МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Давыдов Александр Вадимович

Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих в теории вязкоупругости

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Виктор Валентинович Власов

Москва — 2022

Содержание

1 Введение

1.1 Актуальность темы

Значимым разделом общей теории операторов является спектральный анализ оператор-функций. В свою очередь спектральная теория операторов является важным разделом функционального анализа.

Основные результаты диссертации посвящены спектральному анализу интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве.

В диссертации изучается задача Коши для интегродифференциального уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа, которое может быть записано в операторном виде с помощью интегродифференциального уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + M_1\frac{d}{dt}u(t) + M_2\left(A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau\right) + \\ + M_3Tu(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1, \qquad (1.2)$$

где $M_1,\ M_2,\ M_3$ — положительные физические константы, $\Gamma(t)$ — ядро релаксации, определенная на луче $[0, +\infty)$ убывающая положительная интегрируемая функция, а $u(t)$ и $f(t)$ — это определенные на луче $[0, +\infty)$ вектор-функции со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, а оператор A^{-1}, обратный к нему, является компактным, замкнутый оператор T компактно подчинен оператору A.

В диссертации также представлены результаты, касающиеся задачи Коши для интегродифференциального уравнения Гуртина–Пипкина:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau = f(t), \quad t > 0, \qquad (1.3)$$

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1. \qquad (1.4)$$

Уравнение Гуртина–Пипкина и его модификации могут быть использованы при изучении моделей, возникающих в теории вязкоупругости, в частности, при изучении движения вязкоупругой пластины при отсутствии внешнего потока жидкости или газа (см. [1]), в динамике вязкоупругих тел, в задачах управляемости термоупругих систем с памятью (см. [16]), при исследовании малых движений вязкоупругих жидкостей (см. [47], [48]), а также при описании распространения тепла в средах с памятью (см. [14], [37]), в задачах усреднения в многофазных средах (см. [28], [29]), в теории акустики эмульсий (см. [30], [31]).

Уравнение (1.3) используется при описании большого количества различных физических моделей, например, изотропной модели вязкоупругости, если полагать, что в пространстве $L_2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) оператор A^2 задается следующим дифференциальным выражением:

$$A^2 u = -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} u),$$

где μ и λ являются параметрами Ламе упругой среды (см. [38], [41]). Кроме того, здесь уместно указать модели вязкоупругой жидкости Максвела и Олдройта, приводящие к модификациям уравнения (1.3). Данные уравнения были подробно изучены Д.А. Закорой (см. [49]–[51]). Так, им была получена корректная разрешимость интегродифференциальных уравнений, соответствующих данным моделям, был рассмотрен вопрос экспоненциальной устойчивости решений уравнения, а также была определена их асимптотика.

Задаче Коши вида (1.3), (1.4) посвящено большое число работ как российских, так и зарубежных. Отметим здесь работы В.В. Власова, Н.А. Раутиан, А.С. Шамаева [5], [7], [52], в которых установлена корректная разрешимость уравнения Гуртина–Пипкина в весовых пространствах Соболева, проведен спектральный анализ символа уравнения (1.3), получена асимптотика невещественных точек спектра для ядер, представимых в виде суммы экспонент, и локализация вещественных кластеров. Кроме того, получены результаты о корректной разрешимости данной задачи. Естественное продолжение данного исследования можно видеть в более поздней работе [13] авторов, где исследуется уравнение Гуртина–Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами релаксации.

В работах [14], [15] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. Здесь следует также отметить работы А.С. Шамаева и соавторов [53]–[55], в которых изучались задачи граничного управления системами типа Гуртина–Пипкина, а также проводился спектральный анализ моделей вязкоупругих сред Кельвина–Фойгхта. В работе [16] устанавливается зависимость скорости убывания энергии от скорости убывания ядра в модели теплопроводности Гуртина–Пипкина. В монографии [17] и работах [18], [19] разрабатывается подход к решению задачи (1.3), (1.4) с позиции теории полугрупп, где для случая более общего вида ядер $\Gamma(t)$ устанавливается вид генератора полугруппы и доказывается, что полугруппа является сжимающей и экспоненциально устойчивой. Полугрупповой подход к более общим задачам, в которых интегральное ядро имеет компактный носитель, развивался в работах Н.Д. Копачевского и Д.А. Закоры [20], [21]. В этих работах установлена экспоненциальная устойчивость соответствующих сжимающих полугрупп. Новейшие исследования, касающиеся полугруппового подхода при исследовании уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами, опубликованы в статье [22]. Интегродифференциальные уравнения могут рассматриваться как специальный класс функционально-дифференциальных уравнений. В работах В.Ж. Сакбаева и В.В. Власова [56]–[58] получены результаты, касающиеся корректной разрешимости в шкале весовых пространств Соболева вектор-функций класса функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Проблема корректной разрешимости интегродифференциальных уравнений в пространствах вектор-функций, голоморфных в угле, затронута в статьях [42], [43]. Следует также отметить работу [23], в которой исследуется обобщенная разрешимость уравнений типа Гуртина–Пипкина с двумя некоммутирующими операторами. При изучении колебаний вязкоупругого трубопровода с учетом трения Кельвина–Фойгхта Ю.А. Тихоновым было изучено интегродифференциальное уравнение (1.3) с учетом трения Кельвина–Фойгхта и симметрическим относительно-компактным возмущением, построена полугруппа, связанная с уравнением, и исследован спектр символа уравнения колебаний вязкоупругого трубопровода (см. [44]– [46]).

Задача (1.1), (1.2) в основном изучалась на предмет устойчивости и асимптотической устойчивости решений (явление флаттера). Можно назвать, например, работы [1], [8], где было произведено численное исследование зависимости критической скорости $v_{\text{кр}}$, при которой решение (1.1), (1.2) становится неустойчивым, от физических параметров, а также работы В.В. Веденеева [9], [10], где проводится численное исследование одномодового флаттера невязкоупругой пластины.

Спектральный подход к изучению абстрактных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений основан на идеях, восходящих к работам М.В. Келдыша, в которых изложены основополагающие результаты спектральной теории полиномиальных операторных пучков [59], [60]. Дробно-рациональные оператор-функции, обобщениями которых являются символы интегродифференциальных уравнений вида (1.1), рассматривались в работах

Дж.Э. Аллахвердиева (см. [61]), А.И. Милославского (см. [62]). В цикле работ Г.В. Радзиевского изучались существенно более общие оператор-функции. Результаты его исследований изложены в обзорной статье [63]. Следует отметить, что все результаты диссертации по существу основаны на спектральном анализе оператор-функций, являющихся символом интегродифференциальных уравнений (1.1), (1.3). Таким образом, задача изучения спектра оператор-функций является ключевой для проводимого в работе исследования.

1.2 Цель диссертационной работы

Целями настоящей работы являются:

1. Исследование корректной разрешимости в пространствах Соболева и устойчивости решений задачи (1.1), (1.2);
2. Изучение асимптотики невещественного спектра символа уравнения (1.1);
3. Вычисление асимптотики невещественного спектра символа уравнения (1.3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса;
4. Исследование корректной разрешимости задачи (1.3), (1.4) в шкале пространств, порожденной оператором A;
5. Определение условий, при которых невещественный спектр символа уравнения (1.3) при учете трения Кельвина–Фойгхта бесконечен.

1.3 Научная новизна

В диссертации получены новые результаты о корректной разрешимости в весовых пространствах Соболева задачи (1.1), (1.2), приведена асимптотика спектра символа (1.1) в зависимости от асимптотики спектра символа (1.3) с таким же ядром релаксации. Также в диссертации определена асимптотика невещественного спектра символа уравнения (1.3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса. Кроме того, приведены результаты о корректной разрешимости задачи (1.3), (1.4) в шкале пространств, порожденной оператором A, а также исследован вопрос наличия бесконечного невещественного спектра символа уравнения (1.3) при учете трения Кельвина–Фойгхта.

1.4 Методы исследования

В работе применяются методы комплексного и функционального анализа, спектральной теории линейных операторов и оператор-функций в гильбертовом пространстве.

1.5 Положения, выносимые на защиту, и их научная новизна

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Теорема о корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2) для слабых решений в весовых пространствах Соболева $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$ и её следствия про асимптотическую устойчивость и устойчивость по Ляпунову решений, а также про условие отсутствия спектра символа уравнения в полуплоскости $\{z\,:\,\mathrm{Re}\,z \geq 0\}$;

2. Теорема об асимптотике невещественного спектра символа уравнения (1.3) с относительно-компактным возмущением;

3. Теорема об асимптотике невещественного спектра символа уравнения (1.1);

4. Теорема об асимптотике невещественного спектра символа уравнения (1.3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса;

5. Теоремы о корректной разрешимости задачи (1.3), (1.4) для сильных и слабых решений, а также их следствия о разрешимости задачи (1.3), (1.4) в шкале пространств, порожденной оператором A;

6. Теорема о достаточных условиях наличия бесконечного невещественного спектра символа уравнения (1.3) при учете трения Кельвина–Фойгхта.

1.6 Теоретическая и практическая значимость результатов

Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории интегродифференциальных уравнений, спектральной теории оператор-функций, при численном расчете возникновения флаттера в вязкоупругих материалах, а также в задачах теории управления и прикладных задачах, возникающих в теории вязкоупругости.

1.7 Апробация

Постановка задачи и результаты обсуждались на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ» под руководством профессора В.В. Власова и доцента Н.А. Раутиан 2016 - 2022 гг. (неоднократно).

2. Научный семинар «Операторные модели в математической физике» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора А.А. Шкаликова, 2017 г.

3. Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ под руководством профессора Д.В. Георгиевского, профессора М.В. Шамолина, профессора С.А. Агафонова, 2017 – 2022 гг. (неоднократно).

4. Научный семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, профессора М.И. Зеликина, чл.-корр. РАН, профессора В.Ю. Протасова, профессора В.М. Тихомирова и профессора А.В. Фурсикова, 2018 г.

5. Научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ под руководством академика РАН, профессора В.А. Садовничего, 2019, 2022 гг.

6. Научный семинар «Асимптотические методы в математической физике» лаборатории механики природных катастроф ИПМех РАН под руководством профессора С.Ю. Доброхотова, чл.-корр. РАН, профессора В.Е. Назайкинского, чл.-корр. РАН, профессора А.И. Шафаревича, 2019 г.

7. Научный семинар «Спектральный анализ дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» кафедры функционального анализа и его применений и кафедры общей математики факультета ВМК МГУ под руководством академика РАН, профессора Е.И. Моисеева и профессора И.С. Ломова, 2020 г.

Результаты диссертации докладывались на всероссийских и международных конференциях:

1. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXII, Воронеж, Россия, 3-9 мая 2021

2. Международная Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» – XXXIII, Воронеж, 3-9 мая 2022

3. The First International conference «Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis», Долгопрудный, 17–21 июня 2019

4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, 2017

1.8 Публикации

Результаты диссертации изложены в 5 статьях [67]–[71], опубликованных в научных журналах, индексируемых в наукометрических базах Web of Science, SCOPUS, RSCI. В работах, содержащих основные результаты, выводы и положения диссертационного исследования, выполненных совместно с Ю.А. Тихоновым, автору настоящей диссертации принадлежат результаты, посвященные вопросу бесконечности невещественного спектра символа уравнения (1.3) при учете трения Кельвина–Фойгхта. Список работ автора приведён в конце автореферата и диссертации.

1.9 Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы из 71 наименования. Общий объём работы составляет 121 страницу.

1.10 Обзор содержания диссертации

В **первой главе** диссертации проведён спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом интегродифференциального уравнения (1.1): установлена общая структура спектра, построена асимптотика невещественного спектра, установлено условие отсутствия спектра в правой полуплоскости, а также приведены теоремы об устойчивости решений и корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2) для интегродифференциального уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа, которая будет исследоваться в данной главе, и запишем его в операторном виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + M_1\frac{d}{dt}u(t) + M_2\left(A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau\right) + \\ + M_3Tu(t) = f(t), \quad t > 0,$$

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1,$$

где M_1, M_2, M_3 — положительные физические константы, $u(t)$ и $f(t)$ — это определенные на луче $[0, +\infty)$ вектор-функции со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, а оператор A^{-1}, обратный к нему, является компактным. Хорошо известно, что его собственные векторы e_n составляют ортонормированный базис в пространстве H, а собственные значения a_n удовлетворяют соотношениям:

$$Ae_n = a_ne_n, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Будем предполагать, что собственные значения a_n строго возрастают: $a_{n+1} > a_n > 0$. Оператор T замкнут и компактно подчинен оператору A. Оператор T замкнут и компактно подчинен оператору A. Для уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа можно представить его в виде произведения частичной изометрии и самосопряженного

оператора
$$T = UA^{1/2}.$$

Функция $\Gamma(t)$ — ядро релаксации, убывающая положительная интегрируемая функция $(0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Будут использованы прежде всего функции вида
$$\Gamma(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{-\gamma_j t}, \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$
где
$$c_j \geq 0, \quad \gamma_{j+1} > \gamma_j > 0, \quad \lim_{j\to+\infty} \gamma_j = +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < +\infty, \tag{1.6}$$
а также функции вида
$$\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} d\sigma(x), \quad t \geq 0 \tag{1.7}$$
такие, что функция $\sigma(x)$ не убывает, положительна, непрерывна слева, интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} < +\infty$, и $\sigma(0) = 0$.

Возьмем произвольное число $\gamma \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$, если она сильно измерима, и функция, определяемая соотношением $g(t) = e^{-\gamma t} \cdot ||u(t)||_H$, лежит в пространстве $L_2([0,+\infty))$. Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением
$$(u(t), v(t))_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} = \int\limits_0^{+\infty} (u(t), v(t))_H e^{-2\gamma t} dt.$$

Определение 2. Вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^k([0,+\infty), A)$, $k \in \mathbb{N}$, если

1. существует (в обобщенном смысле) $u^{(k)}(t)$ и $u^{(k)}(t) \in L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$,

2. $u(t) \in \operatorname{Dom} A^k$ почти всюду на луче $[0,+\infty)$, и $A^k u(t) \in L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$.

Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением:

$$(u(t),v(t))_{W^k_{2,\gamma}([0,+\infty),A)} = \int\limits_0^{+\infty} \Big((u^{(k)}(t), v^{(k)}(t))_H + (A^k u(t), A^k v(t))_H \Big) e^{-2\gamma t} dt.$$

Функция $e^{-\gamma t}$ здесь — экспоненциальный вес. При $\gamma = 0$ соответствующие пространства будем обозначать $L_2([0,+\infty),H)$ и $W^k_2([0,+\infty),A)$. Основные свойства пространств Соболева вектор-функций сформулированы и доказаны в первой главе монографии [25].

Определение 3. Вектор-функцию $u(t)$ назовем *слабым решением* задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, удовлетворяет соотношению $u(0+) = \varphi_0$, и для любой вектор-функции $v(t) \in W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$ выполнено

$$\begin{gathered}\Phi(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} 2\gamma(u'(t),v(t)) - (u'(t),v'(t)) - (\varphi_1, v(0+))_H + M_1(u'(t),v(t)) + \\ + M_2 \left((Au(t),Av(t)) - \left(\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)Au(\tau)d\tau, Av(t) \right) \right) + \\ + M_3(Tu(t),v(t)) - (f(t),v(t)) = 0. \quad (1.8)\end{gathered}$$

Здесь все скалярные произведения вектор-функций берутся в пространстве $L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$.

Определение 4. Вектор-функция $u(t)$ называется *сильным решением* задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$, удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на луче $[0,+\infty)$ и начальным условиям (1.2).

Применение преобразования Лапласа к уравнению (1.1) (при $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + M_1 z I + M_2 \left(1 - K(z)\right) A^2 + M_3 T, \tag{1.9}$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь $K(z)$ – преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$. При использовании $\Gamma(t)$ вида (1.5) получим $K(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{z+\gamma_k}$. При использовании $\Gamma(t)$ вида (1.7) получим $K(z) = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{d\sigma(t)}{z+t}$.

Определение 5. *Резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(z)$ будем называть множество всех значений $z \in \mathbb{C}$, для которых оператор $L^{-1}(z)$ существует, ограничен и задан на всем пространстве. Дополнение множества $R(L)$ в комлексной плоскости, т.е., $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus R(L)$, будем называть *спектром* оператор-функции $L(z)$. Определим также *невещественный спектр* уравнения, то есть $\sigma_{Im}(L) = \sigma(L) \setminus \mathbb{R}$.

Введем обозначение

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_1 M_2 (1 - D) x^3 - M_3 \sqrt{M_2} x - M_1 M_3, \tag{1.10}$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty \Gamma(t) dt$. Константа $D < \infty$, так как $\Gamma(t)$ интегрируема.

