Отзыв официального оппонента на диссертацию Орловой Анастасии Сергеевны "О сходимости и скорости сходимости жадных приближений в специальных случаях" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Представленная диссертация посвящена актуальным вопросам геометрии нелинейных приближений, связанным со сходимостью и скоростью сходимости различных жадных алгоритмов в гильбертовом пространстве. Полученные результаты имеют непосредственное отношение к работам В.Н. Темлякова (1996 – н.вр.), Р. Де Вора (1996), А. Баррона (1993), Л. Джонса (1992), С.В. Конягина (1999), Е.М. Лившица (2004 – н.вр.), В.В. Галатенко (2002 — н.вр.), П.А. Бородина и Е. Копецки (2022), К.С. Вишневецкого (2023–24) и других математиков.

В первой главе диссертации вводятся определения рассматриваемых жадных алгоритмов и классы начальных элементов, для которых исследуется скорость сходимости этих алгоритмов.

Во второй главе диссертации получена оценка скорости сходимости слабого ортогонального жадного алгоритма относительно ортогонального словаря для начальных элементов из выпуклой оболочки словаря. Оценка выписывается в терминах параметров слабости алгоритма и лучше общей оценки В.Н. Темлякова (2000), доказанной для произвольных словарей. Показана неулучшаемость найденной оценки для ортогонального словаря.

В третьей главе для слабого ортогонального жадного и слабого жадного алгоритма с параметрами слабости t_n показано, что на классе словарей, получаемых из ортогонального словаря добавлением одного элемента, условие $\sum t_n^2 = \infty$, достаточное для сходимости указанных алгоритмов относительно произвольных словарей D для начальных векторов из выпуклой оболочки $\operatorname{conv} D$, не может быть ослаблено до условия $\sum t_n = \infty$, достаточного в случае ортогонального словаря. Показано также, что добавление к ортогональному словарю одного вектора может приводить к тому, что чисто жадный алгоритм перестает сходиться за конечное число шагов на финитных начальных векторах.

Четвертая, основная глава диссертации, посвящена жадным приближениям относительно нескольких (неполных) словарей. Это новая постановка в теории жадных приближений: на каждом шаге очередной элемент, "вносящий вклад" в приближение, выбирается из словаря со случайным номером, отличным от предыдущего. Хорошо известно, что чисто жадный алгоритм относительно нескольких (не менее чем трех) словарей может расходиться. Однако для ортогонального жадного алгоритма это уже не так: в диссертации доказывается сходимость ортогонального жадного алгоритма относительно нескольких словарей для произвольного начального вектора. Кроме того, в четвертой главе строятся многочисленные нетривиальные примеры, показывающие, что чисто жадный алгоритм и ортогональный жадный алгоритм по паре ортогональных словарей могут вести себя как хуже, так и лучше соответствующих алгоритмов по каждому из словарей в отдельности. Отметим, что жадный алгоритм по паре словарей детерминирован в том смысле, что словари используются циклически.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Во введении следовало бы привести найденное В.Н. Темляковым (Adv. Comp. Math., 17 (2002), 269–280) условие на ослабляющую последовательность $\{t_n\}$,

необходимое и достаточное для сходимости слабого жадного алгоритма для произвольного словаря и произвольного начального элемента в гильбертовом пространстве (в приводимой теореме F формулируется лишь достаточное условие).

2. Также во введении было бы неплохо упомянуть полученное К.С. Вишневецким (Матем. заметки, 115:1 (2024), 43–50) полное описание дискретных словарей в гильбертовом пространстве, для которых чисто жадный и ортогональный жадный алгоритмы работают одинаково для всякого начального вектора.

3. стр. 15, 6 св.: вместо "также" должно быть "так же".

4. стр. 23, 7 св.: множество $A_1(D_1, D_2)$ не определено.

5. стр. 23, 8 св.: "такие алгоритмы будут эквивалентны" — непонятно, какие алгоритмы и в каком смысле эквивалентны.

6. стр. 30-31: в теореме 3.1 не хватает условия "$t_i \neq 1$ для всякого i". Действительно, без этого условия утверждение о сходимости произведения к ненулевому значению в середине стр. 31 неверно.

7. стр. 35, 1–2 св.: не объяснено, почему такое N найдется (это нетривиальное объяснение, в котором-то и надо использовать условие о том, что $t \notin \ell_1$).

8. стр. 35, 3–4 св.: это лишнее требование, $N > N'$ автоматически.

9. стр. 49, 9 св.: это неравенство сходу непонятно, его следовало бы обосновать подробнее.

10. стр. 51, 13 св.: вместо "корме" должно быть "кроме".

11. стр. 59, 2 сн.: опечатка в слове "стандартный".

12. стр. 60, 10 сн.: обозначение P_{H_n} не введено; видимо, должно быть $P_{H_n}(x)$.

13. стр. 70, 1 сн.: вместо "сходится" должно быть "сходиться".

14. стр. 76: неверно указан журнал в публикации [3].

Указанные замечания не умаляют значимости результатов диссертации. Они новые, интересные и в большинстве своем нетривиальные. Все основные теоремы опубликованы А.С. Орловой без соавторов в рецензируемых журналах, неоднократно докладывались на профильных семинарах и конференциях. Полученные результаты, введенные понятия и конструкции примеров могут быть использованы для чтения спецкурсов и проведения научных исследований специалистами в МГУ имени М.В. Ломоносова, МИАН имени В.А. Стеклова, Московском физико-техническом институте, Саратовском и Тульском государственных университетах.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.1 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1 – 2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Считаю, что соискатель Орлова Анастасия Сергеевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — “Вещественный, комплексный и функциональный анализ”.

Официальный оппонент,
профессор кафедры теории функций
и функционального анализа
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО “Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова”,
доктор физ.-матем. наук П.А. Бородин

02.04.2024

Контактные данные:
тел.: +7 (495) 939-36-80, e-mail: pborodin@inbox.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.01 — “Вещественный, комплексный и функциональный анализ”

Адрес места работы:
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы МГУ, д. 1, Главное здание ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”
Механико-математический факультет
Тел.: +7 (495) 939-36-80; e-mail: pborodin@inbox.ru

Подпись сотрудника механико-математического факультета
ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”
П.А. Бородина удостоверяю:

зам декана
мех.мат ф-та / А.О. Иванов