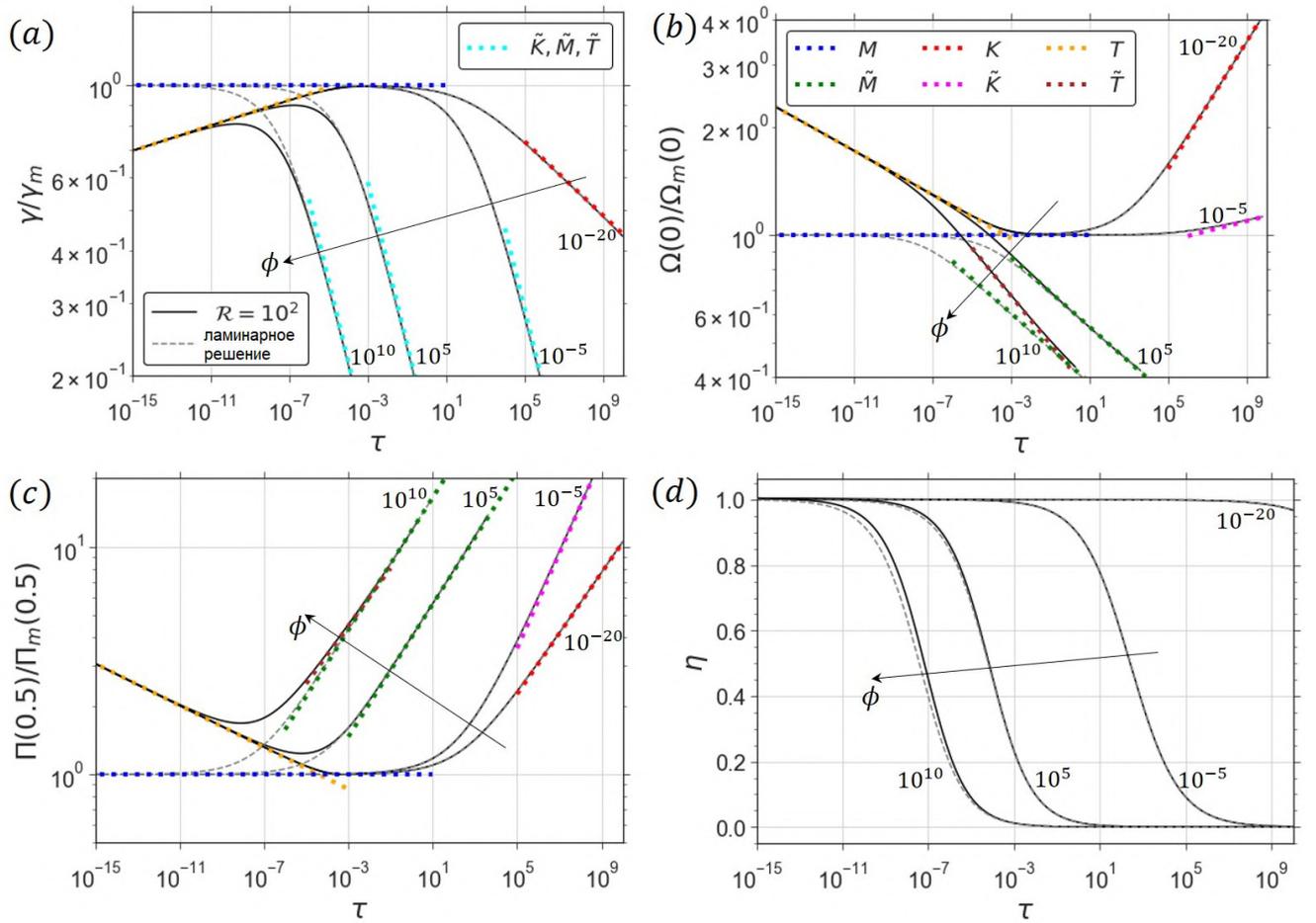


Рисунок 3.14 — Зависящие от времени характеристики радиальной трещины, распространяющейся в проницаемом пласте под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды”: (a) радиус  $\gamma(\tau)$ , (b) максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , (c) давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$ , и (d) эффективность  $\eta(\tau)$ . На графиках (a) – (c) свойства трещины нормализованы на аналогичные характеристики из узлового решения  $M$ . Представленные решения соответствуют  $\mathcal{R} = 10^2$  и  $\phi = \{10^{-20}, 10^{-5}, 10^5, 10^{10}\}$ . Ламинарные решения изображены серыми штриховыми линиями. Узловые решения показаны цветными пунктирными линиями. На рисунке (a) предельные решения, в которых доминируют утечки ( $\tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{T}$ ), нарисованы одним цветом, так как динамика радиуса, соответствующая этим режимам описывается одинаковой формулой (3.42).

Динамика эффективности трещины практически не зависит от учета трансформации режима течения внутри канала трещины (рисунок 3.14(d)).

### 3.3 Выводы

В данной главе мы провели анализ распространения полубесконечной и радиальной трещин гидроразрыва в проницаемом коллекторе под влиянием ла-

минарно-турбулентного течения воды с полимерными добавками, снижающими трение. В разделе 3.1 рассмотрена модель концевой элемента, для которой выведены аналитически предельные режимы распространения и реализован численный алгоритм для нахождения общего решения задачи. В секции представлены карты, на которых отображены границы применимости предельных решений и положения точки смены режима течения в зависимости от значений определяющих параметров. В разделе 3.2 изучена модель радиальной трещины гидроразрыва, в рамках которой мы реализовали численный подход, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической интерполяции Лагранжа, и вывели полуаналитическим способом предельные режимы распространения. Мы определили, что оба режима течения всегда реализуются внутри канала трещины: ламинарный режим вблизи кончика, а турбулентный режим вблизи ствола нагнетательной скважины, причем размер ламинарной области увеличивается с течением времени. Было выявлено, что наличие утечек продлевает воздействие эффектов турбулентности на процесс роста трещины гидроразрыва. Мы продемонстрировали, что турбулентный режим течения оказывает влияние на профили раскрытия и давления вблизи ствола скважины в начальный период распространения причем интервал времени, в течение которого радиус трещины, раскрытие и давление отличаются от соответствующих параметров в ламинарном решении различный. В разделе приводятся карты, изображающие области применимости предельных режимов, на основе которых мы определили интервалы значений определяющих параметров, при которых решение задачи, учитывающее ламинарно-турбулентный режим внутри канала трещины, можно считать полностью турбулентным или полностью ламинарным.

## Глава 4. Трещина гидроразрыва, распространяющаяся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли\*

При создании трещины гидроразрыва можно регулировать ряд параметров в целях оптимизации проводимой процедуры. Среди них объемная скорость закачки и свойства жидкости гидроразрыва. Помимо разрушения горной породы жидкость гидроразрыва переносит частицы проппанта, расклинивающего агента, который закачивается внутрь канала трещины для предотвращения ее полного закрытия после остановки закачки. Реология жидкости гидроразрыва и расписание закачки разрабатываются в целях решения следующих задач [8; 107]: создание раскрытия трещины достаточного для размещения частиц проппанта, минимизация осаждения частиц проппанта [11], снижение риска бриджинга проппанта [110], уменьшение утечек жидкости гидроразрыва в окружающий проницаемый резервуар.

Жидкость гидроразрыва представляет собой сложную смесь, содержащую специализированные добавки, например, полимерные вещества, что позволяет достичь желаемых реологических свойств [11]. Типичная жидкость гидроразрыва демонстрирует неньютоновское поведение, а именно разжижении при сдвиге, в определенном диапазоне значений скорости сдвига, т.е. вязкость жидкости гидроразрыва снижается с ростом скорости сдвига, в то время как при малых и больших скоростях сдвига вязкость жидкости гидроразрыва имеет постоянное значение [51]. Однако, пены, которые можно использовать как жидкость гидроразрыва [111–113], эмульсии, суспензии с проппантом и волокнами [11; 114] демонстрируют сдвиговое разжижение с пределом текучести.

Для описания свойств жидкости гидроразрыва можно использовать различные реологические модели. В случае чистой воды или скользкой воды применяется модель ньютоновской жидкости, для которой напряжение сдвига линейно пропорционально скорости сдвига. Когда жидкость гидроразрыва обладает свойством разжижения при сдвиге, мы можем использовать модель степенной жидкости [115]. Однако эта модель переоценивает и недооценивает

---

\*При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [71; 109].

вязкость жидкости при малых и больших скоростях сдвига. Данное несоответствие может быть устранено с помощью более сложных реологических моделей, таких как модель Кросса [116], модель Каро [117], усеченная степенная модель [118] или модель Элис [119]. Упомянутые выше реологические модели не учитывают наличие предела текучести у жидкости гидроразрыва, влияние которого на поведение течения может быть значительным для некоторых жидкостей. Реологическая модель Гершеля-Балкли [120] является обобщением степенной модели и учитывает наличие предела текучести. Предельными случаями модели Гершеля-Балкли являются модель Ньютона, модель степенной жидкости и модель Бингама [121].

Так как основной фокус данного раздела диссертации направлен на неньютоновскую реологию жидкости гидроразрыва, нам необходимо упомянуть работу [122], посвященную исследованию инициализации роста трещины плоской деформации, движимой бингамовской жидкостью. В статьях [123; 124] авторы рассмотрели задачу роста трещины гидроразрыва (с PKN и KGD геометриями), которая распространяется под влиянием жидкости с усеченной степенной реологией. Работа [125] посвящена анализу роста трещины с KGD геометрией, движущейся под влиянием жидкости, описываемой реологией Кару.

В большинстве исследований не рассматривалось влияние предела текучести жидкости гидроразрыва на распространение конечной трещины. Поэтому в настоящем разделе мы хотели бы заполнить этот пробел и провести данный анализ на примере модели трещины гидроразрыва с радиальной геометрией. Чтобы учесть наличие предела текучести, мы предполагаем, что модель Гершеля-Балкли описывает реологические свойства жидкости гидроразрыва. Основными целями текущего исследования являются: (i) реализация численного алгоритма для нахождения точного решения задачи роста радиальной трещины, (ii) построение приближенного вычислительно эффективного алгоритма для быстрых оценок, (iii) нахождение предельных режимов распространения трещины, реализующихся в модели, (iv) исследование параметрического пространства задачи и (v) анализ изменения характеристик трещины в зависимости от значения предела текучести и интенсивности утечек при различных значениях индекса текучести.

Текущая глава диссертации организована следующим образом. Сначала, мы опишем формулировку задачи и выпишем основные уравнения. Затем,

мы приведем описание численного алгоритма и после этого, расскажем как получить приближенное решение задачи. Далее мы повторим известные предельные режимы распространения радиальной трещины в проницаемой горной породе и получим новые режимы, связанные с доминированием предела текучести. Наконец, мы представим анализ результатов, включая оценки диапазонов безразмерных определяющих параметров, и обширное исследование параметрического пространства задачи. В завершении будут представлены примеры решения задачи для нескольких типовых полевых случаев.

#### 4.1 Постановка задачи

Настоящий раздел посвящен постановке задачи в модели радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости гидроразрыва с ненулевым пределом текучести и нелинейным поведением напряжения сдвига. На рисунке 4.1 представлено схематическое изображение рассматриваемой модели. По сравнению с классической постановкой задачи о радиальной трещине (раздел 1.2) мы модифицируем только предположения, связанные с течением жидкости внутри трещины. Именно на них мы остановимся подробно.

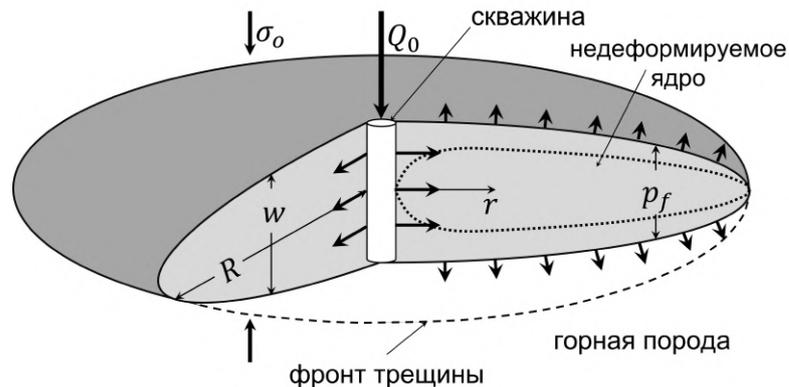


Рисунок 4.1 — Модель радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли.

Мы будем предполагать, что реология жидкости гидроразрыва описывается моделью Гершеля-Балкли, которую можно записать следующим определяющим соотношением:

$$\tau_m = \tau_0 + M\dot{\gamma}^n, \quad (4.1)$$

где  $\tau_m$  напряжение сдвига,  $\tau_0$  предел текучести,  $\dot{\gamma}$  скорость сдвига,  $M$  коэффициент густоты потока,  $n$  показатель текучести. Когда предел текучести ненулевой ( $\tau_0 > 0$ ), и напряжение сдвига ниже предела текучести ( $\tau_m < \tau_0$ ), жидкость ведет себя как твердое тело, что приводит к формированию пробки внутри канала трещины. Так напряжение сдвига линейно по ширине канала трещины и равно нулю на осевой линии, недеформируемое ядро формируется по середине трещины, и ее ширина  $2y_\tau(r, t)$  является неизвестной функцией от пространственной координаты и времени (рисунок 4.1). Модель Гершеля-Балкли имеет три предельных случая: (i) ньютоновская жидкость, когда  $\tau_0 = 0$  и  $n = 1$  ( $M$  соответствует динамической вязкости), (ii) степенная жидкость, когда предел текучести отсутствует  $\tau_0 = 0$ , и (iii) жидкость Бингама, когда  $\tau_0 \neq 0$  и  $n = 1$ .

Массообмен между трещиной и окружающим проницаемым резервуаром в модели описывается при помощи закона утечек Картера. Так как реология жидкости гидроразрыва описывается моделью Гершеля-Балкли, процесс утечек может быть более сложным, чем описываемый законом Картера. Однако, мы можем полагать, что закон Картера дает результаты приемлемой точности, так как корка, формируемая на поверхности трещины гидроразрыва, задерживает крупные полимерные молекулы, содержащиеся в жидкости гидроразрыва. Таким образом, в проницаемый резервуар утекает фильтрат жидкости гидроразрыва со свойствами близкими к свойствам воды (вязкость  $\mu$  и сжимаемость  $c_t$ ). Когда на поверхности трещины гидроразрыва не формируется полимерная корка, а свойства утекаемой жидкости схожи со свойствами поровой жидкости, коэффициент Картера рассчитывается по формуле [77]:  $C_L = k(\sigma_o - p_o)/(\mu\sqrt{\pi c})$ , где  $p_o$  начальное поровое давление, а  $c = k/(\phi_r c_t \mu)$  коэффициент пьезопроводности. Данная формула позволяет вычислить значение верхней границы для случая, который реализуется в текущей модели.

Решение задачи, а именно, динамика радиуса  $R(t)$ , профили раскрытия  $w(r, t)$  и эффективного давления  $p(r, t)$ , зависит от времени  $t$ , пространственной координаты  $r$ , скорости закачки  $Q_0$ , предела текучести  $\tau_0$  и набора материальных параметров:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_{Ic}, \quad M' = \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n}M, \quad C' = 2C_L, \quad (4.2)$$

где параметр вязкости  $M'$  учитывает нелинейность напряжения сдвига (4.1).

Рассматривая задачу о течение жидкости с реологией Гершеля-Балкли в плоском канале фиксированной ширины под воздействием постоянного градиента давления, можно получить формулу для профиля скорости, учитывая закон сохранения импульса и определяющее соотношение (4.1). Усредняя профиль скорости по ширине канала [52], получаем следующую формулу для средней скорости:

$$v = -\frac{w^{1+1/n}}{M'^{1/n}} \frac{\partial p}{\partial r} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^{1/n-1} \left( 1 - \frac{2y_\tau}{w} \right)^{1+1/n} \left( 1 + \frac{n}{n+1} \frac{2y_\tau}{w} \right), \quad y_\tau = \tau_0 \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^{-1}, \quad (4.3)$$

где  $y_\tau$  полуширина недеформируемого ядра. Можно заметить, что ширина ядра вблизи источника нагнетания и на кончике трещины  $y_\tau(0, t) = y_\tau(R(t), t) = 0$ , так как профиль градиента давления в этих точках имеет сингулярности. Следовательно, максимум функции  $y_\tau(r, t)$  достигается на некотором расстоянии от источника, как схематически изображено на рисунке 4.1.

Уравнение (4.3) переходит в закон Пуазейля для течения ньютоновской жидкости в плоском канале при  $\tau_0 = 0$  и  $n = 1$ :

$$v = -\frac{w^2}{M'} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

и в аналогичное соотношение для случая степенной жидкости, когда  $\tau_0 = 0$  [8]:

$$v = -\frac{w^{1+\frac{1}{n}}}{M'^{1/n}} \frac{\partial p}{\partial r} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^{\frac{1}{n}-1}.$$

Уравнение Рейнольдса получается в результате подстановки выражения для скорости течения (4.3) в уравнение неразрывности (1.13), скомбинированное с законом Картера (1.14).

## 4.2 Подход к моделированию

В данном разделе мы будем обсуждать подходы для нахождения численного решения рассматриваемой задачи. Мы используем два различных метода. Первый метод, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа, позволяет получить точное численное решение. Опираясь на работы [66] и [65], в которых авторы использовали

данную методику для моделирования распространения трещины гидроразрыва с различными геометриями, в настоящей главе мы модифицировали метод для учета реологии Гершеля-Балкли и наличия утечек в пласт. Важно отметить, что алгоритм не требует внедрения полноценной асимптотики вблизи кончика трещины ввиду высокого пространственного разрешения в этой области. Второй метод, включающий в себя асимптотику для кончика трещины и уравнение баланса жидкости, позволяет найти приближенное решение задачи. Используя данный подход, можно быстро оценить параметры трещины в любой момент времени и для любых значений входных параметров задачи. Используя приближенный подход, мы можем моделировать рост трещины при больших интенсивностях утечек и/или больших значениях предела текучести. В свою очередь, полноценный численный алгоритм в этих случаях будет иметь проблемы со сходимостью. Таким образом, быстрое приближенное решение является более практичным для анализа всего параметрического пространства задачи, что является одной из основных целей текущего исследования.

При описании численных алгоритмов мы будем использовать нормализованное расстояние до источника  $\rho = r/R(t)$ , использование которого придет к модификации производных по времени и пространственной координате согласно следующим выражениям:  $\frac{\partial}{\partial t}|_r = \frac{\partial}{\partial t}|_\rho - \frac{\rho V(t)}{R(t)} \frac{\partial}{\partial \rho}|_t$ ,  $\frac{\partial}{\partial r}|_t = \frac{1}{R(t)} \frac{\partial}{\partial \rho}|_t$ , где  $V = dR/dt = \dot{R}$  скорость распространения трещины.

Далее мы переписем уравнение упругости (1.11), уравнение Рейнольдса (1.13), (1.14), (4.3), уравнение баланса жидкости (1.20) и критерий распространения трещины (1.17), используя переменную  $\rho$ :

– *Уравнение упругости:*

$$p(\rho, t) = -\frac{E'}{2\pi R(t)} \int_0^1 G(\rho, s) \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} ds. \quad (4.4)$$

В полноценном численном решении мы будем пользоваться версией данного уравнения, продолженной на интервал  $[-1, 0)$ :

$$p(\rho, t) = -\frac{E'}{4\pi R(t)} \int_{-1}^1 G_e(\rho, s) \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} ds, \quad \rho \in [-1, 1], \quad (4.5)$$

где профиль раскрытия  $w(\rho, t)$  продлевается симметрично на интервал с отрицательной координатой  $\rho$ , а интегральное ядро выглядит следу-

ющим образом:

$$G_e(\rho, s) = \begin{cases} \text{sign}(\rho s) \left[ \frac{1}{\rho} K \left( \frac{s^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{s-\rho} E \left( \frac{s^2}{\rho^2} \right) \right], & |\rho| > |s|, \\ \frac{1}{s-\rho} E \left( \frac{\rho^2}{s^2} \right), & |\rho| < |s|. \end{cases} \quad (4.6)$$

– Уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{V}{R} \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{R\rho} \frac{\partial(\rho w v)}{\partial \rho} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(\rho R)}} = 0, \quad (4.7)$$

где скорость потока жидкости внутри канала трещины:

$$v = -\frac{w^{1+1/n}}{M^{1/n} R^{1/n}} \frac{\partial p}{\partial \rho} \left| \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|^{1/n-1} \left( 1 - \frac{2y_\tau}{w} \right)^{1+1/n} \left( 1 + \frac{n}{n+1} \frac{2y_\tau}{w} \right),$$

$$y_\tau = \tau_0 R \left| \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|^{-1}. \quad (4.8)$$

– Уравнение баланса:

$$\frac{Q_0 t}{\pi R^2} = 2 \int_0^1 \rho w d\rho + 4C' \int_0^1 \rho \sqrt{t - t_0(\rho R)} d\rho. \quad (4.9)$$

– Критерий распространения:

$$w = \frac{K' \sqrt{R}}{E'} \sqrt{1 - \rho}, \quad \rho \rightarrow 1. \quad (4.10)$$

#### 4.2.1 Точное численное решение

Алгоритм, используемый для нахождения точного численного решения в настоящей главе, аналогичен подходу, описанному в разделе 3.2.2. В связи с этим мы не будем повторять все детали метода, а только упомянем основные отличия, связанные со спецификой модели радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли.

Мы выпишем уравнение Рейнольдса (4.7), (4.8) в дискретном виде. Для дискретизации необходимо проинтегрировать уравнение (4.7) относительно нормализованной координаты  $\rho$  от каждого узла  $z_i$  до кончика трещины, т. е.  $\rho = 1$ .

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{z}^2}{2} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbb{S} \times (\mathbf{s}^2 \mathbf{F})] + \frac{V}{R} (\mathbb{S} \times (\mathbf{s}^2 \mathbf{F})) - \frac{\mathbf{z} \mathbf{w} \mathbf{v}}{R} + C' \mathbb{R} \times \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{t - t_0(\mathbf{z}R)}} = 0, \\
& \mathbf{w} = \mathbb{S} \times \mathbf{F}, \\
& \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{w}^{1+1/n}}{M^{1/n} R^{1/n}} \mathbf{p}_\rho |\mathbf{p}_\rho|^{1/n-1} \left(1 - \frac{2\mathbf{y}_\tau}{\mathbf{w}}\right)^{1+1/n} \left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{2\mathbf{y}_\tau}{\mathbf{w}}\right), \\
& \mathbf{y}_\tau = \frac{\tau_0 R}{|\mathbf{p}_\rho|}, \quad \mathbf{p}_\rho = \frac{E'}{4R} \mathbb{D} \times (\mathbb{G} \times \mathbf{F}), \tag{4.11}
\end{aligned}$$

где вектор  $|\mathbf{p}_\rho|$  содержит абсолютные значения градиента давления в вспомогательных узлах.

Также для составления системы обыкновенных дифференциальных уравнений нам необходимо продифференцировать по времени уравнение баланса (4.9):

$$\frac{Q_0}{\pi} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{2tV}{R^3} \right) = -\mathbb{S}_H \times (\mathbf{s}^2 \dot{\mathbf{F}}) + 2C' \mathbb{R}_H \times \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{t - t_0(\mathbf{z}R)}} - \frac{2C'V}{R^3} \int_0^t \frac{R^2(s) ds}{\sqrt{t - s}}, \tag{4.12}$$

и критерий распространения трещины (4.10):

$$\mathbf{Q} \times \dot{\mathbf{F}} = -\frac{K'V}{2\sqrt{2RE'}}, \tag{4.13}$$

Определения матриц и векторов, используемых в уравнениях представлены в разделе 3.2.2 и в работе [65].

Затем мы объединяем уравнения (4.11), (4.12), (4.13) в систему, которую можно записать в виде:

$$\mathbb{A}(\mathbf{X}, t) \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{B}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \{R, \mathbf{F}\}, \tag{4.14}$$

где  $\mathbf{X}$  вектор неизвестных.

В качестве начального условия для решения системы (4.14) необходимо взять  $M$  предельное решение, когда показатель текучести больше 0.5, и  $K$  предельное решение при  $n < 0.5$ . Данные предельные решения относятся к модели радиальной трещины, распространяющейся под воздействием жидкости со степенной реологией.

### 4.2.2 Приближенное полуаналитическое решение

В основе приближенного решения лежит идея о том, что асимптотическое решение вблизи кончика трещины определяет свойства конечной трещины гидроразрыва. В результате профиль раскрытия трещины может быть представлен в следующем виде [54]:

$$w(\rho, t) = \left( \frac{1 + \rho}{2} \right)^\lambda (1 - \rho)^{\bar{\delta}} w_a(R), \quad (4.15)$$

где  $w_a(s)$  асимптотический профиль раскрытия вблизи кончика трещины (решение для полубесконечной трещины), зависящий от расстояния до фронта  $s$ , материальных параметров (4.2), предела текучести  $\tau_0$  и времени  $t$  (через радиус  $R(t)$  и скорость  $\dot{R}(t)$ ). В уравнении (4.15) мы используем параметры  $\lambda$  и  $\bar{\delta}$ : первый параметр определяется в результате сравнения приближенного решения с точным в предельных случаях (будет обсуждаться позднее), а второй параметр меняется медленно и следует из решения для кончика трещины, а именно,  $w_a(s) \propto s^{\bar{\delta}}$ . Так как радиус трещины в предельных случаях является степенной функцией от времени [12], то мы можем предположить, что  $R(t) \propto t^\alpha$ , где  $\alpha$  – медленно меняющаяся функция времени. Следовательно, обратная функция для радиуса имеет вид  $t_0(\rho R) = t\rho^{1/\alpha}$ . Подставляя профиль раскрытия (4.15) и выражение для  $t_0(\rho R)$  в уравнение баланса (4.9), мы получаем:

$$\frac{Q_0 t}{2\pi R^2} = w_a(R) \int_0^1 \rho \left( \frac{1 + \rho}{2} \right)^\lambda (1 - \rho)^{\bar{\delta}} d\rho + 2C' \sqrt{t} \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^{1/\alpha}} d\rho. \quad (4.16)$$

Интеграл в формуле 4.16 можно посчитать при помощи специальных функций:

$$\begin{aligned} \frac{Q_0 t}{2\pi R^2} &= w_a(R) \mathcal{B}(\lambda, \bar{\delta}) + 2C' \sqrt{t} \alpha B \left( 2\alpha, \frac{3}{2} \right), \\ \mathcal{B}(\lambda, \bar{\delta}) &= 2^{1+\bar{\delta}} \left[ B_0 \left( \frac{1}{2}; \lambda + 2, \bar{\delta} + 1 \right) - B_0 \left( 1/2; \lambda + 1, \bar{\delta} + 2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $B_0(x; a, b) = B(a, b) - B(x; a, b)$ ,  $B(a, b)$  бета-функция, и  $B(x; a, b)$  неполная бета-функция.

Асимптотическое решение вблизи кончика трещины  $w_a(R)$  является одной из основных частей приближенного решения. Мы воспользуемся асимптотикой, представленной в работе [52], которая состоит из связанного с пределом текучести узлового решения для кончика трещины  $w_\tau$  и приближенного решения

для полубесконечной трещины, распространяющей под влиянием жидкости со степенной реологией  $w_{\text{pl}}$ :

$$w_a(R) = \left( w_{\text{pl}}^\zeta(R) + w_\tau^\zeta(R) \right)^{1/\zeta}, \quad w_\tau(R) = \sqrt{\frac{8\pi\tau_0}{E'}} R, \quad \zeta = -0.3107n + 1.9924,$$

$$\sqrt{\frac{R}{\ell}} = \mathcal{H} \left( \frac{w_{\text{pl}} E'}{K' \sqrt{R}}, \frac{2C' E'}{\sqrt{V} K'} \right), \quad \ell = \left( \frac{K'^{m+2}}{M' V^n E'^{m+1}} \right)^{2/(2-n)}, \quad V = \dot{R} = \frac{\alpha R}{t},$$
(4.18)

где функция  $\mathcal{H}(\tilde{w}, \chi)$  определена следующим образом [49]:

$$\mathcal{H}(\tilde{w}, \chi) = \left( \delta_1(\tilde{w}, \chi) \tilde{w}^{(2+n)/(1+\theta)} \left\{ \delta_m^{1+\theta} \beta_m^{2+n} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \delta_{\tilde{m}}^{1+\theta} \beta_{\tilde{m}}^{2+2n} \left[ \left( 1 + \frac{\chi}{\tilde{w}} \right)^n - 1 \right] \right\}^{-1/(1+\theta)} \right)^{(1+\theta)/(2-n)};$$

$$\delta_1(\tilde{w}, \chi) = \frac{\delta_m \delta_{\tilde{m}} V_m V_{\tilde{m}} \left[ \beta_m^{(2+n)/n} V_{\tilde{m}}^{(1+\theta)/n} + \frac{\chi}{\tilde{w}} \beta_{\tilde{m}}^{(2+2n)/n} V_m^{(1+\theta)/n} \right]}{\delta_{\tilde{m}} V_{\tilde{m}} \beta_m^{(2+n)/n} V_{\tilde{m}}^{(1+\theta)/n} + \delta_m V_m \frac{\chi}{\tilde{w}} \beta_{\tilde{m}}^{(2+2n)/n} V_m^{(1+\theta)/n}};$$

$$V_m = 1 - \tilde{w}^{-(2+n)/(1+\theta)}, \quad V_{\tilde{m}} = 1 - \tilde{w}^{-(2+2n)/(1+\theta)};$$

$$\beta_m = \left[ \frac{2(2+n)^2}{n} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi n}{2+n} \right) \right]^{1/(2+n)}, \quad \beta_{\tilde{m}} = \left[ \frac{64(1+n)^2}{3n(4+n)} \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi n}{4+4n} \right) \right]^{1/(2+2n)};$$

$$\delta_m = \frac{2-n}{2+n}, \quad \delta_{\tilde{m}} = \frac{2-n}{2+2n};$$

$$\theta = 0.0452n^2 - 0.1780n + 0.1753.$$
(4.19)

Параметр  $\bar{\delta}$  в уравнении баланса (4.17) может быть найден из формулы:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta + 1}{2}, \quad \delta = \frac{w_{\text{pl}}^\zeta \delta_1 + w_\tau^\zeta}{w_{\text{pl}}^\zeta + w_\tau^\zeta},$$

где функция  $\delta_1$  определена в уравнении (4.19), и она входит в приближенную асимптотику для кончика трещины в случае степенной жидкости гидроразрыва:  $w_{\text{pl}}(s) \propto s^{(\delta_1+1)/2}$ , где  $s$  расстояние до кончика трещины.