Сформулируем теорему 4.1 о корректной разрешимости и устойчивости решений в пространствах Соболева $W^1_{2,\gamma}([0, +\infty), A)$:

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. *Существует такое* $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, *что* $\Gamma(t) e^{-\gamma_1 t}$ *— монотонно убывающая положительная интегрируемая функция.*
2. *Существует такое* $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, *что* $f(t)$ *принадлежит пространству* $L_{2,\gamma_2}([0, +\infty), H)$.
3. $\varphi_0 \in \mathrm{Dom}(A^{3/2})$ *и* $\varphi_1 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$.

Тогда существует такое $\gamma_3 \in \mathbb{R}$, *что для любого* $\gamma \geq \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *задача* (1.1), (1.2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}([0, +\infty), A)$ *(то есть существует единственное слабое решение задачи* (1.1), (1.2)*), и для её решения справедлива оценка*

$$||u||_{W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)} \leq d \left(||f||_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} + ||A^{3/2} \varphi_0||_H + ||A^{1/2} \varphi_1||_H \right),$$

где константа $d > 0$ *не зависит от начальных данных* φ_0, φ_1 *и правой части* $f(t)$.

Кроме того, если $p(\sqrt{a_1}) > 0$, *где* a_1 *— наименьшее собственное значение оператора* A, *то* γ_3 *можно взять того же знака, что и* γ_1.

Замечание. Величины $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ не обязательно должны быть положительными. Если уравнение (1.1) автономно, то есть $f \equiv 0$, то γ_2 можно положить любым.

Из теоремы 4.1 при $\gamma_1,\ \gamma_2 < 0$ следует экспоненциальное убывание решений уравнения, а при $\gamma_1,\ \gamma_2 \leq 0$ следует ограниченность решений уравнения.

В первой главе также доказано, что если $p(\sqrt{a_1}) > 0$ и $\gamma_1 < 0$, то спектр оператор-функции $L(z)$ будет отделен от полуплоскости $\{\mathrm{Re} z \geq 0\}$.

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\Gamma(t)e^{\gamma_1 t}$ *— монотонно убывающая положительная интегрируемая функция для некоторого* $\gamma_1 > 0$ *и* $p(\sqrt{a_1}) > 0$, *где* a_1 *— наименьшее собственное значение* A.

Тогда для некоторого $\gamma > 0$ *в полуплоскости* $\{\mathrm{Re}\ z \geq -\gamma\}$ *отсутствует спектр оператор-функции* $L(z)$, *определенной в* (1.9) *и являющейся символом уравнения* (1.1).

Рассмотрим случай уравнения Гуртина–Пипкина с A^2–компактным возмущением:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau + RA^\theta u(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{1.11}$$

где $\theta \in [0, 2)$, R — ограниченный оператор. Ядро релаксации Γ имеет вид (1.5). Предположим, что собственные значения оператора A удовлетворяют соотношению

$$a_n^{\theta-1}(a_n - a_{n-1})^{-1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.12}$$

Применение преобразования Лапласа к уравнению (1.11) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2 + RA^\theta, \tag{1.13}$$

которая является символом уравнения (1.11). Здесь $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Укажем асимптотику невещественного спектра $\sigma(L)$.

Положим

$$l_n(z) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2. \tag{1.14}$$

Эта функция комплекного переменного имеет лишь один корень μ_n^+ в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ (см. [4]). Далее, возьмем $D_{n,C} = \{z : |z - \mu_n^+| < Ca_n^{\theta-1}\}$.

Теорема 5.1. *Предположим, собственные числа оператора A удовлетворяют соотношению* (1.12). *Тогда существуют положительные константы y_0, C такие, что спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(z)$, лежащий в верхней полуплоскости $\{z : \operatorname{Im}\, z > y_0\}$, может быть представлен в виде совокупности точек $\{\widetilde{\mu}_n^+,\ n > n_0\}$, так что $\widetilde{\mu}_n^+ \in D_{n,C}$. Число n_0 здесь — наименьшее натуральное число такое, что для любого $n > n_0$ выполняется*

$$D_{n,C} \subset \{z : \operatorname{Im}\, z > y_0\}. \tag{1.15}$$

Замечание. В случае $\theta < 1$ радиус круга $D_{n,C}$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$, а значит, можно описать асимптотику невещественного спектра $L(z)$:

$$\widetilde{\mu}_n^+ = \mu_n^+ + O(a_n^{\theta-1}).$$

Рассмотрим теперь оператор-функцию, являющуюся символом первоначального уравнения колебания вязкоупругой пластинки в потоке жидкости или газа (1.1):

$$L(z) = z^2 I + M_1 z I + M_2(1 - K(z))A^2 + M_3 U A^\theta.$$

Известно, что $\theta = 1/2$; здесь ради большей общности рассмотрим $\theta \in [0, 1)$. Обозначим $(\mu_n^+)_1$ — лежащий в верхней полуплоскости корень уравнения

$$\rho^2 + (1 - \widetilde{K}(\rho))a_n^2 = 0,$$

функцию от переменной ρ

$$\widetilde{K}(\rho) = K\left(\sqrt{M_2}\rho - M_1/2\right) \tag{1.16}$$

и область $(D_{n,C})_1$:

$$\begin{aligned}(D_{n,C})_1 = \{\rho\,:\,|\rho - (\mu_n^+)_1| < Ca_n^{\theta-1}\} = \\ = \{z\,:\,|z - (\sqrt{M_2}(\mu_n^+)_1 - M_1/2)| < C\sqrt{M_2}a_n^{\theta-1}\}.\end{aligned}$$

Теорема 5.3. *Предположим, собственные числа оператора A удовлетворяют* *соотношению* (1.12). *Тогда существуют положительные константы* y_0, C *такие, что спектр* $\sigma(L)$ *оператор-функции* $L(z)$, *лежащий в верхней полуплоскости* $\{z : \operatorname{Im} z > y_0\}$, *может быть представлен в виде совокупности точек* $\{\widetilde{\mu}_n^+,\ n > n_0\}$, *так что*

$$\widetilde{\mu}_n^+ \in (D_{n,C})_1.$$

Число n_0 *здесь — наименьшее натуральное число такое, что для любого* $n > n_0$ *выполняется*

$$(D_{n,C})_1 \subset \{z : \operatorname{Im} z > y_0\}.$$

Замечание. С учетом определения $D_{n,C}$ асимптотика невещественного спектра $L(z)$ имеет вид

$$\widetilde{\mu}_n^+ = \sqrt{M_2}(\mu_n^+)_1 - M_1/2 + O(a_n^{\theta-1}).$$

Следствие 5.2. *В случае ядра вида* (1.5) *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, *можно записать в явном виде асимптотику спектра* $L(z)$:

$$\widetilde{\mu}_n^+ = i\sqrt{M_2}a_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k}{2} - \frac{M_1}{2} + O(a_n^{\theta-1}). \tag{1.17}$$

Во **второй главе** исследован спектр символа уравнения Гуртина–Пипкина в случае ядер релаксации вида (1.7), а также в случае наличия слагаемого трения Кельвина–Фойгхта; кроме того, получена разрешимость в шкале пространств для немодифицированного уравнения.

Уравнение Гуртина–Пипкина может быть получено из исследованого ранее уравнения (1.1), если взять $M_1 = M_3 = 0,\ M_2 = 1$:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau = f(t), \quad t > 0.$$

Добавив к нему начальные условия:

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1,$$

получаем задачу Коши (1.3), (1.4).

Во второй главе будем использовать обозначение $L(z)$ для символа именно уравнения (1.1):

$$L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2. \tag{1.18}$$

Рассмотрим проекции $L(z)$ на одномерные собственные подпространства:

$$l_n(z) = (L(z)e_n, e_n) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2, \tag{1.19}$$

порожденные собственными векторами оператора A — $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Тогда спектр $L(z)$ есть замыкание множества нулей функций $l_n(z)$:

$$\sigma(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : l_n(z) = 0\}}.$$

Исследуем невещественный спектр $L(z)$:

$$\sigma_{Im}(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ l_n(z) = 0\}} \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0,\ l_n(z) = 0\}}.$$

Заметим также, что из вещественности коэффициентов (1.19) вытекает, что спектр будет симметричен относительно вещественной оси. Рассмотрим невещественный спектр в верхней полуплоскости:

$$\sigma_{Im^+}(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ l_n(z) = 0\}}.$$

Обозначим класс неубывающих положительных непрерывных слева функций $\sigma(t)$ на $[0, +\infty)$ таких, что интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} < +\infty$ и $\sigma(0) = 0$ за $\mathbf{F}[0, +\infty)$. Определим асимптотику невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина $L(z)$ с ядром релаксации вида (1.7):

$$L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2,$$

где $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$:

$$K(z) = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{z + t}. \tag{1.20}$$

и $\sigma \in \mathbf{F}[0, +\infty)$.

Предложение 7.2. *Функция $l_n(z)$ имеет в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ только один ноль, который обозначим через μ_n^+.*

Доказательство данного предложения приведено в работе [4]. Представленная ниже теорема 7.2 является естественным развитием результатов данной работы, затрагивает более широкий класс ядер и может быть применена к другим описанным там интегродифференциальным уравнениям.

Введем обозначение

$$\hat{\sigma}(x, v) = \frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)}.$$

Определение. Определенная на луче $[0, +\infty)$ функция $\sigma(x)$ *регулярно меняется на бесконечности*, если при всех $x > 0$ существует предел

$$\lim_{v \to +\infty} \hat{\sigma}(x, v) = r(x).$$

Класс регулярно меняющихся функций достаточно подробно изучен (см. работы [65], [66]). Для производящей функции $\sigma(t)$ из этого класса возможно исследовать асимптотическое поведение корней μ_n^+ :

Теорема 7.2. *Пусть ядро релаксации $\Gamma(t)$ имеет вид (1.7) для регулярно меняющейся на бесконечности функции $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ Тогда*

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $C_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr(q)}{i + q}$.

Следствие 7.1. *Пусть $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$, и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha (\ln x)^\beta (1 + \bar{o}(1)), \quad x \to +\infty, \tag{1.21}$$

где $M > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $0 < \alpha < 1$; или $\beta \geq 0$, при $\alpha = 0$.

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i} M(a_n)^\alpha (\ln a_n)^\beta (1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $\hat{C}_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} e^{i\pi(\alpha-1)/2}, & \alpha > 0 \\ -i, & \alpha = 0 \end{cases}.$

Можно также записать следствие 7.1 через ядро релаксации $\Gamma(t)$:

Следствие 7.3. *Пусть* $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$, *и*

$$\sigma(x) = Mx^{\alpha}(\ln x)^{\beta}(1 + \bar{o}(1)), \quad x \to +\infty,$$

где $\beta \in \mathbb{R}$, *при* $0 < \alpha < 1$; *или* $\beta \geq 0$, *при* $\alpha = 0$

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i\Gamma_0(\alpha+1)} \Gamma(1/a_n)(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $\hat{C}_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} e^{i\pi(\alpha-1)/2}, & \alpha > 0 \\ -i, & \alpha = 0. \end{cases}$, *а* $\Gamma_0(t)$ *— Гамма-функция Эйлера.*

При $\Gamma(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j e^{-\gamma_j t} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx} d\sigma(x)$ функция $\sigma(x)$ — кусочно постоянная, имеющая скачки в точках γ_j равные c_j. Тогда можно записать следствие 7.1 для c_j, γ_j, имеющих степенное поведение:

Следствие 7.5. *Пусть* $\Gamma(t) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} c_j e^{-\gamma_j t}$, *где* $c_j = Mj^{\alpha}$, $\gamma_j = Bj^{\beta}$, *и* $M, B > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \geq -1$, $\alpha - \beta < -1$.

Тогда при $\alpha > -1$:

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{W}{2i} \frac{M}{B^s(\alpha+1)} (a_n)^s (1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $s = \dfrac{\alpha+1}{\beta}$ *и* $W = \dfrac{\pi s}{\sin\pi s} e^{i\pi(s-1)/2}$.

А при $\alpha = -1$:

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\frac{M}{\beta} \ln(a_n)(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty.$$

Данное следствие является естественным развитием результатов работы [5], и покрывает случай $\alpha \geq 0$.

Сформулируем три теоремы о корректной разрешимости задачи (1.3), (1.4).

Далее будут использоваться ядра релаксации вида (1.5) с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1.$$

Теорема 8.1. *Пусть* $\varphi_0 \in \operatorname{Dom}\left(A^2\right)$ *и* $\varphi_1 \in \operatorname{Dom}(A)$, *а* $Af(t) \in L_2([0,+\infty), H)$, *тогда существует единственное сильное решение задачи* (1.3), (1.4) $u(t)$, $t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы* d *(не зависящей от начальных данных* φ_0, φ_1 *и правой части* $f(t)$*) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);A)} \leq d\left(||Af||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A^2\varphi_0||_H + ||A\varphi_1||_H\right). \qquad (1.22)$$

В работе [5] рассмотрен вопрос корректной разрешимости задачи (1.3), (1.4) в весовых пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^2([0,+\infty), A)$ для неотрицательного веса γ. Теорема 8.1 является естественным развитием указанного результата, в ней для $\gamma = 0$ установлена корректная разрешимость в сильном смысле задачи (1.3), (1.4) и асимптотическая устойчивость решений.

Рассмотрим теперь частный случай задачи (1.3),(1.4) с условиями степенного поведения c_k и γ_k при $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$:

$$c_k = Ak^{-\alpha},\ \gamma_k = Bk^{\beta}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (1.23)$$

$$c_k > 0,\ \gamma_{k+1} > \gamma_k > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (1.24)$$

$$\alpha + \beta > 1,\ \alpha < 1,\ \beta > 0. \qquad (1.25)$$

Тогда для $s = (1-\alpha)/(2\beta)$ верна

Теорема 8.2. *Пусть* $\varphi_0 \in \operatorname{Dom}\left(A^{2-s}\right)$ *и* $\varphi_1 \in \operatorname{Dom}\left(A^{1-s}\right)$, *а* $A^{1-2s}f(t) \in L_2([0,+\infty), H)$, *тогда существует единственное сильное решение задачи* (1.3), (1.4) $u(t)$, $t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы* d *(не зависящей от начальных данных* φ_0, φ_1 *и правой части* $f(t)$*) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);A)} \leq d\left(||A^{1-2s}f||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A^{2-s}\varphi_0||_H + ||A^{1-s}\varphi_1||_H\right). \qquad (1.26)$$

Теорема 8.2 ослабляет требования, предъявляемые к начальным данным, для получения корректной разрешимости в сильном смысле (1.3),(1.4) с условиями степенного поведения c_k и γ_k (1.23)–(1.25).

Теорема 8.3. *Пусть* $\varphi_0 \in \mathrm{Dom}\,(A)$ *и* $\varphi_1 \in H$, *а* $f(t) \in L_2([0,+\infty), H)$, *тогда существует единственное слабое решение задачи* (1.3), (1.4) $u(t)$, $t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы* d *(не зависящей от начальных данных* φ_0, φ_1 *и правой части* $f(t)$*) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^1([0,+\infty),A)} \leq d\left(||f||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A\varphi_0||_H + ||\varphi_1||_H\right). \tag{1.27}$$

Кроме того, в диссертации представлены результаты, посвященные разрешимости в шкале пространств задачи (1.3), (1.4) на основе теорем 8.1–8.3.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гуртина–Пипкина с учетом трения Кельвина–Фойгхта (при $\alpha, \beta > 0$)

$$u''(t) + \alpha A^2 u'(t) + \beta A^2 u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-s) A^2 u(s) ds = f(t), \quad t > 0, \tag{1.28}$$

$$u(0+) = \varphi_0, \ u'(0+) = \varphi_1. \tag{1.29}$$

В данном разделе будут использованы ядра релаксации вида (1.5). Дополнительно рассмотрим условие, которое соответствует тому, что $\Gamma(t) \in C([0,+\infty))$, то есть $\Gamma(0) < +\infty$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty. \tag{1.30}$$

Применение преобразования Лапласа к (1.28) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + \alpha z A^2 + \beta A^2 - K(z) A^2, \tag{1.31}$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь

$$K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j + z}$$

является преобразованием Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Определим асимптотику невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина при учете трения Кельвина–Фойгхта $L(z)$.