Далее мы решаем систему нелинейных алгебраических уравнений, состоящую из уравнения баланса (4.17) и асимптотики для кончика трещины (4.18). Временной интервал, внутри которого мы хотим провести моделирование роста радиальной трещины, делится равномерно в логарифмическом масштабе. Известные переменные  $\mathcal{X} = \{\alpha, R, w_a\}$  находим итеративно для каждого момента времени. Рассмотрим момент времени  $t_i$ . Из предыдущего расчета для  $t_{i-1}$ , мы

знаем  $\mathcal{X}_{i-1} = \{\alpha_{i-1}, R_{i-1}, (w_a)_{i-1}\}$ , и эти значения используются в качестве начального приближения для текущего расчета. Нам необходимо найти решение для двух моментов времени  $t_i$  и  $t_i^* = 0.9 \cdot t_i$ . Используя полученные решения, мы можем обновить  $\alpha_i$ , которое изначально предполагалось равным  $\alpha_{i-1}$ , согласно формуле:  $\alpha_i = d \log(R) / d \log(t) = [\log(R_i) - \log(R_i^*)] / [\log(t_i) - \log(t_i^*)]$ . Затем решение системы повторяется с новым начальным приближением до тех пор, пока сходимость для параметра  $\alpha_i$  не будет достигнута. Необходимо отметить, что для первого момента времени ( $i = 1$ ), в качестве начального приближения берется  $\alpha_0 = (2n + 2) / (3n + 6)$ ,  $R_0$  и  $(w_a)_0$  соответствует узловому решению трещина-вязкость (раздел 4.3.1).

Как только решение  $\mathcal{X}$  найдено профиль раскрытия трещины  $w(\rho, t)$  находим с помощью уравнения (4.15), в то время как профиль эффективного давления  $p(\rho, t)$  рассчитывается при помощи уравнения упругости (4.4) [54]:

$$p = \frac{E' w_a(R)}{R} \mathcal{F}(\rho, \lambda, \bar{\delta}), \quad \mathcal{F}(\rho, \lambda, \bar{\delta}) = \frac{1}{2^{\lambda+1} \pi} \int_0^1 \frac{\partial G(\rho, s)}{\partial s} (1+s)^\lambda (1-s)^{\bar{\delta}} ds, \quad (4.20)$$

где значение функции  $\mathcal{F}$  находим численно. Последним параметром является эффективность трещины:

$$\eta = \frac{2\pi R^2 w_a(R) \mathcal{B}}{Q_0 t}, \quad (4.21)$$

где функция  $\mathcal{B}$  была введена в уравнении (4.17).

В завершении данного раздела мы обсудим функцию  $\lambda$ . В разделе 4.3.1 будут получены значения  $\lambda$  для всех предельных режимов распространения радиальной трещины гидроразрыва, реализующихся в настоящей модели:  $\lambda_m = \lambda_m(n)$  (рисунок 4.2(a)),  $\lambda_{\tilde{m}} = \lambda_{\tilde{m}}(n)$  (рисунок 4.4(a)),  $\lambda_k = \lambda_{\tilde{k}} = 0.5$ ,  $\lambda_t = 1.029$  и  $\lambda_{\tilde{t}} = 1.077$ . Используя  $\lambda$  в предельных случаях, мы построим функцию интерполяции, позволяющую определить  $\lambda$  для любых значений определяющих параметров.

Определим следующие вспомогательные параметры:

$$\Xi_i = w_i(0, t) / R_i(t), \quad \eta_{\text{pl}} = \frac{2\pi R^2 w_a(R) \mathcal{B}(0.5, \bar{\delta})}{Q_0 t}, \quad \eta_{\tau_0} = \frac{2\pi R^2 w_a(R) \mathcal{B}(1.05, \bar{\delta})}{Q_0 t}, \quad (4.22)$$

где индекс  $i$  обозначает рассматриваемое узловое решение,  $i = \{m, \tilde{m}, k, \tilde{k}, t, \tilde{t}\}$ . Динамика радиуса  $R_i(t)$  и максимального раскрытия  $w_i(0, t)$  в предельных режимах распространения задана уравнениями (4.26), а функция  $\mathcal{B}(\lambda, \bar{\delta})$

выписана в уравнении (4.17). Параметр  $\eta_{pl}$  можно интерпретировать как приближенное значение эффективности трещины, заполненной жидкостью со степенной реологией. Аналогичную интерпретацию можно дать для параметра  $\eta_{\tau_0}$ , аппроксимирующего эффективность в предельных режимах  $T, \tilde{T}$ , в которых доминирует предел текучести.

Используя переменные (4.22), мы построили интерполяционную функцию для параметра  $\lambda$  в следующем виде:

$$\lambda = \frac{\lambda_m(\Xi_m\eta_{pl})^k + \lambda_k(\Xi_k\eta_{pl})^k + \lambda_{\tilde{m}}[\Xi_{\tilde{m}}(1 - \eta_{pl})]^k + \lambda_{\tilde{k}}[\Xi_{\tilde{k}}(1 - \eta_{pl})]^k + \lambda_t(\Xi_t\eta_{\tau_0})^k + \lambda_{\tilde{t}}[\Xi_{\tilde{t}}(1 - \eta_{\tau_0})]^k}{(\Xi_m\eta_{pl})^k + (\Xi_k\eta_{pl})^k + [\Xi_{\tilde{m}}(1 - \eta_{pl})]^k + [\Xi_{\tilde{k}}(1 - \eta_{pl})]^k + (\Xi_t\eta_{\tau_0})^k + [\Xi_{\tilde{t}}(1 - \eta_{\tau_0})]^k}, \quad (4.23)$$

где  $k$  настраиваемый параметр, взятый равным 3. Также необходимо отметить, что в случае непроницаемой горной породы  $\Xi_{\tilde{m}} = \Xi_{\tilde{k}} = \Xi_{\tilde{t}} = 0$ . Аналогично, когда проводится моделирование роста трещины под воздействием жидкости гидроразрыва со степенной реологией, необходимо положить  $\Xi_t = \Xi_{\tilde{t}} = 0$ .

В приложении С статьи [71] представлены результаты валидации приближенного решения путем сравнения различных параметров трещины, полученных при помощи точного численного (раздел 4.2.1) и приближенного подходов.

### 4.3 Концептуальное представление пространства решений

#### 4.3.1 Предельные режимы распространения трещины

В изучаемой модели радиальной трещины, движущейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли, при рассмотрении диссипации энергии, которая происходит при течении вязкой жидкости внутри канала трещины, мы должны учесть случай, когда практически весь канал трещины занят твердой пробкой. В остальном механизмы диссипации энергии и баланса жидкости не отличаются от обсуждаемых в разделе 3.2.4. Коэффициент утечек  $C'$  влияет на распределение нагнетаемой жидкости гидроразрыва, а параметры  $M'$ ,  $K'$  и  $\tau_0$  определяют распределение диссипируемой энергии.

Шесть предельных режимов, именуемых также узловыми решениями, можно выделить в текущей модели радиальной трещины. Четыре из них могут

наблюдаться при распространении радиальной трещины, заполненной жидкостью со степенной реологией ( $\tau_0 = 0$ ):

- **M** – трещина-вязкость –  $K' = C' = \tau_0 = 0$ ;
- $\tilde{\mathbf{M}}$  – утечки-вязкость –  $K' = \tau_0 = 0$ ,  $C' \rightarrow +\infty$ ;
- **K** – трещина-трещиностойкость –  $M' = C' = \tau_0 = 0$ ;
- $\tilde{\mathbf{K}}$  – утечки-трещиностойкость –  $M' = \tau_0 = 0$ ,  $C' \rightarrow +\infty$ .

Оставшиеся два режима связаны с доминированием предела текучести:

- **T** – трещина-предел текучести –  $K' = C' = M' = 0$ ,  $\tau_0 > 0$ ;
- $\tilde{\mathbf{T}}$  – утечки-предел текучести –  $K' = M' = 0$ ,  $\tau_0 > 0$ ,  $C' \rightarrow +\infty$ .

Мы переходим к обсуждению масштабирований, связанных с предельными режимами распространения трещины. Для этого представим характеристики трещины в следующем виде:

$$w(r, t) = \varepsilon(t)L(t)\Omega(\rho, \mathcal{P}), \quad p(r, t) = \varepsilon(t)E'\Pi(\rho, \mathcal{P}), \quad R(t) = L(t)\gamma(\mathcal{P}), \quad (4.24)$$

где используются обозначения для безразмерной координаты  $\rho = r/R(t)$ , радиуса  $\gamma$ , раскрытия  $\Omega$  и давления  $\Pi$ ;  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$  безразмерные эволюционные параметры, зависящие от времени  $t$ , материальных параметров (4.2),  $Q_0$  и  $\tau_0$ ;  $L(t)$  масштаб длины и  $\varepsilon(t)$  малый безразмерный параметр. Выражения для  $L(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  и  $\mathcal{P}$  будут выведены далее для каждого масштабирования.

Подставляя выражения (4.24) в систему уравнений, записанную через безразмерную координату  $\rho$ , т. е. уравнение упругости (4.4), Рейнольдса (4.7), (4.8), уравнение баланса (4.9) и критерий распространения (4.10):

- *Уравнение упругости:*

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^1 G(\rho, s) \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds;$$

- *Уравнение Рейнольдса:*

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_v \left( \left[ \frac{\dot{\varepsilon}t}{\varepsilon} + \frac{\dot{L}t}{L} \right] \Omega + \dot{\Omega}t - \rho \left( \frac{\dot{L}t}{L} + \frac{\dot{\gamma}t}{\gamma} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \right) + \frac{\mathcal{G}_c}{\sqrt{1-\theta_0}} = \\ & = \frac{1}{\mathcal{G}_m} \frac{1}{\gamma\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\rho}{\gamma^{1/n}} \Omega^{2+1/n} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right|^{1/n-1} \left( 1 - \mathcal{G}_t \frac{2\gamma}{\Omega} \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right|^{-1} \right)^{1+1/n} \right. \\ & \left. \times \left( 1 + \mathcal{G}_t \frac{2\gamma}{\Omega} \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right|^{-1} \frac{n}{n+1} \right) \right]; \end{aligned}$$

– Уравнение баланса:

$$\frac{1}{\pi\gamma^2} = 2\mathcal{G}_v \int_0^1 \Omega \rho d\rho + 4\mathcal{G}_c \int_0^1 \sqrt{1-\theta_0} \rho d\rho;$$

– Критерий распространения:

$$\Omega = \mathcal{G}_k \sqrt{\gamma} \sqrt{1-\rho}, \quad \rho \rightarrow 1.$$

Здесь мы использовали функцию  $\theta_0(\rho, t) = t_0(r)/t$  и ввели пять безразмерных параметров:

$$\mathcal{G}_v = \frac{\varepsilon L^3}{Q_0 t}, \quad \mathcal{G}_c = \frac{C' L^2}{Q_0 \sqrt{t}}, \quad \mathcal{G}_m = \frac{Q_0 M'^{1/n}}{L^3 E'^{1/n} \varepsilon^{2+2/n}}, \quad \mathcal{G}_t = \frac{\tau_0}{\varepsilon^2 E'}, \quad \mathcal{G}_k = \frac{K'}{E' \varepsilon \sqrt{L}}. \quad (4.25)$$

$\mathcal{G}_v$  и  $\mathcal{G}_c$  количественно определяют разделение объема нагнетаемой жидкости, между трещиной и окружающим пластом. В свою очередь, параметры  $(\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_t)$  и  $\mathcal{G}_k$  относятся к диссипации энергии при течение внутри канала трещины при преодолении вязкости жидкости, предела текучести и при разрушении горной породы.

Для вывода масштабирований, т. е. параметров  $L(t)$  и  $\varepsilon(t)$  в выражениях (4.24), мы принимаем равным единице один из двух параметров, отвечающих за баланс жидкости  $(\mathcal{G}_v, \mathcal{G}_c)$ . Аналогично, среди параметров, связанных с диссипацией энергии  $(\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_t, \mathcal{G}_k)$ , мы выбираем один равный единице. Оставшиеся три безразмерных параметра будут являться эволюционными параметрами  $\mathcal{P}$ . Когда эволюционные параметры стремятся к нулю при заданном масштабировании, реализуется предельный режим распространения трещины, связанный с этим масштабированием. Из анализа масштабирования мы можем определить только размерные множители для характеристик радиальной трещины,  $R, w, p$ , в рассматриваемом  $i$ -м масштабировании. Для представления профилей раскрытия и эффективного давления мы воспользуемся приближенной формой, представленной в разделе 4.2.2:

$$R_i(t) = R_i^* L_i, \quad w_i(\rho, t) = \underbrace{w_i^* \varepsilon_i L_i}_{(w_a)_i(R)} \left( \frac{1+\rho}{2} \right)^{\lambda_i} (1-\rho)^{\bar{\delta}_i}, \quad p_i(\rho, t) = \frac{w_i^*}{R_i^*} E' \varepsilon_i \mathcal{F}(\rho, \lambda_i, \bar{\delta}_i), \quad (4.26)$$

где индекс  $i$  обозначает анализируемый предельный режим, а функция  $\mathcal{F}$  определена в уравнении (4.20). Для того, чтобы выразить величины  $R_i^*, w_i^*$  через  $\lambda_i$ , мы подставляем  $R_i(t)$  и  $(w_a)_i(R)$  в уравнение баланса (4.17), учитывая условия

реализации рассматриваемого предельного случая, и подходящую асимптотику для поведения раскрытия вблизи кончика трещины. Далее параметр  $\lambda_i$  может быть найден из сравнения с точным численным решением задачи (раздел 4.2.1).

Перед тем, как перейти к рассмотрению масштабирований и узловых решений, мы определим относительные ошибки в оценке радиуса, раскрытия и давления, которые дает упрощенный подход (4.26) по сравнению с полноценным численным решением:

$$\Delta(R_i) = |\bar{R}_i(t) - R_i(t)| / \bar{R}_i(t), \quad (4.27)$$

$$\Delta(w_i^0) = |\bar{w}_i(0, t) - w_i(0, t)| / \bar{w}_i(0, t), \quad (4.28)$$

$$\Delta(w_i^p) = \max_{\rho} [|\bar{w}_i(\rho, t) - w_i(\rho, t)| / \bar{w}_i(0, t)], \quad (4.29)$$

$$\Delta(p_i^0) = |\bar{p}_i(0.5, t) - p_i(0.5, t)| / \bar{p}_i(0.5, t), \quad (4.30)$$

где  $\Delta(R_i)$  ошибка в определении радиуса,  $\Delta(w_i^0)$  ошибка в оценке максимального раскрытия,  $\Delta(w_i^p)$  максимальная ошибка для профиля раскрытия, и  $\Delta(p_i^0)$  ошибка в оценке давления на расстоянии половины радиуса трещины. Индекс  $i$  обозначает предельный режим, а черта означает полноценное численное решение.

Мы начнем с масштабирования, связанного с режимом трещина-вязкость, т. е. с  $M$  узлом. Полагая, что  $\mathcal{G}_v = \mathcal{G}_m = 1$ , мы получаем формулы для масштаба длины и малого параметра:

$$L_m = \left( \frac{E' Q_0^{n+2} t^{2n+2}}{M'} \right)^{1/(3n+6)}, \quad \varepsilon_m = \frac{Q_0 t}{L_m^3}. \quad (4.31)$$

Затем подставляем  $L_m$  и  $\varepsilon_m$  в оставшиеся безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_m &= C' \left( \frac{E'^4 t^{5n+2}}{M'^4 Q_0^{2n+4}} \right)^{1/(6n+12)}, \quad \mathcal{T}_m = \tau_0 \left( \frac{t^{2n}}{M'^2 E'^n} \right)^{1/(n+2)}, \\ \mathcal{K}_m &= K' \left( \frac{t^{4n-2}}{M'^5 E'^{6n+7} Q_0^{n+2}} \right)^{1/(6n+12)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где мы переобозначили  $\mathcal{G}_c, \mathcal{G}_t, \mathcal{G}_k$  как безразмерный коэффициент утечек  $\mathcal{C}_m$ , предел текучести  $\mathcal{T}_m$  и трещиностойкость  $\mathcal{K}_m$ . После этого, мы получаем выражения для коэффициентов  $R_m^*, w_m^*$ :

$$R_m^* = \left( 2\pi\beta_m \alpha_m^{n/(n+2)} \mathcal{B}_m \right)^{-1/3}, \quad w_m^* = \left( \frac{\beta_m^2 \alpha_m^{2n/(n+2)}}{2\pi\mathcal{B}_m} \right)^{1/3}, \quad (4.33)$$

где  $\alpha_m = (2n + 2)/(3n + 6)$ ,  $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}(\lambda_m, \bar{\delta}_m)$  (4.17), величина  $\beta_m$  находится из формулы (4.19) и  $\bar{\delta}_m = 2/(2+n)$  следует из узлового решения трещина-вязкость для кончика трещины [49]. Параметр  $\lambda_m$  оценивается путем сопоставления аппроксимационного решения (4.26), (4.33) с точным численным решением (раздел 4.2.1) в терминах  $R_m$  и  $w_m(0, t)$ . Параметр  $\lambda_m$  был рассчитан для различных значений индекса текучести, лежащих в интервале  $n \in [0.25, 1]$ ; полученная зависимость представлена на рисунке 4.2(а). Относительные ошибки, определенные в уравнениях (4.27)-(4.30) изображены на рисунке 4.2(б), где параметр  $\Delta(R_m)$  нарисован сплошной линией,  $\Delta(w_m^0)$  – штриховой линией,  $\Delta(w_m^p)$  – штрихпунктирной линией, а  $\Delta(p_m^0)$  – пунктирной линией.

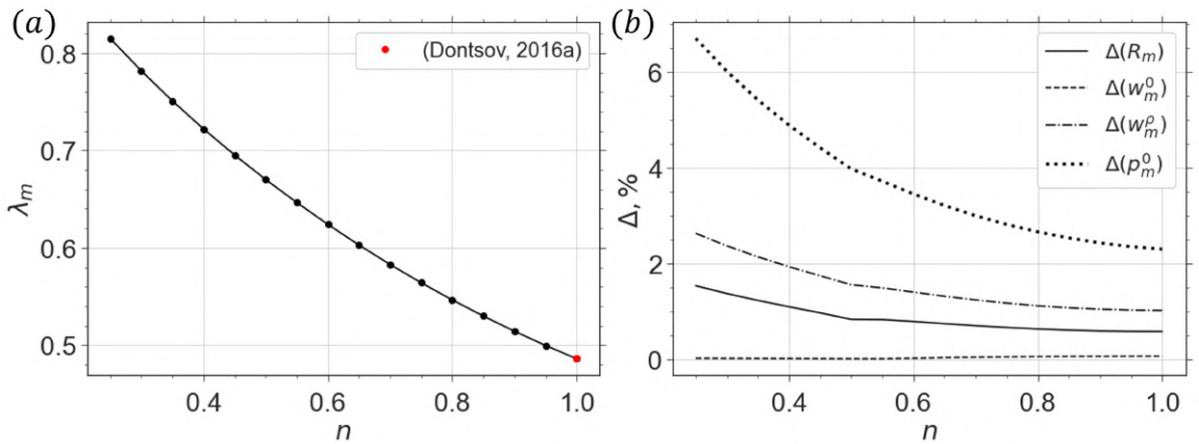


Рисунок 4.2 — На рисунке (а) представлена зависимость  $\lambda_m$  от индекса текучести  $n$ . Красная точка соответствует значению  $\lambda_m(1)$ , полученному в работе [54]. На рисунке (б) изображены относительные ошибки при оценке радиуса, раскрытия и давления в  $M$  предельном решении при помощи упрощенного подхода (раздел 4.2.2).

На рисунках 4.3(а) и 4.3(д) представлено сравнение приближенных нормализованных профилей  $w_m(\rho, t)$ ,  $p_m(\rho, t)$  (штриховые линии) с соответствующими характеристиками трещины, полученными при помощи точного численного подхода (сплошные линии), для  $n = 1$  (голубой цвет) и  $n = 0.3$  (синий цвет). Профиль раскрытия нормализуется на величину  $\varepsilon_m(t)L_m(t)$ , профиль эффективного давления на  $\varepsilon_m(t)E'$ , а расстояние от источника на  $L_m(t)$ , как следует из формул (4.24). Данные масштабы учитывают временные зависимости, свойственные предельному режиму  $M$ , а также значение индекса текучести. Сопоставляемые характеристики трещины в случае ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) близки друг к другу, в то время как при  $n = 0.3$  профили раскрытия и давления, полученные при помощи приближенного и точного

подходов, пересекаются. Более того, наблюдается значительная разница между профилями эффективного давления вблизи фронта трещины.

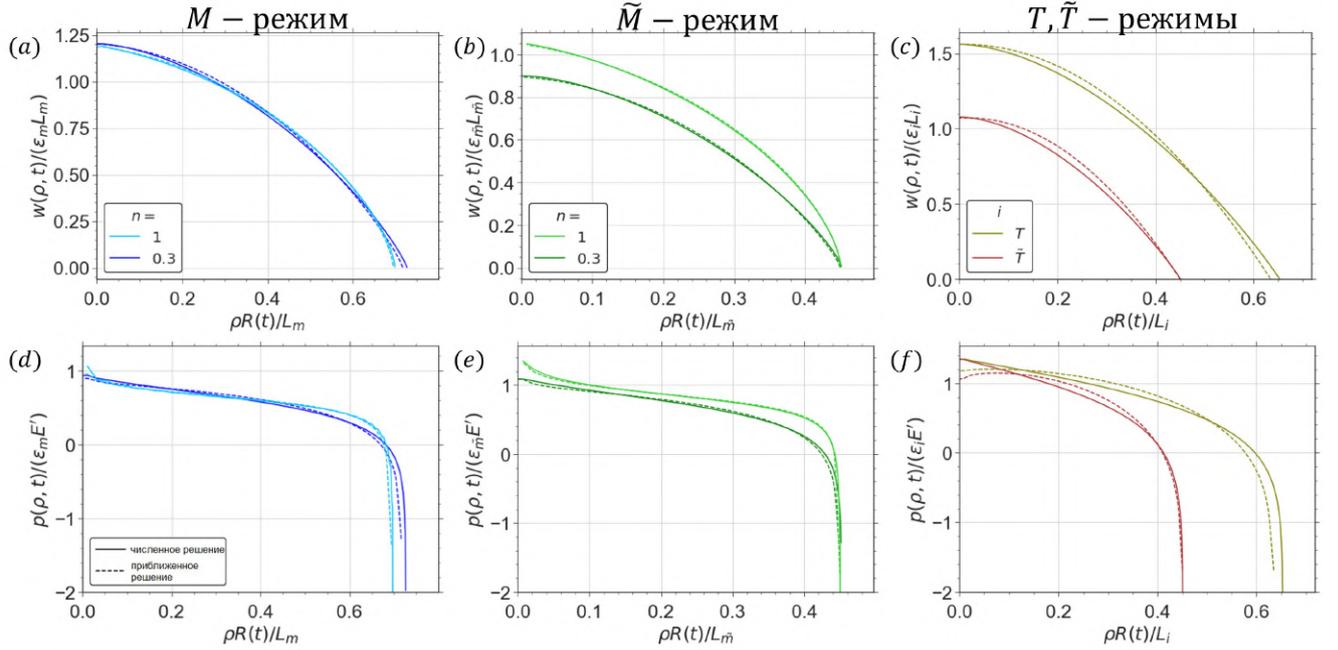


Рисунок 4.3 — Профили раскрытия (верхний ряд) и эффективного давления (нижний ряд) в предельных режимах распространения:  $M$  (рисунки (a) и (d)),  $\tilde{M}$  (рисунки (b) и (e)),  $T$  и  $\tilde{T}$  (рисунки (c) и (f)), посчитанные при помощи полноценного численного подхода (сплошные линии) и приближенного подхода (штриховые линии). Размерные коэффициенты  $\varepsilon_i(t)L_i(t)$ ,  $\varepsilon_i(t)E'$  и  $L_i(t)$  применяются для нормализации профилей  $w(\rho, t)$ ,  $p(\rho, t)$ , а также расстояния от источника. Индекс  $i$  означает анализируемый предельный режим. В случае режимов  $M$  и  $\tilde{M}$  мы рассмотрели два значения индекса текучести  $n = 1$  и  $n = 0.3$  и привели эти решения на рисунках (a), (d) и (b), (e) голубым или светло-зеленым и синим или зеленым цветами, соответственно. Коэффициенты, использующиеся для нормализации, учитывают значения индекса текучести. Оливковый и бордовый цвета используются для представления узловых решений  $T$  и  $\tilde{T}$  на рисунках (c), (f).

Далее мы переходим к обсуждению масштабирования утечки-вязкость и связанного с ним предельного режима  $\tilde{M}$ . Данное масштабирование соответствует случаю  $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_m = 1$ :

$$L_{\tilde{m}} = t^{1/4} \sqrt{\frac{Q_0}{C'}}, \quad \varepsilon_{\tilde{m}} = \left( \frac{C'^6 M^{4/n}}{Q_0^2 t^3 E'^{4/n}} \right)^{\frac{n}{8n+8}}. \quad (4.34)$$

Эволюционные параметры имеют смысл безразмерного объема трещины  $\mathcal{S}_{\tilde{m}}$ , предела текучести  $\mathcal{T}_{\tilde{m}}$  и трещиностойкости  $\mathcal{K}_{\tilde{m}}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\tilde{m}} &= \left( \frac{M'^4 Q_0^{2n+4}}{E'^4 t^{5n+2} C'^6 (n+2)} \right)^{1/(8+8n)}, & \mathcal{T}_{\tilde{m}} &= \tau_0 \left( \frac{Q_0^2 t^3}{M'^4/n C'^6 E'^4} \right)^{n/(4+4n)}, \\ \mathcal{K}_{\tilde{m}} &= K' \left( \frac{C'^{2-4n} t^{2n-1}}{M'^4 Q_0^2 E'^{8n+4}} \right)^{1/(8+8n)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Для  $\tilde{M}$  режима, коэффициенты  $R_{\tilde{m}}^*$ ,  $w_{\tilde{m}}^*$  выглядят следующим образом:

$$R_{\tilde{m}}^* = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad w_{\tilde{m}}^* = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{\alpha_{\tilde{m}}^n 2^{2+3n}}{\pi^{4+2n}} \right)^{1/(4+4n)}, \quad (4.36)$$

где  $\alpha_{\tilde{m}} = 1/4$ ,  $\beta_{\tilde{m}}$  приведено в уравнении (4.19), а параметр  $\bar{\delta}_{\tilde{m}} = (4+n)/(4+4n)$  мы знаем из узлового решения утечки-вязкость для полубесконечной трещины [49]. Параметр  $\lambda_{\tilde{m}}$  находим из сравнения величины  $w_{\tilde{m}}(0, t)$ , полученной из уравнений (4.26), (4.36)), с точным численным решением (раздел 4.2.1). В результате мы получаем зависимость  $\lambda_{\tilde{m}}(n)$ , представленную на рисунке 4.4(a). Также мы оценили относительные ошибки при расчете раскрытия трещины  $w_{\tilde{m}}(\rho, t)$  и эффективного давления  $p_{\tilde{m}}(0.5, t)$  путем применения упрощенного подхода (4.15), (4.20) (рисунок 4.4(b)). Для этого используем уравнения (4.28), (4.29), (4.30) для расчета  $\Delta(w_{\tilde{m}}^0)$ ,  $\Delta(w_{\tilde{m}}^p)$ ,  $\Delta(p_{\tilde{m}}^0)$ .

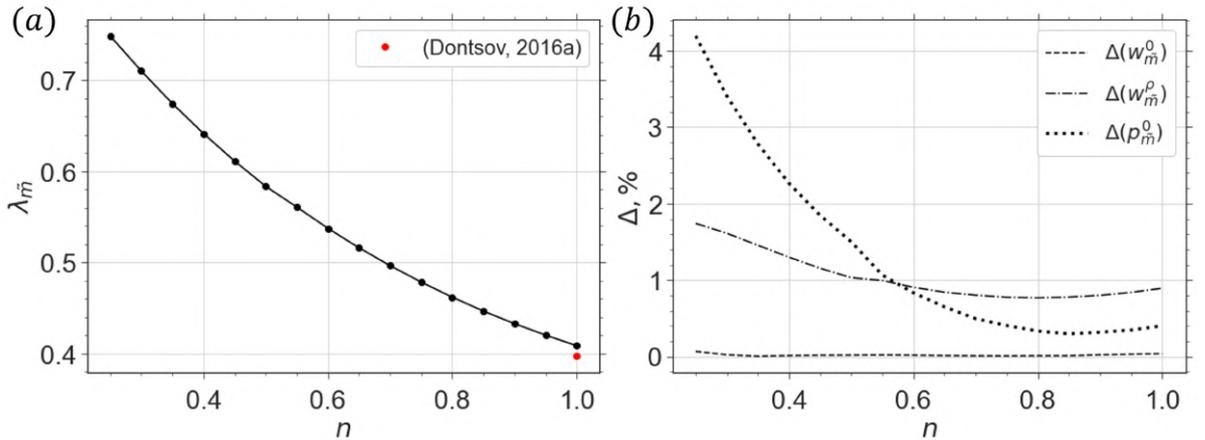


Рисунок 4.4 — На рисунке (a) изображена зависимость  $\lambda_{\tilde{m}}(n)$ , полученная численно. Здесь красной точкой отмечено значение  $\lambda_{\tilde{m}}(1)$ , приведенное в работе [54]. На рисунке (b) изображены относительные ошибки при расчете профилей раскрытия и давления, соответствующих предельному режиму  $\tilde{M}$ , при помощи упрощенного подхода (раздел 4.2.2).

На рисунках 4.3(b) и (e) изображены профили  $w_{\tilde{m}}(\rho, t)$ ,  $p_{\tilde{m}}(\rho, t)$ , полученные при помощи точного численного подхода (сплошные линии) и

приближенного подхода (штриховые линии) для двух значений индекса текучести:  $n = 1$  (светло-зеленый цвет) и  $n = 0.3$  (зеленый цвет). Для нормализации профилей и расстояния до источника мы воспользовались следующими размерными коэффициентами:  $\varepsilon_{\tilde{m}}(t)L_{\tilde{m}}(t)$ ,  $\varepsilon_{\tilde{m}}(t)E'$ ,  $L_{\tilde{m}}(t)$ , которые учитывают значение индекса текучести. Можно заметить, что для обоих значений индекса текучести, приближенный подход позволяет получить решение задачи с довольно хорошей точностью.