Для нахождения точек спектра рассмотрим проекции $L(z)$ на одномерные собственные подпространства

$$l_n(z) = (L(z)e_n, e_n) = z^2 + \alpha z a_n^2 + \beta a_n^2 - K(z)a_n^2,$$

порожденные собственными векторами оператора A — $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Спектр (1.31) есть замыкание множества всех нулей мероморфных функций $l_n(z)$:

$$\sigma(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : l_n(z) = 0\}}.$$

В настоящей работе приведено достаточное условие наличия бесконечного невещественного спектра символа $L(z)$ при ядре релаксации $\Gamma(t)$ вида (1.5) с бесконечной суммой экспонент.

Введём обозначение:

$$g_n = \frac{\alpha a_n^2 + \sqrt{\alpha^2 a_n^4 - 4a_n^2\beta}}{2},$$

а также

$$d_k = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\neq k}} \frac{c_m}{|\gamma_m - \gamma_k|}. \tag{1.32}$$

Необходимо отметить, что будут рассмотрены лишь большие значения n, при которых $\alpha^2 a_n^2 > 4\beta$. Тогда числа g_n вещественны.

Теорема 9.3. *Если при $k \to \infty$ выполнены условия*

$$d_k = \overline{o}(\sqrt{c_k}), \tag{1.33}$$

$$\sqrt{c_k} = \overline{o}(\gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}), \tag{1.34}$$

и существуют две подпоследовательности натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{c_{k_j}}} |g_{n_j} - \gamma_{k_j}| = 0, \quad \lim_{j\to+\infty} \sqrt{c_{k_j}} a_{n_j}^2 = +\infty, \tag{1.35}$$

то спектр оператор-функции $L(z)$ содержит две комплексно-сопряженные последовательности $\mu_n^\pm$ невещественных точек.

Рассмотрим теперь два примера последовательностей $\{c_j\}$, $\{\gamma_j\}$, удовлетворяющих условию теоремы.

Выберем последовательность $n(k)$ так, что $a_{n(1)} > a_1^2,\ a_{n(k+1)}^2 - a_{n(k)}^2 > (k+1)^2 - k^2$. Тогда зададим коэффициенты ядра свёртки следующим образом:

$$c_k = 1, \quad \gamma_k = g_{n(k)}. \tag{1.36}$$

Заметим, что условия (1.6) выполнены, но не выполнено условие (1.30). Условия теоремы 9.3 выполнены, и при этом можно показать, что мнимые части невещественных точек спектра оператор-функции $L(z)$ не стремятся к нулю.

В случае выполнения условия (1.30) можно также построить пример задачи с бесконечным невещественным спектром оператор-функции $L(z)$. Выберем последовательность $n(k)$ так, что $a_{n(1)} > a_1^2,\ a_{n(k+1)}^2 - a_{n(k)}^2 > (k+1)^q - k^q$. Для задачи (1.28) рассмотрим следующие коэффициеты:

$$c_k = \frac{1}{k^{2p}}, \quad \gamma_k = g_{n(k)}. \tag{1.37}$$

Выбирая, $p > 1$, $q > p+1$, получим оператор-функцию, удовлетворяющий условию теоремы 9.3, при этом условие (1.30) также окажется выполненным.

В работе [4] А.Э. Еременко и С.А. Иванов показали, что в случае ядра вида (1.7), когда носитель меры компактен, невещественный спектр оператор-функции $L(z)$ конечен. Примеры (1.36), (1.37) дают ответ на вопрос, поставленный в указанной работе: возможно ли наличие бесконечного невещественного спектра оператор-функции $L(z)$, если носитель меры некомпактен. Действительно, для любого оператора A было построено такое ядро релаксации $\Gamma(t)$, что в спектре $L(z)$ будет счетное число невещественных точек спектра.

Отметим одно важное утверждение: бесконечный невещественный спектр оператор-функции $L(z)$ может появиться в результате сколь угодно малого изменения ядра $\Gamma(t)$.

Теорема 9.4. *Предположим, что спектр оператор-функции $L(z)$ имеет лишь конечное число невещественных точек в спектре. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

найдется $\Gamma^*(t) \in L_1([0,+\infty))$ *такое, что*

$$\|\Gamma(t) - \Gamma^*(t)\|_{L_1([0,+\infty))} < \varepsilon,$$

и оператор-функция

$$L^*(z) = z^2 I + \alpha z A^2 + \beta A^2 - K^*(z) A^2,$$

где $K^*(z)$ *— преобразование Лапласа* $\Gamma^*(t)$*, имеет бесконечное число невещественных точек в спектре.*

Отметим, что для обратной ситуации, когда спектр $\sigma(L)$ содержит бесконечное число невещественных точек, а $\sigma(L^*)$ должно быть конечным, аналогичное утверждение есть простое следствие результатов работы [4]: $\Gamma(t)$ с некомпактным носителем меры нужно приблизить некоторым $\Gamma^*(t)$, имеющим меру с компактным носителем.

Замечание. Пусть для ядра $\Gamma(t)$ выполнено условие (1.30), то есть $\Gamma(t) \in C([0,+\infty))$, тогда приближения в теореме 9.4 можно проводить по норме в $C([0,+\infty))$.

Часть I

Спектральный анализ уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа

2 Обозначения и определения

Рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа, которое будет исследоваться в данной главе, и запишем его в операторном виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + M_1\frac{d}{dt}u(t) + M_2\left(A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau\right) +$$
$$+ M_3Tu(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1, \quad (2.2)$$

где $M_1,\ M_2,\ M_3$ — положительные физические константы, $u(t)$ и $f(t)$ — это определенные на луче $[0, +\infty)$ вектор-функции со значениями в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, а оператор A^{-1}, обратный к нему, является компактным. Из теоремы Гильберта-Шмидта следует, что его собственные векторы e_n составляют ортонормированный базис в пространстве H, а собственные значения a_n, которые в данной работе предполагаются простыми, удовлетворяют соотношениям:

$$Ae_n = a_ne_n,\ a_{n+1} > a_n > a_1 > 0,\ \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Оператор T замкнут и компактно подчинен оператору A. Более того, для уравнения колебания вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа можно представить его в виде произведения частичной изометрии и самосопряженного оператора (см. [69], а также соотношение (3.7)):

$$T = UA^{1/2}.$$

Ядро релаксации $\Gamma(t)$ — убывающая положительная интегрируемая функция $(0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Будут использованы прежде всего функции вида

$$\Gamma(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_je^{-\gamma_jt}, \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

где

$$c_j \geq 0 \qquad \gamma_{j+1} > \gamma_j > 0, \quad \lim_{j\to+\infty} \gamma_j = +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < +\infty, \tag{2.4}$$

а также функции вида

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\sigma(x), \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

таких что функция $\sigma(x)$ неубывает, положительна, непрерывна слева, интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} < +\infty$, и $\sigma(0) = 0$.

Здесь и далее $\gamma \in \mathbb{R}$ — некоторая константа, называемая экспоненциальным весом. Все скалярные произведения полуторалинейны.

Определение 1. Вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$, если она сильно измерима, и функция, определяемая соотношением $g(t) = e^{-\gamma t} \cdot ||u(t)||_H$, лежит в пространстве $L_2([0, +\infty))$. Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u(t), v(t))_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} = \int_0^{+\infty} ((u(t), v(t))_H)\, e^{-2\gamma t} dt.$$

Определение 2. Вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^k([0, +\infty), A)$, $k \in \mathbb{N}$, если

1. $u^{(k)}(t)$ существует (в смысле обобщенных функций, см. [2], [32]) на $[0, +\infty)$ и $u^{(k)}(t) \in L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$,
2. $u(t) \in \operatorname{Dom} A^k$ почти всюду и $A^k u(t) \in L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$.

Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением:

$$(u(t), v(t))_{W_{2,\gamma}^k([0,+\infty),A)} = \int_0^{+\infty} \Big((u^{(k)}(t), v^{(k)}(t))_H + (A^k u(t), A^k v(t))_H\Big)\, e^{-2\gamma t} dt$$

Функция $e^{-\gamma t}$ здесь — экспоненциальный вес. При $\gamma = 0$ соответствующие пространства будем обозначать $L_2([0, +\infty), H)$ и $W_2^k([0, +\infty), A)$.

Определение 3. Вектор-функцию $u(t)$ назовем *слабым решением* задачи (2.1), (2.2), если она принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, удовлетворяет соотношению $u(0+) = \varphi_0$, и для любой вектор-функции $v(t) \in W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$ выполнено

$$\Phi(u,v) \overset{\text{def}}{=} 2\gamma(u'(t),v(t)) - (u'(t),v'(t)) - (\varphi_1, v(0+))_H + M_1(u'(t),v(t)) + \\ + M_2\left((Au(t),Av(t)) - \left(\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)Au(\tau)d\tau, Av(t)\right)\right) + \\ + M_3(Tu(t),v(t)) - (f(t),v(t)) = 0. \quad (2.6)$$

Здесь все скалярные произведения вектор-функций берутся в пространстве $L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$.

Определение 4. Вектор-функция $u(t)$ называется *сильным решением* задачи (2.1), (2.2), если она принадлежит для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ пространству Соболева $W^2_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$, выполнены равенства (2.2), и соотношение (2.1) выполнено почти всюду на $[0,+\infty)$.

Рассмотрим некоторые свойства пространств Соболева, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 2.1 (о промежуточных производных)**.** *Пусть вектор-функция* $u(t) \in W^k_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$. *Тогда* $A^{n-j}u^{(j)}(t) \in L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$, $j = 0,1,2,\ldots,k$, *и, кроме того, выполнено*

$$||A^{n-j}u^{(j)}(t)||_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} \le d||u(t)||_{W^k_{2,\gamma}([0,+\infty),A)}, \quad j = 0,1,2,\ldots,k,$$

где постоянная d *не зависит от* u.

Определим для произвольного гильбертова пространства E пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$ со значениями в E — $C([0,+\infty),E)$. Его можно снабдить нормой

$$||\varphi(t)||_{C([0,+\infty),E)} = \sup_{t\in[0,+\infty)} ||\varphi(t)||_E.$$

Теорема 2.2 (о непрерывности функций из $W^k_2([0,+\infty),A)$)**.** *Пусть вектор-функция* $u(t) \in W^k_2([0,+\infty),A)$. *Тогда* $A^{n-j-1/2}u^{(j)}(t) \in C([0,+\infty),H)$, $j =$

$0, 1, 2, \ldots, k-1$, *и, кроме того, выполнено*

$$||A^{n-j-1/2}u^{(j)}(t)||_{C([0,+\infty),H)} \leq k||u(t)||_{W_2^k([0,+\infty),A)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

где постоянная k не зависит от u.

Теорема 2.3 (о следах). *Отображение $W_2^k([0,+\infty),A) \to \prod\limits_{j=0}^{k-1} \mathrm{Dom}\left(A^{k-j-1/2}\right)$, определяемое как $u(t) \mapsto \left(u(0+), u'(0+), \ldots, u^{(k-1)}(0+)\right)$, сюръективно.*

Доказательства этих трех теорем см. в первой главе [25].

Определение 5. *Преобразованием Лапласа* измеримой функции $f : \mathbb{R}^+ \to H$, которая является экспоненциально ограниченной, то есть существуют константы $M, w \in \mathbb{R},\ M > 0$ такие, что

$$||f(t)||_H \leq Me^{wt},$$

назовем

$$\widehat{f}(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt} f(t) dt. \tag{2.7}$$

Здесь и далее интегрирование в гильбертовых пространствах будет вестись по Бохнеру (см. подробнее [33], [7]).

В полуплоскости $\{z : \mathrm{Re}\, z > w\}$ преобразование Лапласа является аналитической функцией. Свойства преобразования Лапласа вектор-функций аналогичны свойствам преобразования Лапласа скалярных функций.

Далее также потребуются результаты, связывающие через преобразование Лапласа пространства $L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$ и пространства Харди в полуплоскости вектор-функций (подробнее см. [7], [34], [35]).

Определение 6. Обозначим через $H_2(\mathrm{Re}\, z > \gamma, H)$ *пространство Харди*[1] вектор-функций со значениями в H в полуплоскости $\{z : \mathrm{Re}\, z > \gamma\}$. Оно состоит из аналитических в $\{z : \mathrm{Re}\, z > \gamma\}$ функций таких, что конечна норма

$$||f||_{H_2(\mathrm{Re}\, z > \gamma, H)} = \left(\sup_{\mu > \gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||f(\mu + i\nu)||_H^2 d\nu \right)^{1/2} < +\infty.$$

[1]На месте H может стоять произвольное гильбертово пространство, включая $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(u, v) = u\bar{v}$

Пространство Харди является гильбертовым пространством. Как и в скалярном случае можно доказать, что почти всюду существует след функции на $\{z : \operatorname{Re} z = \gamma\}$:

$$f^*(i\mu + \gamma) = \lim_{\mu \to \gamma+} f(\mu + i\nu),$$

причем $f^* \in L_2(\{z : \operatorname{Re} z = \gamma\}, H)$ и $||f||_{H_2(\operatorname{Re} z > \gamma, H)} = ||f^*||_{L_2(\{z : \operatorname{Re} z = \gamma\}, H)}$. В данном случае

$$||h||_{L_2(\{z : \operatorname{Re} z = \gamma\}, H)} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||h(\gamma + i\nu)||_H^2 d\nu \right)^{1/2}.$$

Справедлива следующая замечательная теорема .

Теорема 2.4 (Пэли-Винер). *Вектор-функция* $g(z) = \widehat{f}(z)$, *определяемая* (2.7) *является преобразованием Лапласа вектор-функции* $f \in L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$ *в том и только в том случае, когда* $g \in H_2(\operatorname{Re} z > \gamma, H)$, *причем*

$$||f||_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} = ||g||_{H_2(\operatorname{Re} z > \gamma, H)}.$$

Определение 7. Применение преобразования Лапласа к уравнению (2.1) (при $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + M_1 z I + M_2 (1 - K(z)) A^2 + M_3 T, \tag{2.8}$$

которая является *символом* исходного уравнения. Здесь $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$. При использовании $\Gamma(t)$ вида (2.3) получим $K(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{z + \gamma_k}$. При использовании $\Gamma(t)$ вида (2.5) получим $K(z) = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{d\sigma(t)}{z + t}$.

Определение 8. *Резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(z)$ будем называть множество всех значений $z \in \mathbb{C}$, для которых оператор $L^{-1}(z)$ существует, ограничен и задан на всем пространстве. Дополнение множества $R(L)$ в комлексной плоскости, т.е., $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus R(L)$, будем называть *спектром* оператор-функции $L(z)$. Определим также *невещественный спектр* уравнения, то есть $\sigma_{Im}(L) = \sigma(L) \setminus \mathbb{R}$.

Описание спектра символа уравнения — важная часть спектрального анализа уравнения, она позволяет исследовать высокочастотные решения уравнения, находить частоты решений уравнения, которые убывают по амплитуде с наименьшей скоростью, позволяет установить корректную разрешимость уравнения и находить скорость распространения волн, а также исследовать вопрос устойчивости решений уравнения.

3 Постановка задачи

В настоящей работе исследуется уравнение движения вязкоупругой пластины в потоке жидкости или газа в рамках поршневой модели, записываемое в виде (см., например, [1]):

$$D_0\left(\Delta^2 u(x,y,t)-\varepsilon_0\int\limits_0^t \Gamma_0(t-\tau)\Delta^2 u(x,y,\tau)d\tau\right)+\rho h\ddot{u}(x,y,t)+ \\ +\frac{\gamma p_0}{a_0}\big(\dot{u}(x,y,t)+v\left(\overline{n}_0,\nabla u(x,y,t)\right)\big)=f(x,y,t). \quad (3.1)$$

Пластина двумерна и представляет собой прямоугольник со сторонами L_0 по направлению x и l_0 по направлению y; $u(x,y,t)$ описывает ее отклонение от положения равновесия в точке с координатами (x,y) в момент t; Δ^2 представляет собой оператор $\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$; $\overline{n}_0$ — это направление скорости движения жидкости или газа, а v — ее модуль. Пластина закреплена шарнирным образом с двух сторон вдоль оси Oy :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y,t)=u(x,y,t)=0 \quad (3.2)$$

при $x=0$ и $x=L_0$.

В настоящей работе будет рассмотрен одномерный аналог уравнения (3.1):

$$D_0\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t)-\varepsilon_0\int\limits_0^t \Gamma_0(t-\tau)\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,\tau)d\tau\right)+\rho h\ddot{u}(x,t)+ \\ +\frac{\gamma p_0}{a_0}\left(\dot{u}(x,t)+v\ \overline{n}_{0\,x}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)=f(x,t). \quad (3.3)$$

Тогда вместо условия (3.2) возьмем граничное условие

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=u(x,t)=0 \quad (3.4)$$

при $x = 0$ и $x = L_0$. Кроме того, в дальнейшем для упрощения математических выкладок примем $L_0 = \pi$, а также $n_{0x} = 1$ (т.е. жидкость или газ движется вдоль направления x). Перепишем уравнение (3.3) в более удобном для дальнейшего исследования операторном виде в соответствии с (2.1):

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + M_1\frac{d}{dt}u(t) + M_2\left(A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau\right) + \\ + M_3Tu(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (3.5)$$

где $M_1 = \dfrac{\gamma p_0}{a_0\rho h}$, $M_2 = \dfrac{D_0}{\rho h}$, $M_3 = \dfrac{v\gamma p_0}{a_0\rho h}$, $\Gamma(t) = \varepsilon_0\Gamma_0(t)$, а $u(t)$ и $f(t)$ — это определенные на луче $[0, +\infty)$ вектор-функции со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_2([0, \pi])$ по x. Неограниченный оператор $Av(x) = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}v(x)$ действует в пространстве H и имеет область определения

$$\mathrm{Dom}(A) = \{v(x) \in H \,:\, v''(x) \in H,\ v(0) = v(\pi) = 0\},$$

и, соответственно, оператор $A^2v(x) = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}v(x)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(A^2) = \{v(x) \in H \,:\, v^{(IV)}(x) \in H,\ v(0) = v(\pi) = v''(0) = v''(\pi) = 0\}.$$

Оператор T действует как $Tv(x) = \dfrac{d}{dx}v(x)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(T) = \{v(x) \in AC([0, \pi]) :\ v'(x) \in H,\ v(0) = v(\pi) = 0\}.$$

На $\Gamma(t)$ в данном случае никаких дополнительных ограничений не накладывается, кроме того, что это убывающая положительная интегрируемая функция.

Добавив к уравнению (3.5) начальные условия

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1 \quad (3.6)$$

мы получим задачу Коши.

Необходимо далее заметить, что определенный выше оператор A^2 является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, а оператор A^{-2}, обратный к нему, является компактным. Тогда по теореме Гильберта-Шмидта в $W_2^4([0;\pi])$ есть базис из собственных функций оператора

$A^2: e_n = \sin(nx),\ n \in \mathbb{N}$.

Кроме того, оператор T^* действует как $T^*v(x) = \dfrac{d}{dx}v(x)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}(T^*) = \{v(x) \in AC([0,\pi]):\ v'(x) \in H)\}$$

(см. например [2]). Так как оператор T замкнут, можно представить его в виде произведения частичной изометрии и самосопряженного оператора с помощью полярного разложения:

$$T = U\sqrt{T^*T} = UA^{1/2}. \tag{3.7}$$

4 Корректная разрешимость и вопросы устойчивости решений уравнения

Введем обозначение

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} M_1M_2(1-D)x^3 - M_3\sqrt{M_2}x - M_1M_3, \tag{4.1}$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty |\Gamma(t)|dt$. Константа $D < \infty$, так как $\Gamma(t)$ интегрируема.

Сформулируем основную теорему 4.1 об устойчивости решений и корректной разрешимости в пространствах Соболева $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$.

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. *Можно выбрать такое $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, что $\Gamma(t)e^{-\gamma_1 t}$ — монотонно убывающая положительная интегрируемая функция.*

2. *Существует такое $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, что $f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma_2}([0,+\infty), H)$.*

3. *$\varphi_0 \in \mathrm{Dom}(A^{3/2})$ и $\varphi_1 \in \mathrm{Dom}(A^{1/2})$.*

Тогда существует такое $\gamma_3 \in \mathbb{R}$, что для любого $\gamma \geq \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ задача (2.1), (2.2) *однозначно разрешима в пространстве $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$ (то есть существует единственное слабое решение задачи* (2.1), (2.2)*), и для её решения справедлива оценка*

$$||u||_{W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)} \leq d\left(||f||_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} + ||A^{3/2}\varphi_0||_H + ||A^{1/2}\varphi_1||_H\right), \tag{4.2}$$

где константа $d > 0$ не зависит от начальных данных.

Кроме того, если $p(\sqrt{a_1}) > 0$, где a_1 — наименьшее собственное значение оператора A, то γ_3 можно взять того же знака, что и γ_1.

Замечание. Переменные γ_1, γ_2, γ_3 не обязательно должны быть положительными. Тогда могут быть задействованы пространства Соболева с отрицательными весами, например, пространства $W^k_{2,-1}([0,+\infty), A)$ со скалярным произведением:

$$(u(t), v(t))_{W^k_{2,-1}([0,+\infty),A)} = \int\limits_0^{+\infty} \Big((u^{(k)}(t), v^{(k)}(t))_H + (A^k u(t), A^k v(t))_H \Big) e^{2t} dt.$$

В данном пространстве все функции экспоненциально убывают.

Если уравнение (3.5) автономно, то есть $f \equiv 0$, то γ_2 можно положить любым.

Отметим здесь, что результат о слабой корректной разрешимости уравнений Гуртина–Пипкина с двумя операторами (но без асимптотической устойчивости и пространств Соболева с отрицательными показателями γ) был опубликован в статье [23] В.В. Власовым и Н.А. Раутиан.

Приведем здесь два важных следствия, касающихся устойчивости и асимптотической устойчивости решений задачи (3.5), (3.6).

Следствие 4.1 (об асимптотической устойчивости решений)**.** *Допустим, выполнены условия теоремы 4.1, $p(\sqrt{a_1}) > 0$, а также γ_1 и γ_2 отрицательны, тогда существуют такие положительные константы γ и C, что в любой момент времени t*

$$||u(t)||_H \leq Ce^{-\gamma t}.$$

Следствие 4.2 (об устойчивости решений)**.** *Допустим, выполнены условия теоремы 4.1, $p(\sqrt{a_1}) > 0$, а также γ_1 и γ_2 меньше или равны нулю, тогда существует такая положительная константа C, что в любой момент времени t*

$$||u(t)||_H \leq C.$$

Несложно также доказать, что если $p(\sqrt{a_1}) > 0$ и $\gamma_1 < 0$, то спектр оператор-функции $L(z)$ будет отсутствовать в полуплоскости $\{\mathrm{Re} z \geq 0\}$.

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\Gamma(t)e^{\gamma_1 t}$ *— монотонно убывающая положительная интегрируемая функция для некоторого* $\gamma_1 > 0$ *и* $p(\sqrt{a_1}) > 0$*, где* a_1 *— наименьшее собственное значение* A.

Тогда для некоторого $\gamma > 0$ *в полуплоскости* $\{\mathrm{Re}\ z \geq -\gamma\}$ *отсутствует спектр оператор-функции* $L(z)$*, определенной в* (2.8) *и являющейся символом уравнения* (3.5).

Из неравенства (4.2) видно, что константы C в замечаниях выше тем меньше, чем меньше $||f||_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)}$, $||A^2\varphi_0||_H$, и $||A\varphi_1||_H$. Это приводит к классическому определению устойчивости по Ляпунову решений задачи (3.5), (3.6).

Условие $p(\sqrt{a_1}) > 0$ в следствиях 4.1 и 4.2 позволяет оценить снизу критическую скорость $v_{\text{кр}}$, при которой колебание пластинки становится неустойчивым. Действительно, если

$$p(\sqrt{a_1}) = M_1M_2(1-D)a_1^{3/2} - M_3\sqrt{M_2}a_1^{1/2} - M_1M_3 > 0,$$

то

$$M_3 < M_1M_2\frac{(1-D)a_1^{3/2}}{\sqrt{M_2}a_1^{1/2} + M_1},$$

или

$$v < \frac{a_0\rho h}{\gamma p_0} \cdot \frac{\dfrac{\gamma p_0 D_0}{a_0\rho^2h^2}(1-D)a_1^{3/2}}{\sqrt{\dfrac{D_0}{\rho h}}a_1^{1/2} + \dfrac{\gamma p_0}{\rho h}} = \frac{D_0(1-D)a_1^{3/2}}{\sqrt{D_0\rho h a_1} + \gamma p_0}.$$

При таких скоростях колебания устойчивы, следовательно,

$$v_{\text{кр}} > \frac{D_0(1-D)a_1^{3/2}}{\sqrt{D_0\rho h a_1} + \gamma p_0}. \tag{4.3}$$

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим вначале случай $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Преобразование Лапласа решения уравнения (3.5) с нулевыми начальными условиями представимо в виде

$$\widehat{u}(z) = L^{-1}(z)\widehat{f}(z), \tag{4.4}$$

где оператор-функция $L(z)$ является символом уравнения (3.5).

Покажем, что вектор-функция в правой части (4.4) такова, что $z\widehat{u}(z)$ и $A\widehat{u}(z)$ принадлежат пространству Харди $H_2(\mathrm{Re}\, z > \gamma, H)$, со скалярным произведением

$$(\widehat{u},\widehat{v})_{H_2(\operatorname{Re} z>\gamma,H)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\widehat{u}(\gamma+iy),\widehat{v}(\gamma+iy))_H dy.$$

Тогда по теореме Пели-Винера 2.4 получим, что вектор-функции $u'(t)$ и $Au(t)$ принадлежать пространству $L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$, и $u(t)$ будет принадлежать $W^1_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$. Обозначим главную часть $L(z)$

$$L_0(z)\overset{\mathrm{def}}{=}z^2I+M_1zI+M_2\left(1-K(z)\right)A^2,$$

где $K(z)$ — преобразование Лапласа $\Gamma(t)$. Из теоремы Пэли-Винера получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned}||Au(t)||^2_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)}&=||A\widehat{u}(z)||_{H_2(\operatorname{Re} z>\gamma)}=||AL^{-1}(z)\widehat{f}(z)||_{H_2(\operatorname{Re} z>\gamma)}=\\&=||AL_0^{-1}(z)(I+M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}\widehat{f}(z)||_{H_2(\operatorname{Re} z>\gamma)}\leq\\&\leq\sup_{\operatorname{Re} z>\gamma}||AL_0^{-1}(z)||\sup_{\operatorname{Re} z>\gamma}||(I+M_3T^{-1}L_0^{-1}(z))^{-1}||\cdot||\widehat{f}(z)||_{H_2(\operatorname{Re} z>\gamma)}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Для того, чтобы доказать принадлежность пространству $L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$ вектор-функции $Au(t)$ необходимо доказать равномерную ограниченность по норме операторов $AL_0^{-1}(z)$ и $(I+M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}$ при $\operatorname{Re} z>\gamma$, а также принадлежность $\widehat{f}(z)$ пространству Харди $H_2(\operatorname{Re} z>\gamma)$.

Сразу заметим, что если $\gamma\geq\gamma_2$, то по теореме Пэли-Винера $\widehat{f}(z)\in H_2(\operatorname{Re} z>\gamma)$. Докажем промежуточную лемму о свойствах преобразования Лапласа ядра $\Gamma(t)$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие 1 теоремы 4.1, тогда*

1. $\operatorname{Im} K(z)<0$ *при* $\operatorname{Re} z>\gamma_1$ *и* $\operatorname{Im} z>0$.

2. $\lim\limits_{\gamma\to+\infty}\sup\limits_{\operatorname{Re} z>\gamma}|K(z)|=0.$

Доказательство. Имеем $K(z)=\int\limits_0^\infty\Gamma(t)e^{-zt}dt.$

1. При $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, имеем

$$-\operatorname{Im} K(z) = \int\limits_0^{+\infty} \Gamma(t) e^{-xt} \sin(yt) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2\pi k/y}^{2\pi(k+1)/y} \Gamma(t) e^{-xt} \sin(yt) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{2\pi k/y}^{\pi(2k+1)/y} \Gamma(t) e^{-xt} \sin(yt) dt - \int\limits_{\pi(2k+1)/y}^{2\pi(k+1)/y} \Gamma(t) e^{-xt} (-\sin(yt)) dt \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \left(\Gamma\left(\frac{2\pi k + r}{y}\right) e^{-x(2\pi k + r)/y} - \Gamma\left(\frac{2\pi k + \pi + r}{y}\right) e^{-x(2\pi k + \pi + r)/y} \right) \frac{\sin(r)}{y} dr \quad (4.6)$$

Так как при $x > \gamma_1$ функция $\Gamma(t)e^{-xt}$ монотонно убывает и положительна, подынтегральное выражение в каждом слагаемом правой части (4.6) больше нуля, а, следовательно, вся правая часть больше нуля.

Что и требовалось доказать.

2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $b(\varepsilon) > 0$ настолько малым, что $\int\limits_0^{b(\varepsilon)} \Gamma(t) dt < \varepsilon$; это возможно сделать, так как $\Gamma(t)$ локально интегрируема. Тогда при $\gamma > \max\left(\dfrac{\Gamma(b(\varepsilon))}{\varepsilon}, \gamma_1\right) > 0$ и при $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$ и $x > \gamma$, имеем

$$|K(z)| \leq \int\limits_0^{+\infty} \Gamma(t) \left|e^{-zt}\right| dt = \int\limits_0^{+\infty} \Gamma(t) e^{-xt} dt =$$

$$= \int\limits_0^{b(\varepsilon)} \Gamma(t) e^{-xt} dt + \int\limits_{b(\varepsilon)}^{+\infty} \Gamma(t) e^{-xt} dt \leq \int\limits_0^{b(\varepsilon)} \Gamma(t) dt + \Gamma(b(\varepsilon)) \int\limits_{b(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-xt} dt.$$

Последнее неравенство осуществимо, так как $\Gamma(t)$ монотонно убывает при $\gamma > \gamma_1$ в силу условия 1 теоремы. Далее,

$$\int\limits_0^{b(\varepsilon)} \Gamma(t) dt + \Gamma(b(\varepsilon)) \int\limits_{b(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-xt} dt \leq \int\limits_0^{b(\varepsilon)} \Gamma(t) dt + \Gamma(b(\varepsilon)) \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} dt \leq$$

$$\leq \varepsilon + \Gamma(b(\varepsilon)) \frac{1}{x} \leq \varepsilon + \Gamma(b(\varepsilon)) \frac{1}{\gamma} < 2\varepsilon.$$

Таким образом $K(z)$ равномерно по y стремится к 0 при $x \to +\infty$.

Что и требовалось доказать.

Вернемся к доказательству теоремы 4.1. Далее необходимо рассмотреть два случая: в первом не учитывается знак выражения $p(\sqrt{a_1})$ (это необходимо для доказательства общей корректной разрешимости задачи (3.5), (3.6)), во втором предполагается $p(\sqrt{a_1}) > 0$ (это необходимо для доказательства свойств устойчивости и асимптотической устойчивости решений).

I. Знак $p(\sqrt{a_1})$ не учитывается.

Докажем вначале, что существует $\gamma_4 > 0$ такое, что $\sup\limits_{\operatorname{Re} z > \gamma} ||AL_0^{-1}(z)|| > 0$ при $\gamma > \gamma_4$. Действительно, воспользовавшись спектральной теоремой для самосопряженных операторов, заметим, что

$$\sup_{\operatorname{Re} z>\gamma} ||AL_0^{-1}(z)|| = \sup_{\substack{\operatorname{Re} z>\gamma \\ s\in\sigma(A)}} |s(z^2 + M_1 z + M_2(1 - K(z))s^2)^{-1}| = \sup_{\substack{\operatorname{Re} z>\gamma \\ n\in\mathbb{N}}} |a_n l_{0,n}^{-1}(z)|, \tag{4.7}$$

где

$$l_{0,n}(z) = (L_0(z)e_n, e_n) = z^2 + M_1 z + M_2(1 - K(z))a_n^2.$$

Здесь e_n — собственные функции оператора A, а a_n — соответствующие им собственные значения.

Согласно лемме 4.1 возьмем положительную константу $\gamma_4 > \gamma_1$ такую, что при $\operatorname{Re} z > \gamma_4$ выполняется

$$|K(z)| < \frac{1}{4}. \tag{4.8}$$

Тогда необходимо снизу оценить выражение $\left|\dfrac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|$.

При $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, при $y \geq 0$ (этого достаточно, так как $\overline{l_{0,n}(z)} = l_{0,n}(\overline{z})$) и при $x > \gamma_4 > \dfrac{4M_3}{\sqrt{a_1}\sqrt{M_2}} > 0$ получим с одной стороны

$$\begin{aligned} \left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right| \geq \left|\operatorname{Im}\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right| = \left|\frac{2xy + M_1 y}{a_n} - M_2 \operatorname{Im} K(z) a_n\right| = \\ = \frac{2xy + M_1 y}{a_n} - M_2 \operatorname{Im} K(z) a_n > \frac{2x + M_1}{a_n} y > \frac{2\gamma_4 + M_1}{a_n} y, \end{aligned} \tag{4.9}$$

вследствие леммы 4.1.