Далее переходим к режиму трещина-трещиностойкость  $K$  и связанному с ним масштабированию, которое получается из условия  $\mathcal{G}_v = \mathcal{G}_k = 1$ :

$$L_k = \left( \frac{E'Q_0t}{K'} \right)^{2/5}, \quad \varepsilon_k = \left( \frac{K'^6}{E'^6Q_0t} \right)^{1/5}. \quad (4.37)$$

Эволюционные параметры, имеющие смысл безразмерного коэффициента утечек  $\mathcal{C}_k$ , предела текучести  $\mathcal{T}_k$  и вязкости  $\mathcal{M}_k$ , выглядят как:

$$\mathcal{C}_k = C' \left( \frac{E'^8t^3}{K'^8Q_0^2} \right)^{1/10}, \quad \mathcal{T}_k = \tau_0 \left( \frac{E'^7Q_0^2t^2}{K'^{12}} \right)^{1/5}, \quad \mathcal{M}_k = \left( \frac{M'^5E'^{6n+7}Q_0^{n+2}t^{2-4n}}{K'^{6(n+2)}} \right)^{1/(5n)} \quad (4.38)$$

В случае доминирования трещиностойкости, поведение раскрытия трещины вблизи кончика описывается асимптотой из линейной теории механики разрушения, т. е.  $\bar{\delta}_k = 1/2$ . Более того, профиль раскрытия является эллиптическим [56], означая, что его можно точно описать упрощенной формой (4.15) при  $\lambda_k = 1/2$ . Используя уравнение баланса (4.17) и асимптоту “1/2” [37], мы находим численные коэффициенты для динамики радиуса и профиля раскрытия:

$$R_k^* = \left( \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2/5}, \quad w_k^* = \left( \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \right)^{1/5}. \quad (4.39)$$

Затем, мы переходим к масштабированию утечки-трещиностойкость и соответствующему режиму  $\tilde{K}$ . Полагая  $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_k = 1$ , мы получаем выражения для масштаба длины  $L_{\tilde{k}}$  и малого параметра  $\varepsilon_{\tilde{k}}$ :

$$L_{\tilde{k}} = t^{1/4} \sqrt{\frac{Q_0}{C'}}, \quad \varepsilon_{\tilde{k}} = \left( \frac{C'^2K'^8}{E'^8Q_0^2t} \right)^{1/8}. \quad (4.40)$$

Эволюционные параметры в данном случае имеют смысл безразмерного объема трещины  $\mathcal{S}_{\tilde{k}}$ , предела текучести  $\mathcal{T}_{\tilde{k}}$  и вязкости  $\mathcal{M}_{\tilde{k}}$ :

$$\mathcal{S}_{\tilde{k}} = \frac{K'Q_0^{1/4}}{C'^{5/4}E't^{3/8}}, \quad \mathcal{T}_{\tilde{k}} = \tau_0 \frac{E'Q_0^{1/2}t^{1/4}}{C'^{1/2}K'^2}, \quad \mathcal{M}_{\tilde{k}} = \left( \frac{M'Q_0^{1/2}E'^{1+2n}C'^{n-1/2}t^{1/4-n/2}}{K'^{2+2n}} \right)^{1/n}. \quad (4.41)$$

Аналогично предельному решению  $K$ , в данном случае  $\bar{\delta}_{\tilde{k}} = 1/2$  и  $\lambda_{\tilde{k}} = 1/2$ . Численные коэффициенты для радиуса и профиля раскрытия находим из уравнения баланса:

$$R_{\tilde{k}}^* = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad w_{\tilde{k}}^* = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.42)$$

В завершении данного раздела мы обсудим масштабирования и предельные решения, связанные с доминированием предела текучести. Мы начнем с режима трещина-предел текучести ( $T$  режим), масштабирование для которого находим из предположения, что  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_v = 1$ :

$$L_t = \left( \frac{tE^{1/2}Q_0}{\tau_0^{1/2}} \right)^{1/3}, \quad \varepsilon_t = \sqrt{\frac{\tau_0}{E'}}. \quad (4.43)$$

В свою очередь эволюционные параметры, означающие безразмерный коэффициент утечек, вязкость и трещиностойкость, имеют вид:

$$C_t = C' \left( \frac{E' \sqrt{t}}{Q_0 \tau_0} \right)^{1/3}, \quad \mathcal{M}_t = \frac{\sqrt{E'} M^{1/n}}{t \tau_0^{(n+2)/(2n)}}, \quad \mathcal{K}_t = \frac{K'}{(E'^7 Q_0^2 t^2 \tau_0^5)^{1/12}}. \quad (4.44)$$

Коэффициенты  $R_t^*$ ,  $w_t^*$  находим из уравнения баланса жидкости (4.17) и асимптоты для кончика трещины, соответствующей случаю доминирования предела текучести [52]:

$$R_t^* = \frac{1}{2^{5/6} \sqrt{\pi} \mathcal{B}_t^{1/3}}, \quad w_t^* = \frac{2^{2/3}}{\mathcal{B}_t^{1/3}}, \quad (4.45)$$

где  $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\lambda_t, \bar{\delta}_t)$  и  $\bar{\delta}_t = 1$ . Используя точное численное решение (раздел 4.2.1), мы определяем коэффициент  $\lambda_t = 1.029$ . Это значение совместно с уравнениями (4.15), (4.20), (4.45) дает следующие величины относительных ошибок  $\Delta(R_t) = 2.8\%$  (4.27),  $\Delta(p_t^0) = 12.2\%$  (4.30), а максимальное раскрытие  $w_t(0, t)$  получаем при помощи приближенного решения точно. В то же время, максимальное значение ошибки для всего профиля раскрытия составляет  $\Delta(w_t^p) = 5\%$  (4.29), означая, что точность приближенного решения (4.26) ухудшается при таком значении  $\lambda$ .

Далее переходим к масштабированию утечки-предел текучести и предельному режиму  $\tilde{T}$ . Масштабы длины и малый параметр получаем на основе предположения  $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}_t = 1$ :

$$L_{\tilde{t}} = t^{1/4} \sqrt{\frac{Q_0}{C'}}, \quad \varepsilon_{\tilde{t}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{E'}}. \quad (4.46)$$

В данном случае эволюционные параметры имеют смысл безразмерного объема трещины  $\mathcal{S}_{\tilde{t}}$ , вязкости  $\mathcal{M}_{\tilde{t}}$  и трещиностойкости  $\mathcal{K}_{\tilde{t}}$ :

$$\mathcal{S}_{\tilde{t}} = \left( \frac{Q_0 \tau_0}{C'^3 E' \sqrt{t}} \right)^{1/2}, \quad \mathcal{M}_{\tilde{t}} = \frac{C'^{3/2} E' M^{1/n}}{\sqrt{Q_0} t^{3/4} \tau_0^{(n+1)/n}}, \quad \mathcal{K}_{\tilde{t}} = K' \left( \frac{C'}{E'^2 Q_0 \sqrt{t} \tau_0^2} \right)^{1/4}. \quad (4.47)$$

Из уравнения баланса (4.17) и асимптотики для кончика трещины [52], мы находим коэффициенты для радиуса и профиля раскрытия (4.26):

$$R_{\tilde{t}}^* = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad w_{\tilde{t}}^* = \frac{4}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.48)$$

По аналогии с предельным решением  $\tilde{M}$ , мы находим коэффициент  $\lambda_{\tilde{t}}$ , сопоставляя приближенный профиль раскрытия (4.15) с точным решением задачи (раздел 4.2.1). В результате мы получаем  $\lambda_{\tilde{t}} = 1.077$ , что позволяет точно воспроизвести значения максимального раскрытия трещины  $w_{\tilde{t}}(0, t)$  и получить максимальную ошибку для всего профиля раскрытия  $\Delta(w_{\tilde{t}}^p) = 6\%$  (4.29). Относительное отклонение значения давления на расстоянии половины радиуса трещины, полученного при помощи приближенного решения, составляет  $\Delta(p_{\tilde{t}}^0) = 11\%$  (4.30).

На рисунках 4.3(с) и (f) изображены профили раскрытия и давления в режимах  $T$  (оливковый цвет) и  $\tilde{T}$  (бордовый цвет), полученные при помощи точного (сплошные линии) и приближенного (штриховые линии) подходов. Для обоих предельных случаев можно наблюдать пересечение между сопоставляемыми профилями и значительную разницу между ними. Одним из возможных решений этой проблемы является использование более сложного выражения для профиля раскрытия трещины. Используемая формула изначально была предложена для меньших значений  $\bar{\delta}$  и  $\lambda$ , которые соответствуют ньютоновским жидкостям. Однако для целей данного исследования, т. е. для анализа параметрического пространства задачи, такая точность приемлема, тем более что границы предельных решений изменяются в логарифмическом масштабе.

В приложении Б приводятся формулы для характеристик радиальной трещины в предельных режимах. Помимо формул в размерных переменных также выписаны нормализованные выражения в  $mk$  масштабировании, который будет определен в разделе 4.4.1.

### 4.3.2 Представление параметрического пространства задачи

Параметрическое пространство решений для изучаемой модели радиальной трещины можно представить в виде шестиугольной пирамиды, в вершинах которой располагаются предельные режимы. Схематическое изображение пирамиды  $M\tilde{M}\tilde{K}KT\tilde{T}$  представлено на рисунке 4.5.

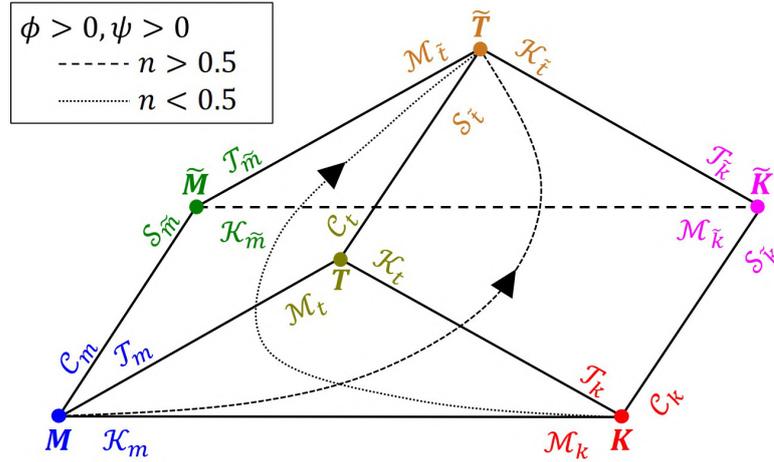


Рисунок 4.5 — Параметрическое пространство задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва в проницаемом резервуаре, движущейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли: пирамида  $M\tilde{M}\tilde{K}KT\tilde{T}$ . Узловые решения располагаются в вершинах пирамиды. Эволюционные параметры отмечены возле ребер для каждого предельного режима. Траектории решения задачи в общем случае ( $\phi > 0, \psi > 0$ ) представлены для двух значений индекса текучести:  $n > 0.5$  (штриховая линия) и  $n < 0.5$  (пунктирная линия).

Каждое ребро пирамиды соединяет два узловых решения, например,  $i$  и  $j$ , и мы можем определить характерное время перехода между ними  $t_{ij}$ , решая следующее уравнение:  $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_j(t) \rightarrow t = t_{ij}$ . Эволюция решения вдоль ребра пирамиды контролируется одним параметром, который можно записать в виде функции безразмерного времени  $\tau_{ij} = t/t_{ij}$ . Рассмотрим ребро  $MT$ . Время перехода между узлами  $M$  и  $T$  равно  $t_{mt} = \sqrt{E'} M^{1/n} \tau_0^{-(n+2)/(2n)}$ , а к данному ребру относятся два эволюционных параметра  $\mathcal{T}_m(t)$  и  $\mathcal{M}_t(t)$ . Определяя безразмерное время как  $\tau_{mt} = t/t_{mt}$ , мы можем записать следующие соотношения:  $\mathcal{T}_m = \tau_{mt}^{2n/(n+2)}$ ,  $\mathcal{M}_t = \tau_{mt}^{-1}$ .

В рассматриваемой задаче девять характерных времен перехода между предельными режимами и только три из них являются независимыми, например,  $t_{mk}$ ,  $t_{m\tilde{m}}$ ,  $t_{mt}$ . Таким образом, положение решения задачи внутри параметрического пространства зависит от трех безразмерных времен:  $\tau_{mk} =$

$t/t_{mk}$ ,  $\tau_{m\tilde{m}} = t/t_{m\tilde{m}}$ ,  $\tau_{mk} = t/t_{mt}$ . Далее мы определим два безразмерных параметра  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= \left(\frac{t_{mk}}{t_{m\tilde{m}}}\right)^{(10n+4)/(3n+6)} = C'^4 \left(\frac{M^3 E^{10n+1} Q_0^{2-n}}{K^{10n+4}}\right)^{1/(2n-1)}, \\ \psi &= \left(\frac{t_{mk}}{t_{mt}}\right)^{2n/(n+2)} = \tau_0 \left(\frac{E^4 Q_0 M^{1/n}}{K^6}\right)^{n/(2n-1)},\end{aligned}\quad (4.49)$$

которые можно интерпретировать как безразмерный коэффициент утечек и безразмерный предел текучести. Взяв набор параметров  $\{\tau = \tau_{mk}, \varphi, \psi\}$ , мы можем выразить времена  $\tau_{m\tilde{m}}$  и  $\tau_{mt}$  через них для того, чтобы охарактеризовать траектории решения. Вдоль каждой траектории значения параметров  $\varphi$  и  $\psi$  постоянны, в то время как безразмерное время  $\tau$  меняется.

Когда индекс текучести  $n > 0.5$ , траектории решения начинаются в  $M$  узле (асимптотическое поведение общего решения при малых временах), так как все безразмерные группы (4.32) стремятся к нулю, когда время стремится к нулю. Однако, конец траекторий может быть разным (асимптотическое поведение общего решения при больших временах): (i)  $\varphi = \psi = 0$  –  $K$  узел, (ii)  $\varphi > 0, \psi = 0$  –  $\tilde{K}$  узел, (iii)  $\varphi = 0, \psi > 0$  –  $T$  узел и (iv)  $\varphi > 0, \psi > 0$  –  $\tilde{T}$  узел. Данный вывод получается из рассмотрения эволюционных параметров соответствующих предельных режимов (например, (4.38), (4.41), (4.44), (4.47)), которые стремятся к нулю, когда время стремится к бесконечности, или они равны нулю вследствие значений  $\varphi, \psi$ . При промежуточных моментах времени траектория решения может приближаться к тому или иному узлу в зависимости от значений параметров  $\varphi$  и  $\psi$ . Например, когда предел текучести отсутствует ( $\psi = 0$ ), режимы  $K$  и  $\tilde{M}$  являются промежуточными асимптотами, когда интенсивность утечек небольшая ( $\varphi \ll 1$ ) и большая ( $\varphi \gg 1$ ), соответственно. В случае непроницаемой горной породы ( $\varphi = 0$ ) и ненулевого предела текучести у жидкости гидроразрыва ( $\psi > 0$ ), общее решение приближается к  $K$  узлу, когда  $\psi \ll 1$ .

Ситуация изменяется при значениях индекса текучести  $n < 0.5$ . В этом случае траектории начинаются в узле  $K$  (эволюционные параметры (4.38) обращаются в нуль при  $t = 0$ ), а могут заканчиваться в различных точках: (i)  $\varphi = \psi = 0$  –  $M$  узел, (ii)  $\varphi > 0, \psi = 0$  –  $\tilde{M}$  узел, (iii)  $\varphi = 0, \psi > 0$  –  $T$  узел и (iv)  $\varphi > 0, \psi > 0$  –  $\tilde{T}$  узел (по аналогии с рассуждениями выше необходимо обратить внимание на параметры, выписанные в уравнениях (4.32), (4.35), (4.44), (4.47)).

Необходимо подчеркнуть, что в общем случае, когда оба определяющих параметра  $\varphi$  и  $\psi$  не равны нулю,  $\tilde{T}$  узел аппроксимирует общее решение задачи при больших временах независимо от значения индекса текучести  $n$ . Примеры траекторий решения задачи для  $n > 0.5$  и  $n < 0.5$  изображены на рисунке 4.5 штриховой и пунктирной линиями, соответственно. В завершении необходимо отметить, что вышеупомянутый набор параметров  $\{\tau = \tau_{mk}, \varphi, \psi\}$  не подходит для описания траекторий, соответствующих  $n = 0.5$ . В качестве решения этой проблемы можно предложить рассмотреть другой набор безразмерных параметров, например,  $\{\tau = \tau_{m\tilde{m}}, \varphi' = (t_{mk}/t_{m\tilde{m}})^{(1-2n)/(3n+6)}, \psi' = (t_{m\tilde{m}}/t_{mt})^{2n/(n+2)}\}$ , где  $\varphi'$  будет являться безразмерной трещиностойкостью, а  $\psi'$  безразмерным пределом текучести.

#### 4.4 Полученные результаты и обсуждение

##### 4.4.1 Допустимые диапазоны значений безразмерных параметров задачи.

Сначала мы перепишем систему уравнений в безразмерных переменных. Для нормализации воспользуемся  $mk$  масштабированием [12]:

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{t}{t_{mk}}, \quad \gamma = \frac{R}{L_{mk}}, \quad \Omega = \frac{w}{\varepsilon_{mk} L_{mk}}, \quad \Pi = \frac{p}{E' \varepsilon_{mk}}, \quad (4.50)$$

где используются обозначения для следующих безразмерных характеристик:  $\rho$  расстояние до источника,  $\tau$  время,  $\gamma$  радиус,  $\Omega$  раскрытие,  $\Pi$  эффективное давление;  $t_{mk}$  характерное время перехода между режимами  $M$  и  $K$ ,  $L_{mk} = L_m(t_{mk})$  характерная длина и  $\varepsilon_{mk} = \varepsilon_m(t_{mk})$  малый параметр (см. уравнение (4.31)):

$$t_{mk} = \left( \frac{M'^5 E'^{6n+7} Q_0^{n+2}}{K'^{6(n+2)}} \right)^{1/(4n-2)}, \quad L_{mk} = \left( \frac{M' E'^{2n+1} Q_0^n}{K'^{2(n+1)}} \right)^{1/(2n-1)},$$

$$\varepsilon_{mk} = \left( \frac{K'^{6n}}{M' E'^{6n-1} Q_0^n} \right)^{1/(4n-2)}. \quad (4.51)$$

Уравнение упругости (4.4), уравнение Рейнольдса (4.7), (4.8), уравнение баланса жидкости (4.9) и критерий распространения трещины (4.10), записанные в терминах безразмерных параметров (4.50) выглядят следующим образом:

– *Уравнение упругости:*

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^1 G(\rho, s) \frac{\partial \Omega}{\partial s} ds;$$

– *Уравнение Рейнольдса:*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - \frac{\rho \dot{\gamma}}{\gamma} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + \frac{\varphi^{1/4}}{\sqrt{\tau - \theta_0}} = \\ & = \frac{1}{\gamma \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\Omega^{2+1/n}}{\gamma^{1/n}} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right|^{1/n-1} \left( 1 - 2\psi \frac{\gamma}{\Omega} \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right|^{-1} \right)^{1+1/n} \right. \\ & \left. \times \left( 1 + 2\psi \frac{\gamma}{\Omega} \left| \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right|^{-1} \frac{n}{n+1} \right) \right], \end{aligned}$$

где безразмерный коэффициент утечек  $\varphi$  и безразмерный предел текучести  $\psi$  определены в уравнении (4.49), а безразмерная функция обратного радиуса задается соотношением  $\theta_0(\rho, \tau) = t_0(r)/t_{mk}$ . Мы также приведем выражения для  $\varphi$  и  $\psi$  через параметры  $mk$  масштабирования:

$$\varphi = \left( \frac{C' \sqrt{t_{mk}}}{L_{mk} \varepsilon_{mk}} \right)^4, \quad \psi = \frac{\tau_0}{E' \varepsilon_{mk}^2};$$

– *Уравнение баланса:*

$$\frac{\tau}{\pi \gamma^2} = 2 \int_0^1 \rho \Omega d\rho + 4\varphi^{1/4} \int_0^1 \rho \sqrt{\tau - \theta_0} d\rho;$$

– *Критерий распространения:*

$$\Omega = \sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \rho}, \quad \rho \rightarrow 1.$$

Для нахождения численного решения в безразмерных переменных необходимо воспользоваться схемами, описанными в разделах 4.2.1 и 4.2.2, предполагая  $E' = K' = M' = Q_0 = 1$ ,  $C' = \varphi^{1/4}$ ,  $\tau_0 = \psi$ ,  $t = \tau$ .

Далее мы оценим диапазоны значений безразмерных определяющих параметров  $\varphi$  и  $\psi$ , соответствующих типичным промышленным случаям. Для параметров, которые меняются слабо, мы зафиксируем значения, в то время как остальные будут варьироваться в определенных интервалах. Мы выбрали следующие значения/диапазоны:

- геомеханические параметры:
  - $E' = 10 \div 50$  ГПа;
  - $K_{Ic} = 0.5 \div 2.5$  МПа ·  $\sqrt{\text{м}}$ ;
  - $\sigma_o = 10 \div 30$  МПа;
- параметры резервуара:
  - $k = 0 \div 100$  мД;
  - $\varphi_r = 5 \div 25\%$ ;
  - $p_o/\sigma_o = 0.4 \div 0.95$ ;
- параметры жидкости гидроразрыва:
  - $n = 0.5 \div 1$ ;
  - $M = 10^{-3} \div 2 \cdot n$ ;
  - $\tau_0 = 0 \div 15$  ;
- параметры поровой жидкости:
  - $\mu = 1 \div 5$  сПз;
  - $c_t = 10^{-3}$  МПа $^{-1}$ ;
- скорость нагнетания жидкости гидроразрыва:
  - $Q_0 = 0.01 \div 0.1$  м $^3$ /с.

Мы выбрали три значения индекса текучести  $n = \{0.6, 0.8, 1\}$ , для которых считаем интервалы значений параметров  $\varphi$  и  $\psi$ , варьируя каждый из вышеуказанных размерных параметров независимо друг от друга. Полученные диапазоны значений изображены на рисунке 4.6(a).

Можно заметить, что область значений определяющих параметров при  $n = 0.6$  (окрашена в зеленый цвет) включает в себя аналогичную область для индекса текучести  $n = 0.8$  (окрашена в красный цвет), которая, в свою очередь, включает область значений при  $n = 1$  (окрашена в синий цвет). Чтобы лучше понять структуру пространства значений безразмерных параметров при фиксированном  $n$  (как различные размерные входные параметры влияют на значения безразмерных параметров), мы рассмотрим случай жидкости Бингама ( $n = 1$ ) с пределом текучести  $\tau_0 = 15$  (желтый многоугольник на рисунке 4.6(b); такие многоугольники для разных  $\tau_0 \in [0, 15]$  полностью заполняют синюю область). Внутри желтого многоугольника можно различить два подмножества (восьмиугольники), соответствующие минимальному и максимальному значениям модуля плоской деформации, которые мы обводим цветными штрих-пунктирными линиями (рисунок 4.6(b)); восьмиугольники, отвечающие за промежуточные значения  $E'$ , располагаются между ними. Следовательно, интервал значе-

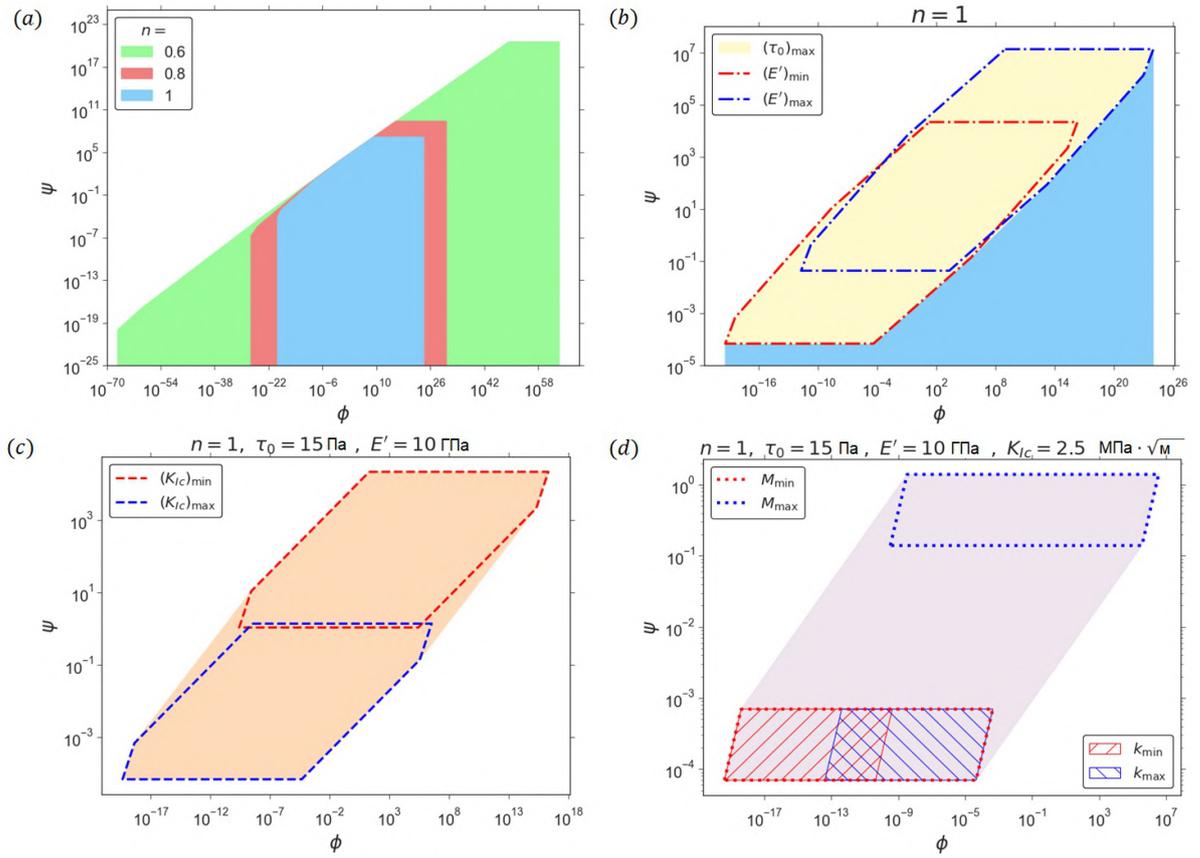


Рисунок 4.6 — На рисунке (а) изображены диапазоны значений определяющих параметров в координатах  $(\phi, \psi)$ , соответствующие  $n = \{0.6, 0.8, 1\}$  и типичным значениям размерных входных параметров задачи, зеленым, красным и синим цветами. На рисунке (b), желтый многоугольник показывает множество значений для  $n = 1$  и  $\tau_0 = 15$ , в то время как восьмиугольники с красной и синей штрихпунктирной границей относятся к минимальному и максимальному значениям модуля плоской упругой деформации. Структура каждого восьмиугольника изображена на рисунке (c) (для  $E' = 10$ ), где красная и синяя штриховые линии ограничивают шестиугольники, соответствующие минимальному и максимальному значениям трещиностойкости горной породы. На рисунке (d) мы проанализировали структуру шестиугольника (случай  $K_{Ic} = 2.5 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$ ), отметив области, соответствующие минимальному и максимальному значениям индекса текучести (границы нарисованы красной и синей пунктирными линиями) и проницаемости резервуара (области заштрихованы красным и синим цветом).

ний безразмерного коэффициента утечек определяется диапазоном значений параметра  $E'$ , в то время как интервал для параметра  $\psi$  контролируется преимущественно диапазоном  $\tau_0$ , а также разбросом  $E'$ . Анализируя структуру восьмиугольника, можно выделить два шестиугольника, соответствующих граничным значениям трещиностойкости породы  $K_{Ic}$ . На рисунке 4.6(c), изображен восьмиугольник для  $E' = 10$  оранжевым цветом, а вышеупомянутые шестиугольники обведены цветными штриховыми линиями. Рассматривая внутреннюю структуру шестиугольника, мы можем обнаружить параллелограммы,

отвечающие за предельные значения коэффициента густоты потока и проницаемости горной породы; параллелограммы мы выделяем цветной пунктирной границей и цветной штриховкой на рисунке 4.6(d), взяв за основу шестиугольник, соответствующий  $K_{Ic} = 2.5 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$ . В завершении мы отметим, что верхняя и нижняя границы каждого параллелограмма (рисунок 4.6(d)) относятся к минимальному и максимальному значениям скорости закачки, а структура каждого ребра включает в себя изменения оставшихся параметров  $(\sigma_o, \varphi_r, p_o/\sigma_o)$ .

#### 4.4.2 Анализ параметрического пространства задачи

В данном разделе диссертации мы рассмотрим анализ параметрического пространства задачи о росте радиальной трещины, движущейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли. Мы воспользуемся постановкой задачи в безразмерных переменных (раздел 4.4.1), в которой характеристики трещины зависят от следующих безразмерных переменных: времени ( $\tau$ ), расстояния от источника ( $\rho$ ), коэффициента утечек ( $\varphi$ ) и предела текучести ( $\psi$ ).

Мы обсудим результаты, связанные со значениями индекса текучести  $n = 1$  и  $n = 0,3$ , и исследование включает в себя два элемента. Во-первых, мы определяем области применимости предельных режимов распространения трещины внутри параметрического пространства и изображаем их в виде карт режимов. Построение такого рода карт помогает понять условия распространения трещины для заданных значений определяющих параметров задачи. Области применимости предельных решений определяются согласно критерию [54]:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_i(0, \tau)}{\Omega(0, \tau)}\right)^2 + \left(1 - \frac{\gamma_i(\tau)}{\gamma(\tau)}\right)^2} < 0.01, \quad i = M, \tilde{M}, K, \tilde{K}, T, \tilde{T}. \quad (4.52)$$

Уравнение (4.52) подразумевает, что комбинация относительного отклонения рассматриваемого предельного решения  $i$  от общего численного решения в терминах радиуса и максимального раскрытия не должна превышать 1%

Необходимо упомянуть, что в текущем разделе для расчетов мы будем использовать быстрый приближенный подход (раздел 4.2.2) из-за его вычисли-

тельной эффективности. Критерий (4.52) применяется для нахождения точек, лежащих на границах предельных режимов, численно. Далее полученные точки мы аппроксимируем при помощи подходящих аналитических зависимостей, которые выводятся из анализа характерных времен перехода между узловыми решениями. В качестве примера рассмотрим границы режимов  $M$  и  $T$ , ограничивающих переход  $MT$ . Время  $t$ , нормализованное на масштаб  $t_{mt}$ , имеет вид:  $\tau_{mt} = \tau\psi^{(2+n)/(2n)}$ . В результате мы получаем функциональную зависимость, описывающую вышеупомянутые границы:  $\psi \propto \tau^{-2n/(2+n)}$ . Коэффициенты пропорциональности находим численно из аппроксимации границ для  $M$  и  $T$  режимов по отдельности. В таблице 8 мы приводим функции, описывающие границы режимов, реализующиеся в анализируемой модели радиальной трещины.

Таблица 8 — Границы областей применимости предельных решений, получающиеся из  $\tau_{\text{edge}} = \text{const}$ .

Transition	$\tau_{\text{edge}} =$
$MK$	$\tau$
$M\tilde{M}$	$\tau\varphi^{(3n+6)/(10n+4)}$
$MT$	$\tau\psi^{(2+n)/(2n)}$
$K\tilde{K}$	$\tau\varphi^{5/6}$
$KT$	$\tau\psi^{5/2}$
$\tilde{M}\tilde{K}$	$\tau/\sqrt{\varphi}$
$\tilde{M}\tilde{T}$	$\tau\psi^{(4n+4)/(3n)}/\sqrt{\varphi}$
$\tilde{K}\tilde{T}$	$\psi^4\tau/\sqrt{\varphi}$
$T\tilde{T}$	$\tau\varphi^{3/2}/\psi^2$

Вторым элементом анализа параметрического пространства является изучение изменений основных характеристик трещины, зависящих от времени, таких как радиус  $\gamma(\tau)$ , максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, t)$  и эффективность  $\eta(\tau)$ , при изменении безразмерного параметра утечек и предела текучести.

#### 4.4.2.1 Случай непроницаемой горной породы

**Жидкость Бингама ( $n = 1$ )**

Мы начнем анализ параметрического пространства задачи со случая радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости Бингама ( $n = 1$ ) в непроницаемом резервуаре ( $\varphi = 0$ ). Карта режимов представлена на рисунке 4.7(a) в координатах  $(\tau, \psi)$ .

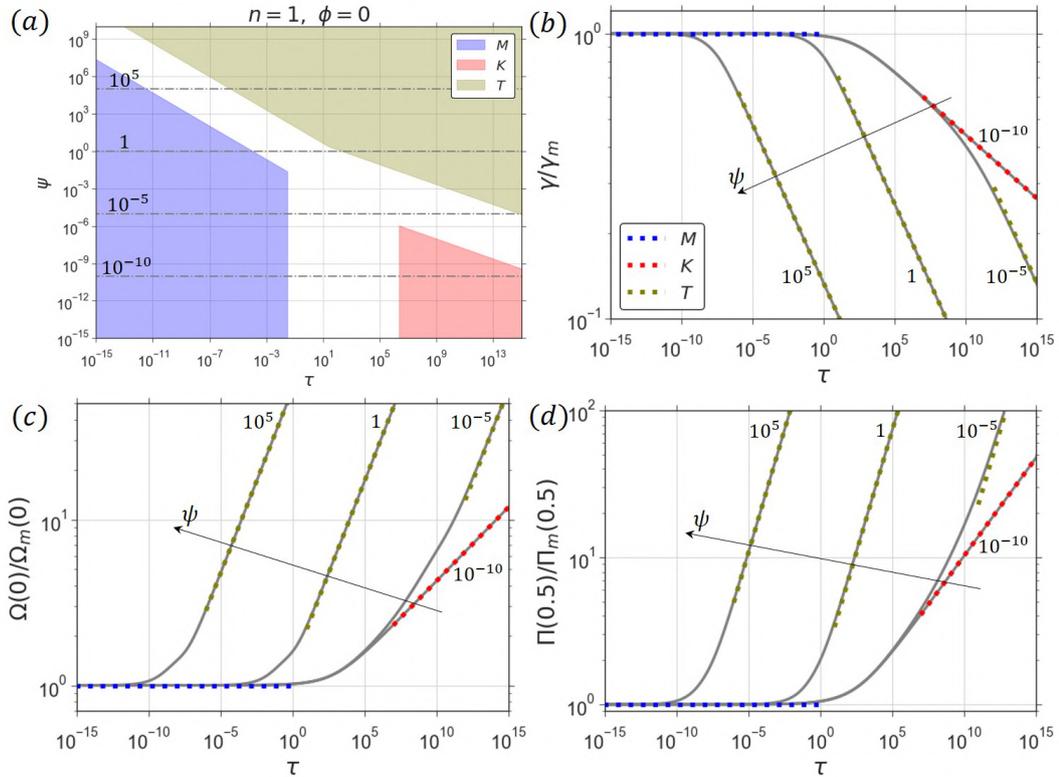


Рисунок 4.7 — Результаты моделирования роста радиальной трещины, движущейся под действием жидкости Бингама ( $n = 1, \psi > 0$ ) в непроницаемой горной породе ( $\varphi = 0$ ). На рисунке (a) представлена карта режимов в координатах  $(\tau, \psi)$ , на которой различными цветами закрашены области применимости предельных решений. Характеристики трещины, зависящие от времени, такие как радиус (b), максимальное раскрытие (c) и давление на расстоянии половины радиуса (d), нормализованные на предельное решение  $M$  изображены для следующих значений безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . На карте режимов (a) серыми штрих-пунктирными линиями обозначены траектории, для которых мы рассмотрели решения, а на рисунках (b) – (d) цветные пунктирные линии соответствуют узловым решениям.

Когда безразмерный коэффициент утечек  $\varphi = 0$ , в рассматриваемой модели радиальной трещины реализуются три узловых решения:  $M$ ,  $K$  и  $T$ . Когда индекс текучести больше 0.5, решение задачи эволюционирует от узла  $M$  к узлу  $T$  при  $\psi > 0$  или к узлу  $K$  при  $\psi = 0$  (рисунок 4.7(a) для  $n = 1$ ). Также при  $n > 0.5$  и ненулевом пределе текучести, решение задачи проходит через режим  $K$  при малых значениях  $\psi$ , таким образом, режим доминирования трещиностойкости является промежуточной асимптотой. Например, при  $n = 1$ ,

$K$  предельное решение аппроксимирует общее решение задачи вдоль определенного интервала времени при значениях безразмерного предела текучести  $\psi \lesssim 10^{-6}$ ; однако, при  $\psi \gtrsim 1$  и  $n = 1$ , решение задачи определяется диссипацией энергии, связанной с течением жидкости внутри канала трещины, т.е. решение задачи эволюционирует от режима  $M$  к режиму  $T$ , минуя предельный случай  $K$ . Область применимости режима  $M$  уменьшается при увеличении  $\psi$ , например, в диапазоне значений  $\psi \gtrsim 10^{-1}$  при  $n = 1$ . В это же время, аналогичная область для  $T$  режима расширяется.

Далее мы обсудим примеры решения задачи, соответствующие  $n = 1$ ,  $\varphi = 0$  и следующим значениям безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$  (серые штрих-пунктирные линии на рисунке 4.7(a)). Мы рассчитали как различные параметры трещины (радиус  $\gamma(\tau)$ , максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$  и давление  $\Pi(1/2, \tau)$ ) изменяются во времени, и данные зависимости, нормализованные на  $M$  предельное решение, представлены на рисунках 4.7(b) – (d). Можно заметить, что решения не зависят от величины параметра  $\psi$  и представлены  $M$  предельным решением на начальном этапе роста трещины, длительность которого зависит от значения  $\psi$ . Затем наличие ненулевого предела текучести приводит к формированию радиальной трещины с меньшим радиусом (более медленный рост), большим максимальным раскрытием и большим давлением внутри канала трещины по сравнению со случаем ньютоновской жидкости гидроразрыва  $\psi = 0$  (рисунки 4.7(b) – (d), где решение для  $\psi = 10^{-10}$  совпадает с решением для ньютоновской жидкости,  $\psi = 0$ , в рамках выбранного интервала времени). Относительные различия между свойствами трещины в случае ньютоновской жидкости ( $\psi = 0$ ) и жидкости Бингама  $\psi > 0$  увеличиваются с увеличением значения параметра  $\psi$ . Предельные решения  $M$ ,  $K$  и  $T$  (приложение Б) изображены на рисунках 4.7(b) – (d) цветными пунктирными линиями.

### **Жидкость с реологией Гершеля-Балкли с $n = 0.3$**

Далее мы переходим к обсуждению решения для радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости гидроразрыва с реологией Гершеля-Балкли с индексом текучести  $n = 0.3$  в непроницаемой горной породе. Построенное решение изображено на рисунке 4.8.

При  $n < 0.5$  траектории решения задачи начинаются в режиме  $K$  и заканчиваются в режиме  $M$  в случае степенной жидкости гидроразрыва ( $\psi = 0$ ) или в режиме  $T$ , когда  $\psi > 0$  (рисунок 4.8(a)). Промежуточной асимптотой

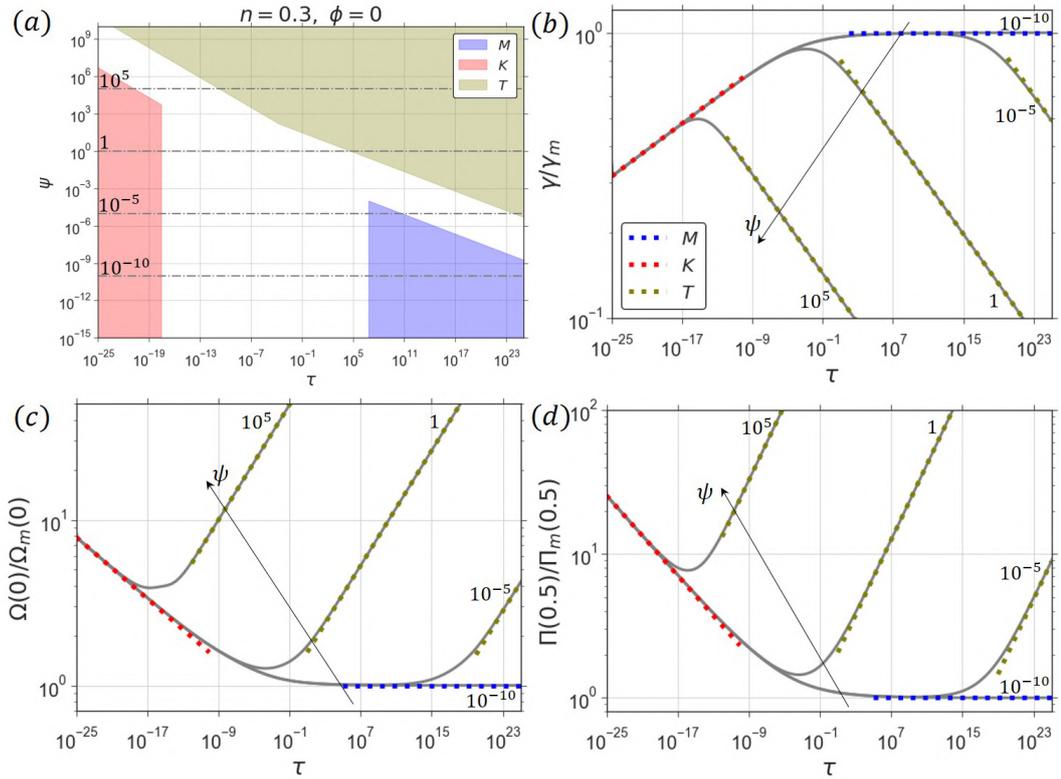


Рисунок 4.8 — Результаты моделирования роста радиальной трещины, движущейся под действием жидкости с реологией Гершеля-Балкли с индексом текучести  $n = 0.3$  в непроницаемой горной породе ( $\phi = 0$ ). На рисунке (а) представлена карта режимов в координатах  $(\tau, \psi)$ , на которой различными цветами закрашены области применимости предельных решений. Характеристики трещины, зависящие от времени, такие как радиус (b), максимальное раскрытие (c) и давление на расстоянии половины радиуса (d), нормализованные на предельное решение  $M$  изображены для следующих значений безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . На карте режимов (а) серыми штрих-пунктирными линиями обозначены траектории, для которых мы рассмотрели решения, а на рисунках (b) – (d) цветные пунктирные линии соответствуют узловым решениям.

в случае  $\psi > 0$  является узловое решение  $M$ , которое приближает общее решение задачи внутри определенного интервала времени при  $\psi \lesssim 10^{-4}$  и  $n = 0.3$ . Область применимости узлового решения  $K$  уменьшается при увеличении значения безразмерного предела текучести  $\psi$ , а аналогичная зона, принадлежащая режиму  $T$ , расширяется. По аналогии со случаем жидкости Бингама, мы посчитали решения, соответствующие  $n = 0.3$ ,  $\phi = 0$  и набору значений безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$  (серые штрих-пунктирные линии на рисунке 4.8(a)), и представили характеристики радиальной трещины, зависящие от времени и нормализованные на предельное решение  $M$ , на рисунках 4.8(b) – (d). Результаты показывают, что качественно ненулевой предел текучести влияет на рост радиальной трещины

аналогично случаю жидкости Бингама: (i) ненулевой предел текучести влияет на свойства трещины по прошествии определенного интервала времени от начала нагнетания, продолжительность которого определяется значением параметра  $\psi$ ; (ii) когда решение для трещины, движущейся под влиянием жидкости Гершеля–Балкли, отличается от решения для трещины, наполненной степенной жидкостью, она характеризуется уменьшенной величиной радиуса и увеличенным максимальным раскрытием и давлением; (iii) относительная разница между сопоставляемыми решениями, т.е. для  $\psi > 0$  и  $\psi = 0$ , растет с увеличением  $\psi$ .

#### 4.4.2.2 Случай проницаемой горной породы

В данном разделе мы рассмотрим рост радиальной трещины в проницаемом резервуаре ( $\varphi > 0$ ). Для исследования параметрического пространства мы будем варьировать оба определяющих параметра  $\varphi$  и  $\psi$ . Для каждого выбранного значения индекса текучести,  $n = 1, 0.3$ , мы рассчитываем для следующих значений безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ , и строим карты режимов в координатах  $(\tau, \varphi)$ . Затем мы проведем исследование как изменяются основные характеристики трещины, зависящие от времени, при  $\psi = 1$  и различных значениях безразмерного коэффициента утечек  $\varphi$ .

##### **Жидкость Бингама ( $n = 1$ )**

На рисунке 4.9 представлена карта режимов для радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости Бингама в проницаемой горной породе. Когда индекс текучести  $n > 0.5$ , решение задачи эволюционирует из узла  $M$  в узел  $\tilde{K}$  в случае жидкости гидроразрыва со степенной реологией ( $\psi = 0$ ) или в узел  $\tilde{T}$  в случае ненулевого предела текучести ( $\psi > 0$ ). Области применимости предельных решений для  $\psi > 0$  закрашены различными цветами на рисунке 4.9, а аналогичные зоны для  $\psi = 0$  обведены цветными штриховыми линиями. В случае отсутствия предела текучести у жидкости гидроразрыва, промежуточными асимптотами являются предельные решения  $K$  и  $\tilde{M}$ , которые при  $n = 1$  реализуются в рамках интервалов  $\varphi \lesssim 10^{-15}$  и  $\varphi \gtrsim 10^3$ , соответственно. В случае ненулевого предела текучести, предельные режимы, связанные с доминированием предела текучести,  $T$  и  $\tilde{T}$ , начинают аппроксимировать общее

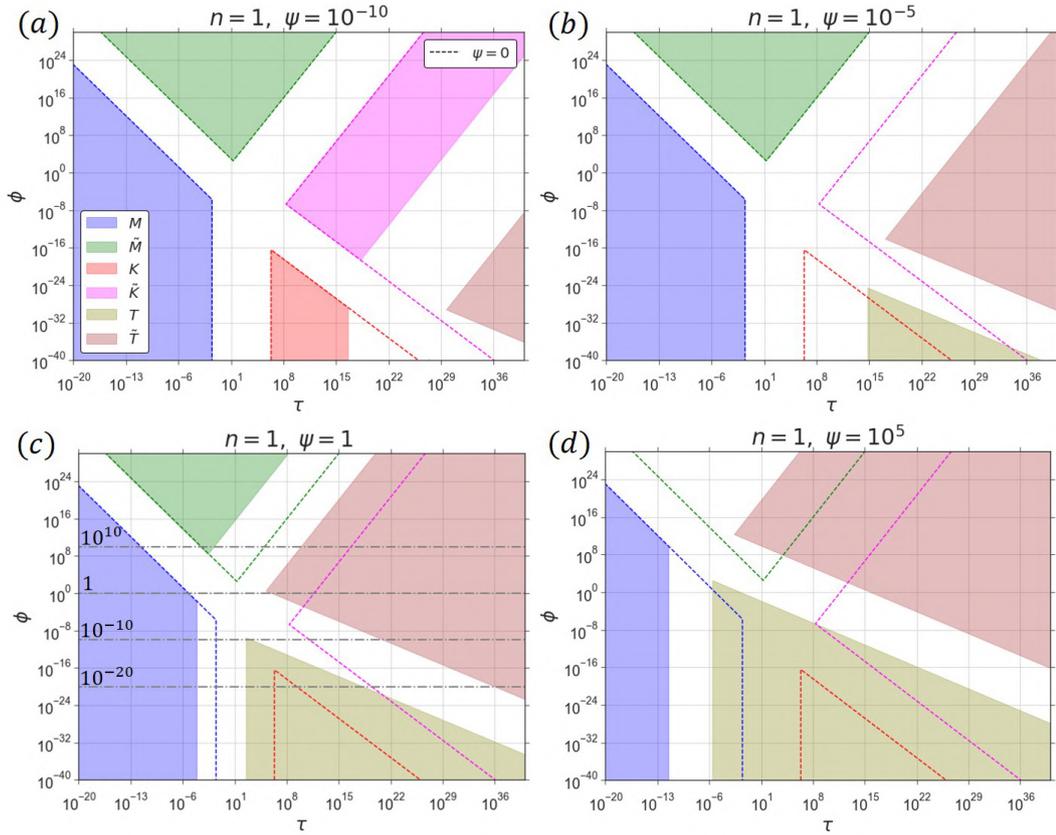


Рисунок 4.9 — Параметрическое пространство задачи о росте радиальной трещины под влиянием жидкости Бингама ( $n = 1$ ) в проницаемом резервуаре ( $\varphi > 0$ ). Карты режимов представлены в координатах  $(\tau, \varphi)$  и соответствуют следующим значениям безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . Границы применимости предельных режимов закрашены в различные цвета. Границы режимов для случая  $\psi = 0$ , т. е. ньютоновской жидкости гидроразрыва, нарисованы цветными штриховыми линиями. На рисунке (с) серая штрих-пунктирная линия обозначает траектории, для которых мы рассматриваем решения в текущем разделе.

решение задачи раньше с увеличением значения определяющего параметра  $\psi$  (см. положение упомянутых областей на рисунках 4.9(b) и (d)). Иными словами, увеличение значения предела текучести  $\tau_0$  приводит к увеличению  $\psi$  и к более скорому достижению условия  $\tau_0 \gg M\dot{\gamma}^n$ , если значения остальных входных параметров задачи остаются неизменными. В результате движения областей применимости решений  $T$  и  $\tilde{T}$  с увеличением  $\psi$ , области для  $K$  и  $\tilde{K}$  режимов уменьшаются и в определенный момент полностью исчезают. Данное наблюдение можно сформулировать иначе: при  $\psi \gtrsim 10^{-5}$  и произвольном  $\varphi$  условия реализации режимов доминирования трещиностойкости  $K, \tilde{K}$  не достигаются, так как эволюционные параметры  $\mathcal{T}_k$  и  $\tilde{\mathcal{T}}_k$  (уравнения (4.38), (4.41)) не могут стать равными нулю. Более того, области применимости вязкостных режимов  $M$  и  $\tilde{M}$  начинают уменьшаться после определенного значения параметра  $\psi$

(см. рисунки 4.9(c), (d) в сравнении с (a), (b)); однако, эти режимы реализуются всегда при определенных значениях  $\tau$  и  $\varphi$ , при любых  $\psi$ . Таким образом, в промежуточные моменты времени общее решение задачи может быть аппроксимировано узловыми решениями  $K$ ,  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $T$ , реализация которых зависит от значений параметров  $\varphi$  и  $\psi$ . Границы режимов, формирующие переходы  $KT$ ,  $\tilde{K}\tilde{T}$ ,  $T\tilde{T}$ , не зависят от значения индекса текучести в диапазоне  $n > 0.5$ , так как этот параметр влияет только на области параметрического пространства, где диссипация энергии при течении вязкой жидкости внутри канала трещины велика, т. е. переходы вязкость-трещиностойкость и вязкость-предел текучести.

Далее мы обсудим вариации параметров радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости Бингама ( $n = 1$ ), при изменении значений определяющих параметров  $\varphi$  и  $\psi$ . (Можно отметить, что приведенный ниже анализ качественно применим и для других значений индекса текучести, лежащих в интервале  $0.5 < n \leq 1$ .) Мы рассмотрели следующий набор значений безразмерного коэффициента утечек  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 1, 10^{10}\}$  и провели расчет роста трещины в случае ньютоновской жидкости ( $\psi = 0$ ) и жидкости Бингама ( $\psi = 1$ ). Полученные результаты представлены на рисунке 4.10. Сплошными черными линиями показано решение, соответствующее  $\psi = 1$ , в то время как решение для  $\psi = 0$  представлено штриховыми серыми линиями. Сначала мы обсудим зависимость решения задачи от параметра утечек  $\varphi$  при фиксированном значении безразмерного предела текучести ( $\psi = 0$  или  $\psi = 1$ ). Можно заметить, что решение не зависит от параметра  $\varphi$  (и, следовательно, соответствует случаю непроницаемой горной породы, т. е.  $\varphi = 0$ ) в течение начального периода роста трещины, продолжительность которого зависит от значений  $\varphi$  и  $\psi$ . За пределами этого интервала времени увеличение интенсивности утечек приводит к уменьшению радиуса, максимального раскрытия и эффективности трещины, в то время как давление повышается (рисунок 4.10). Однако поведение давления может отличаться от описанного выше в случае ненулевого предела текучести, а именно, давление для всех значений  $\varphi$  стремится к асимптотическому поведению, связанному с доминированием предела текучести (голубая линия на рисунке 4.10(c)).

Далее мы рассмотрим влияние предела текучести на характеристики трещины, сравнив решения для ньютоновской жидкости ( $\psi = 0$ ) и жидкости Бингама ( $\psi = 1$ ) при фиксированном значении параметра утечек (рисунок 4.10). Сопоставляемые решения нечувствительны к значению предела текуче-

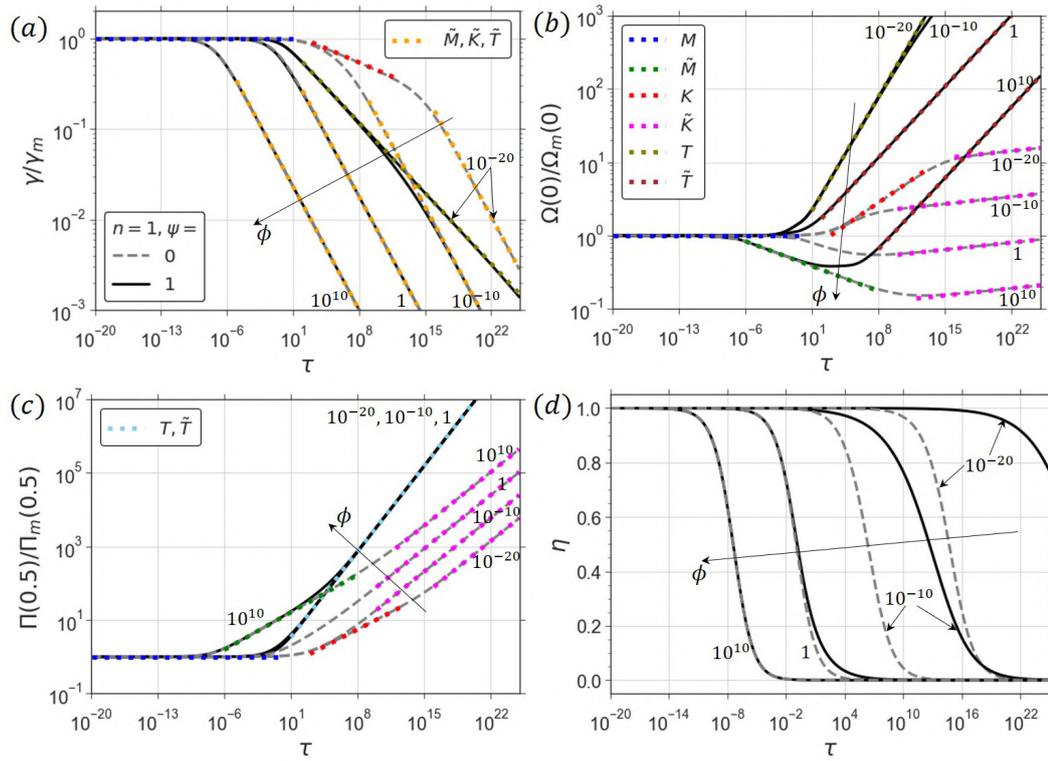


Рисунок 4.10 — Зависящие от времени параметры радиальной трещины, распространяющейся в проницаемой горной породе ( $\phi > 0$ ) под действием жидкости Бингама: (a) радиус  $\gamma(\tau)$ , (b) максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , (c) давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$  и (d) эффективность  $\eta(\tau)$ . Параметры на рисунках (a) – (c) нормализованы на предельное решение  $M$ . Профили, соответствующие  $\phi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 1, 10^{10}\}$  и  $\psi = 1$  изображены черными сплошными линиями. Решения для аналогичных  $\phi$  и  $\psi = 0$  представлены серыми штриховыми линиями. Узловые решения отмечены цветными штриховыми линиями. На рисунке (a) асимптотическое поведение радиуса трещины в режимах  $\tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{T}$  изображено одинаковым оранжевым цветом, т. к. оно описывается одинаковой зависимостью ( $\gamma_{\tilde{K}}(\tau), \gamma_{\tilde{M}}(\tau), \gamma_{\tilde{T}}(\tau)$ ). Аналогично, на рисунке (c), мы изобразили голубым цветом поведение давления в режимах  $T, \tilde{T}$  ( $\Pi_T(1/2, \tau), \Pi_{\tilde{T}}(1/2, \tau)$ ), которые близки друг к другу.

сти на ранних стадиях распространения трещины. Более того, когда утечки очень велики ( $\phi = 10^{10}$ ), сравниваемые решения совпадают во всей временной области в терминах радиуса и эффективности (рисунки 4.10(a), (d)). В общем случае, при больших временах ( $\tau$ ) ненулевой предел текучести ( $\psi = 1$ ) приводит к формированию трещины с меньшим значением радиуса, увеличенным максимальным раскрытием, давлением и эффективностью по сравнению с решением, соответствующим ньютоновской жидкости гидроразрыва ( $\psi = 0$ ).

На рисунках 4.10 мы нанесли цветными штриховыми линиями различные узловые решения (приложение Б). Необходимо отметить, что динамика радиуса в предельных режимах, связанных с доминированием утечек, описывается одной функциональной зависимостью, поэтому на рисунке 4.10(a) она пред-

ставлена одним (оранжевым) цветом. Аналогично, асимптотическое поведение давления в режимах, связанных с доминированием предела текучести, описывается одной функцией, которая изображена на рисунке 4.10(с) голубым цветом.

### Жидкость Гершеля-Балкли с индексом текучести $n = 0.3$

Мы переходим к обсуждению параметрического пространства в задаче о распространении радиальной трещины в проницаемой горной породе ( $\varphi > 0$ ) под воздействием жидкости гидроразрыва с реологией Гершеля-Балкли с  $n = 0.3$ . На рисунке 4.11 мы представили карты режимов. Когда индекс текучести

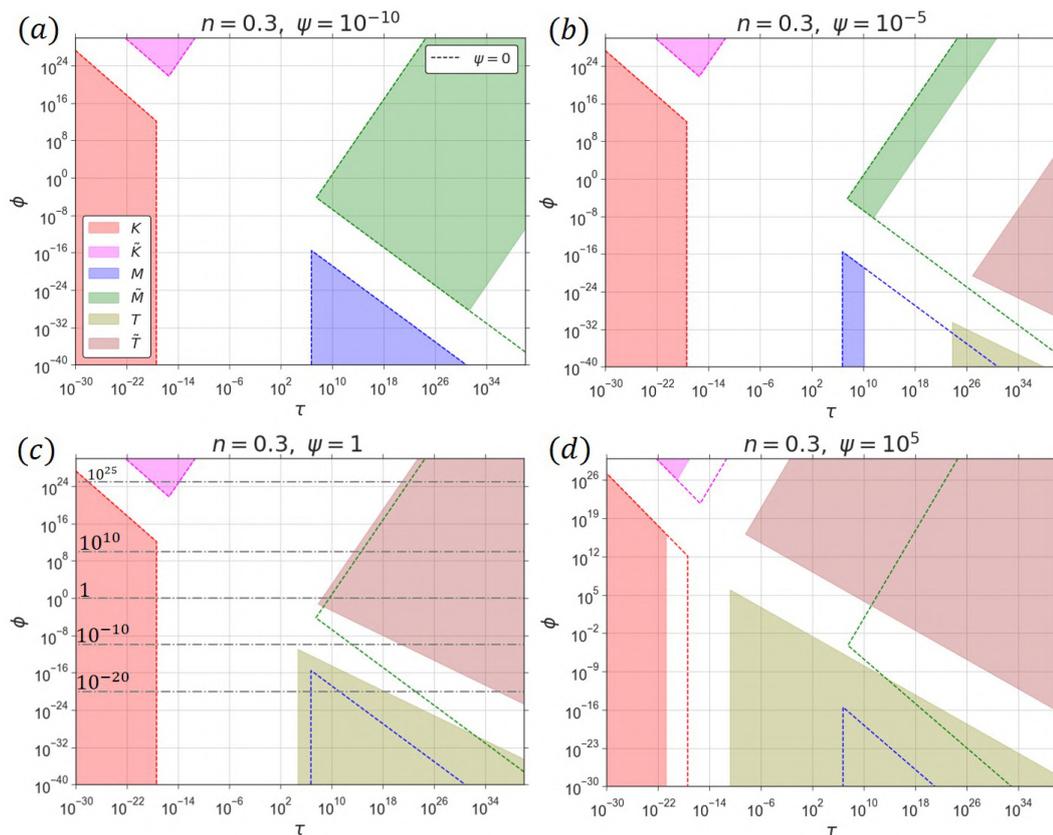


Рисунок 4.11 — Параметрическое пространство задачи о росте радиальной трещины под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли ( $n = 0.3$ ) в проницаемом резервуаре ( $\varphi > 0$ ). Карты режимов представлены в координатах  $(\tau, \varphi)$  и соответствуют следующим значениям безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . Границы применимости предельных режимов закрасены в различные цвета. Границы режимов для случая  $\psi = 0$ , т. е. жидкости гидроразрыва со степенной реологией, нарисованы цветными штриховыми линиями. На рисунке (с) серая штрих-пунктирная линия обозначает траектории, для которых мы рассматриваем решения в текущем разделе.