С другой стороны, если обозначить главную часть $l_{0,n}(z)$

$$l_{b,n}(z)\stackrel{\text{def}}{=}z^2+M_1z+M_2a_n^2,$$

получим

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\geq\left|\frac{l_{b,n}(z)}{a_n}\right|-a_nM_2|K(z)|\geq\frac{|z+i\sqrt{M_2}a_n||z-i\sqrt{M_2}a_n|}{a_n}-a_nM_2|K(z)|. \tag{4.10}$$

Последнее неравенство верно в силу того, что $|z^2+M_1z+M_2a_n^2|\geq|z^2+M_2a_n^2|$. Действительно, так как

$$\operatorname{Re}(M_1\overline{z}(z^2+M_2a_n^2))=\operatorname{Re}(M_1z|z|^2+M_2a_n^2\overline{z})=(M_1|z|^2+M_2a_n^2)x\geq0$$

при $x\geq0$, то получим , что

$$|z^2+M_1z+M_2a_n^2|^2\geq|z^2+M_2a_n^2|^2+|M_1z|^2+2\operatorname{Re}(M_1\overline{z}(z^2+M_2a_n^2))\geq$$
$$\geq|z^2+M_2a_n^2|^2+|M_1z|^2\geq|z^2+M_2a_n^2|^2. \tag{4.11}$$

Продолжая цепочку неравенств (4.10), получаем

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\geq\frac{|z-i\sqrt{M_2}a_n||z+i\sqrt{M_2}a_n|}{a_n}-a_nM_2|K(z)|\geq$$
$$\geq\frac{|z-i\sqrt{M_2}a_n||\operatorname{Im}\left(z+i\sqrt{M_2}a_n\right)|}{a_n}-a_nM_2|K(z)|=$$
$$=\frac{|z-i\sqrt{M_2}a_n|(y+\sqrt{M_2}a_n)}{a_n}-a_nM_2|K(z)|\geq\frac{|z-i\sqrt{M_2}a_n|\sqrt{M_2}a_n}{a_n}-$$
$$-a_nM_2|K(z)| \tag{4.12}$$

Далее,

$$\frac{|z-i\sqrt{M_2}a_n|\sqrt{M_2}a_n}{a_n}-a_nM_2|K(z)|\geq$$
$$\geq\sqrt{M_2}\frac{|\operatorname{Im}(z-i\sqrt{M_2}a_n)|+|\operatorname{Re}(z-i\sqrt{M_2}a_n)|}{2}-a_nM_2|K(z)|=$$
$$=\sqrt{M_2}\frac{|\sqrt{M_2}a_n-y|+x}{2}-a_nM_2|K(z)|\geq$$
$$\geq\sqrt{M_2}\frac{(\sqrt{M_2}a_n-y)+x}{2}-a_nM_2|K(z)|\geq$$
$$\geq a_nM_2\left(\frac{1}{2}-|K(z)|\right)+\frac{\sqrt{M_2}}{2}(x-y)>\frac{M_2a_n}{4}+\frac{\sqrt{M_2}}{2}(\gamma_4-y), \quad (4.13)$$

так как выполняется условие (4.8). Первое неравенство выполняется, так как при $r=|\operatorname{Im}(z-i\sqrt{M_2}a_n)|\geq 0$ и $s=|\operatorname{Re}(z-i\sqrt{M_2}a_n)|\geq 0$

$$\sqrt{r^2+s^2}\geq\frac{r+s}{\sqrt{2}}\geq\frac{r+s}{2}.$$

будет

Совмещая оценки (4.13) и (4.9), получим, что если $y\geq\frac{\sqrt{M_2}}{2}a_n$, то

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\geq\frac{2\gamma_4+M_1}{a_n}y\geq\frac{\sqrt{M_2}}{2}(2\gamma_4+M_1)>\frac{\sqrt{M_2}}{2}\gamma_4\overset{\text{def}}{=}A_1. \quad (4.14)$$

Если же $y<\frac{\sqrt{M_2}}{2}a_n$, то

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|>\frac{M_2a_n}{4}+\frac{\sqrt{M_2}}{2}(\gamma_4-y)=$$
$$=\frac{M_2a_n}{4}-\frac{\sqrt{M_2}}{2}y+\frac{\sqrt{M_2}}{2}\gamma_4\geq\frac{\sqrt{M_2}}{2}\gamma_4=A_1. \quad (4.15)$$

Таким образом, видно, что при $\operatorname{Re}z>\gamma_4$ выражение $\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|$ равномерно ограничено снизу константой $A_1>0$. Учитывая (4.7), имеем

$$\sup_{\operatorname{Re}z>\gamma_4}||AL_0^{-1}(z)||<A_1^{-1}. \quad (4.16)$$

Оценим теперь сверху по норме оператор $(I+M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}$. Норма оператора $(I+M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}$ может быть оценена следующим образом:

$$||(I+M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}||\leq\frac{1}{1-||M_3TL_0^{-1}(z)||}, \tag{4.17}$$

при условии, что $||M_3TL_0^{-1}(z)|| < 1$. Воспользовавшись соотношением (3.7), заметим, что

$$||M_3TL_0^{-1}(z)|| = ||M_3UA^{1/2}L_0^{-1}(z)||\leq M_3||A^{1/2}L_0^{-1}(z)||. \tag{4.18}$$

Используя оценки (4.14), (4.15) и спектральную теорему, норму $||A^{1/2}L_0^{-1}(z)||$ можно оценить при $\operatorname{Re} z > \gamma_4$ как

$$||A^{1/2}L_0^{-1}(z)||^{-1} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{l_{0,n}(z)}{\sqrt{a_n}}\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sqrt{a_n}\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\right)\geq$$
$$\geq\sqrt{a_1}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\right)\geq\sqrt{a_1}\frac{\sqrt{M_2}}{2}\gamma_4. \tag{4.19}$$

Согласно (4.17) (4.15) и (4.14) получим, что

$$||(I+M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}||\leq\frac{1}{1-2^{-1}} = 2, \tag{4.20}$$

так как $\gamma_4 > \dfrac{4M_3}{\sqrt{a_1}\sqrt{M_2}}$.

Учитывая оценки (4.5), (4.16) и (4.20), а также условие 2 теоремы 4.1, можно утверждать, что $Au(t)\in L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$ при $\gamma > \max(\gamma_5,\gamma_2)$.

Докажем теперь, что и $u'(t)\in L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)$. Действительно, аналогично оценкам (4.5), учитывая (4.20) и условие теоремы 4.1, остается только доказать, что $\sup\limits_{z>\gamma}||zL_0^{-1}(z)|| < \infty$. По спектральной теореме получаем $||zL_0^{-1}(z)|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|zl_{0,n}^{-1}(z)\right|$, но в то же время

$$zl_{0,n}^{-1}(z) = 1/z - M_1 - M_2(1-K(z))\frac{a_n}{z}a_nl_{0,n}^{-1}(z). \tag{4.21}$$

При $a_n > |z|$ имеем $|zl_{0,n}^{-1}(z)| < |a_nl_{0,n}^{-1}(z)| < A_1^{-1}$ по (4.16) при $\gamma > \gamma_4$. При $a_n\leq|z|$, из (4.21) получаем $|zl_{0,n}^{-1}(z)| = \left|1/z - M_1 - M_2(1-K(z))\frac{a_n}{z}a_nl_{0,n}^{-1}(z)\right|\leq a_1^{-1}+M_1+0.75M_2\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|a_nl_{0,n}^{-1}(z)\right|\leq a_1^{-1}+M_1+0.75M_2A_1^{-1}$ при $\gamma > \gamma_4$ вследствие (4.8). Выбирая минимум из этих оценок, получаем, что $\sup\limits_{\operatorname{Re}z>\gamma}||zL_0^{-1}(z)|| < \infty$

при $\mathrm{Re} z > \gamma > \gamma_4$. Вследствие этого и (4.5) получим

$$||zu(t)||^2_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)} \leq \sup_{\mathrm{Re}\, z>\gamma} ||zL_0^{-1}(z)|| \sup_{\mathrm{Re}\, z>\gamma} ||(I + M_3T^{-1}L_0^{-1}(z))^{-1}||\times$$

$$\times ||\widehat{f}(z)||_{H_2(\mathrm{Re}\, z>\gamma)} < \infty. \quad (4.22)$$

Итак, доказано, что при $\gamma > \max(\gamma_4, \gamma_2)$ функция $z\widehat{u}(z) \in H_2(\mathrm{Re}\, z > \gamma)$; это влечет за собой по теореме Пэли-Винера принадлежность $u'(t)$ пространству $L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$. Таким образом, учитывая, что и $Au(t)$ принадлежит этому пространству, получим, что $u(t) \in W^1_{2,\gamma}([0, +\infty), A)$. Это завершает доказательство корректной разрешимости задачи (3.5), (3.6) в случае нулевых начальных данных и без учета знака $p(\sqrt{a_1})$, если взять в условии теоремы 4.1 $\gamma_3 = \gamma_4$.

II. Знак $p(\sqrt{a_1})$ учитывается.

Заметим сразу, что если $p(\sqrt{a_1}) > 0$, то $D < 1$. Докажем теперь второе утверждение теоремы 4.1 о том, что, если $p(\sqrt{a_1}) > 0$, то γ_3 можно выбрать того же знака, что и γ_1. Если $\gamma_1 > 0$, то можно положить $\gamma_3 = \gamma_4$, как в предыдущем пункте.

Если же $\gamma_1 < 0$, то докажем, что существует $\gamma_7 < 0$ такое, что $\sup\limits_{\mathrm{Re}\, z>\gamma} ||AL_0^{-1}(z)|| < +\infty$ при $\gamma > \gamma_7$.

Пусть $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. При $y \geq 0$ (этого достаточно, так как $\overline{l_{0,n}(z)} = l_{0,n}(\overline{z})$) и при $-M_1/4 < x < 0$ получим с одной стороны, вследствие оценки (4.9):

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right| \geq \frac{2x + M_1}{a_n} y = \frac{M_1 - 2g}{a_n} y, \quad (4.23)$$

если обозначить $g \stackrel{\mathrm{def}}{=} |x|$. С другой стороны имеем:

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right| \geq \left|\frac{l_{b,n}(z)}{a_n}\right| - a_nM_2|K(z)| \geq$$

$$\geq \frac{|z + i\sqrt{M_2}a_n||z - i\sqrt{M_2}a_n|}{a_n} - a_nM_2|K(z)| - \frac{M_1 g}{a_n}. \quad (4.24)$$

Последнее неравенство верно в силу того, что

$$|z^2 + M_1z + M_2a_n^2| = |z^2 + M_2a_n^2 + M_1x + iM_1y| \geq |z^2 + M_2a_n^2 + iM_1y| - M_1g,$$

а также того, что $|z^2+M_2a_n^2+iM_1y|\geq|z^2+M_2a_n^2|$. Действительно, так как

$$\mathrm{Re}(M_1\overline{(iy)}(z^2+M_2a_n^2)) = 2M_1xy^2\geq 0,$$

то получим

$$|z^2+M_2a_n^2+iM_1y|^2 = |z^2+M_2a_n^2|^2+|iM_1y|^2+2\,\mathrm{Re}(M_1\overline{(iy)}(z^2+M_2a_n^2)) =$$
$$= |z^2+M_2a_n^2|^2+M_1^2y^2+4M_1xy^2 = |z^2+M_2a_n^2|^2+M_1y^2(4x+M_1) > |z^2+M_2a_n^2|^2.$$

Последнее неравенство верно ввиду того, что $x > -M_1/4$. Далее, вследствие оценок (4.12), (4.24) имеет место цепочка неравенств

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\geq\frac{|z-i\sqrt{M_2}a_n|\sqrt{M_2}a_n}{a_n}-a_nM_2|K(z)|-\frac{M_1g}{a_n}\geq$$
$$\geq\sqrt{M_2}|\,\mathrm{Im}(z-i\sqrt{M_2}a_n)|-a_nM_2|K(z)|-\frac{M_1g}{a_n}\geq$$
$$\geq\sqrt{M_2}|y-\sqrt{M_2}a_n|-a_nM_2|K(z)|-\frac{M_1g}{a_n}\geq$$
$$\geq\sqrt{M_2}(\sqrt{M_2}a_n-y)-a_nM_2|K(z)|-\frac{M_1g}{a_n} = M_2(1-|K(z)|)a_n-\frac{M_1g}{a_n}-\sqrt{M_2}y.$$

Положим $D(g) = \sup\limits_{\mathrm{Re}\, z>-g}|K(z)|$. Тогда исходя из условия 1 теоремы 4.1 и свойств преобразования Лапласа имеем $D(g)\to D(0) = D$ при $g\to 0,\ g < -\gamma_1$. Тогда получим

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\geq M_2(1-|K(z)|)a_n-\frac{M_1g}{a_n}-\sqrt{M_2}y\geq M_2(1-D(g))a_n-\frac{M_1g}{a_n}-\sqrt{M_2}y \tag{4.25}$$

Возьмем $y=y_0$ такое, что при нем правые части (4.23) и (4.25) совпадают:

$$M_2(1-D(g))a_n-\frac{M_1g}{a_n}-\sqrt{M_2}y_0 = \frac{M_1-2g}{a_n}y_0,$$

то есть $y_0 = \dfrac{a_n^2(1-D(g))M_2-M_1g}{\sqrt{M_2}a_n+M_1-2g}$.

Совмещая оценки (4.23) и (4.25), получим, что при $-g > -M_1/2$ и $y \geq y_0$

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right| \geq \frac{M_1-2g}{a_n} y_0 = (M_1-2g)\frac{a_n(1-D(g))M_2 - M_1 g a_n^{-1}}{\sqrt{M_2}a_n + M_1 - 2g} =$$
$$= (M_1-2g)\frac{(1-D(g))M_2 - M_1 g\dfrac{1}{a_n^2}}{\sqrt{M_2}+\dfrac{M_1-2g}{a_n}} \geq (M_1-2g)\frac{(1-D(g))M_2 - M_1 g\dfrac{1}{a_1^2}}{\sqrt{M_2}+\dfrac{M_1-2g}{a_1}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{H}(g). \tag{4.26}$$

Если же $y < y_0$, то

$$\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right| \geq M_2(1-D(g))a_n - \frac{M_1 g}{a_n} - \sqrt{M_2}y_0 \geq \mathbb{H}(g). \tag{4.27}$$

Заметим, что $\mathbb{H}(g) \to \dfrac{M_1M_2}{\sqrt{M_2}+M_1/a_1}(1-D) > 0$ (так как $p(\sqrt{a_1}) > 0$) при $g \to 0$. Таким образом, можно найти такое g_0, что $\mathbb{H}(g) > 0$ при $g > g_0$. Если положить $\gamma_7 = -g_0$, то получим, учитывая (4.26) и (4.27), а также спектральную теорему, что

$$\sup_{\mathrm{Re}\, z > \gamma_7} ||AL_0^{-1}(z)|| < \mathbb{H}^{-1}(g_0). \tag{4.28}$$

Далее, как в пункте I надо доказать, что оператор $(I + M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}$ ограничен сверху по норме. Учитывая (4.19), заметим, что

$$\frac{||A^{1/2}L_0^{-1}(z)||^{-1}}{M_3} \geq \frac{\sqrt{a_1}}{M_3}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\left|\frac{l_{0,n}(z)}{a_n}\right|\right) \geq \frac{\sqrt{a_1}}{M_3}\mathbb{H}\,(g) =$$
$$= \frac{\sqrt{a_1}}{M_3}(M_1-2g)\frac{(1-D(g))M_2 - M_1 g\dfrac{1}{a_1}}{\sqrt{M_2}+\dfrac{M_1-2g}{a_1}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{H}_1(g).$$

При $g \to 0$ выполняется

$$\mathbb{H}_1(g) \to \frac{M_1M_2(1-D)\sqrt{a_1}}{M_3(\sqrt{M_2}+M_1/a_1)} =$$
$$= 1 + \frac{M_1M_2(1-D)(\sqrt{a_1})^3 - M_3\sqrt{M_2}a_1 - M_1M_3}{M_3(\sqrt{M_2}a_1+M_1)} =$$
$$= 1 + \frac{p(\sqrt{a_1})}{M_3(\sqrt{M_2}a_1+M_1)} > 1,$$

так как $p(\sqrt{a_1}) > 0$. Таким образом, можно найти такое g_1, что $\mathbb{H}_1(g) > 1$ при $g > g_1$, и если положить $\gamma_8 = -g_1$, то получим, согласно (4.17) и (4.18),

$$||(I + M_3 T L_0^{-1}(z))^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - \mathbb{H}_1(g_1)^{-1}} < +\infty. \tag{4.29}$$

Итак, учитывая оценки (4.5), (4.29) и (4.28), а также условие 2 теоремы 4.1, можно утверждать, что $Au(t) \in L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$ при $\gamma > \max(\gamma_7, \gamma_8, \gamma_2)$.