принимает значения из интервала  $n < 0.5$ , решение задачи начинается в узле  $K$  и заканчивается в узле  $\tilde{M}$  в случае жидкости гидроразрыва со степенной реологией ( $\psi = 0$ ) и в узле  $\tilde{T}$  в случае жидкости с реологией Гершеля-Балкли ( $\psi > 0$ ). Области применимости предельных решений для  $\psi > 0$  закрасены

различными цветами на рисунке 4.11, а аналогичные зоны для случая  $\psi = 0$  обведены цветными штриховыми линиями. Общее решение может быть аппроксимировано в промежуточные моменты времени узловыми решениями  $\tilde{K}$ ,  $M$ ,  $\tilde{M}$ ,  $T$ , и их реализация зависит от значений  $\varphi$  и  $\psi$ . Поведение областей применимости узловых решений  $T$  и  $\tilde{T}$  при увеличении  $\psi$  аналогично обсуждаемому ранее для случая жидкости Бингама; однако, здесь движение режимов  $T$  и  $\tilde{T}$  в сторону меньших значений  $\tau$  приводит к исчезновению вязкостных режимов  $M$  и  $\tilde{M}$  (рисунки 4.11(a), (b) в сравнении с рисунками (c), (d)) и уменьшению областей применимости режимов  $K$  и  $\tilde{K}$  (рисунок 4.11(d)). В отличие от  $n > 0.5$ , в модели с индексом текучести, лежащим в интервале  $n < 0.5$ , изменение значения  $\psi$  не влияет на положения границ режимов, относящихся к переходу  $T\tilde{T}$ .

На рисунке 4.12 изображены зависящие от времени параметры радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли ( $n = 0.3$ ,  $\psi = 1$ ), для следующих значений безразмерного коэффициента утечек:  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 1, 10^{10}, 10^{25}\}$  (обсуждаемые траектории отмечены серыми штрих-пунктирными линиями на рисунке 4.11(c)). В целях сравнения на рисунке мы также нанесли серыми штриховыми линиями решения, соответствующие случаю степенной жидкости гидроразрыва ( $n = 0.3$ ,  $\psi = 0$ ). (Характеристики трещины: радиус, максимальное раскрытие, давление на расстоянии половины радиуса на рисунках 4.12(a)–(c) нормализованы на  $M$  предельное решение.)

Можно заметить, что наличие ненулевого предела текучести у жидкости гидроразрыва оказывает влияние на решение задачи качественно аналогичное случаю жидкости Бингама, который мы обсуждали ранее: (i) при фиксированном значении безразмерного предела текучести увеличение интенсивности утечек приводит к формированию трещины с меньшим радиусом, максимальным раскрытием и эффективностью, но с более высоким давлением жидкости внутри канала; (ii) когда параметр утечек зафиксирован и мы повышаем значение предела текучести, наблюдается уменьшение радиуса и увеличение максимального раскрытия, давления и эффективности. Тренды (i) и (ii) выполняются для достаточно большого интервала времени, когда решение для жидкости Гершеля-Балкли ( $\psi > 0$ ) и степенной жидкости ( $\psi = 0$ ) различны. Для лучшего понимания какой режим распространения трещины реализуется в то или иное время, мы наносим на графики 4.12 узловые решения (приложение Б) цветными штриховыми линиями.

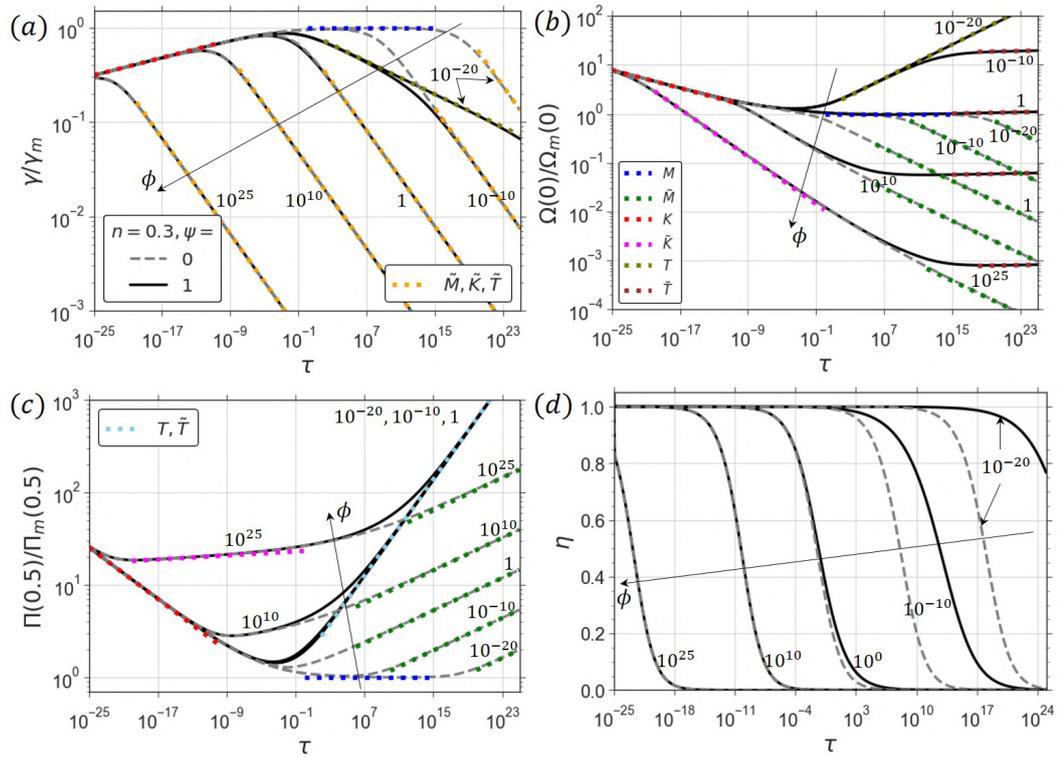


Рисунок 4.12 — Зависящие от времени параметры радиальной трещины, распространяющейся в проницаемой горной породе ( $\phi > 0$ ) под действием жидкости с реологией Гершеля-Балкли с индексом текучести  $n = 0.3$ : (a) радиус  $\Upsilon(\tau)$ , (b) максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , (c) давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$  и (d) эффективность  $\eta(\tau)$ . Параметры на рисунках (a) – (c) нормализованы на предельное решение  $M$ . Профили, соответствующие  $\phi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 1, 10^{10}, 10^{25}\}$  и  $\psi = 1$  изображены черными сплошными линиями. Решения для аналогичных  $\phi$  и  $\psi = 0$  представлены серыми штриховыми линиями. Узловые решения отмечены цветными штриховыми линиями. На рисунке (a) асимптотическое поведение радиуса трещины в режимах  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{T}$  изображено одинаковым оранжевым цветом, т. к. оно описывается одинаковой зависимостью ( $\Upsilon_{\tilde{K}}(\tau)$ ,  $\Upsilon_{\tilde{M}}(\tau)$ ,  $\Upsilon_{\tilde{T}}(\tau)$ ). Аналогично, на рисунке (c), мы изобразили голубым цветом поведение давления в режимах  $T$ ,  $\tilde{T}$  ( $\Pi_T(1/2, \tau)$ ,  $\Pi_{\tilde{T}}(1/2, \tau)$ ), которые близки друг к другу.

#### 4.4.3 Количественные оценки объема недеформируемого ядра, формирующегося внутри канала трещины

В рассматриваемой модели радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли, внутри трещины образуется твердая пробка в области, где напряжение сдвига  $\tau_m$  меньше предела текучести  $\tau_0$ . Ширину недеформируемого ядра можно найти из соотношения  $w_{\text{plug}}(\rho, t) = 2y_\tau = 2\tau_0 R |\partial p / \partial \rho|^{-1}$ . Для наблюдения за эволюцией ядра мы вводим параметр  $\Upsilon(t)$ , зависящий от времени и равный отношению

объема твердой пробки к объему трещины:

$$\Upsilon(t) = \frac{V_{\text{plug}}(t)}{V_{\text{crack}}(t)} = \frac{\int_0^1 \rho w_{\text{plug}} d\rho}{\int_0^1 \rho w d\rho}$$

Используя безразмерные параметры (4.50), (4.49) мы переписывает данное соотношение в виде:

$$\Upsilon(\tau, \varphi, \psi) = 2\psi\gamma \frac{\int_0^1 \rho \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right|^{-1} d\rho}{\int_0^1 \rho \Omega d\rho}. \quad (4.53)$$

В случае непроницаемой горной породы мы можем упростить формулу (4.53) до вида:

$$\Upsilon(\tau, 0, \psi) = \frac{4\pi\psi\gamma^3}{\tau} \int_0^1 \rho \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right|^{-1} d\rho.$$

Для расчета параметра  $\Upsilon(\tau, \varphi, \psi)$  для различных  $\varphi$ ,  $\psi$  мы используем решение задачи, полученное при помощи полноценного численного подхода (раздел 4.2.1). Результаты расчетов представлены на рисунке 4.13 в виде изолиний (черные штриховые линии)  $\Upsilon(\tau, \varphi, \psi) = \text{const}$ , где константа варьируется внутри отрезка  $[0, 1]$  и в нашем случае равна 0.1, 0.5, 0.9. Изолинии рассчитаны для двух значений индекса текучести  $n = 1$  (левая колонка) и  $n = 0.3$  (правая колонка) для непроницаемого резервуара (верхний ряд) и проницаемой горной породы (нижний ряд). Результаты продемонстрированы в параметрическом пространстве  $(\tau, \psi)$  для  $\varphi = 0$  и в пространстве  $(\tau, \varphi)$  для фиксированного значения параметра  $\psi = 1$  и ненулевых утечек  $\varphi > 0$ . Для лучшего понимания расположения изолиний относительно предельных режимов распространения трещины, мы нанесли на графики 4.13 границы применимости узловых решений, которые были представлены на рисунках 4.7, 4.8, 4.9, 4.11.

Выбранные изолинии  $\Upsilon(\tau, \varphi, \psi) = \text{const}$  располагаются преимущественно в зонах между областями применимости предельных решений. В случае трещины, распространяющейся под влиянием жидкости Бингама в непроницаемой горной породе (рисунок 4.13(a)),  $MT$  и  $KT$  переходы содержат изолинии на временных интервалах  $\tau \lesssim 10^{-2}$  и  $\tau \gtrsim 10^6$ , соответственно. Обратная ситуация наблюдается для жидкости Гершеля-Балкли с  $n = 0.3$  (рисунок 4.13(b)), для которой переходы  $KT$  и  $MT$  содержат изолинии при  $\tau \lesssim 10^{-18}$  и  $\tau \gtrsim 10^7$ , соответственно. Изолиния  $\Upsilon = 0.1$  проходит вблизи областей применимости режимов  $M$  и  $K$ , где  $\Upsilon = 0$ . В свою очередь, изолиния  $\Upsilon = 0.9$  располагается вблизи зоны для режима  $T$ , для которой  $\Upsilon = 1$ .

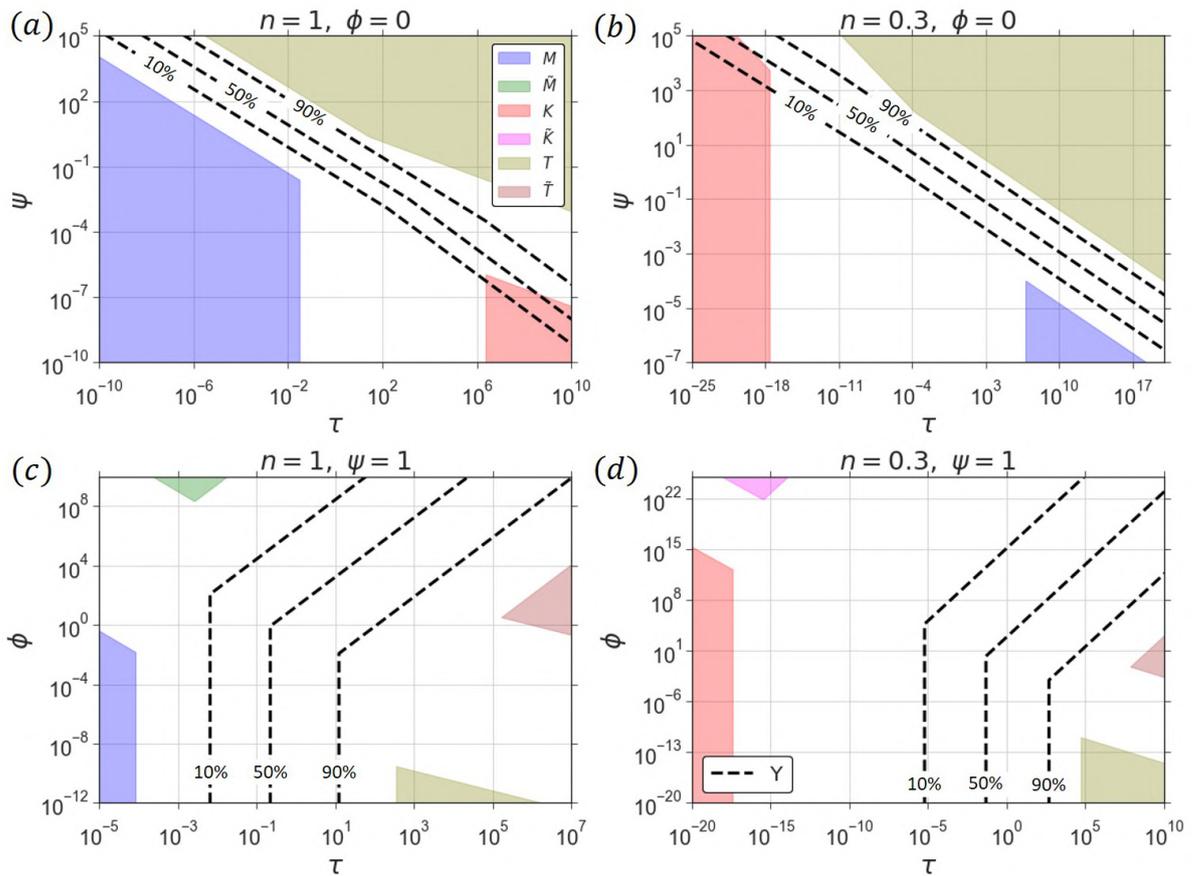


Рисунок 4.13 — На графиках изображены изолинии  $\Upsilon(\tau, \phi, \psi) = V_{\text{plug}}/V_{\text{crack}}$  (черные штриховые линии), соответствующие величинам 10%, 50% и 90%. Проанализированы два значения индекса текучести  $n = 1$  (рисунки (a) и (c)) и  $n = 0.3$  (рисунки (b) и (d)). На верхних рисунках изображены решения для непроницаемого резервуара, а на нижних – для проницаемой горной породы и значения безразмерного предела текучести  $\psi = 1$ . Карты режимов, представленные на рисунках 4.7, 4.8, 4.9, 4.11, нанесены в целях сопоставления положения изолиний и условий распространения трещины.

Функция  $\Upsilon(\tau, \phi, \psi)$  при фиксированных значениях  $\phi$  и  $\psi$  растет плавно от 0 до 1 эволюционируя от режимов, в которых доминирует вязкость  $M, \tilde{M}$  или трещиностойкость  $K, \tilde{K}$ , до режимов с доминированием предела текучести  $T, \tilde{T}$ . Из результатов модели роста радиальной трещины в проницаемом пласте (рисунки 4.13 (c) и (d)) можно заметить, что изолинии принадлежат переходам между предельными режимами  $MT$  ( $KT$ ) и  $\tilde{M}\tilde{T}$  ( $\tilde{K}\tilde{T}$ ), когда безразмерный коэффициент утечек  $\phi \ll 1$  и  $\phi \gg 1$ , соответственно, и индекс текучести равен  $n = 1$  ( $n = 0.3$ ). Более того, изолинии параллельны границам применимости предельных решений, которые ограничивают вышеупомянутые переходы.

В завершении данного раздела мы обсудим поведение изолиний вблизи областей применимости предельных решений, связанных с доминированием трещиностойкости, когда безразмерный параметр  $\phi$  утечек зафиксирован, а

безразмерный предел текучести  $\psi$  принимает малые (для  $n > 0.5$ ) или большие значения (для  $n < 0.5$ ). Используя иллюстрации 4.13 (а) и (б) для случая непроницаемой горной породы ( $\varphi = 0$ ) можно увидеть, что изолинии  $\Upsilon = 0.1, 0.5$  пересекают область применимости предельного режима  $K$ . Данное явление можно объяснить следующим образом: твердая пробка начинает формироваться внутри канала трещины, когда ее геометрия (радиус и раскрытие) соответствует узловому решению  $K$ , в котором диссипация энергии идет на разрушение горной породы и не зависит от процессов, происходящих внутри трещины, где, в нашем случае, сосуществуют и жидкая и твердая фазы.

#### 4.4.4 Моделирование роста трещины для типичных промышленных случаев

В данной части диссертации мы приведем результаты моделирования роста радиальной трещины гидроразрыва, используя размерные переменные. Мы выбираем значения входных параметров, исходя из характерных промышленных диапазонов. Среди параметров геомеханические и фильтрационно-емкостные свойства горной породы, характеристики жидкостей (порового и жидкости гидроразрыва) и скорости закачки. Основной целью анализа является получение количественных оценок, связанных с влиянием ненулевого предела текучести жидкости гидроразрыва на решение задачи в частных случаях.

Мы рассмотрим рост радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся в течение  $6 \cdot 10^3$  секунд под воздействием закачки жидкости с постоянным расходом  $Q_0 = 0.01 \text{ м}^3/\text{с}$ . Мы выбрали следующие значения механических параметров:  $E' = 30 \text{ ГПа}$ ,  $K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$ ,  $\sigma_o = 10 \text{ МПа}$ . Жидкость гидроразрыва в модели имеет следующие свойства:  $n = 0.7$ ,  $M = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$ ,  $\tau_0 = 10 \text{ Па}$ . Так как основной фокус направлен на анализ влияния предела текучести, то мы будем проводить сравнения построенного решения с характеристиками радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием степенной жидкости с аналогичными значениями  $n$  и  $M$ . Мы рассмотрим как случай непроницаемой горной породы, так и проницаемого резервуара, для которого были выбраны следующие свойства:  $p_o = 6 \text{ МПа}$ ,  $k = 1 \text{ мД}$ ,  $\varphi_r = 20 \%$ ,  $\mu = 5 \text{ сПз}$  (ньютоновская жидкость),  $c_t = 10^{-4} \text{ атм}^{-1}$ . Для упрощения расчетов

мы предположим, что фильтрат жидкости гидроразрыва имеет свойства идентичные параметрам поровой жидкости. Таким образом, в случае проницаемого резервуара мы получаем  $C' = 2.9 \cdot 10^{-5}$  м/ $\sqrt{с}$ . В терминах безразмерных параметров ( $\tau$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ), определенных в разделе 4.3.2, анализируемые случаи можно записать как:  $\tau \in (0, 1.04 \cdot 10^{-10})$ ,  $\phi = 0$  (непроницаемая горная порода) или  $\phi = 1.2 \cdot 10^7$  (проницаемый резервуар),  $\psi = 5.8 \cdot 10^4$  (реология Гершеля-Балкли) или  $\psi = 0$  (степенная реология).

На рисунке 4.14 представлены зависимости радиуса  $R(t)$ , максимального раскрытия  $w(0, t)$ , давления на расстоянии половины радиуса  $p(R(t)/2, t)$  и эффективности  $\eta(t)$  в зависимости от времени, рассчитанные при помощи полноценного численного подхода (раздел 4.2.1).

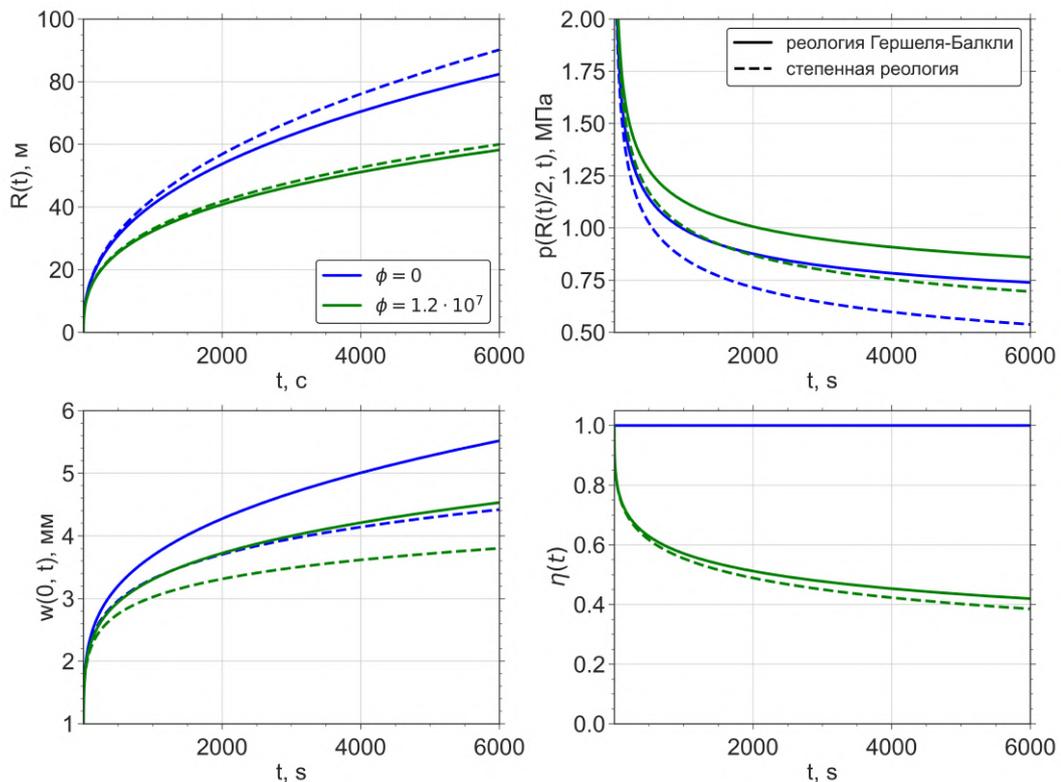


Рисунок 4.14 — На рисунке представлены различные параметры радиальной трещины, зависящие от времени, полученные при помощи точного численного метода (раздел 4.2.1). Левый ряд рисунков содержит графики для радиуса  $R(t)$  и максимального раскрытия  $w(0, t)$ , в то время как в правом ряду находятся графики для давления на расстоянии половины радиуса  $p(R(t)/2, t)$  и эффективности  $\eta(t)$ . Сплошными линиями изображены решения для трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли, а штриховыми линиями представлены решения, соответствующие случаю степенной жидкости. Синий и зеленый цвета относятся к случаям непроницаемой и проницаемой горной породы.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что наличие предела текучести у жидкости гидроразрыва  $\tau_0 = 10$  Па приводит к уменьшению радиуса трещины, увеличению максимального раскрытия, давления и эффективности (эффективность не изменяется в случае непроницаемой горной породы) (сплошные линии в сравнении с штриховыми одинакового цвета на рисунке 4.14). Таким образом, наблюдения согласуются с анализом, проведенным в разделе 4.4.2. Чтобы охарактеризовать количественно различия между двумя сопоставляемыми решениями, соответствующими случаю жидкости Гершеля-Балкли (“hb”) и случаю жидкости со степенной реологией (“pl”), мы рассчитали относительные разницы между решениями для свойств трещины в момент времени  $t = 6000$  с, используя формулу:  $\delta_A = |A_{hb} - A_{pl}|/A_{hb}$ , где  $A$  рассматриваемый параметр трещины. Полученные величины приведены в таблице 9.

Таблица 9 — Относительные разницы ( $\delta_A$ ) между различными параметрами радиальной трещины ( $A$ ), соответствующими случаю жидкости гидроразрыва с реологией Гершеля-Балкли (“hb”) и со степенной реологией (“pl”), посчитанные для момента времени  $t = 6000$  с.

$\delta_A =  A_{hb} - A_{pl} /A_{hb}$ (в %)		
Свойство ( $A$ )	$\varphi = 0$	$\varphi = 1.2 \cdot 10^7$
$R(t)$	9.4	3.1
$w(0, t)$	19.9	16.1
$p(R(t)/2, t)$	27.2	19.1
$\eta(t)$	0	8.2

Можно заметить, что различия между двумя сравниваемыми решениями более существенны при распространении трещины в непроницаемой горной породе. В этом случае,  $\delta_A$  для радиуса и максимального раскрытия составляет примерно 9% и 20%, соответственно. Когда в модели добавляются утечки, динамики радиуса практически неразличимы, в то время как значения максимального раскрытия и эффективности трещины выше для случая жидкости с реологией Гершеля-Балкли на 16.1% и 8.2% соответственно. Наконец,  $\delta_A$  для эффективного давления на расстоянии радиуса достигает приблизительно 27% и 19% для  $\varphi = 0$  и  $\varphi > 0$ . Полученные результаты наглядно демонстрируют важность учета предела текучести при моделировании роста трещины гидроразрыва пласта.

## 4.5 Выводы

В настоящей главе разработана модель радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли. Для решения задачи реализован точный численный алгоритм, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа, и полуаналитический метод, позволяющий получить быстрое приближенное решение. В разделе уделяется внимание физической особенности трещины, связанной с наличием ненулевого предела текучести жидкости гидроразрыва, заключающейся в формировании недеформируемого ядра посередине канала трещины, объем которого увеличивается с течением времени. Численное моделирование показало, что учет вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва приводит к формированию трещины меньшего радиуса и большего раскрытия по сравнению с аналогичными характеристиками радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости гидроразрыва со степенной реологией. Мы получили предельные режимы распространения трещины гидроразрыва при помощи полуаналитического подхода и определили их границы применимости. На картах режимов были также указаны области, внутри которых важно учитывать наличие предела текучести жидкости гидроразрыва при моделировании распространения трещины, и, наоборот, указаны диапазоны входных параметров, при которых можно пользоваться решением модели со степенной реологией жидкости гидроразрыва. В завершении раздела приведены количественные оценки, связанные с недеформируемым ядром.

## Заключение

В настоящей диссертации проведено исследование влияния различных гидродинамических факторов на распространение трещины гидроразрыва пласта. В работе рассмотрены три эффекта:

1. массообмен между трещиной и окружающим проницаемым резервуаром, скорость которого зависит от давления внутри канала трещины;
2. ламинарно-турбулентное течение “скользящей воды” (вода с добавками, снижающими трение) внутри канала трещины;
3. вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва.

Анализ был проведен на основе двух геометрий трещины гидроразрыва: полубесконечной и радиальной. Первая модель точно описывает область вблизи фронта конечной трещины и помогает разрешить влияние различных физических процессов, реализующихся вблизи кончика трещины, на процесс ее распространения. Вторая модель была рассмотрена в качестве примера конечной трещины гидроразрыва, которая реализуется в полевых условиях и позволяет наглядно продемонстрировать влияние рассматриваемого гидродинамического эффекта на параметры трещины гидроразрыва.

В главе 1 представлены классические формулировки задач в модели полубесконечной трещины и в модели радиальной трещины. Постановки задач и системы уравнений содержат предположения, часто используемые в литературных источниках. В главах 2–4 обсуждались модификации формулировок, связанные с учетом анализируемого гидродинамического фактора.

В главе 2 исследовано влияние утечек, зависящих от давления, на рост трещины гидроразрыва в проницаемом коллекторе. Закон утечек Картера описывает массообмен, не учитывающий изменение давления внутри канала трещины, в большинстве существующих моделей трещин гидроразрыва. В текущем исследовании мы уточняем механизм обмена жидкостью, учитывая давление жидкости внутри канала трещины. В модели скорость утечек становится (i) меньше, чем величина, полученная в результате применения закона Картера, в области вблизи кончика трещины ( $p_f < \sigma_o$ ), что способствует притоку поровой жидкости в трещину, и (ii) больше, чем значение в случае закона Картера, вдали от кончика, вдоль основной части трещины ( $p_f > \sigma_o$ ). Отличительными физическими особенностями модели трещины гидроразрыва пласта с

утечками, зависящими от давления, являются наличие зоны циркуляции, прилегающей к фронту и заполненной поровой жидкостью, и конечное значение давления в кончике.

В разделе 2.1 проведен асимптотический анализ предельных режимов распространения полубесконечной трещины, обрамляющих общую структуру решения задачи (профили раскрытия и давления) и его зависимость от значений безразмерных определяющих параметров: коэффициента утечек и коэффициента притока. Было получено, что решение для кончика трещины с утечками, зависящими от давления, значительно отличается от аналогичного решения с утечками по закону Картеру при увеличении значения коэффициента притока. Полное численное решение задачи о кончике трещины позволяет понять как различные физические процессы, реализующиеся вблизи фронта трещины, влияют на характеристики трещины в этой области и как взаимодействие данных физических процессов эволюционирует с изменением скорости распространения трещины. Построенные карты позволяют определить режим распространения конечной трещины гидроразрыва путем сопоставления положения границ применимости предельных решений с длиной конечной трещины. На картах мы отобразили области, внутри которых полученное решение стремится к решению для полубесконечной трещины, в котором массообмен описывается законом Картера. За пределами данных областей сопоставляемые решения значительно отличаются, означая важность учета утечек, зависящих от давления, при моделировании распространения полубесконечной трещины.

В разделе 2.2 разработана модель радиальной трещины гидроразрыва с утечками, зависящими от давления. При имплементации численного алгоритма для моделирования эволюции радиальной трещины была внедрена модель концевой элемента из раздела 2.1 для точного описания физических процессов, происходящих в области трещины, прилегающей к фронту. Было продемонстрировано, что анализируемый гидродинамический эффект может изменить решение задачи (радиус, раскрытие, давление, эффективность) по сравнению с аналогичным решением с утечками по закону Картера более чем на 10% для реалистичных значений входных параметров, соответствующих типичным промысловым случаям. В случае утечек, зависящих от давления, радиальная трещина имеет меньший объем (уменьшается как радиус, так и раскрытие) по сравнению с решением задачи, соответствующим утечкам по закону Картера, поскольку изучаемый механизм массообмена увеличивает общий объем утечек

вдоль значительной части трещины. Постановка задачи в безразмерной форме показывает, что решение в нормализованном виде зависит от безразмерного коэффициента утечек и коэффициента притока. Вторым параметром описывает интенсивность зависимости утечек от давления. Чтобы количественно оценить влияние утечек, зависящих от давления, на характеристики радиальной трещины, мы сравнили различные параметры, радиус, максимальное раскрытие, давление на расстоянии половины радиуса, эффективность, вычисленные в модели с уточненным механизмом массообмена и с упрощенным законом утечек Картера для различных значений определяющих параметров. Результаты показали, что относительно небольшие значения коэффициента притока оказывают значительное воздействие на характеристики трещины в случае ее высокой эффективности, в то время как большие значения данного определяющего параметра необходимы для обеспечения заметного влияния массообмена, зависящего от давления, на характеристики трещины для случаев с малой эффективностью. Таким образом, были определены диапазоны значений определяющих параметров, при которых важно учитывать утечки, зависящие от давления, при моделировании распространения радиальной трещины гидроразрыва и, наоборот, выявлены случаи, когда эффектом можно пренебречь и пользоваться моделью с утечками по закону Картера.