Аналогично пункту I, учитывая оценки (4.28), (4.29), доказывается принадлежность $u'(t)$ пространству $L_{2,\gamma}([0, +\infty), H)$ при $\gamma > \gamma_7$. Таким образом, учитывая, что и $Au(t)$ принадлежит этому пространству, получим, что $u(t) \in W^1_{2,\gamma}([0, +\infty), A)$. Это завершает доказательство корректной разрешимости задачи (3.5), (3.6) в случае нулевых начальных данных и с учетом знака $p(\sqrt{a_1})$, если взять в условии теоремы 4.1 $\gamma_3 = \gamma_8$.

Из вышесказанного ясно, что если $\gamma_1 = 0$, то и γ_3 можно положить равным нулю, если в доказательстве выше положить $g_0 = g_1 = 0$.

Итак, доказано, что полученная функция $u(t)$ принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}([0, +\infty), A)$. Теперь необходимо доказать, что она действительно является слабым решением задачи (3.5), (3.6). Утверждение о том, что $u(0+) = 0$ в случае нулевых начальных условий, доказывается способом, описанным в монографии [5].

Остается доказать, что для любого $v(t) \in W^1_{2,\gamma}([0, +\infty), A)$ функционал $\Phi(u, v)$ из (2.6) равен нулю. В случае нулевых начальных условий третье слагаемое в (2.6) равно нулю. В то же время по теореме Пэли-Винера скалярные произведения в этом выражении в пространстве $L_2([0, +\infty), H)$ равны скалярным произведениям соответствующих преобразований Лапласа в пространстве Харди $H_2(\mathrm{Re} z > \gamma, H)$, и функционал $\Phi(u, v)$ может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) = 2\gamma(z\widehat{u}(z), \widehat{v}(z)) - (z\widehat{u}(z), z\widehat{v}(z)) + M_1(z\widehat{u}(z), \widehat{v}(z)) + \\ + M_2((1 - K(z))A\widehat{u}(z), A\widehat{v}(z)) + M_3(T\widehat{u}(z), \widehat{v}(z)) - (\widehat{f}(z), \widehat{v}(z)). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Все скалярные произведения вектор-функций здесь берутся в пространстве

$H_2(\mathrm{Re}z > \gamma, H)$. Рассмотрим первые два слагаемых в (4.30) при $z = x + iy$:

$$2\gamma(z\widehat{u}(z), \widehat{v}(z))_{H_2(\mathrm{Re}z>\gamma,H)} - (z\widehat{u}(z), z\widehat{v}(z))_{H_2(\mathrm{Re}z>\gamma,H)} =$$

$$= \sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\gamma(z\widehat{u}(z), \widehat{v}(z))_H - (z\widehat{u}(z), z\widehat{v}(z))_H)dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (2\gamma(z\widehat{u}(z), \widehat{v}(z))_H - (z\overline{z}\widehat{u}(z), \widehat{v}(z))_H dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z(2\gamma - \overline{z})\widehat{u}(z), \widehat{v}(z))_H \, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z^2\widehat{u}(z), \widehat{v}(z))_H dy \quad (4.31)$$

Далее, учитывая то, что $\widehat{u}(z) = L^{-1}(z)\widehat{f}(z)$, получим

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (0, \widehat{v}(z))_H)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (L(z)\widehat{u}(z) - \widehat{f}(z), \widehat{v}(z))_H)dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z^2\widehat{u}(z) + M_1 z\widehat{u}(z) + M_2(1 - K(z))A^2\widehat{u}(z) +$$

$$+ M_3T\widehat{u}(z) - \widehat{f}(z), \widehat{v}(z))_H dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(z^2\widehat{u}(z), \widehat{v}(z)\right)_H dy +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(M_1 z\widehat{u}(z) + M_2(1 - K(z))A^2\widehat{u}(z) + M_3T\widehat{u}(z) - \widehat{f}(z), \widehat{v}(z)\Big)_H dy$$

Тогда, преобразуя первое слагаемое правой части согласно (4.31), а второе — используя самосопряженность оператора A, получим, что

$$0 = 2\gamma(z\widehat{u}(z), \widehat{v}(z)) - (z\widehat{u}(z), z\widehat{v}(z)) + M_1(z\widehat{u}(z), \widehat{v}(z)) +$$
$$+ M_2((1 - K(z))A\widehat{u}(z), A\widehat{v}(z)) + M_3(T\widehat{u}(z), \widehat{v}(z)) - (\widehat{f}(z), \widehat{v}(z)).$$

Как и ранее здесь все скалярные произведения берутся в пространстве $H_2(\mathrm{Re}z > \gamma, H)$. Все преобразования выше правомерны, так как в силу принадлежности u и v пространству $W^1_{2,\gamma}([0, +\infty), A)$ и теоремы Пэли-Винера все интегралы здесь сходятся. Тогда, учитывая (4.30), имеем $\Phi(u, v) = 0$.

Что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 4.1 в случае ненулевых начальных данных.

Пусть $w(t)$ — функция из $W^2_{2,\gamma_2}([0,+\infty),A)$ такая, что $w(0+)=\varphi_0,\ w'(0+)=\varphi_1$. По теореме 2.3 о следах можно найти такую функцию $w_1(t)$ из $W^2_2([0,+\infty),A)$, что $w_1(0+)=\varphi_0$, а $w_1'(0+)=\varphi_1-\gamma_2\varphi_0$. Но для оценки нормы $w_1(t)$ в $W^2_2([0,+\infty),A)$ потребуется построить её явно. Согласно доказательству теоремы 2.3 (см. [25], теорема 3.2) возьмем

$$w_{11}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{11n}e_ne^{-a_nt},$$

$$w_{12}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{12n}}{a_n}e_ne^{-a_nt},$$

$$c_{12n}=(\varphi_1-\gamma_2\varphi_0,e_n)_H,\quad c_{11n}=(\varphi_0,e_n)_H$$

где e_n — собственные векторы оператора A, a_n — собственные числа оператора A. Тогда по построению

$$w_{11}(0+)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{11n}e_n=\varphi_0,\quad w_{12}'(0+)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{12n}e_n=\varphi_1-\gamma_2\varphi_0. \tag{4.32}$$

Кроме того, для некоторых положительных констант C_1,C_2,C_3, не зависящих от φ_0,φ_1, имеем

$$||w_{11}(t)||_{W^2_2([0,+\infty),A)}\le C_1||A^{3/2}\varphi_0||_H, \tag{4.33}$$

$$||w_{12}(t)||_{W^2_2([0,+\infty),A)}\le C_2||A^{3/2}\varphi_0||_H+C_3||A^{1/2}\varphi_1||_H. \tag{4.34}$$

Докажем (4.33):

$$||w_{11}(t)||^2_{W^2_2([0,+\infty),A)}=\int\limits_0^{+\infty}\left(||w_{11}''(t)||^2_H+||A^2w_{11}(t)||^2_H\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{11n}a_n^2e^{-a_nt}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{11n}a_n^2e^{-a_nt}\right)^2\right)dt=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}c_{11n}^2a_n^4\int\limits_0^{\infty}e^{-2a_nt}dt=\sum_{n=1}^{\infty}c_{11n}^2a_n^3=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{11n}a_n^{3/2}\right)^2=||A^{3/2}\varphi_0||_H<+\infty,$$

так как $\varphi_0 \in \operatorname{Dom}\left(A^{3/2}\right)$. Перестановка интегрирования и суммирования допустима по теореме Фубини-Тонелли. Аналогично доказывается (4.34):

$$||w_{12}(t)||^2_{W_2^2([0,+\infty),A)} = \int\limits_0^{+\infty} \left(||w''_{12}(t)||^2_H + ||A^2 w_{12}(t)||^2_H\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_{12n}}{a_n} a_n^2 e^{-a_n t} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_{12n}}{a_n} a_n^2 e^{-a_n t} \right)^2 \right) dt =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{12n}^2 a_n^2 \int\limits_0^{\infty} e^{-2a_n t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_{12n}^2 a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{12n} a_n^{1/2} \right)^2 =$$

$$= ||A^{1/2}\left(\varphi_1 - \gamma_2 \varphi_0\right)||_H < +\infty,$$

так как $\varphi_0 \in \operatorname{Dom}\left(A^{3/2}\right)$, $\varphi_1 \in \operatorname{Dom}\left(A^{1/2}\right)$. Положим далее

$$w_1(t) = 2w_{11}(t) - w_{11}(2t) + w_{12}(2t) - w_{12}(t), \tag{4.35}$$

тогда с учетом (4.32), очевидно, получим

$$w_1(0+) = \varphi_0, \quad w_1'(0+) = \varphi_1 - \gamma_2 \varphi_0.$$

Из (4.33), (4.34), (4.35) получим, что

$$||w_1(t)||_{W_2^2([0,+\infty),A)} \leq C_4 ||A^{3/2}\varphi_0||_H + C_5 ||A^{1/2}\varphi_1||_H \tag{4.36}$$

для некоторых положительных констант C_4, C_5, не зависящих от φ_0, φ_1.

Тогда $w(t)$ можно положить равным $w_1(t) \cdot e^{\gamma_2 t}$. Действительно, $w(0+) = w_1(0+) = \varphi_0$, а $w'(t) = \gamma_2 e^{\gamma_2 t} w_1(t) + e^{\gamma_2 t} w_1'(t)$, и $w'(0+) = \gamma_2 \varphi_0 + w_1'(0+) = \varphi_1$.

Рассмотрим функцию $r(t) = u(t) - w(t)$, где $u(t)$ — решение задачи (3.5), (3.6) с ненулевыми начальными данными, которое необходимо найти. Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + M_1\frac{d}{dt}r(t) + M_2\left(A^2r(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)A^2r(\tau)d\tau\right) +$$
$$+ M_3Tr(t) = f(t) - \frac{d^2}{dt^2}w(t) - M_1\frac{d}{dt}w(t) -$$
$$- M_2\left(A^2w(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)A^2w(\tau)d\tau\right) - M_3Tw(t), \quad (4.37)$$

$$r(0+) = 0, \quad r'(0+) = 0. \quad (4.38)$$

Функция в правой части (4.37) удовлетворяет условию 2. теоремы в силу того, что $w(t)$ — функция из $W^2_{2,\gamma_2}([0,+\infty), A)$, а задача (4.37), (4.38) может быть решена с помощью описанного выше метода для решения уравнений с нулевыми начальными данными.

Тогда для того, чтобы $u(t) = r(t) + w(t)$ являлось слабым решением задачи (3.5), (3.6) нужно, чтобы для любого $v(t) \in W^1_{2,\gamma}([0,+\infty), A)$ было выполнено $\Phi(u,v) = 0$. Заметим далее, что функция $\Psi(u,v) = \Phi(u,v) + (\varphi_1, v(0+))_H + (f(t), v(t))_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)}$ является полуторалинейной функцией, и выполнено $\Psi(u,v) = \Psi(r,v) + \Psi(w,v)$. Значит,

$$\Phi(u,v) = \Psi(r,v) + \Psi(w,v) - (\varphi_1, v(0+))_H - (f(t), v(t))_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)}.$$

Так как вектор-функции $w''(t)$ и $A^2w(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$ при $\gamma > \gamma_2$, можно преобразовать выражение $\Psi(w,v)$ с помощью интегрирования по частям (все скалярные произведения вектор-функций берутся в $L_{2,\gamma}([0,+\infty), H)$):

$$\Psi(w,v) - (\varphi_1, v(0+))_H = \Bigg(w''(t) + 2M_1w'(t) +$$
$$+ M_2\Big(A^2w(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)A^2w(\tau)d\tau\Big) + M_3Tw(t), v(t)\Bigg),$$

так как при $w'(0+) = \varphi_1$

$$(w''(t), v(t)) = 2\gamma(w'(t), v(t)) - (w'(t), v'(t)) - (\varphi_1, v(0+))_H.$$

Тогда выражение $-\Psi(w, v) + (\varphi_1, v(0+))_H + (f(t), v(t))_{L_{2,\gamma}([0,+\infty),H)})$ — это правая часть (4.37), скалярно умноженная на $v(t)$. Следовательно, учитывая то, что $r(t)$ — решение (4.37), (4.38), получим, что $\Phi(u, v) = 0$ по доказанному ранее для нулевых начальных условий. Заметим также, что $u(0+) = \varphi_0$ по определению $u(t)$.

Тогда из (4.36), (4.37), (4.5), (4.22), теорем 2.1 и 2.4 напрямую следует условие теоремы (4.2) для случая ненулевых начальных условий.

Что и требовалось доказать.

Если выполнено условие $p(\sqrt{a_1}) > 0$, то $\gamma_3 < 0$ при $\gamma_1 < 0$ и следствия 4.1 и 4.2, касающиеся свойств устойчивости уравнения, напрямую вытекают из того, что $W^1_{2,\gamma}([0, +\infty); A)$ непрерывно вложено в $C([0, +\infty), H)$ (см. теорему 2.2).

Доказательство теоремы 4.2. Используя соотношения (4.26)–(4.29), остается лишь заметить, что при Re$z > -\gamma_8$

$$||L^{-1}(z)|| = ||A^{-1}AL_0^{-1}(z)(I + M_3TL_0^{-1}(z))^{-1}|| \leq$$
$$\leq ||A^{-1}||\mathbb{H}^{-1}(-\gamma_7)\frac{1}{1 - \mathbb{H}_1(-\gamma_8)^{-1}} < +\infty.$$

Таким образом, получаем, что при Re$z > -\gamma = \max(-\gamma_8, -\gamma_7)$ полуплоскость $\{\text{Re } z \geq -\gamma\}$ лежит в резольвентном множестве (2.8) и, значит, в нем нет спектра оператор-функции $L(z)$.

Что и требовалось доказать.

5 Асимптотика невещественного спектра символа уравнения

В данном разделе будет построена асимптотика невещественного спектра символа уравнения (3.5) на основании асимптотики невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина. Вначале, используя операторный аналог теоремы Руше, построим асимптотику спектра символа уравнения Гуртина–

Пипкина, возмущенного относительно-компактным слагаемым, и в дальнейшем с помощью замены спектральной переменной установим асимптотику невещественного спектра $L(z)$.

5.1 Общий случай уравнения Гуртина–Пипкина с возмущением.

Для начала рассмотрим случай стандартного уравнения Гуртина–Пипкина с A^2–компактным возмущением в смысле Като (см. [3]):

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau + RA^\theta u(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{5.1}$$

где $\theta \in [0, 2)$, R — ограниченный оператор, имеющий норму $||R|| = B$. Ядро релаксации Γ может быть вида (2.3). В дальнейшем увидим, что уравнение (5.1) можно свести к (3.5) с помощью замены переменных.

По теореме Гильберта-Шмидта в H есть базис из собственных векторов e_n оператора A; им соответствуют собственные значения a_n. В случае задачи (3.3), (3.4) $e_n = \sin(nx)$, $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того оператор, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$a_n^{\theta-1}(a_n - a_{n-1})^{-1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.2}$$

Применение преобразования Лапласа к уравнению (5.1) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2I + (1 - K(z))A^2 + RA^\theta, \tag{5.3}$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Необходимо найти асимптотику невещественного спектра $\sigma(L)$.

Положим

$$l_n(z) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2. \tag{5.4}$$

Эта функция комплекного переменного имеет лишь один корень в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Это доказано, например, в [4]. Обозначим его μ_n^+. В случае, когда c_j и γ_j ведут себя полиномиальным образом при ядре $\Gamma(t)$ вида (2.3), асимптотика μ_n^+ подробно изучена в [5]. Кроме того, для достаточно обширного класса функций $K(z)$ она также приведена во второй главе диссертации (см. следствия 7.1–7.5). Далее, возьмем $D_{n,C} = \{z : |z - \mu_n^+| < C a_n^{\theta-1}\}$.

Теорема 5.1. *Предположим, собственные числа оператора A удовлетворяют соотношению* (5.2)*. Тогда существуют положительные константы y_0, C такие, что спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(z)$, лежащий в верхней полуплоскости $\{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}$, может быть представлен в виде совокупности точек $\{\widetilde{\mu}_n^+,\ n > n_0\}$, так что $\widetilde{\mu}_n^+ \in D_{n,C}$. Число n_0 здесь — наименьшее натуральное число такое, что для любого $n > n_0$ выполняется*

$$D_{n,C} \subset \{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}. \tag{5.5}$$

Замечание 1. В случае $\theta < 1$ радиус круга $D_{n,C}$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$, а значит, можно описать асимптотику невещественного спектра $L(z)$:

$$\widetilde{\mu}_n^+ = \mu_n^+ + O(a_n^{\theta-1}).$$

Доказательство. Нам понадобится операторный аналог теоремы Руше (см. [6]). Введем для начала некоторые определения.