В главе 3 проведен анализ влияния ламинарно-турбулентного течения внутри канала трещины на распространение полубесконечной и радиальной трещины в проницаемой горной породе. Трансформация режима течения из ламинарного в турбулентный при удалении от кончика трещины учтена в модели. Процесс массообмена между трещиной и окружающей породой описывается при помощи закона Картера. Жидкость гидроразрыва представляет собой “скользкую воду”, т. е. водная основа с полимерными добавками, повышающими вязкость растворителя и значительно уменьшающими трение о стенки канала в турбулентном потоке. Мы полагаем, что реология “скользкой воды” при турбулентном течении описывается феноменологической асимптотой максимального уменьшения лобового сопротивления (MDR или асимптота Вирка).

В разделе 3.1 построено общее решение задачи о кончике трещины в терминах профилей раскрытия и эффективного давления и проведено исследование его поведения внутри параметрического пространства в безразмерных координатах коэффициент утечек и характеристическое число Рейнольдса. Мы вывели аналитически предельные режимы распространения полубесконечной

трещины и построили карты режимов, изображающие их области применимости. Особое внимание было уделено положению границы между ламинарным и турбулентным режимами течения и был сделан вывод, что размер зоны с ламинарным течением уменьшается при увеличении коэффициента утечек, когда характеристическое число Рейнольдса зафиксировано, по сравнению со случаем непроницаемой горной породы. Следовательно, турбулентность оказывает большее влияние на решение задачи о кончике трещины, когда утечки присутствуют в модели (остальные входные параметры и скорость распространения полубесконечной трещины остаются неизменными).

В разделе 3.2 была построена численная модель радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения. Мы продемонстрировали, что ламинарный и турбулентный режимы течения всегда реализуются внутри канала трещины, а именно, ламинарный режим вблизи кончика, а турбулентный режим вблизи ствола нагнетательной скважины, причем размер ламинарной области увеличивается с течением времени. Моделирование для значений входных параметров модели, соответствующих типичным промысловым случаям, показало, что турбулентность изменяет пространственные характеристики трещины вблизи ствола скважины на начальном периоде распространения. В случае жидкости гидроразрыва, являющейся “скользкой водой”, ламинарно-турбулентное решение значительно отличается от ламинарного решения в течение нескольких секунд, десятков секунд и нескольких минут в терминах радиуса, максимального раскрытия и давления вблизи ствола скважины. Мы определили, что утечки продлевают эффекты, связанные с турбулентным режимом течения. Хотя размеры радиальной трещины в модели с ламинарно-турбулентным течением и с ламинарным течением практически одинаковы после нескольких минут роста радиальной трещины, давление вблизи ствола скважины принимает большие значения в ламинарно-турбулентной модели в течение десятков минут, означая, что для нагнетания жидкости гидроразрыва в пласт требуется большее количество энергии, чем величина, полученная с помощью ламинарной модели. Мы провели исследование решения задачи внутри параметрического пространства в безразмерных координатах коэффициент утечек и характеристическое число Рейнольдса. При помощи полуаналитического подхода были выведены предельные режимы распространения трещины и определены их области применимости. На картах режимов мы также указали области, внутри которых

решение задачи с ламинарно-турбулентным течением можно считать полностью турбулентным или полностью ламинарным.

В главе 4 разработана численная модель радиальной трещины гидроразрыва, распространяющейся под влиянием вязкопластической жидкости, реологию которой мы описываем моделью Гершеля-Балкли, в проницаемой горной породе и проведено исследование комбинированного влияния ненулевого предела текучести жидкости гидроразрыва и утечек в окружающий резервуар на распространение трещины. В большинстве существующих моделей полагают, что жидкость гидроразрыва описывается ньютоновской или степенной реологией; однако, гели, суспензии, пены проявляют реологию, характеризующуюся снижением вязкости при сдвиге и наличием предела текучести. Для нахождения решения задачи мы используем два различных подхода: точный численный и упрощенный полуаналитический. В разделе мы продемонстрировали физическую особенность трещины, связанную с наличием ненулевого предела текучести жидкости гидроразрыва, заключающуюся в формировании недеформируемого ядра посередине канала трещины, объем которого увеличивается с течением времени. Было продемонстрировано, что учет вязкопластической реологии жидкости гидроразрыва приводит к формированию радиальной трещины с меньшим радиусом, большим максимальным раскрытием, давлением и эффективностью по сравнению с аналогичными параметрами трещины, образующейся в результате закачки жидкости со степенной реологией. При помощи полуаналитического подхода мы получили предельные режимы распространения радиальной трещины. Было проведено исследование параметрического пространства в безразмерных координатах коэффициент утечек и предела текучести, путем определения областей применимости предельных режимов распространения. Построенные карты режимов позволяют оценить какие физические процессы доминируют в тот или иной момент времени при определенных значениях определяющих параметров и индекса текучести. Используя представленные карты, можно определить зоны, внутри которых важно учитывать наличие предела текучести жидкости гидроразрыва при моделировании распространения радиальной трещины, и наоборот, диапазоны входных параметров, при которых можно пользоваться решением модели со степенной реологией жидкости гидроразрыва.

Разработанные модели кончика трещины (разделы 2.1 и 3.1) позволяют точно описывать взаимодействие между физическими процессами, реализу-

ющимися вблизи фронта трещины, и определять их совокупное влияние на распространение трещины с конечной геометрией, например, радиальной трещины, трещины плоской деформации (KGD), трещины с EPKN геометрией или плоских трещин с более сложной геометрией, таких как Pseudo3D и Planar3D. Для этого предлагаемые решения для кончика трещины необходимо численно имплементировать в модуль, контролирующий рост конечной трещины и описывающий концевой элемент. В данном модуле сопоставляется раскрытие трещины в элементе, примыкающем к концевому, полученное из глобального решения и из модели кончика. Затем из сопоставления находится локальная скорость фронта трещины. В диссертации данная процедура была проделана в разделе 2.2 при построении модели радиальной трещины с утечками, зависящими от давления. В свою очередь, разработанные модели радиальной трещины (разделы 2.2, 3.2 и глава 4) можно применять для расчета эволюции трещины гидроразрыва на начальном этапе закачки и использовать для верификации расчетов численных симуляторов, позволяющих моделировать трещины гидроразрыва, распространяющиеся в неоднородных коллекторах и имеющих сложные геометрии. Необходимо отметить, что в численной модели, требующей верификации, должны быть учтены все физические процессы, которые заложены в моделях, описанных в диссертации, т. е. зависящие от давления утечки / ламинарно-турбулентное течение в канале трещины / вязкопластическая реология жидкости гидроразрыва.

В завершении данного раздела мы перечислим возможные направления для будущих исследований в области численного моделирования роста трещины гидроразрыва, связанные с темами, обсуждаемыми в диссертации. В последнее время приобрело популярность изучение поведения трещины гидроразрыва в проницаемом пласте после остановки закачки, включающее закрытие трещины и ее рецессию, т. е. продвижение фронта по направлению к источнику. В работах [126; 127] проводился анализ эволюции радиальной трещины. Пример трещины плоской деформации описан в работе [128], а в статье [129] выводятся приближенные автомодельные решения для KDG трещины и радиальной трещины, описывающие ее закрытие. В перечисленных работах массообмен между трещиной и пластом описывается утечками по закону Картера. Так как в данной задаче массообмен играет большую роль, во многом определяющую динамику закрытия и рецессии трещины, то рассмотрение массообмена, зависящего от давления, в задаче о поведении трещины после остановки закачки представ-

ляет интерес. Следующей важной проблемой является задача о естественной трещине гидроразрыва, формирующейся в океанической субдукционной плите в результате высвобождения связанной воды при протекании реакций дегидратации [130; 131]. Высвобожденная вода приводит к повышению порового давления, которое после превышения минимального обжимающего напряжения способствует образованию естественной трещины гидроразрыва. Приток поровой воды внутрь канала трещины является основным движущим механизмом ее эволюции до тех пор пока трещина не достигает критического размера и сила плавучести начинает оказывать на нее значительное воздействие. Мы полагаем, что в численной модели приток поровой жидкости должен описываться при помощи механизма массообмена, скорость которого зависит от давления внутри канала трещины. В разделе 2.1 мы упомянули ограничения модели кончика трещины с утечками, зависящими от давления, заключающиеся в применении одномерного механизма для описания массообмена и идентичность свойств жидкости гидроразрыва и поровой жидкости (данные ограничения также относятся и к модели радиальной трещины, описанной в разделе 2.2). Мы полагаем, что в будущих исследованиях возможен анализ влияния двумерного механизма обмена жидкостью между трещиной и пластом и отличия свойств жидкостей, присутствующих в модели, на распространение трещин с полубесконечной и конечной (радиальная, KGD, PKN) геометриями. Далее, мы полагаем, что представляет интерес изучение распространения трещины гидроразрыва под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды” с учетом шероховатости стенок канала трещины. Выполнение данного исследования возможно с помощью аппроксимации экспериментальных данных, связанных с течением “скользящей воды” в круглой трубе с шероховатыми стенками и приведенных в работе [102; 103]. Также можно отметить важную задачу о росте трещины гидроразрыва под влиянием безводной жидкости, которой может быть пена,  $\text{CO}_2$  в сверхкритическом состоянии, сжиженный  $\text{N}_2$ . Помимо неньютоновской реологии данные жидкости обладают высокой сжимаемостью [113]. Последней задачей, о которой мы хотели упомянуть, является моделирование распространения трещины гидроразрыва с учетом транспорта пропантa, т. е. движения суспензии жидкости с частицами пропантa внутри канала трещины, которая характеризуется неньютоновской реологией [132].

**Список сокращений и условных обозначений**

ГРП	гидроразрыв пласта
ЛУМР	линейно-упругая механика разрушения

## Список литературы

1. *Spence, D.* Magma-driven propagation of cracks / D. Spence, D. Turcotte // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 1985. — Т. 90, В1. — С. 575—580.
2. *Lister, J. R.* Buoyancy-driven fluid fracture: the effects of material toughness and of low-viscosity precursors / J. R. Lister // Journal of Fluid Mechanics. — 1990. — Т. 210. — С. 263—280.
3. *Rubin, A. M.* Propagation of magma-filled cracks / A. M. Rubin // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. — 1995. — Т. 23, № 1. — С. 287—336.
4. A review of mechanical models of dike propagation: Schools of thought, results and future directions / E. Rivalta [и др.] // Tectonophysics. — 2015. — Т. 638. — С. 1—42.
5. *Dontsov, E.* Propagation regimes of buoyancy-driven hydraulic fractures with solidification / E. Dontsov // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — Т. 797. — С. 1—28.
6. *Tsai, V. C.* A model for turbulent hydraulic fracture and application to crack propagation at glacier beds / V. C. Tsai, J. R. Rice // Journal of Geophysical Research: Earth Surface. — 2010. — Т. 115, F3.
7. *Veen, C. J. van der.* Fracture propagation as means of rapidly transferring surface meltwater to the base of glaciers / C. J. van der Veen // Geophysical Research Letters. — 2007. — Т. 34, № 1.
8. Reservoir stimulation. Т. 2 / М. J. Economides, К. G. Nolte [и др.]. — Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1989.
9. *Economides, M.* Unified fracture design: bridging the gap between theory and practice / М. Economides, R. Oligney, P. Valkó. — Orsa Press, 2002.
10. *Vishkai, M.* On multistage hydraulic fracturing in tight gas reservoirs: Montney Formation, Alberta, Canada / M. Vishkai, I. Gates // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — Т. 174. — С. 1127—1141.

11. *Osiptsov, A. A.* Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review / A. A. Osiptsov // Journal of petroleum science and engineering. — 2017. — Т. 156. — С. 513—535.
12. *Detournay, E.* Mechanics of hydraulic fractures / E. Detournay // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2016. — Т. 48. — С. 311—339.
13. A Comprehensive Review of Proppant Transport in Fractured Reservoirs: Experimental, Numerical, and Field Aspects / A. Isah [и др.] // Journal of Natural Gas Science and Engineering. — 2021. — С. 103832.
14. Impact of flowback dynamics on fracture conductivity / A. Osiptsov [и др.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2019. — С. 106822.
15. *Economides, M. J.* Petroleum production systems / M. J. Economides. — Pearson Education, 2013.
16. Widths of hydraulic fractures / T. Perkins, L. Kern [и др.] // Journal of Petroleum Technology. — 1961. — Т. 13, № 09. — С. 937—949.
17. Propagation of a vertical hydraulic fracture / R. Nordgren [и др.] // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1972. — Т. 12, № 04. — С. 306—314.
18. *Khristianovic, S.* Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids / S. Khristianovic, Y. Zheltov // Proc. 4th world petroleum congress, Rome. Т. 2. — 1955. — С. 579—586.
19. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. De Klerk [и др.] // Journal of Petroleum Technology. — 1969. — Т. 21, № 12. — С. 1—571.
20. *Abe, H.* Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks, 2 / H. Abe, L. Keer, T. Mura // Journal of Geophysical Research. — 1976. — Т. 81, № 35. — С. 6292—6298.
21. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry / A. Settari, M. P. Cleary [и др.] // SPE Production Engineering. — 1986. — Т. 1, № 06. — С. 449—466.
22. *Adachi, J. I.* Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers / J. I. Adachi, E. Detournay, A. P. Peirce // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2010. — Т. 47, № 4. — С. 625—639.

23. *Dontsov, E.* An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness / E. Dontsov, A. Peirce // Engineering Fracture Mechanics. — 2015. — T. 142. — C. 116–139.
24. *Lee, S. H. A. T.* Three-Dimensional Modeling of Hydraulic Fractures in Layered Media: Part I—Finite Element Formulations / S. H. A. T. Lee, J. Lee // J. Energy Resour. Technol. — 1990. — T. 112. — C. 1–9.
25. *Vandamme, L.* A three-dimensional hydraulic fracturing simulator / L. Vandamme, J. Curran // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 1989. — T. 28. — C. 909–927.
26. *Peirce, A.* An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures / A. Peirce, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — T. 197, № 33–40. — C. 2858–2885.
27. *Peirce, A.* Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm / A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2015. — T. 283. — C. 881–908.
28. *Dontsov, E.* A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics / E. Dontsov, A. Peirce // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2017. — T. 313. — C. 53–84.
29. *Lecampion, B.* Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore / B. Lecampion, J. Desroches // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2015. — T. 82. — C. 235–258.
30. *Suarez-Rivera, R.* Quantifying the Induced Stresses During Stacked, Multi-Stage, Multi- Well Completions, to Define Stimulation Sequencing and Optimize Pad Productivity / R. Suarez-Rivera, E. Dontsov, B. Abell // Proceedings of the Unconventional Resources Technology Conference, doi:10.15530/urtec-2019-892. — 2019.
31. Ultrafast Hydraulic Fracturing Model for Optimizing Cube Development / E. Dontsov [и др.] // Proceedings of the Unconventional Resources Technology Conference, doi:10.15530/urtec-2019-884. — 2019.

32. Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi [и др.] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2007. — Т. 44, № 5. — С. 739—757.
33. *Lecampion, B.* Numerical methods for hydraulic fracture propagation: a review of recent trends / B. Lecampion, A. Bunger, X. Zhang // Journal of natural gas science and engineering. — 2018. — Т. 49. — С. 66—83.
34. *Nguyen, H. T.* A review of PKN-type modeling of hydraulic fractures / H. T. Nguyen, J. H. Lee, K. A. Elraies // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2020. — С. 107607.
35. *Garagash, D. I.* Cohesive-zone effects in hydraulic fracture propagation / D. I. Garagash // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2019. — Т. 133. — С. 103727.
36. *Liu, D.* Propagation of a plane-strain hydraulic fracture accounting for a rough cohesive zone / D. Liu, B. Lecampion // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2021. — Т. 149. — С. 104322.
37. *Irvin, G. R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irvin // ASME J. Appl. Mech. — 1957. — Т. 24. — С. 361—364.
38. *Bunger, A. P.* Experimental validation of the tip asymptotics for a fluid-driven crack / A. P. Bunger, E. Detournay // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2008. — Т. 56, № 11. — С. 3101—3115.
39. The crack tip region in hydraulic fracturing / J. Desroches [и др.] // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. — 1994. — Т. 447, № 1929. — С. 39—48.
40. *Lenoach, B.* The crack tip solution for hydraulic fracturing in a permeable solid / B. Lenoach // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1995. — Т. 43, № 7. — С. 1025—1043.
41. *Rubin, A. M.* Tensile fracture of rock at high confining pressure: implications for dike propagation / A. M. Rubin // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 1993. — Т. 98, B9. — С. 15919—15935.
42. *Garagash, D.* The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium / D. Garagash, E. Detournay // J. Appl. Mech. — 2000. — Т. 67, № 1. — С. 183—192.

43. *Garagash, D. I.* Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off / D. I. Garagash, E. Detournay, J. I. Adachi // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — T. 669. — C. 260–297.
44. *Dontsov, E.* A non-singular integral equation formulation to analyse multiscale behaviour in semi-infinite hydraulic fractures / E. Dontsov, A. Peirce // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — T. 781.
45. *Detournay, E.* The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid / E. Detournay, D. Garagash // Journal of Fluid Mechanics. — 2003. — T. 494. — C. 1–32.
46. *Kovalyshen, Y.* Fluid-Driven Fracture in Poroelastic Medium : дис. ... канд. / Kovalyshen Y. — University of Minnesota, 2010.
47. *Dontsov, E.* Tip region of a hydraulic fracture driven by a laminar-to-turbulent fluid flow / E. Dontsov // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — T. 797.
48. *Lecampion, B.* Slickwater hydraulic fracture propagation: near-tip and radial geometry solutions / B. Lecampion, H. Zia // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — T. 880. — C. 514–550.
49. *Dontsov, E.* A semi-infinite hydraulic fracture with leak-off driven by a power-law fluid / E. Dontsov, O. Kresse // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — T. 837. — C. 210–229.
50. *Bessmertnykh, A.* Semi-Infinite Hydraulic Fracture Driven by a Sequence of Power-Law Fluids / A. Bessmertnykh, E. Dontsov, R. Ballarini // Journal of Engineering Mechanics. — 2021. — T. 147, № 10. — C. 04021064.
51. *Moukhtari, F.-E.* A semi-infinite hydraulic fracture driven by a shear-thinning fluid / F.-E. Moukhtari, B. Lecampion // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — T. 838. — C. 573–605.
52. *Bessmertnykh, A. O.* A Semi-Infinite Hydraulic Fracture Driven by a Herschel–Bulkley Fluid / A. O. Bessmertnykh, E. V. Dontsov // Journal of Applied Mechanics. — 2019. — T. 86, № 12.
53. *Bessmertnykh, A.* The effects of proppant on the near-front behavior of a hydraulic fracture / A. Bessmertnykh, E. Dontsov, R. Ballarini // Engineering Fracture Mechanics. — 2020. — C. 107110.

54. *Dontsov, E.* An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off / E. Dontsov // Royal Society open science. — 2016. — Т. 3, № 12. — С. 160737.
55. *Dontsov, E.* An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off / E. Dontsov // International Journal of Fracture. — 2017. — Т. 205, № 2. — С. 221—237.
56. *Savitski, A.* Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions / A. Savitski, E. Detournay // International journal of solids and structures. — 2002. — Т. 39, № 26. — С. 6311—6337.
57. *Bunger, A. P.* Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off / A. P. Bunger, E. Detournay, D. I. Garagash // International journal of fracture. — 2005. — Т. 134, № 2. — С. 175—190.
58. *Bunger, A. P.* Early-time solution for a radial hydraulic fracture / A. P. Bunger, E. Detournay // Journal of engineering mechanics. — 2007. — Т. 133, № 5. — С. 534—540.
59. *Madyarova, M.* Propagation of a penny-shaped hydraulic fracture in elastic rock : дис. ... канд. / Madyarova M. — Master's thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 2004.
60. Fluid-driven fracture in a poroelastic rock / Y. Kovalyshen, E. Detournay [и др.] // ISRM International Conference for Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing. — International Society for Rock Mechanics, Rock Engineering. 2013.
61. *Dontsov, E.* Modeling planar hydraulic fractures driven by laminar-to-turbulent fluid flow / E. Dontsov, A. Peirce // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — Т. 128. — С. 73—84.
62. *Zolfaghari, N.* Numerical model for a penny-shaped hydraulic fracture driven by laminar/turbulent fluid in an impermeable rock / N. Zolfaghari, A. Bunger // International Journal of Solids and Structures. — 2019. — Т. 158. — С. 128—140.
63. Fluid velocity based simulation of hydraulic fracture: a penny shaped model—part I: the numerical algorithm / D. Peck [и др.] // Meccanica. — 2018. — Т. 53, № 15. — С. 3615—3635.

64. Fluid velocity based simulation of hydraulic fracture—a penny shaped model. Part II: new, accurate semi-analytical benchmarks for an impermeable solid / D. Peck [и др.] // *Meccanica*. — 2018. — Т. 53, № 15. — С. 3637—3650.
65. *Liu, D.* Propagation of a fluid-driven fracture with fracture length dependent apparent toughness / D. Liu, B. Lecampion, D. I. Garagash // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2019. — Т. 220. — С. 106616.
66. *Viesca, R. C.* Numerical methods for coupled fracture problems / R. C. Viesca, D. I. Garagash // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 2018. — Т. 113. — С. 13—34.
67. *Kanin, E. A.* The near-tip region of a hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off and leak-in / E. A. Kanin, D. I. Garagash, A. A. Osiptsov // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2020. — Т. 892. — DOI: 10.1017/jfm.2020.193.
68. A radial hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off / E. A. Kanin [и др.] // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 2020. — Т. 143. — С. 104062. — DOI: 10.1016/j.jmps.2020.104062.
69. *Kanin, E.* Turbulent flow effects in a slickwater fracture propagation in permeable rock / E. Kanin, D. Garagash, A. Osiptsov // *ECMOR XVII*. Т. 2020. — European Association of Geoscientists & Engineers. 2020. — С. 1—18. — DOI: 10.3997/2214-4609.202035216.
70. *Kanin, E.* Turbulent Flow Effects on Propagation of Radial Hydraulic Fracture in Permeable Rock / E. Kanin, D. Garagash, A. Osiptsov // *Mechanics of Hydraulic Fracturing*. — John Wiley & Sons, Ltd, 2022. — Гл. 10. С. 107—126. — DOI: 10.1002/9781119742487.ch10.
71. A radial hydraulic fracture driven by a Herschel–Bulkley fluid / E. Kanin [и др.] // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. — 2021. — Т. 295. — С. 104620. — DOI: 10.1016/j.jnnfm.2021.104620.
72. Mathematical analysis in the mechanics of fracture / J. R. Rice [и др.] // *Fracture: an advanced treatise*. — 1968. — Т. 2. — С. 191—311.
73. *Batchelor, G. K.* An Introduction to Fluid Dynamics / G. K. Batchelor. — Cambridge UK : Cambridge University Press, 1967.

74. *Carter, E.* Optimum fluid characteristics for fracture extension / E. Carter // Drilling and Production Practices / под ред. G. C. Howard, C. R. Fast. — 1957. — С. 261—270.
75. *Kanninen, M. F.* Advanced fracture mechanics / M. F. Kanninen, C. L. Popelar. — 1985.
76. *Bilby, B.* Dislocations and the theory of fracture / B. Bilby, J. Eshelby // Fracture, an Advanced Treatise. Т. I / под ред. H. Liebowitz. — New York NY : Academic Press, 1968. — Гл. 2. С. 99—182.
77. *Collins, R. E.* Flow of fluids through porous materials / R. E. Collins. — 1976.
78. *Arin, K.* Penny-shaped crack in an elastic layer bonded to dissimilar half spaces / K. Arin, F. Erdogan // International Journal of Engineering Science. — 1971. — Т. 9, № 2. — С. 213—232.
79. *Cleary, M.* Numerical simulation of unsteady fluid flow and propagation of a circular hydraulic fracture / M. Cleary, S. Wong // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 1985. — Т. 9, № 1. — С. 1—14.
80. *Carrier, B.* Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model / B. Carrier, S. Granet // Engineering fracture mechanics. — 2012. — Т. 79. — С. 312—328.
81. *Sarris, E.* The influence of the cohesive process zone in hydraulic fracturing modelling / E. Sarris, P. Papanastasiou // International Journal of Fracture. — 2011. — Т. 167, № 1. — С. 33—45.
82. *Golovin, S. V.* Influence of pore pressure on the development of a hydraulic fracture in poroelastic medium / S. V. Golovin, A. N. Baykin // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2018. — Т. 108. — С. 198—208.
83. Fracture toughness anisotropy in shale / M. R. Chandler [и др.] // J. Geophys. Res. — 2016. — Т. 121, № 3. — С. 1706—1729.
84. Investigation of pore structure and fractal characteristics of organic-rich shale reservoirs: A case study of Lower Cambrian Qiongzhusi formation in Malong block of eastern Yunnan Province, South China / A. Li [и др.] // Marine and Petroleum Geology. — 2016. — Т. 70. — С. 46—57.

85. *Magara, K.* Comparison of porosity-depth relationships of shale and sandstone / K. Magara // J. Petroleum Geol. — 1980. — Т. 3, № 2. — С. 175—185.
86. *Manger, G. E.* Porosity and bulk density of sedimentary rocks : тех. отч. / G. E. Manger ; USGS. — 1963. — № 1144.
87. *Walsh, J. B.* Effect of pore pressure and confining pressure on fracture permeability / J. B. Walsh // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. — 1981. — Т. 18, № 5. — С. 429—435.
88. *Detournay, E.* Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks / E. Detournay // International Journal of Geomechanics. — 2004. — Т. 4, № 1. — С. 35—45.
89. *Barati, R.* A review of fracturing fluid systems used for hydraulic fracturing of oil and gas wells / R. Barati, J.-T. Liang // Journal of Applied Polymer Science. — 2014. — Т. 131, № 16.
90. *Nilson, R.* Gas-driven fracture propagation / R. Nilson. — 1981.
91. *Emerman, S. H.* Transport of magma and hydrothermal solutions by laminar and turbulent fluid fracture / S. H. Emerman, D. Turcotte, D. Spence // Physics of the earth and planetary interiors. — 1986. — Т. 41, № 4. — С. 249—259.
92. *Lister, J. R.* Fluid-mechanical models of crack propagation and their application to magma transport in dykes / J. R. Lister, R. C. Kerr // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 1991. — Т. 96, B6. — С. 10049—10077.
93. Solution for a PKN hydraulic fracture driven by turbulent fluid with large leakoff / M. Kano [и др.] // Hydraulic Fracturing Journal. — 2015. — Т. 2, № 1. — С. 34—38.
94. *Zia, H.* Propagation of a height contained hydraulic fracture in turbulent flow regimes / H. Zia, B. Lecampion // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — Т. 110. — С. 265—278.
95. *Zolfaghari, N.* Blade-shaped hydraulic fracture driven by a turbulent fluid in an impermeable rock / N. Zolfaghari, C. R. Meyer, A. P. Bungler // Journal of Engineering Mechanics. — 2017. — Т. 143, № 11. — С. 04017130.

96. *Tsai, V. C.* Modeling turbulent hydraulic fracture near a free surface / V. C. Tsai, J. R. Rice // Journal of applied mechanics. — 2012. — T. 79, № 3.
97. *Zolfaghari, N.* Solution for a plane strain rough-walled hydraulic fracture driven by turbulent fluid through impermeable rock / N. Zolfaghari, E. Dontsov, A. Bungler // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2018. — T. 42, № 4. — C. 587–617.
98. *Zolfaghari, N.* Approximate semi-analytical solution for a penny-shaped rough-walled hydraulic fracture driven by turbulent fluid in an impermeable rock / N. Zolfaghari, A. Bungler // International Journal of Solids and Structures. — 2018. — T. 143. — C. 144–154.
99. *Dontsov, E.* Modeling planar hydraulic fractures driven by laminar-to-turbulent fluid flow / E. Dontsov, A. Peirce // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — T. 128. — C. 73–84.
100. Review of friction reducers used in slickwater fracturing fluids for shale gas reservoirs / B. Yang [и др.] // Journal of Natural Gas Science and Engineering. — 2019. — T. 62. — C. 302–313.
101. *Nieuwstadt, F. T.* Turbulence: introduction to theory and applications of turbulent flows / F. T. Nieuwstadt, J. Westerweel, B. J. Boersma. — Springer, 2016.
102. *Virk, P.* Drag reduction in rough pipes / P. Virk // Journal of fluid mechanics. — 1971. — T. 45, № 2. — C. 225–246.
103. *Virk, P. S.* Drag reduction fundamentals / P. S. Virk // AIChE Journal. — 1975. — T. 21, № 4. — C. 625–656.
104. *Brill, J. P.* Multiphase flow in wells. T. 17 / J. P. Brill, H. K. Mukherjee. — Society of Petroleum Engineers, 1999.
105. *Blasius, H.* Das aehnlichkeitsgesetz bei reibungsvorgängen in flüssigkeiten / H. Blasius // Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. — Springer, 1913. — C. 1–41.
106. *Zia, H.* Pyfrac: A planar 3d hydraulic fracture simulator / H. Zia, B. Lecampion // Computer Physics Communications. — 2020. — C. 107368.

107. Complex fluids and hydraulic fracturing / A. C. Barbati [и др.] // Annual review of chemical and biomolecular engineering. — 2016. — Т. 7. — С. 415—453.
108. *Adachi, J. I.* Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock / J. I. Adachi, E. Detournay // Engineering Fracture Mechanics. — 2008. — Т. 75, № 16. — С. 4666—4694.
109. The impact of fluid yield stress on hydraulic fracture propagation / E. Kanin [и др.] // 82nd EAGE Annual Conference & Exhibition. Т. 2021. — European Association of Geoscientists & Engineers. 2021. — С. 1—5.
110. *Garagash, I. A.* Dynamic bridging of proppant particles in a hydraulic fracture / I. A. Garagash, A. A. Osiptsov, S. A. Boronin // International Journal of Engineering Science. — 2019. — Т. 135. — С. 86—101.
111. *Gu, M.* Rheology of polymer-free foam fracturing fluids / M. Gu, K. Mohanty // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2015. — Т. 134. — С. 87—96.
112. *Faroughi, S. A.* The rheological behavior of energized fluids and foams with application to hydraulic fracturing / S. A. Faroughi, A. J.-C. J. Pruvot, J. McAndrew // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2018. — Т. 163. — С. 243—263.
113. *Fu, C.* Waterless fluids in hydraulic fracturing—A review / C. Fu, N. Liu // Journal of Natural Gas Science and Engineering. — 2019. — Т. 67. — С. 214—224.
114. *Stickel, J. J.* Fluid mechanics and rheology of dense suspensions / J. J. Stickel, R. L. Powell // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2005. — Т. 37. — С. 129—149.
115. *Bird, R. B.* Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics / R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager. — 1987.
116. *Cross, M. M.* Rheology of non-Newtonian fluids: a new flow equation for pseudoplastic systems / M. M. Cross // Journal of colloid science. — 1965. — Т. 20, № 5. — С. 417—437.
117. *Carreau, P. J.* Rheological equations from molecular network theories / P. J. Carreau // Transactions of the Society of Rheology. — 1972. — Т. 16, № 1. — С. 99—127.