Определение. Пусть точка z_0 является полюсом оператор-функции $L(z)$. В некоторой окрестности точки z_0 имеет место разложение

$$L(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} (z - z_0)^j L_j. \tag{5.6}$$

Если в этом разложении операторы $L_j,\ j = -n,\ -n+1, \dots, -1$ конечномерны, то оператор-функция $L(z)$ называется *конечномероморфной* в точке z_0. Если $L(z)$ конечномероморфна в любой точке некоторой области G, то будем говорить, что $L(z)$ конечномероморфна в G. Линейный ограниченный оператор L, действующий в банаховом пространстве $\mathbb{L}$, называется *Ф-оператором*, если он нормально разрешим (т. е. множество значений $\mathrm{Im}\, L$ замкнуто), его ядро $\mathrm{Ker}\, L$ конечномерно и $\dim(\mathbb{L} \setminus \mathrm{Im}\, L) < \infty$

Оператор-функцию $L(z)$ назовем *фредгольмовой* в точке если в разложении (5.6) оператор L_0 является Ф-оператором. Если $L(z)$ фредгольмова в любой точке некоторой области G, то назовем ее фредгольмовой в G. Точку z_0 назовем *нормальной* точкой оператор-функции $L(z)$, если $L(z)$ конечномероморфна и фредгольмова в точке z_0 и все точки некоторого проколотого круга $0 < |z - z_0| < \rho$ являются регулярными для $L(z)$. Пусть Γ — простой замкнутый спрямляемый контур, ограничивающий область G. Оператор-функцию $L(z)$, конечномероморфную и фредгольмову в G и непрерывную вплоть до Γ, будем называть *нормальной относительно контура* Γ, если оператор $L(z)$ обратим для всех $z \in G \cup \Gamma$ за исключением конечного числа точек области G, являющихся нормальными точками $L(z)$.

Нам понадобится следующая упрощенная версия операторного аналога теоремы Руше:

Теорема 5.2. *Пусть $L_1(z)$ — оператор-функция, нормальная относительно некоторого простого замкнутого спрямляемого контура Γ, ограничивающего область G. Если конечномероморфная в G и непрерывная вплоть до Γ оператор-функция $L_2(z)$ удовлетворяет условию*

$$||L_2(z)L_1^{-1}(z)|| < 1, \quad z \in \Gamma, \tag{5.7}$$

то оператор-функция $L_3(z) = L_1(z) + L_2(z)$ также нормальна относительно контура Γ. Если в области G оператор-функции $L_1(z)$ и $L_2(z)$ не имеют полюсов, и, кроме того, спектр оператор-функции $L_1(z)$ состоит из одной точки точечного спектра кратности 1, то и спектр оператор-функции $L_3(z)$ в области G состоит из одной точки точечного спектра кратности 1.

Если положить $L_1(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2$, а $L_2(z) = RA^\theta$ и доказать неравенство (5.7) на множестве $\mathbb{D} = \{z : \operatorname{Im} z > y_0\} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{n,C}$ для некоторых констант n, C, сможем доказать теорему 5.1. Действительно, несложно доказать, что оператор-функция $L_1(z)$ — нормальна относительно любого простого замкнутого спрямляемого контура, содержащегося в $\{z : \operatorname{Im} z > y_0\}$ при $y_0 > 0$, а также имеет здесь только изолированные точки точечного спектра, кроме того, $L_2(z)$ по определению конечномероморфна в любой области, содержащейся в $\{z : \operatorname{Im} z > y_0\}$, и непрерывна на её замыкании.

Согласно условию (5.2) $a_n^{\theta-1} \ll a_n - a_{n-1}$ при больших n. Но тогда $a_n^{\theta-1} \ll |\mu_n^+ - \mu_{n-1}^+|$, так как $|\mu_n^+| \sim a_n$ (см. свойство 1^0 ниже). Значит, при достаточно больших n и m имеем $D_{n,C} \cap D_{m,C} = \varnothing$. Тогда если докажем соотношение (5.7) в области $\mathbb{D}$, то получим, что внутри $D_{n,C}$ при $n > n_0$ (n_0 определяется из условия теоремы 5.1) по теореме 5.2 находится ровно одна точка спектра $L_3(z) = L(z)$, так как именно центр области $D_{n,C}$ — точка μ_n^+ является единственной точкой спектра оператор-функции $L_1(z)$ внутри области $D_{n,C}$ согласно спектральной теореме. Контур Γ в данном случае равен $\partial D_{n,C}$. Действительно, по определению μ_n^+ — однократный ноль функции $l_n(z) = (L(z)e_n, e_n)$ — проекции оператор-функции $L(z)$ на собственное подпространство $\langle e_n \rangle$.

Вне областей $D_{n,C}$ все точки полуплоскости $\{z : \operatorname{Im} z > y_0\}$ регулярны для $L(z)$ при условии (5.7) (см. например теорему 1.16 из [3]).

Таким образом, достаточно доказать условие (5.7) на $\mathbb{D}$ при достаточно больших y_0, C. Согласно спектральной теореме

$$||L_2(z)L_1^{-1}(z)|| = ||RA^\theta L_1^{-1}(z)|| \leq ||R||\,||A^\theta L_1^{-1}(z)|| = \\ = B \sup_n |a_n^\theta l_n^{-1}(z)| = B\left(\inf_n |a_n^{-\theta} l_n(z)|\right)^{-1}, \quad (5.8)$$

так как норма оператора R равна B.

Далее понадобятся следующие факты про структуру нулей $l_n(z)$ и поведение функции $K(z)$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$:

$1^0 :\ \mu_n^+ = ia_n(1 + \overline{o}(1))$ при $a_n \to +\infty$.

Здесь будет приведено краткое доказательство, более подробно см. [5], теорема 3.2.5, [7], а также следствия 7.1–7.5 из второй главы. В уравнении $l_n(z) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2 = 0$ сделаем замену переменных $z = ia_n v$. Получим тогда $-a_n^2 v^2 + (1 - K(ia_n v))a_n^2 = 0$. Следовательно,

$$v^2 - 1 + K(ia_n v) = 0. \quad (5.9)$$

По свойству 2^0 имеем, что $K(ia_n v) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по v при $v \approx 1$. Значит, по теореме Руше получим, что корень уравнения (5.9) $\widetilde{v}_n = 1 + \overline{o}(1)$. Значит, корень уравнения $l_n(z) = 0$ будет равен $\mu_n^+ = ia_n(1 + \overline{o}(1))$.

$2^0 :\ |K(z)| \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$.

$3^0 :\ |zK'(z)| \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$.

Доказательства $2^0,\ 3^0$ приведены в [7], [4].

Приступим к доказательству условия (5.7) на $\mathbb{D}$. Рассмотрим при достаточно больших значениях y комплексные точки $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ y > y_0 > 0$.

Зафиксируем точку z и рассмотрим три случая, исчерпывающие все $n \in \mathbb{N}$.

I. Рассмотрим такие n, что $a_n < y/2$. Тогда

$$y - a_n > y/2. \tag{5.10}$$

Имеем $|z - ia_n| \geq |\operatorname{Im}(z - ia_n)| = |y - a_n|$. Аналогично $|z + ia_n| \geq |y + a_n|$. Тогда

$$|l_n(z)| = |(z - ia_n)(z + ia_n) - a_n^2 K(z)| \geq |z - ia_n||z + ia_n| - a_n^2|K(z)| \geq$$
$$\geq |y - a_n||y + a_n| - a_n^2|K(z)|. \tag{5.11}$$

Так как $y > 0$, получается $|y + a_n| = y + a_n > y$. Учитывая также то, что $a_n < y/2$, согласно равенству (5.10) получаем $|y - a_n||y + a_n| > y/2 \cdot y$. Кроме того, $a_n^2 < y^2/4$. Вследствие этого имеем неравенство

$$|l_n(z)| > \frac{y}{2} \cdot y - \frac{y^2}{4}|K(z)|.$$

Если взять y_0 достаточно большим, чтобы $|K(z)| < 1$ по свойству 2^0, то получим

$$|l_n(z)| > \frac{y^2}{4}.$$

Так как $a_n < y/2$, имеем

$$|a_n^{-\theta} l_n(z)| > a_n^{-\theta}\frac{y^2}{4} > \left(\frac{y}{2}\right)^{-\theta}\frac{y^2}{4} = \left(\frac{y}{2}\right)^{2-\theta}.$$

II. Рассмотрим такие n, что $a_n > 2y$. Тогда $a_n/2 > y$ и

$$a_n - y > a_n/2.$$

Согласно цепочке неравенств (5.11) получаем, что $|l_n(z)| \geq |y - a_n||y + a_n| - a_n^2|K(z)|$. Далее, $|y - a_n| = a_n - y > a_n/2$ и $|y + a_n| = a_n + y > a_n$. Но тогда

$$|l_n(z)| > \frac{a_n}{2} \cdot a_n - a_n^2|K(z)|.$$

Если взять y_0 достаточно большим, чтобы $|K(z)| < 1/4$ по свойству 2^0, то $|l_n(z)| > a_n^2/4$.

Следовательно,

$$|a_n^{-\theta} l_n(z)| > \frac{a_n^2}{4a_n^\theta} = \frac{a_n^{2-\theta}}{4} > \frac{(2y)^{2-\theta}}{4} = \frac{y^{2-\theta}}{2^\theta}.$$

III. Рассмотрим такие n, что $a_n \in [y/2, 2y]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

Имеем $|z| > |\operatorname{Im} z| = y > a_n/2$. Следовательно, $a_n < 2|z|$ и

$$|a_n^2 K'(z)| = a_n^2 |K'(z)| < 2a_n |zK'(z)| < \varepsilon a_n \tag{5.12}$$

при достаточно большом y_0 в силу свойства 3^0. Вследствие того, что μ_n^+ — верхний корень $l_n(z) = 0$, модуль $l_n(z)$ можно представить в виде:

$$|l_n(z)| = \left| \int\limits_{\mu_n^+}^{z} l_n'(z)dz + l_n(\mu_n^+) \right| = \left| \int\limits_{\mu_n^+}^{z} l_n'(z)dz \right| = \left| \int\limits_{\mu_n^+}^{z} (2z - a_n^2 K'(z))dz \right| \geq$$

$$\geq \left| \int\limits_{\mu_n^+}^{z} 2zdz \right| - \left| \int\limits_{\mu_n^+}^{z} a_n^2 K'(z)dz \right|. \tag{5.13}$$

Имеем

$$\left| \int\limits_{\mu_n^+}^{z} 2zdz \right| = \left| z^2 \Big|_{\mu_n^+}^{z} \right| = \left| z^2 - (\mu_n^+)^2 \right| = |z - \mu_n^+||z + \mu_n^+|. \tag{5.14}$$

Кроме того, можно оценить согласно оценке (5.12)

$$\left| \int\limits_{\mu_n^+}^{z} a_n^2 K'(z)dz \right| \leq |z - \mu_n^+| \cdot \sup_{[\mu_n^+, z]} |a_n^2 K'(z)| \leq |z - \mu_n^+| \cdot \varepsilon a_n \tag{5.15}$$

Исходя из свойства 1^0, можно записать

$$|z + \mu_n^+| \geq |\operatorname{Im}(z + \mu_n^+)| = y + \operatorname{Im} \mu_n^+ > \operatorname{Im} \mu_n^+ > (1 - \varepsilon)a_n. \tag{5.16}$$

при достаточно большом y_0.

Учитывая также, что z принадлежит множеству $\mathbb{D} = \{z : \operatorname{Im} z > y_0\} \setminus$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{n,C}$, и на этом множестве по определению $D_{n,C}$ выполнено неравенство $|z-\mu_n^+| \geq Ca_n^{\theta-1}$, можно совместить неравенства (5.13)–(5.16):

$$|l_n(z)| > |z-\mu_n^+|(|z+\mu_n^+| - \varepsilon a_n) > Ca_n^{\theta-1} \cdot (a_n(1-\varepsilon) - \varepsilon a_n) = Ca_n^{\theta}(1-2\varepsilon).$$

Окончательно, получим

$$|a_n^{-\theta} l_n(z)| > C(1-2\varepsilon)$$

Итак, учитывая случаи I-III, можно заметить, что

$$|a_n^{-\theta} l_n(z)| > \min\left(C(1-2\varepsilon),\ \left(\frac{y}{2}\right)^{2-\theta},\ \frac{y^{2-\theta}}{2^\theta}\right).$$

Взяв $C > B(1-2\varepsilon)^{-2}$ при достаточно большом значении y_0, получим, что $|a_n^{-\theta} l_n(z)| > B(1-2\varepsilon)^{-1}$. Значит, и

$$\left(\inf_n |a_n^{-\theta} l_n(z)|\right) \geq B(1-2\varepsilon)^{-1} > B.$$

Но тогда

$$\left(\inf_n |a_n^{-\theta} l_n(z)|\right)^{-1} < B^{-1},$$

что даст с учетом (5.8) выполнение условия (5.7).

Что и требовалось доказать.

Замечание 2. При $\theta < 1$ видим, что радиусы $D_{n,C}$ стремятся к нулю, а следовательно, $\widetilde{\mu}_n^+$ неограниченно близко приближается к μ_n^+, что дает *локализацию спектра* возмущенной оператор-функции (5.3).

Замечание 3. Как уже было сказано ранее для задачи (3.5), (3.6) условие (5.2) выполняется. Кроме того, очевидно, что при $a_n = n^\alpha,\ \alpha > 0$, для того, чтобы оно выполнялось нужно, чтобы

$$a_n^{\theta-1}(a_n - a_{n-1})^{-1} = n^{\alpha(\theta-1)}(n^\alpha - (n-1)^\alpha)^{-1} \sim n^{\alpha(\theta-1)} n^{1-\alpha} \to 0, \quad n \to \infty,$$

так как $(n^\alpha - (n-1)^\alpha) \sim n^{\alpha-1}$. Это условие выполняется при $\alpha > 1/(2-\theta)$.

Следствие 5.1. *В случае ядра вида* (2.3) *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$ *можно записать в* *явном виде асимптотику спектра* $L(z)$:

$$\widetilde{\mu}_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k + O(a_n^{\theta-1}). \tag{5.17}$$

Доказательство. Согласно [7] имеем:

$$(\mu_n^+)_1 = ia_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k + O(a_n^{-1}).$$

Значит по теореме 5.1

$$\widetilde{\mu}_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k + O(a_n^{-1}) + O(a_n^{\theta-1}).$$

Из этого и следует (5.17).

Что и требовалось доказать.

5.2 Асимптотика спектра символа уравнения колебания вязкоупругой пластины

Рассмотрим теперь оператор-функцию, являющуюся символом первоначального уравнения колебания вязкоупругой пластинки в потоке жидкости или газа (3.5):

$$L(z) = z^2 I + M_1 z I + M_2(1 - K(z))A^2 + M_3 U A^{\theta}.$$

Из соотношения (3.7) ясно, что $\theta = 1/2$; здесь ради большей общности рассмотрим $\theta \in [0, 1)$.

Сделаем замену спектральной переменной: $\rho = (z + M_1/2)/\sqrt{M_2}$; $z = \sqrt{M_2}\rho - M_1/2$. Тогда

$$z^2 + M_1 z = (z + M_1/2)^2 - M_1^2/4 = M_2\rho^2 - M_1^2/4.$$

В данном случае символ уравнения преобразуется

$$L(\rho) = M_2\rho^2 I + M_2\left(1 - K\left(\sqrt{M_2}\rho - M_1/2\right)\right)A^2 + M_3 U A^\theta - \frac{M_1^2}{4}I =$$
$$= M_2\rho^2 I + M_2\left(1 - K\left(\sqrt{M_2}\rho - M_1/2\right)\right)A^2 +$$
$$+ M_2\left(M_2^{-1}M_3 U - M_2^{-1}\frac{M_1^2}{4}A^{-\theta}\right)A^\theta.$$

Так как спектр оператор-функции не изменяется при умножении на положительную константу M_2, можем рассматривать следующую оператор-функцию:

$$L(\rho) = \rho^2 I + \left(1 - K\left(\sqrt{M_2}\rho - M_1/2\right)\right)A^2 + \left(M_2^{-1}M_3 U - M_2^{-1}\frac{M_1^2}{4}A^{-\theta}\right)A^\theta.$$

Определим ограниченный оператор

$$R = M_2^{-1}M_3 U - M_2^{-1}\frac{M_1^2}{4}A^{-\theta}$$

и функцию от переменной ρ

$$\widetilde{K}(\rho) = K\left(\sqrt{M_2}\rho - M_1/2\right), \tag{5.18}$$

где $\widetilde{K}(\rho)$ — это преобразование Лапласа функции вида (2.3) с другими коэффициентами.