118. *Lavrov, A.* Flow of truncated power-law fluid between parallel walls for hydraulic fracturing applications / A. Lavrov // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2015. — T. 223. — C. 141–146.
119. *Brodkey, R. S.* The phenomena of fluid motions / R. S. Brodkey, Brodkey. — 1967.
120. *Herschel, W.* Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions / W. Herschel, R. Bulkley // Am. Soc. Test Proc. T. 26. — 1926. — C. 621–633.
121. *Bingham, E. C.* Fluidity and plasticity. T. 2 / E. C. Bingham. — McGraw-Hill, 1922.
122. *Garagash, D. I.* Equilibrium of a pressurized plastic fluid in a wellbore crack / D. I. Garagash, E. Sarvaramini // International journal of solids and structures. — 2012. — T. 49, № 1. — C. 197–212.
123. *Wrobel, M.* On the application of simplified rheological models of fluid in the hydraulic fracture problems / M. Wrobel // International Journal of Engineering Science. — 2020. — T. 150. — C. 103275.
124. *Wrobel, M.* On the influence of fluid rheology on the hydraulic fracture evolution / M. Wrobel, G. Mishuris, P. Papanastasiou // arXiv preprint arXiv:2007.04208. — 2020.
125. *Pereira, L.* A plane-strain hydraulic fracture driven by a shear-thinning Carreau fluid / L. Pereira, B. Lecampion // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2021.
126. *Möri, A.* Arrest of a radial hydraulic fracture upon shut-in of the injection / A. Möri, B. Lecampion // International Journal of Solids and Structures. — 2021. — T. 219. — C. 151–165.
127. *Peirce, A.* The arrest and recession dynamics of a deflating radial hydraulic fracture in a permeable elastic medium / A. Peirce // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2022. — C. 104926.
128. *Peirce, A.* The arrest and recession dynamics of a deflating hydraulic fracture in a permeable elastic medium in a state of plane strain / A. Peirce, E. Detournay // International Journal of Solids and Structures. — 2022. — C. 111906.

129. *Peirce, A.* Sunset similarity solution for a receding hydraulic fracture / A. Peirce, E. Detournay // Journal of Fluid Mechanics. — 2022. — Т. 944.
130. Seismic evidence for overpressured subducted oceanic crust and megathrust fault sealing / P. Audet [и др.] // Nature. — 2009. — Т. 457, № 7225. — С. 76–78.
131. Slab morphology in the Cascadia fore arc and its relation to episodic tremor and slip / P. Audet [и др.] // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2010. — Т. 115, B4.
132. *Lecampion, B.* Confined flow of suspensions modelled by a frictional rheology / B. Lecampion, D. I. Garagash // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Т. 759. — С. 197–235.

## Список рисунков

1.1	Модель полубесконечной трещины (концевого элемента) с классическим набором предположений. . . . .	22
1.2	Модель радиальной трещины с классическим набором предположений. . . . .	25
2.1	Схематическое изображение модели концевого элемента трещины ГРП. В модели учитывается массообмен между трещиной и резервуаром, который зависит от давления внутри канала трещины. . . . .	33
2.2	Параметрическое пространство (пирамида $m\tilde{m}\tilde{o}k$ ) и ее грани, характеризующиеся одним механизмом диссипации энергии или одним механизмом баланса жидкости. Траектории решения параметризуются безразмерными коэффициентами утечек $\chi$ и притока $\zeta$ , а также их отношением $\psi$ . . . . .	37
2.3	Решение для ребра $\tilde{m}\tilde{o}$ : раскрытие трещины (слева) и эффективное давление (справа) в зависимости от расстояния до кончика трещины, изображенные в надлежащем масштабировании (таблица 3). Узловые решения, выполняющиеся в ближнем и дальнем поле также изображены на графиках. . . . .	44
2.4	Решение для грани "трещина-утечки" $m\tilde{m}k$ ( $\zeta = 0$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании $mk$ для различных значений безразмерного коэффициента утечек $\chi$ . Решение представлено в явном виде (а) и в нормированной при помощи $m$ асимптотики форме (б). Решения для ребер $\tilde{m}k$ , $m\tilde{m}$ , а также для узлов $k$ , $m$ , $\tilde{m}$ представлены на графиках (б). . . . .	46
2.5	Решение для грани "трещина-приток" $m\tilde{o}k$ ( $\chi = 0$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании $mk$ для различных значений безразмерного коэффициента притока $\zeta$ : решения (а) в явном виде и (б) в нормированной при помощи $m$ асимптотики форме (б). Решения для узлов $k$ и $m$ нанесены на графиках (б). . . . .	47
2.6	Решение для грани "массообмен" $\tilde{m}\tilde{o}k$ ( $\chi = \infty$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании $\tilde{m}k$ для различных значений безразмерного коэффициента притока $\zeta$ : решения (а) в явном виде и (б) в нормированной при помощи $\tilde{m}$ асимптотики форме (б). Решения для ребер $\tilde{m}\tilde{o}$ , $\tilde{o}k$ и узлов $k$ , $\tilde{m}$ и $\tilde{o}$ нанесены на графиках (б). . . . .	48

- 2.7 Решение для грани "вязкость"  $m\tilde{m}\tilde{o}$  ( $\chi = \infty$ ) в виде профилей раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), представленных в масштабировании  $m\tilde{o}$  для различных значений безразмерного коэффициента притока  $\psi = \chi/\zeta$ : решения (а) в явном виде и (b) в нормированной при помощи  $m$  асимптотики форме (b). Решения для ребер  $\tilde{m}\tilde{o}$ ,  $m\tilde{m}$  и узлов  $\tilde{o}$ ,  $m$  и  $\tilde{m}$  нанесены на графиках (b). . . . . 49
- 2.8 Профили раскрытия (слева) и эффективного давления (справа) изображены в  $mk$  масштабировании для фиксированного отношения  $\chi/\zeta^3 = 1$  и различных значений  $\chi$ : (а)  $\chi = 0.1$ ,  $\zeta = 0.46$ , (b)  $\chi = 1$ ,  $\zeta = 1$ , (с)  $\chi = 10$ ,  $\zeta = 2.15$ . Соответствующие решения для случая утечек по Картеру ( $\zeta = 0$ ) изображены черной пунктирной линией в целях сравнения. . . . . 50
- 2.9 Профили раскрытия (слева) и эффективного давления (справа), изображенные на рисунке 2.8, нормированы при помощи асимптотики  $m$ , реализующейся в дальнем поле. Асимптотические разложения вблизи узловых решений в ближнем, среднем ( $\chi = 10$ ) и дальнем поле изображены цветными пунктирными линиями . . . . . 51
- 2.10 Профили раскрытия и давления, нормализованные узловым решением  $m$  для следующих случаев:  $\chi = 100$ ,  $\zeta = 4.64$  и  $\chi = 1000$ ,  $\zeta = 10$ . . . . . 52
- 2.11 Профили раскрытия и давления в  $mk$  масштабировании для  $\chi = 100$  и набора значений  $\zeta$ :  $\zeta = 0, 0.27, 0.58, 1.26, 2.71, 5.85, 12.6$ . Пунктирной линией изображено решение для случая утечек по Картеру. . . . . 53
- 2.12 Параметрический многоугольник в координатах  $\chi$ ,  $\chi/\zeta^3$ , получен варьированием размерных параметров в диапазонах, соответствующих процедуре гидроразрыва в целях увеличения нефтеотдачи. Символами обозначены частные случаи (песчаник vs низкопроницаемый коллектор, ГРП на основе скользкой воды vs водный ГРП (таблица 5). . . . . 55
- 2.13 Карты режимов (слева) с границами применимости предельных решений и карты с индексом зависимости массообмена от давления (справа), наряду с характерными масштабами длины ( $\lambda, \ell_d, x_C, x_S$ ), в координатах безразмерное расстояние до кончика трещины  $x/\ell_{mk}$  – безразмерный коэффициент утечек  $\chi$  для фиксированных значений отношения  $\chi/\zeta^3$ :  $\chi/\zeta^3 = 0.1$  (а), 1 (b), 10 (с), и 1000 (d). На оси для  $\chi$  отмечен диапазон, соответствующий типичным промысловым случаям. . . . . 58

- 2.14 Модель радиальной трещины гидроразрыва с массообменом между трещиной и окружающим проницаемым коллектором, скорость которого зависит от давления внутри канала трещины. . . . . 62
- 2.15 Схематическое изображение дискретизации области трещины, примыкающей к фронту. . . . . 67
- 2.16 Численное решение задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва в терминах радиуса  $R(t)$ , максимального раскрытия  $w(0, t)$ , давления на расстоянии половины радиуса от источника  $p(R(t)/2, t)$  и эффективности  $\eta(t)$ , зависящих от времени  $t$ . Решения посчитаны для наборов входных параметров (2.27) и (2.28). Синие линии соответствуют случаю вязкости  $\mu = 1$  сПз, а зеленые линии – для  $\mu = 10$  сПз. Решение для радиальной трещины с утечками, зависящим от давления (PDL, pressure-dependent leak-off), изображено сплошными линиями, а пунктирные линии используются для решения с утечками по закону Картера. . . . . 71
- 2.17 Параметрическое пространство задачи о радиальной трещине с утечками по закону Картера в координатах  $(\tau, \varphi)$  (а) и его концептуальное представление (б). На рисунке (а) изображены границы применимости предельных режимов  $M$  (синяя штриховая линия),  $K$  (черная штриховая линия),  $\tilde{M}$  (зеленая штриховая линия) и  $\tilde{K}$  (пурпурная штриховая линия). На рисунке (а) также изображены траектории решений для различных значений безразмерного числа утечек  $\varphi$ . . . . . 73
- 2.18 Область значений безразмерных параметров  $\varphi$  и  $\psi$ , соответствующих типичным промышленным случаям, изображена синим цветом на рисунке (а). Оранжевый и зеленый многоугольники на рисунке (а) соответствуют случаям с максимальным и минимальным значением проницаемости. Мы также выделяем области (шестиугольники), соответствующие максимальному и минимальному значениям трещиностойкости синим и красным цветами (пунктирная линия в случае максимальной проницаемости, а штрих-пунктирная линия в случае минимальной проницаемости). На рисунке (б) изображена внутренняя структура шестиугольника с учетом изменения каждого параметра. Черными квадратными и круглыми маркерами отмечены случаи, рассмотренные в разделе 2.2.3.1, соответствующие значениям вязкости жидкости гидроразрыва / поровой жидкости  $\mu = 1$  сПз и  $\mu = 10$  сПз. . . . . 74

- 2.19 Решение задачи для случая  $\psi = 10^{-5}$  и различных значений  $\varphi$  в терминах безразмерного максимального раскрытия, безразмерного эффективного давления на расстоянии половины радиуса от источника, безразмерного радиуса трещины и эффективности, зависящих от безразмерного времени  $\tau$ . Сплошные линии используются для изображения решения задачи о распространении трещины с массообменом, зависящим от давления. Штриховые линии обозначают решение с утечками по закону Картера. . . . . 78
- 2.20 Относительные разницы между значениями параметров трещины в модели с массообменом, зависящим от давления, и в модели с утечками по закону Картера, изображенные в координатах  $(\tau, \varphi)$  для случая  $\psi = 10^{-5}$ . Границы применимости предельных решений в модели с утечками по закону Картера изображены цветными пунктирными линиями [54]. . . . . 79
- 2.21 Решение задачи для случая  $\psi = 10^{-1}$  и различных значений  $\varphi$  в терминах безразмерного максимального раскрытия, безразмерного эффективного давления на расстоянии половины радиуса от источника, безразмерного радиуса трещины и эффективности, зависящих от безразмерного времени  $\tau$ . Сплошные линии используются для изображения решения задачи о распространении трещины с массообменом, зависящим от давления. Штриховые линии обозначают решение с утечками по закону Картера. . . . . 80
- 2.22 Относительные разницы между значениями параметров трещины в модели с массообменом, зависящим от давления, и в модели с утечками по закону Картера, изображенные в координатах  $(\tau, \varphi)$  для случая  $\psi = 10^{-1}$ . Границы применимости предельных решений в модели с утечками по закону Картера изображены цветными пунктирными линиями [54]. . . . . 81

- 2.23 (а) Значения параметра  $\psi$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau$  и параметра утечек  $\varphi$ , при которых массообмен, зависящий от давления, вносит вклад  $\alpha = 0.05$  в баланс жидкости. Значения  $\psi_\alpha(\tau, \varphi)$  рассчитаны на приближенного решения для радиальной трещины с утечками по закону Картера [54]. Границы применимости предельных решений в модели радиальной трещины с утечками по закону Картера изображены цветными штриховыми линиями на рисунке (а) в целях сравнения. Набор изолиний  $\psi_\alpha = \{10^{-9}, 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 10^1\}$  представлен серым/черным цветом. Область  $\psi_\alpha(\tau, \varphi) \geq \psi$ , ограниченная определенной изолинией и находящаяся по направлению градиента  $\psi_\alpha$  (указано стрелками) соответствует зоне, где утечки по закону Картера хорошо описывают процесс массообмена для рассматриваемого значения параметра  $\psi$ . (б) Изменения  $\psi_\alpha$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau$  для различных значений параметра утечек  $\varphi = \{10^{-24}, 10^{-6}, 10^6\}$ , посчитанные при помощи решения для радиальной трещины с утечками по закону Картера [54] (черные сплошные линии). На рисунке (б) также представлены аналогичные кривые, посчитанные при помощи узловых решений [56; 57; 59] (цветные штриховые линии). . . . . 83
- 3.1 Схематическое изображение модели кончика трещины, распространяющейся под влиянием ламинарно-турбулентного течения. . . . . 91
- 3.2 Коэффициент сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса в традиционных координатах (а) и в координатах Прандля-Кармана (б). Ламинарная ветвь изображена синим цветом, MDR асимптота (3.3) и ее аппроксимация (3.4) зеленым и красным цветами, соответственно. Корреляция Браузиуса для турбулентного течения ньютоновской жидкости в трубе с гладкими стенками изображена оранжевым цветом. Штриховые линии используются для изображения продолжением ламинарной ветви и аппроксимации MDR асимптоты за пределами их точки пересечения. . . . . 93

- 3.3 Решение задачи для случая  $\chi = 500$ ,  $\mathcal{R} = 100$  в терминах нормализованных профилей раскрытия (a) и эффективного давления (b) в  $mk$  масштабировании. На рисунках (c) и (d) представлены аналогичные профили, нормализованные на асимптоту дальнего поля ( $t$  узловое решение). Аналогичное решение для случая непроницаемого резервуара ( $\chi = 0$ ) представлено черной штриховой линией. Ламинарное решение для проницаемого резервуара ( $\chi = 500$ ) изображено черной пунктирной линией. На рисунках (c) и (d), узловые решения показаны цветными штриховыми линиями. На рисунке (d) асимптотическое разложение для узла  $k$  (красная штриховая линия) нарисовано дважды: для случая с и без утечек. Красный маркер отмечает местонахождение точки, в которой происходит трансформация режима течения. 100
- 3.4 Solutions for the fracture opening in the  $mk$ -scaling corresponding to (a):  $\mathcal{R} = 100$  and  $\chi = 0, 10, 10^2, 10^3$  and (b):  $\chi = 100$  and  $\mathcal{R} = 1, 10^2, 10^4, 10^6$ . . . . . 101
- 3.5 Расстояние до кончика трещины, на котором происходит смена режима течения из ламинарного в турбулентный, в зависимости от безразмерных параметров  $\chi$  и  $\mathcal{R}$ . Карта со значениями  $\Lambda(\chi, \mathcal{R})$  изображена на рисунке (a). Сечения карты вдоль осей изображены на рисунках (b) и (c): на иллюстрации (b) зафиксировано характеристическое число Рейнольдса, а на иллюстрации (c) зафиксирован коэффициент утечек. Цветные штриховые линии используются для асимптотик, полученных аналитически:  $\Lambda(\chi \gg 1, \mathcal{R} = \text{const})$  на рисунке (b) и  $\Lambda(0, \mathcal{R})$  на рисунке (c). . . . . 103
- 3.6 Карты режимов, изображающие границы применимости предельных (узловых) решений, в координатах  $(x/\ell_{mk}, \mathcal{R})$  для различных значений безразмерного коэффициента утечек  $\chi$ . Расстояние от точки трансформации режима течения внутри канала трещины до фронта  $\lambda$  отмечено черной штриховой линией. Границы важности учета утечек  $x_S$  и правильности аппроксимации MDR асимптоты  $x_B$  изображены черной штрих-пунктирной и пунктирной линиями, соответственно. . . . . 106
- 3.7 Модель радиальной трещины с ламинарно-турбулентным течением внутри канала и утечками в окружающую проницаемую горную породу. . . . . 109

- 3.8 Графики (а)-(с) показывают решение задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва с ламинарно-турбулентным течением внутри канала в терминах динамики радиуса  $R(t)$ , максимального раскрытия  $w(0, t)$  и эффективного давления на расстоянии 10 см от скважины  $p(0.1, t)$  в зависимости от времени. Решения нормализованы на характеристики трещины в ламинарном случае (черная сплошная линия). График (d) изображает длину части трещины  $\lambda(t)$ , занимаемой ламинарным режимом течения и нормализованную на величину радиуса трещины  $R(t)$  (зона с ламинарным течением расположена внутри интервала длины  $\lambda$ , примыкающим к фронту трещины, рисунок 3.7). Характеристики трещины, распространяющейся под влиянием “скользящей воды” (чистой воды) изображены синим (красным) цветом: для непроницаемого резервуара сплошными линиями и штриховыми для проницаемой горной породы. . . . . 116
- 3.9 Решение задачи о росте радиальной трещины, распространяющейся под влиянием ламинарного потока внутри канала: динамика радиуса трещины  $R(t)$ , (а), максимального раскрытия  $w(0, t)$ , (b), и эффективного давления  $p(0.1, t)$  на расстоянии  $r = 0.1 \text{ m}$  от источника. Сплошные (штриховые) линии обозначают случай непроницаемой (проницаемой) горной породы. . . . . 117
- 3.10 Профили раскрытия (верхний ряд) и эффективного давления (нижний ряд) в зависимости от расстояния от источника  $r$  для моментов времени  $t = \{1, 10, 100\}$  с. Графики (а) и (с) относятся к случаю непроницаемой горной породы, в то время как графики (b) и (d) отображают результаты для случая проницаемого коллектора. Решение для “скользящей воды” (чистой воды) нарисованы сплошными синими (красными) линиями. Ламинарное решение представлено черной прерывистой линией. . . . . 120

- 3.11 Решение задачи для радиальной трещины, распространяющейся в непроницаемой горной породе ( $\varphi = 0$ ) под воздействием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды”. На графике (а) представлена карта режимов в координатах  $(\tau, \mathcal{R})$ , на которой цветом закрашены области применимости предельных решений задачи. Также на рисунке (а) изображены две временные границы: (i) момент времени  $\tau_0(\mathcal{R})$  (черная штриховая линия), до которого граница между ламинарным и турбулентным режимами располагается на малом расстоянии от кончика трещины, т. е. зона трещины с ламинарным течением занимает малую часть трещины  $\lambda < \lambda_0 = R/25$  при  $\tau < \tau_0(\mathcal{R})$ ; (ii) момент времени  $\tau_\infty(\mathcal{R})$  (черная пунктирная линия), начиная с которого различие между геометриями трещины (радиус и максимальное раскрытие) в ламинарно-турбулентном и ламинарном случаях пренебрежимо мало. Различные характеристики трещины (радиус  $\gamma(\tau)$ , максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$  и давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$ ) нормализованные  $M$  узловым решением изображены на графиках (b)-(d) сплошными черными линиями для различных значений характеристического числа Рейнольдса  $\mathcal{R} = \{1, 10^2, 10^4, 10^6\}$ . Ламинарное решение изображено серой штриховой линией. Цветными пунктирными линиями мы изобразили узловые решения. На рисунке (а), серые штрихпунктирные линии изображают траектории решений с постоянным  $\mathcal{R}$ , изображенные на рисунках (b)-(d). . . . . 131
- 3.12 Параметрическое пространство в модели радиальной трещины, распространяющейся в проницаемом пласте ( $\varphi > 0$ ) под влиянием ламинарного течения ( $\mathcal{R} = 0$ ). Карты режимов изображены в координатах  $(\tau, \varphi)$ . Области применимости предельных решений закрашены различными цветами. Серые штрихпунктирные линии изображают траектории решений, которые обсуждаются в текущем разделе. . . . . 134

- 3.13 Параметрическое пространство в модели радиальной трещины, распространяющейся в пронизаемом пласте ( $\varphi > 0$ ) под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды”. Карты режимов изображены в координатах  $(\tau, \varphi)$  для различных значений характеристического числа Рейнольдса:  $\mathcal{R} = \{1, 10^2, 10^4, 10^6\}$ . Области применимости предельных решений закрашены различными цветами. В целях сравнения мы добавили на графики границы режимов, соответствующих ламинарной модели, цветными прерывистыми линиями. Черная штриховая линия показывает момент времени  $\tau_0(\mathcal{R}, \varphi)$ , до которого граница между ламинарным и турбулентным режимами располагается на малом расстоянии от кончика трещины, т. е. зона трещины с ламинарным течением занимает малую часть трещины  $\lambda < \lambda_0 = R/25$  при  $\tau < \tau_0(\mathcal{R}, \varphi)$ . Черная пунктирная линия изображает момент времени  $\tau_\infty(\mathcal{R}, \varphi)$ , начиная с которого различие между геометриями трещины (радиус и максимальное раскрытие) в ламинарно-турбулентном и ламинарном случаях пренебрежимо мало. На рисунке (b) серые штрихпунктирные линии изображают траектории решений, которые обсуждаются в текущем разделе. . . . . 135
- 3.14 Зависящие от времени характеристики радиальной трещины, распространяющейся в пронизаемом пласте под влиянием ламинарно-турбулентного течения “скользящей воды”: (a) радиус  $\gamma(\tau)$ , (b) максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , (c) давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$ , и (d) эффективность  $\eta(\tau)$ . На графиках (a) – (c) свойства трещины нормализованы на аналогичные характеристики из узлового решения  $M$ . Представленные решения соответствуют  $\mathcal{R} = 10^2$  и  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-5}, 10^5, 10^{10}\}$ . Ламинарные решения изображены серыми штриховыми линиями. Узловые решения показаны цветными пунктирными линиями. На рисунке (a) предельные решения, в которых доминируют утечки  $(\tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{T})$ , нарисованы одним цветом, так как динамика радиуса, соответствующая этим режимам описывается одинаковой формулой (3.42). . . 136
- 4.1 Модель радиальной трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли. . . . . 140

- 4.2 На рисунке (а) представлена зависимость  $\lambda_m$  от индекса текучести  $n$ . Красная точка соответствует значению  $\lambda_m(1)$ , полученному в работе [54]. На рисунке (b) изображены относительные ошибки при оценке радиуса, раскрытия и давления в  $M$  предельном решении при помощи упрощенного подхода (раздел 4.2.2). . . . . 153
- 4.3 Профили раскрытия (верхний ряд) и эффективного давления (нижний ряд) в предельных режимах распространения:  $M$  (рисунки (а) и (d)),  $\tilde{M}$  (рисунки (b) и (e)),  $T$  и  $\tilde{T}$  (рисунки (c) и (f)), посчитанные при помощи полноценного численного подхода (сплошные линии) и приближенного подхода (штриховые линии). Размерные коэффициенты  $\varepsilon_i(t)L_i(t)$ ,  $\varepsilon_i(t)E'$  и  $L_i(t)$  применяются для нормализации профилей  $w(\rho, t)$ ,  $p(\rho, t)$ , а также расстояния от источника. Индекс  $i$  означает анализируемый предельный режим. В случае режимов  $M$  и  $\tilde{M}$  мы рассмотрели два значения индекса текучести  $n = 1$  и  $n = 0.3$  и привели эти решения на рисунках (а), (d) и (b), (e) голубым или светло-зеленым и синим или зеленым цветами, соответственно. Коэффициенты, используемые для нормализации, учитывают значения индекса текучести. Оливковый и бордовый цвета используются для представления узловых решений  $T$  и  $\tilde{T}$  на рисунках (c), (f). . . . . 154
- 4.4 На рисунке (а) изображена зависимость  $\lambda_{\tilde{m}}(n)$ , полученная численно. Здесь красной точкой отмечено значение  $\lambda_{\tilde{m}}(1)$ , приведенное в работе [54]. На рисунке (b) изображены относительные ошибки при расчете профилей раскрытия и давления, соответствующих предельному режиму  $\tilde{M}$ , при помощи упрощенного подхода (раздел 4.2.2). . . . . 155
- 4.5 Параметрическое пространство задачи о росте радиальной трещины гидроразрыва в проницаемом резервуаре, движущейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли: пирамида  $M\tilde{M}\tilde{K}KT\tilde{T}$ . Узловые решения располагаются в вершинах пирамиды. Эволюционные параметры отмечены возле ребер для каждого предельного режима. Траектории решения задачи в общем случае ( $\varphi > 0$ ,  $\psi > 0$ ) представлены для двух значений индекса текучести:  $n > 0.5$  (штриховая линия) и  $n < 0.5$  (пунктирная линия). . . . . 159

- 4.6 На рисунке (а) изображены диапазоны значений определяющих параметров в координатах  $(\varphi, \psi)$ , соответствующие  $n = \{0.6, 0.8, 1\}$  и типичным значениям размерных входных параметров задачи, зеленым, красным и синим цветами. На рисунке (b), желтый многоугольник показывает множество значений для  $n = 1$  и  $\tau_0 = 15$ , в то время как восьмиугольники с красной и синей штрихпунктирной границей относятся к минимальному и максимальному значениям модуля плоской упругой деформации. Структура каждого восьмиугольника изображена на рисунке (c) (для  $E' = 10$ ), где красная и синяя штриховые линии ограничивают шестиугольники, соответствующие минимальному и максимальному значениям трещиностойкости горной породы. На рисунке (d) мы проанализировали структуру шестиугольника (случай  $K_{Ic} = 2.5 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$ ), отметив области, соответствующие минимальному и максимальному значениям индекса текучести (границы нарисованы красной и синей пунктирными линиями) и проницаемости резервуара (области заштрихованы красным и синим цветом). . . . . 164
- 4.7 Результаты моделирования роста радиальной трещины, движущейся под действием жидкости Бингама ( $n = 1, \psi > 0$ ) в непроницаемой горной породе ( $\varphi = 0$ ). На рисунке (а) представлена карта режимов в координатах  $(\tau, \psi)$ , на которой различными цветами закрашены области применимости предельных решений. Характеристики трещины, зависящие от времени, такие как радиус (b), максимальное раскрытие (c) и давление на расстоянии половины радиуса (d), нормализованные на предельное решение  $M$  изображены для следующих значений безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . На карте режимов (а) серыми штрих-пунктирными линиями обозначены траектории, для которых мы рассмотрели решения, а на рисунках (b) – (d) цветные пунктирные линии соответствуют узловым решениям. . . . . 167

- 4.8 Результаты моделирования роста радиальной трещины, движущейся под действием жидкости с реологией Гершеля-Балкли с индексом текучести  $n = 0.3$  в непроницаемой горной породе ( $\varphi = 0$ ). На рисунке (а) представлена карта режимов в координатах  $(\tau, \psi)$ , на которой различными цветами закрашены области применимости предельных решений. Характеристики трещины, зависящие от времени, такие как радиус (b), максимальное раскрытие (c) и давление на расстоянии половины радиуса (d), нормализованные на предельное решение  $M$  изображены для следующих значений безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . На карте режимов (а) серыми штрих-пунктирными линиями обозначены траектории, для которых мы рассмотрели решения, а на рисунках (b) – (d) цветные пунктирные линии соответствуют узловым решениям. . . . . 169
- 4.9 Параметрическое пространство задачи о росте радиальной трещины под влиянием жидкости Бингама ( $n = 1$ ) в проницаемом резервуаре ( $\varphi > 0$ ). Карты режимов представлены в координатах  $(\tau, \varphi)$  и соответствуют следующим значениям безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . Границы применимости предельных режимов закрашены в различные цвета. Границы режимов для случая  $\psi = 0$ , т. е. ньютоновской жидкости гидроразрыва, нарисованы цветными штриховыми линиями. На рисунке (c) серая штрих-пунктирная линия обозначает траектории, для которых мы рассматриваем решения в текущем разделе. . . . 171
- 4.10 Зависящие от времени параметры радиальной трещины, распространяющейся в проницаемой горной породе ( $\varphi > 0$ ) под действием жидкости Бингама: (a) радиус  $\gamma(\tau)$ , (b) максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , (c) давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$  и (d) эффективность  $\eta(\tau)$ . Параметры на рисунках (a) – (c) нормализованы на предельное решение  $M$ . Профили, соответствующие  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 1, 10^{10}\}$  и  $\psi = 1$  изображены черными сплошными линиями. Решения для аналогичных  $\varphi$  и  $\psi = 0$  представлены серыми штриховыми линиями. Узловые решения отмечены цветными штриховыми линиями. На рисунке (a) асимптотическое поведение радиуса трещины в режимах  $\tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{T}$  изображено одинаковым оранжевым цветом, т. к. оно описывается одинаковой зависимостью ( $\gamma_{\tilde{K}}(\tau), \gamma_{\tilde{M}}(\tau), \gamma_{\tilde{T}}(\tau)$ ). Аналогично, на рисунке (c), мы изобразили голубым цветом поведение давления в режимах  $T, \tilde{T}$  ( $\Pi_T(1/2, \tau), \Pi_{\tilde{T}}(1/2, \tau)$ ), которые близки друг к другу. . . . . 173

- 4.11 Параметрическое пространство задачи о росте радиальной трещины под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли ( $n = 0.3$ ) в проницаемом резервуаре ( $\varphi > 0$ ). Карты режимов представлены в координатах  $(\tau, \varphi)$  и соответствуют следующим значениям безразмерного предела текучести:  $\psi = \{10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5\}$ . Границы применимости предельных режимов закрашены в различные цвета. Границы режимов для случая  $\psi = 0$ , т. е. жидкости гидроразрыва со степенной реологией, нарисованы цветными штриховыми линиями. На рисунке (с) серая штрих-пунктирная линия обозначает траектории, для которых мы рассматриваем решения в текущем разделе. . . . . 174
- 4.12 Зависящие от времени параметры радиальной трещины, распространяющейся в проницаемой горной породе ( $\varphi > 0$ ) под действием жидкости с реологией Гершеля-Балкли с индексом текучести  $n = 0.3$ : (а) радиус  $\gamma(\tau)$ , (b) максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , (с) давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(1/2, \tau)$  и (d) эффективность  $\eta(\tau)$ . Параметры на рисунках (а) – (с) нормализованы на предельное решение  $M$ . Профили, соответствующие  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 1, 10^{10}, 10^{25}\}$  и  $\psi = 1$  изображены черными сплошными линиями. Решения для аналогичных  $\varphi$  и  $\psi = 0$  представлены серыми штриховыми линиями. Узловые решения отмечены цветными штриховыми линиями. На рисунке (а) асимптотическое поведение радиуса трещины в режимах  $\tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{T}$  изображено одинаковым оранжевым цветом, т. к. оно описывается одинаковой зависимостью ( $\gamma_{\tilde{K}}(\tau), \gamma_{\tilde{M}}(\tau), \gamma_{\tilde{T}}(\tau)$ ). Аналогично, на рисунке (с), мы изобразили голубым цветом поведение давления в режимах  $T, \tilde{T}$  ( $\Pi_T(1/2, \tau), \Pi_{\tilde{T}}(1/2, \tau)$ ), которые близки друг к другу. . . . . 176
- 4.13 На графиках изображены изолинии  $\Upsilon(\tau, \varphi, \psi) = V_{\text{plug}}/V_{\text{crack}}$  (черные штриховые линии), соответствующие величинам 10%, 50% и 90%. Проанализированы два значения индекса текучести  $n = 1$  (рисунки (а) и (с)) и  $n = 0.3$  (рисунки (b) и (d)). На верхних рисунках изображены решения для непроницаемого резервуара, а на нижних – для проницаемой горной породы и значения безразмерного предела текучести  $\psi = 1$ . Карты режимов, представленные на рисунках 4.7, 4.8, 4.9, 4.11, нанесены в целях сопоставления положения изолиний и условий распространения трещины. . . . . 178

- 4.14 На рисунке представлены различные параметры радиальной трещины, зависящие от времени, полученные при помощи точного численного метода (раздел 4.2.1). Левый ряд рисунков содержит графики для радиуса  $R(t)$  и максимального раскрытия  $w(0, t)$ , в то время как в правом ряду находятся графики для давления на расстоянии половины радиуса  $p(R(t)/2, t)$  и эффективности  $\eta(t)$ . Сплошными линиями изображены решения для трещины, распространяющейся под влиянием жидкости с реологией Гершеля-Балкли, а штриховыми линиями представлены решения, соответствующие случаю степенной жидкости. Синий и зеленый цвета относятся к случаям непроницаемой и проницаемой горной породы. . . . . 180
- A.1 Сравнение численного решения, полученного при помощи алгоритма, основанного на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа (сплошные черные линии), с результатами численного подхода, в котором используется модель концевое элемента в качестве критерия распространения (штриховые серые линии). Решения изображены для следующих значений безразмерного коэффициента утечек:  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5, 10^{10}\}$ . Рассмотрены эволюции следующих параметров трещины в зависимости от времени: радиус (a), максимальное раскрытие (b), давление на расстоянии половины радиуса (c) и эффективность (d). На рисунках (a)-(c) динамики нормализованы на узловое решение M. . . 220
- A.2 Сравнение численного решения, полученного при помощи GC алгоритма (сплошные серые линии), с полуаналитическими решениями, соответствующими предельным режимам распространения радиальной трещины гидроразрыва (штриховые цветные линии): M-режим (a),  $\tilde{M}$ -режим (b), K-режим (c),  $\tilde{K}$ -режим (d). . . . . 221
- A.3 Сравнение численного решения, полученного при помощи GC алгоритма (сплошные серые линии), с аналитическими асимптотическими решениями вблизи кончика трещины (штриховые цветные линии): m-узел (a),  $\tilde{m}$ -узел (b), k-узел (c) и (d). . . . . 222

## Список таблиц

1	Предельные решения для полубесконечной трещины. . . . .	35
2	Асимптотические решения для кончика трещины в ближнем поле ( $x \rightarrow 0$ ). . .	37
3	Характеристические масштабы расстояния до кончика трещины $\ell_*$ , давления $p_*$ , раскрытия $w_* = (p_*/E')\ell_*$ , соответствующие пяти масштабированиям, реализующимся в задаче. . . . .	40
4	Нормализованные уравнения, записанные в терминах безразмерного раскрытия $\Omega = w/w_*$ и эффективного давления $\Pi = p/p_*$ , зависящих от безразмерного расстояния до кончика трещины $\xi = x/\ell_*$ , для различных масштабирований $(\ell_*, w_*, p_*)$ , приведенных в таблице 3. . . . .	43
5	Значения безразмерных параметров $\chi$ , $\zeta$ , $\chi/\zeta^3$ для песчаника/низкопроницаемого коллектора и ГРП на основе воды/скользкой воды. Значения длины зоны циркуляции $\lambda$ и границы применимости решения с утечками по Картеру ( $x > x_C$ ), нормализованные на характерный масштаб длины $mk$ , который равен $\ell_{mk} \approx 9$ м для случая водного ГРП и 0.4 м ГРП на основе скользкой воды. . . . .	55
6	Усредненные и максимальные значения относительной разницы между параметрами радиальной трещины в модели с утечками, зависящими от давления, и аналогичной модели с утечками по закону Картера. . . . .	81
7	Значения времени $t_*$ в секундах, показывающего, когда относительная разница между характеристиками трещины $R(t)$ , $w(0, t)$ , $p(0.1, t)$ в ламинарно-турбулентном и ламинарном решениях составляет 5%. . . . .	117
8	Границы областей применимости предельных решений, получающиеся из $\tau_{\text{edge}} = \text{const}$ . . . . .	166
9	Относительные разницы ( $\delta_A$ ) между различными параметрами радиальной трещины (A), соответствующими случаю жидкости гидроразрыва с реологией Гершеля-Балкли (“hb”) и со степенной реологией (“pl”), посчитанные для момента времени $t = 6000$ с. . . . .	181

## Приложение А

### Верификация численного алгоритма, основанного на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа

В разделах 3 и 4 применяется численный подход, основанный на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа для моделирования роста радиальной трещины гидроразрыва. Будем называть данный алгоритм “ГС” для краткости. Изначально алгоритм был предложен в работе [65] и в настоящей диссертации был модифицирован для учета ламинарно-турбулентного течения внутри канала трещины (раздел 3.2.2) и вязкопластичной реологии жидкости гидроразрыва (раздел 4.2.1). Перед применением подхода для решения задач с усложненными постановками необходимо проверить, что реализация алгоритма дает корректные результаты в модели радиальной трещины с классическим набором предположений (раздел 1.2), т. е. трещина распространяется в проницаемой горной породе под влиянием ламинарного течения жидкости гидроразрыва с ньютоновской реологией.

Рассмотрим задачу в безразмерном виде, который получается путем применения  $m_k$  масштабирования (раздел 3.2.5). Решение задачи рассчитаем для набора значений безразмерного коэффициента утечек:  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5, 10^{10}\}$ . Следующие параметры радиальной трещины гидроразрыва рассматриваются при верификации обсуждаемого подхода: радиус  $\gamma(\tau)$ , максимальное раскрытие  $\Omega(0, \tau)$ , давление на расстоянии половины радиуса  $\Pi(0.5, \tau)$  и эффективность  $\eta(\tau)$ . На рисунке А.1 представлено сравнение расчетов ГС алгоритма с результатами референсной модели в терминах вышеупомянутых характеристик трещины. В качестве референсного подхода взят алгоритм из статьи [54], в котором используется модель концевоего элемента как критерий распространения. Данный алгоритм применялся в разделе 2.2, где был модифицирован для учета массообмена, зависящего от давления. Используя результаты, приведенные на рисунке А.1, можно отметить приемлемое совпадение между результатами ГС алгоритма и референсным решением.

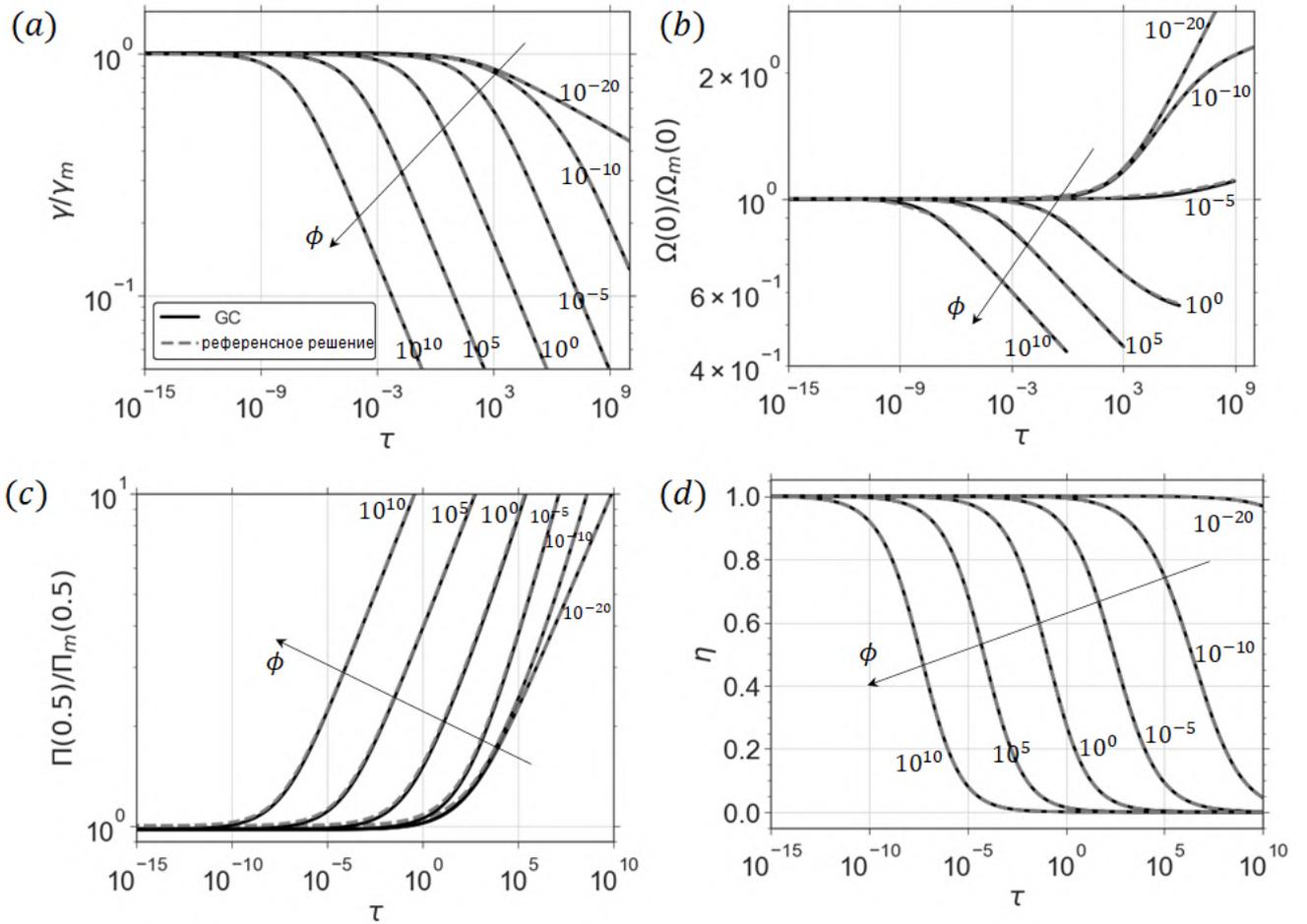


Рисунок А.1 — Сравнение численного решения, полученного при помощи алгоритма, основанного на квадратуре Гаусса-Чебышева и барицентрической форме интерполяции Лагранжа (сплошные черные линии), с результатами численного подхода, в котором используется модель конечного элемента в качестве критерия распространения (штриховые серые линии). Решения изображены для следующих значений безразмерного коэффициента утечек:  $\varphi = \{10^{-20}, 10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5, 10^{10}\}$ . Рассмотрены эволюции следующих параметров трещины в зависимости от времени: радиус (а), максимальное раскрытие (б), давление на расстоянии половины радиуса (с) и эффективность (д). На рисунках (а)-(с) динамики нормализованы на узловое решение  $M$ .

Далее проведем сравнение профиля раскрытия радиальной трещины гидроразрыва, полученного численно при помощи GC алгоритма, с полуаналитическими предельными решениями (раздел 3.2.4, ламинарные режимы). Мы выбираем значения  $\varphi$  и  $\tau$  таким образом, чтобы условия реализации того или иного предельного режима выполнялись. На рисунке А.2 изображены полученные результаты. Профиль раскрытия зависит от безразмерного расстояния до источника нагнетания жидкости гидроразрыва,  $\Omega = \Omega(\xi)$ ,  $\xi = r/R$ . Численное решение изображено серыми сплошными линиями, а предельные полуаналитические решения [56; 57; 59] цветными штриховыми линиями. На

основе полученных результатов можно сделать вывод о приемлемой точности численного решения в предельных режимах распространения.

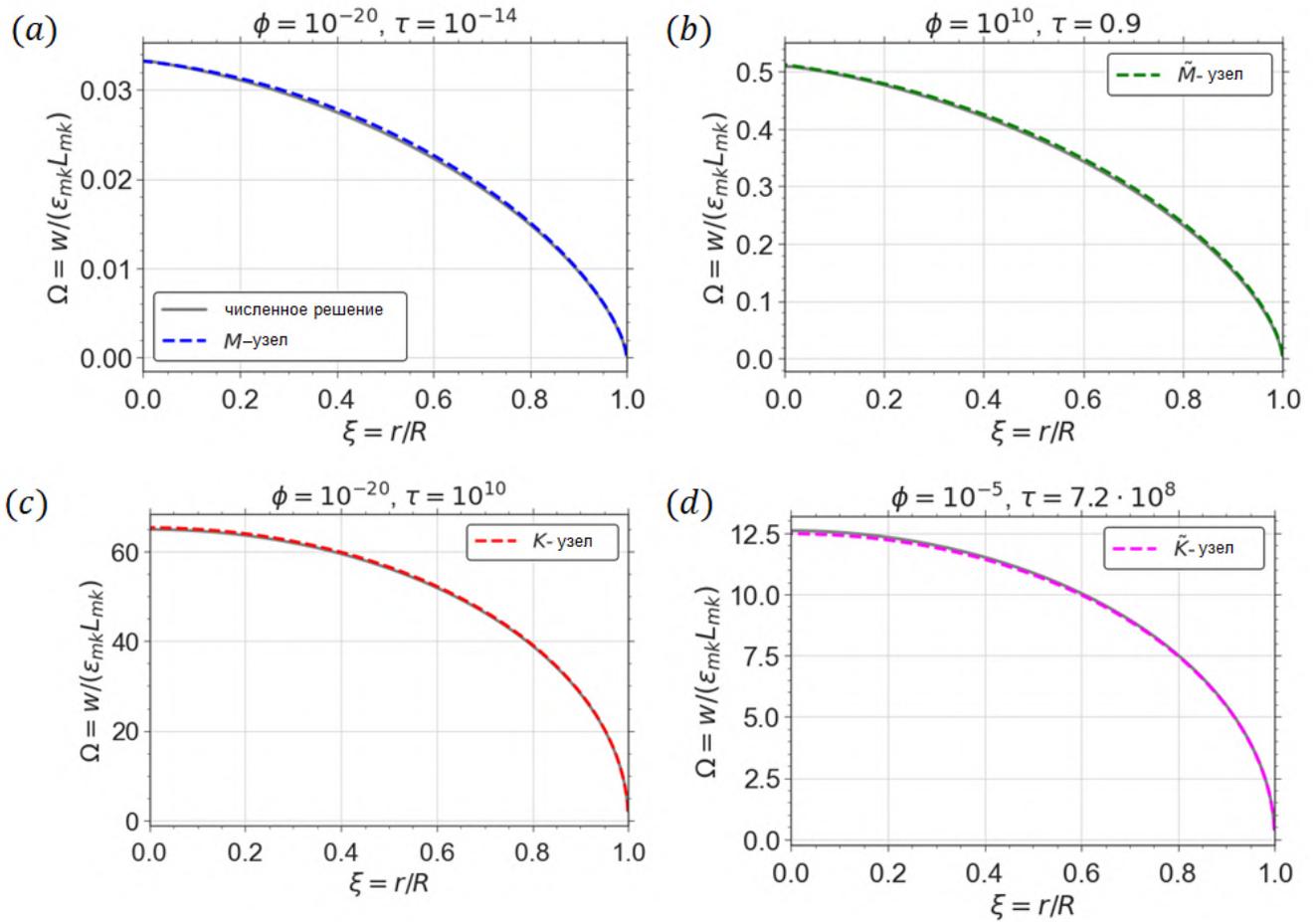


Рисунок А.2 — Сравнение численного решения, полученного при помощи GC алгоритма (сплошные серые линии), с полуаналитическими решениями, соответствующими предельным режимам распространения радиальной трещины гидроразрыва (штриховые цветные линии):  $M$ -режим (а),  $\tilde{M}$ -режим (b),  $K$ -режим (c),  $\tilde{K}$ -режим (d).

Как упоминается в разделах 3.2.2, 4.2.1, GC алгоритм не требует имплементации полноценного асимптотического решения вблизи кончика трещины кроме ЛУМР асимптоты, в связи с высоким разрешением в этой области. Поэтому необходимо проверить, что поведение раскрытия трещины вблизи фронта аккуратно воспроизводится в численном решении. Для этого мы рассмотрим предельные режимы распространения радиальной трещины,  $M$ ,  $K$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{K}$ , и сравним профиль раскрытия вблизи фронта с аналитическими решениями (раздел 2.1.2.1, асимптоты в модели с утечками по Картеру). На рисунке А.3 представлены полученные результаты. Численные профили раскрытия на рисунках А.2 и А.3 идентичны; отличие лишь в том, что на рисунке А.3 мы приближаем пространственную область  $\xi \in [0.9, 1]$ , расположенную вблизи кончика и сравниваем внутри нее численное решение (серые сплошные линии) с

аналитическим (цветные штриховые линии). Из результатов на рисунке А.3(а) можно выявить, что асимптотика  $m$  покрывает численное решение вдоль отрезка  $\xi \in [0.98, 1]$ . В случае асимптотики  $\tilde{m}$  данная зона имеет меньший размер А.3(б) и связано это с тем, что представленное решение близко к узловому  $\tilde{M}$ , однако, мы не находимся внутри него (расчет численного решения в случае малых эффективностей затруднителен). Из рисунков А.3 (с) и (д) можно отметить, что асимптотика трещиностойкости  $k$  покрывает отрезок  $\xi \in [0.96, 1]$  вблизи кончика трещины.

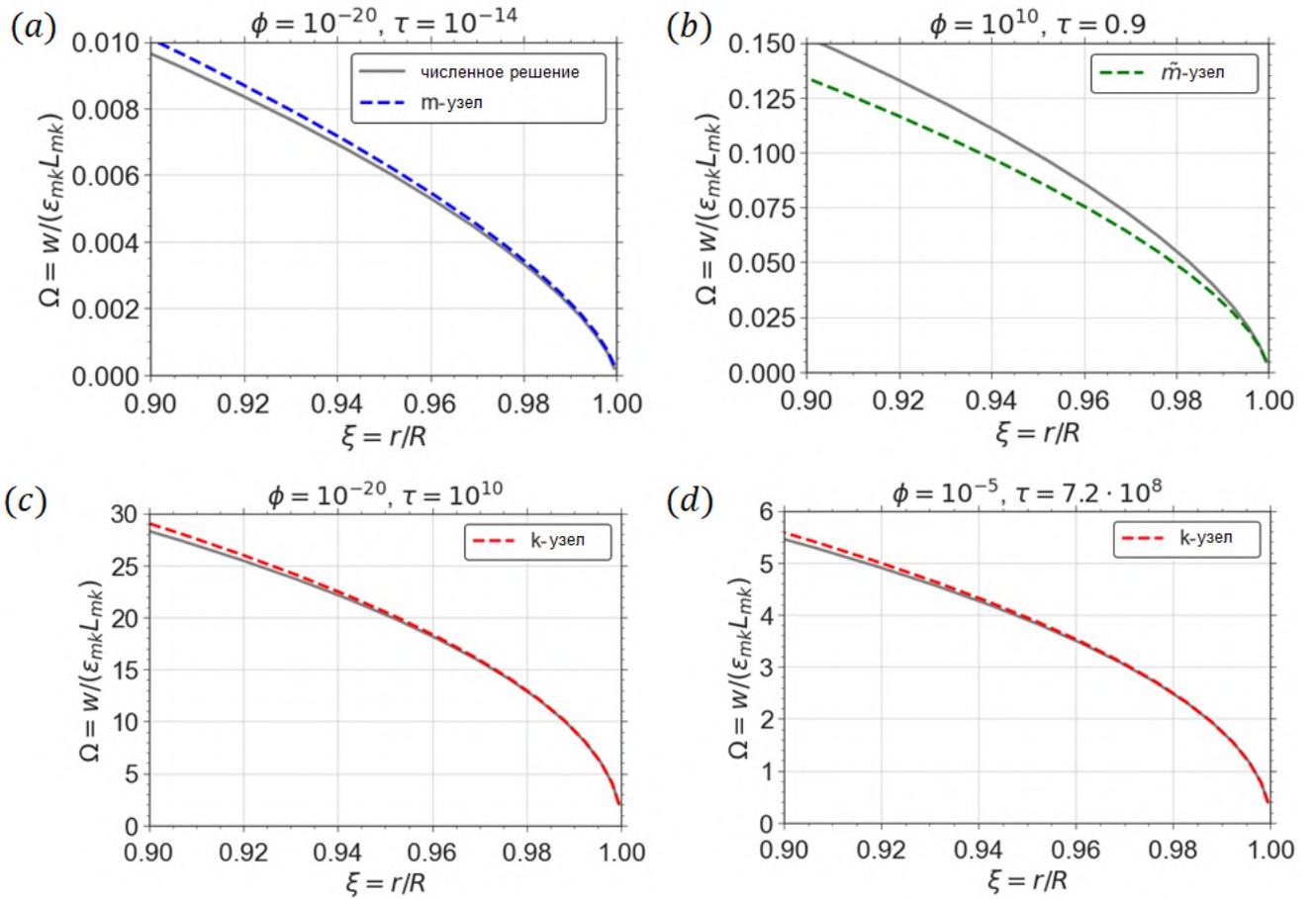


Рисунок А.3 — Сравнение численного решения, полученного при помощи GC алгоритма (сплошные серые линии), с аналитическими асимптотическими решениями вблизи кончика трещины (штриховые цветные линии):  $m$ -узел (а),  $\tilde{m}$ -узел (б),  $k$ -узел (с) и (д).

## Приложение Б

### Предельные режимы распространения радиальной трещины гидроразрыва, движущейся под влиянием вязкопластичной жидкости

#### Предельный режим $M$

Размерная форма:

$$R_m(t) = R_m^* \left( \frac{E' Q_0^{n+2} t^{2n+2}}{M'} \right)^{1/(3n+6)},$$

$$w_m(\rho, t) = w_m^{**} \left( \frac{M'^2 Q_0^{n+2} t^{2-n}}{E'^2} \right)^{1/(3n+6)} (1 + \rho)^{\lambda_m} (1 - \rho)^{\bar{\delta}_m},$$

$$p_m(\rho, t) = p_m^* \left( \frac{M' E'^{n+1}}{t^n} \right)^{1/(2+n)} \mathcal{F}(\rho, \lambda_m, \bar{\delta}_m).$$

Безразмерная форма:

$$\gamma_m(\tau) = R_m^* \tau^{(2n+2)/(3n+6)}, \quad \Omega_m(\rho, \tau) = w_m^{**} \tau^{(2-n)/(3n+6)},$$

$$\Pi_m(\rho, \tau) = p_m^* \tau^{-n/(2+n)}.$$

Параметры:

$$R_m^* = \left( 2\pi\beta_m \alpha_m^{n/(n+2)} \mathcal{B}_m \right)^{-1/3}, \quad w_m^{**} = \left( \frac{\beta_m^2 \alpha_m^{2n/(n+2)}}{2\pi\mathcal{B}_m} \right)^{1/3} 2^{-\lambda_m}, \quad p_m^* = \beta_m \alpha_m^{\frac{n}{n+2}},$$

$$\beta_m = \left[ \frac{2(2+n)^2}{n} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi n}{2+n} \right) \right]^{1/(2+n)}, \quad \bar{\delta}_m = \frac{2}{2+n}, \quad \alpha_m = \frac{2n+2}{3n+6},$$

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{B}(\lambda_m, \bar{\delta}_m), \text{ уравнение (4.17); } \lambda_m = \lambda_m(n), \text{ рисунок 4.2(a).}$$

#### Предельный режим $\tilde{M}$

Размерная форма:

$$R_{\tilde{m}}(t) = 0.4502 t^{1/4} \sqrt{\frac{Q_0}{C'}},$$

$$w_{\tilde{m}}(\rho, t) = w_{\tilde{m}}^{**} \left( \frac{M'^4 Q_0^{2n+4} t^{2-n}}{E'^4 C'^{4-2n}} \right)^{1/(8+8n)} (1 + \rho)^{\lambda_{\tilde{m}}} (1 - \rho)^{\bar{\delta}_{\tilde{m}}},$$

$$p_{\tilde{m}}(\rho, t) = p_{\tilde{m}}^* \left( \frac{M'^4 C'^{6n} E'^{8n+4}}{Q_0^{2n} t^{3n}} \right)^{1/(8+8n)} \mathcal{F}(\rho, \lambda_{\tilde{m}}, \bar{\delta}_{\tilde{m}}).$$

Безразмерная форма:

$$\begin{aligned}\gamma_{\tilde{m}}(\tau) &= 0.4502\tau^{1/4}\varphi^{-1/8}, \\ \Omega_{\tilde{m}}(\rho, \tau) &= w_{\tilde{m}}^{**} \left( \tau\varphi^{-1/2} \right)^{(2-n)/(8+8n)} (1+\rho)^{\lambda_{\tilde{m}}} (1-\rho)^{\bar{\delta}_{\tilde{m}}}, \\ \Pi_{\tilde{m}}(\rho, \tau) &= p_{\tilde{m}}^* \left( \varphi^{1/2}/\tau \right)^{3n/(8+8n)} \mathcal{F}(\rho, \lambda_{\tilde{m}}, \bar{\delta}_{\tilde{m}}).\end{aligned}$$

Параметры:

$$\begin{aligned}w_{\tilde{m}}^{**} &= \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{2}{\pi^2} \right)^{(n+2)/(4n+4)} 2^{-\lambda_{\tilde{m}}}, \quad p_{\tilde{m}}^* = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{\pi^2}{2} \right)^{n/(4n+4)}, \\ \beta_{\tilde{m}} &= \left[ \frac{64(1+n)^2}{3n(4+n)} \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi n}{4+4n} \right) \right]^{1/(2+2n)}, \quad \bar{\delta}_{\tilde{m}} = \frac{4+n}{4+4n}, \\ \lambda_{\tilde{m}} &= \lambda_{\tilde{m}}(n), \text{ рисунок 4.4(а).}\end{aligned}$$

### Предельный режим $K$

Размерная форма:

$$\begin{aligned}R_k(t) &= 0.8546 \left( \frac{E'Q_0t}{K'} \right)^{2/5}, \quad w_k(\rho, t) = 0.6537 \left( \frac{K'^4Q_0t}{E'^4} \right)^{1/5} \sqrt{1-\rho^2}, \\ p_k(t) &= 0.3004 \left( \frac{K'^6}{E'Q_0t} \right)^{1/5}.\end{aligned}$$

Безразмерная форма:

$$\begin{aligned}\gamma_k(\tau) &= 0.8546\tau^{2/5}, \quad \Omega_k(\rho, \tau) = 0.6537\tau^{1/5} \sqrt{1-\rho^2}, \\ \Pi_k(\tau) &= 0.3004\tau^{1/5}.\end{aligned}$$

### Предельный режим $\tilde{K}$

Размерная форма:

$$\begin{aligned}R_{\tilde{k}}(t) &= 0.4502t^{1/4} \sqrt{\frac{Q_0}{C'}}, \quad w_{\tilde{k}}(\rho, t) = 0.4744 \left( \frac{K'^8Q_0^2t}{C'^2E'^8} \right)^{1/8} \sqrt{1-\rho^2}, \\ p_{\tilde{k}}(t) &= 0.4139 \left( \frac{C'^2K'^8}{Q_0^2t} \right)^{1/8}.\end{aligned}$$

Безразмерная форма:

$$\begin{aligned}\gamma_{\tilde{k}}(\tau) &= 0.4502\tau^{1/4}\varphi^{-1/8}, \quad \Omega_{\tilde{k}}(\rho, \tau) = 0.4744\tau^{1/8}\varphi^{-1/16} \sqrt{1-\rho^2}, \\ \Pi_{\tilde{k}}(\tau) &= 0.4139\tau^{-1/8}\varphi^{1/16}.\end{aligned}$$

### Пределный режим $T$

*Размерная форма:*

$$R_t(t) = 0.6349 \left( \frac{tE'^{1/2}Q_0}{\tau_0^{1/2}} \right)^{1/3},$$

$$w_t(\rho, t) = 1.5598 \left( \frac{Q_0\tau_0 t}{E'} \right)^{1/3} (1 + \rho)^{1.029} (1 - \rho),$$

$$p_t(\rho, t) = 5.0133 \sqrt{\tau_0 E'} \mathcal{F}(\rho, 1.029, 1).$$

*Безразмерная форма:*

$$\gamma_t(\tau) = 0.6349 \tau^{1/3} \psi^{-1/6}, \quad \Omega_t(\rho, \tau) = 1.5598 \tau^{1/3} \psi^{1/3} (1 + \rho)^{1.029} (1 - \rho),$$

$$\Pi_t(\rho, \tau) = 5.0133 \sqrt{\psi} \mathcal{F}(\rho, 1.029, 1).$$

### Пределный режим $\tilde{T}$

*Размерная форма:*

$$R_{\tilde{t}}(t) = 0.4502 t^{1/4} \sqrt{\frac{Q_0}{C'}}, \quad w_{\tilde{t}}(\rho, t) = 1.0697 \left( \frac{Q_0 \sqrt{t} \tau_0}{C' E'} \right)^{1/2} (1 + \rho)^{1.077} (1 - \rho),$$

$$p_{\tilde{t}}(\rho, t) = 5.0128 \sqrt{E' \tau_0} \mathcal{F}(\rho, 1.077, 1).$$

*Безразмерная форма:*

$$\gamma_{\tilde{t}}(\tau) = 0.4502 \tau^{1/4} \varphi^{-1/8}, \quad \Omega_{\tilde{t}}(\rho, \tau) = 1.0697 \tau^{1/4} \varphi^{-1/8} \psi^{1/2} (1 + \rho)^{1.077} (1 - \rho),$$

$$\Pi_{\tilde{t}}(\rho, \tau) = 5.0128 \psi^{1/2} \mathcal{F}(\rho, 1.077, 1).$$