Тогда $L(\rho)$ можно представить в виде

$$L(\rho) = \rho^2 I + (1 - \widetilde{K}(\rho))A^2 + RA^\theta. \tag{5.19}$$

Обозначим $(\mu_n^+)_1$ — верхний корень уравнения

$$\rho^2 + (1 - \widetilde{K}(\rho))a_n^2 = 0$$

и область $(D_{n,C})_1$:

$$(D_{n,C})_1 = \{\rho\,:\, |\rho - (\mu_n^+)_1| < C a_n^{\theta-1}\} =$$
$$= \{z\,:\, |z - (\sqrt{M_2}(\mu_n^+)_1 - M_1/2)| < C\sqrt{M_2}a_n^{\theta-1}.\}$$

Применяя к функции $L(\rho)$ теорему 5.1 и делая обратную замену спектральной переменной, получим следующий результат.

Теорема 5.3. *Предположим, собственные числа оператора A удовлетворяют соотношению (5.2). Тогда существуют положительные константы y_0, C такие, что спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(z)$, лежащий в верхней полуплоскости $\{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}$, может быть представлен в виде совокупности точек $\{\widetilde{\mu}_n^+,\ n > n_0\}$, так что*

$$\widetilde{\mu}_n^+ \in (D_{n,C})_1.$$

Число n_0 здесь — наименьшее натуральное число такое, что для любого $n > n_0$ выполняется

$$(D_{n,C})_1 \subset \{z : \mathrm{Im}\ z > y_0\}.$$

Замечание 4. С учетом определения $D_{n,C}$ можно описать асимптотику спектра $L(z)$:

$$\widetilde{\mu}_n^+ = \sqrt{M_2}(\mu_n^+)_1 - M_1/2 + O(a_n^{\theta-1}).$$

Следствие 5.2. *В случае ядра вида (2.3) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, можно записать в явном виде асимптотику спектра $L(z)$:*

$$\widetilde{\mu}_n^+ = i\sqrt{M_2}a_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k - \frac{M_1}{2} + O(a_n^{\theta-1}). \tag{5.20}$$

Доказательство. Согласно [7], а также определению (5.18) функции $\widetilde{K}(\rho)$, имеем:

$$(\mu_n^+)_1 = ia_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k/\sqrt{M_2}}{2} + O(a_n^{-1}).$$

Значит по теореме 5.3

$$\widetilde{\mu}_n^+ = i\sqrt{M_2}a_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k - \frac{M_1}{2} + O(a_n^{-1}) + O(a_n^{\theta-1}).$$

Из этого и того, что $\theta \in [0, 1)$, следует (5.20).

Что и требовалось доказать.

Замечание 5. Анализ доказательства теоремы 5.1 показывает, что ядро релаксации $\Gamma(t)$ можно также взять вида (2.5), то есть представимым в виде интеграла Стилтьеса. Анализу асимптотики μ_n^+ в данном случае будет посвящен следующий раздел диссертации.

Часть II

Исследование интегродифференциальных операторов, связанных с уравнением Гуртина–Пипкина

6 Введение

В этой главе исследован спектр символа уравнения Гуртина–Пипкина в случае ядер релаксации вида (2.5), а также в случае наличия слагаемого трения Кельвина–Фойгхта; кроме того, получена разрешимость в шкале пространств для немодифицированного уравнения. Уравнение Гуртина–Пипкина может быть получено из исследованого ранее уравнения (2.1), если взять $M_1 = M_3 = 0,\ M_2 = 1:$

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + A^2u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau = f(t), \quad t > 0. \tag{6.1}$$

Добавив к нему начальные условия, получим задачу Коши:

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1. \tag{6.2}$$

Корректная разрешимость данной задачи обоснована, например, в монографиях [17] (в классическом смысле) и [7] (в пространствах Соболева).

В данной главе будем использовать обозначение $L(z)$ для символа именно уравнения (6.1):

$$L(z) = z^2I + (1 - K(z))A^2. \tag{6.3}$$

Так как неограниченный оператор A самосопряжен, положительно определен, и имеет обратный компактный, можно рассмотреть его собственные векторы e_n и собственные значения a_n:

$$Ae_n = a_n e_n, \quad a_{n+1} > a_n > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Тогда проекции $L(z)$ на одномерные собственные подпространства можно выразить в явном виде:

$$l_n(z) = (L(z)e_n, e_n) = z^2 + (1 - K(z))a_n^2. \tag{6.4}$$

В этом случае согласно спектральной теореме спектр $L(z)$ есть замыкание множества нулей функций $l_n(z)$:

$$\sigma(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : l_n(z) = 0\}}.$$

В данной работе будет исследован невещественный спектр $L(z)$:

$$\sigma_{Im}(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ l_n(z) = 0\}} \cup \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0,\ l_n(z) = 0\}}.$$

Заметим также, что из вещественности коэффициентов (6.4) вытекает, что спектр будет симметричен относительно вещественной оси. Тогда разумно искать только невещественный спектр в верхней полуплоскости:

$$\sigma_{Im^+}(L) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ l_n(z) = 0\}}.$$

7 Исследование асимптотики спектра символа уравнения при ядрах релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса

В данном разделе будет исследовано уравнение Гуртина–Пипкина с ядром релаксации, представимым в виде интеграла Стилтьеса (2.5):

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\sigma(x), \quad t \geq 0.$$

Множество моделей, использующих уравнение Гуртина–Пипкина применимо только при условии экспоненциального убывания на бесконечности и бесконечного возрастания при стремлении к нулю ядра релаксации $\Gamma(t)$. Это возможно обеспечить для ядра (2.5), если использовать меру σ, которая не будет конечна.

Обозначим класс неубывающих положительных непрерывных слева функций $\sigma(t)$ на $[0,+\infty)$ таких, что интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} < +\infty$ и $\sigma(0) = 0$ за $\mathbf{F}[0,+\infty)$. В данной работе будет исследована асимптотика невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина $L(z)$ с ядром релаксации вида (2.5):

$$L(z) = z^2 I + (1 - K(z))A^2,$$

где $K(z)$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$:

$$K(z) = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{z+t}. \tag{7.1}$$

и $\sigma(t) \in \mathbf{F}[0,+\infty)$.

Результаты, посвященные спектру символа уравнения (6.1), были представлены в работе [4], в частности при $\sigma(t) = Mt^{\alpha} + O(t^{\rho}),\ 0 < \rho < \alpha < 1$ в случае $a_n = n$ имеет место следующее предложение

Предложение 7.1. *Для достаточно больших n невещественный спектр $\sigma_{Im^+}(L(z))$ содержит точку z_n такую, что*

$$z_n = ia_n + \hat{C}_1 M(a_n)^{\alpha}(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $\hat{C}_1$ описано в следствии 7.1.

Теорема 7.2 и следствие 7.1 обобщают результаты, представленные в [4], и могут быть применены к другим описанным там оператор-функциям.

Предложение 7.2. *Функция $l_n(z)$ имеет в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ только один ноль, который обозначим через μ_n^+.*

Доказательство данного предложения приведено в [4]. Представленная ниже теорема является естественным развитием результатов данной работы, затрагивает более широкий класс ядер и может быть применена к другим описанным там интегродифференциальным уравнениям.

Введем обозначение

$$\hat{\sigma}(x, v) = \frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)}.$$

Определение. Определенная на луче $[0, +\infty)$ функция $\sigma(x)$ *регулярно меняется на бесконечности*, если при всех $x > 0$ существует предел

$$\lim_{v \to +\infty} \hat{\sigma}(x, v) = r(x). \tag{7.2}$$

Класс регулярно меняющихся функций достаточно подробно изучен (см. [65], [66]). В дальнейшем потребуется следующая теорема Карамата:

Теорема 7.1 (Карамата)**.** *Функция $\sigma(x)$ регулярно меняется на бесконечности тогда и только тогда, когда существуют действительные неотрицательные константы α, B, и действительные измеримые ограниченные функции $\varepsilon(x)$, $\eta(x)$, $\operatorname{supp} \eta \subset [B, +\infty)$ такие что $\lim\limits_{x \to +\infty} \eta(x) = R \in \mathbb{R}$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$, и выполняется соотношение*

$$\sigma(x) = x^{\alpha} \exp\left(\eta(x) + \int\limits_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right). \tag{7.3}$$

В этом случае предельная функция $r(x) = x^{\alpha}$ при $x > 0$.

Замечание. Для функций $\sigma(x)$ из класса $\mathbf{F}[0, +\infty)$ выполнено $r(0) = 0$ и $\alpha < 1$, что легко может быть проверенно непосредственным образом.

Теорема 7.2. *Пусть ядро релаксации Γ имеет вид* (2.5) *для регулярно меняющейся на бесконечности функции $\sigma \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ Тогда*

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{C_1}{2i} \sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $C_1 = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dr(q)}{i + q}$.

Следствие 7.1. *Пусть $\sigma \in \mathbf{F}[0, +\infty)$ и*

$$\sigma(x) = M x^{\alpha} (\ln x)^{\beta} (1 + \bar{o}(1)), \quad x \to +\infty, \tag{7.4}$$

где $M > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *при* $0 < \alpha < 1$; *или* $\beta \geq 0$, *при* $\alpha = 0$.

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i} M(a_n)^\alpha (\ln a_n)^\beta (1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $\hat{C}_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} e^{i\pi(\alpha-1)/2}, & \alpha > 0 \\ -i, & \alpha = 0 \end{cases}$.

Следствие 7.2. *Пусть* $\sigma(t)$ *— неубывающая положительная непрерывная слева функция на* $[0, +\infty)$ *такая, что* $d\sigma$ *конечна:*

$$\lim_{x \to +\infty} \sigma(x) = \sigma(+\infty) = \int\limits_0^{+\infty} d\sigma(t) < +\infty. \tag{7.5}$$

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{\sigma(+\infty)}{2}(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty.$$

Можно также записать следствия 7.1, 7.2 через ядро релаксации $\Gamma(t)$:

Следствие 7.3. *Пусть* $\sigma(t)$ *— неубывающая положительная непрерывная слева функция на* $[0, +\infty)$ *такая, что интеграл Стилтьеса* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t} < +\infty$, *и*

$$\sigma(x) = Mx^\alpha (\ln x)^\beta (1 + \bar{o}(1)), \quad x \to +\infty,$$

где $\beta \in \mathbb{R}$, *при* $0 < \alpha < 1$; *или* $\beta \geq 0$, *при* $\alpha = 0$

Тогда

$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{\hat{C}_1}{2i\Gamma_0(\alpha + 1)} \Gamma(1/a_n)(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$

где $\hat{C}_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} e^{i\pi(\alpha-1)/2}, & \alpha > 0 \\ -i, & \alpha = 0 \end{cases}$, *а* $\Gamma_0(t)$ *— Гамма-функция Эйлера*

Следствие 7.4. *Пусть* $\sigma(t)$ *— неубывающая положительная непрерывная слева функция на* $[0, +\infty)$ *такая, что интеграл Стилтьеса*

$$\Gamma(0) = \int\limits_0^{+\infty} d\sigma(t) < +\infty,$$

Тогда
$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{\Gamma(0)}{2}(1+\bar{o}(1)), \quad n \to +\infty.$$

При $K(z) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{c_j}{\gamma_j + z} = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{d\sigma(t)}{z+t}$ функция $\sigma(t)$ — кусочно постоянная, имеющая скачки в точках γ_j равные c_j. Определим $\sigma(t)$ при $K(z) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{c_j}{\gamma_j + z}$ для некоторых $c_j,\ \gamma_j$. Тогда справедливо следующее утверждение

Утверждение 7.1. *Пусть* $c_j = f(j),\ \gamma_j = g(j)$, *где* $f(x)$ *— монотонная непрерывная положительная функция* $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, *и* $g(x)$ *— возрастающая неограниченная положительная функция* $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$; $F(x) = \int\limits_1^x f(t)dt$ *— первообразная функции f. Кроме того, необходимо, чтобы*
$$F(t) \to +\infty, \quad \frac{f(t)}{F(t)} \to 0 \tag{7.6}$$
при $t \to \infty$.

Тогда $\sigma(t) = F(g^{-1}(t))(1 + \bar{o}(1)) \quad (t \to \infty)$. *Здесь* g^{-1} *— обратная в теоретико-множественном смысле к* g *функция.*

Утверждение выше позволяет записать следствие 7.1 для степенных $c_j,\ \gamma_j$.

Следствие 7.5. *Пусть* $K(z) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{c_j}{\gamma_j + z}$, *где* $c_j = Mj^{\alpha},\ \gamma_j = Bj^{\beta}$, *и* $M, B > 0,\ \beta > 0,\ \alpha \geq -1,\ \alpha - \beta < -1$.

Тогда при $\alpha > -1$:
$$\mu_n^+ = ia_n + \frac{W}{2i}\frac{M}{B^s(\alpha+1)}(a_n)^s(1+\bar{o}(1)), \quad n \to +\infty,$$
где $s = \dfrac{\alpha+1}{\beta}$ *и* $W = \dfrac{\pi s}{\sin \pi s} e^{i\pi(s-1)/2}$.

А при $\alpha = -1$:
$$\mu_n^+ = ia_n - \frac{1}{2}\frac{M}{\beta}\ln(a_n)(1+\bar{o}(1)), \quad n \to +\infty.$$

Данное следствие является естественным развитием результатов работы [5], и покрывает случай $\alpha \geq 0$.

Доказательство теоремы 7.2.

Утверждение 7.2. *Если функция* $\sigma(x) \in \mathbf{F}[0,+\infty)$ *регулярно меняется на бесконечности, то существуют положительные константы* x_0, v_0 *и функция* $\sigma_1(x) \in \mathbf{F}[0,+\infty)$, *такие что*

$$\hat{\sigma}(x,v) < \sigma_1(x), \quad x > x_0,\ v > v_0. \tag{7.7}$$

Доказательство. Воспользуемся разложением (7.3) для функции $\sigma(x)$. Тогда при $x > 1,\ v > B:$

$$\hat{\sigma}(x,v) = \frac{(xv)^\alpha}{v^\alpha}\frac{\exp\left(\eta\left(xv\right)\right)}{\exp\left(\eta\left(v\right)\right)}\frac{\exp\left(\int\limits_0^{vx}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right)}{\exp\left(\int\limits_0^{v}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right)} =$$

$$= x^\alpha \exp(\eta(xv)-\eta(v))\exp\left(\int\limits_v^{xv}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right) \leq$$

$$\leq x^\alpha \exp(|\eta(xv)|+|\eta(v)|)\exp\left(\int\limits_v^{xv}\frac{|\varepsilon(t)|}{t}dt\right). \tag{7.8}$$

Выберем $v_0 > 0$ согласно теореме 7.1 такое, что при $v > v_0$ будут выполняться оценки $|\eta(v)| < 2|R|$, $|\varepsilon(v)| < (1-\alpha)/2$. Так как $x > 1$, то $|\eta(xv)| < 2|R|$, а $|\varepsilon(t)| < (1-\alpha)/2$ при $t \in [v, xv]$. Из этого следует, что

$$\hat{\sigma}(x,v) \leq x^\alpha e^{4|R|}\exp\left(\int\limits_v^{xv}\frac{(1-\alpha)/2}{t}dt\right) = x^\alpha e^{4|R|}x^{(1-\alpha)/2} \leq e^{4R}x^{(1+\alpha)/2}.$$

Тогда при $x > 0$ функцию $\sigma_1(x)$ можно положить равной $e^{4R}x^{(1+\alpha)/2}$. Принадлежность этой функции $\mathbf{F}[0,+\infty)$ напрямую вытекает из того, что $(1+\alpha)/2 < 1$.

Что и требовалось доказать.

Утверждение 7.3. *Если* $\sigma_0(t) \in \mathbf{F}[0,+\infty)$, *то* $\sigma_0(t)/t \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Нам достаточно считать, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma_0(t) = +\infty$, в противном случае утверждение очевидно.

Предположим, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sigma_0(t)}{t} \neq 0$, то есть существует константа $P > 0$ и возрастающая последовательность $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ такая, что $\sigma_0(t_k) > Pt_k$.

Тогда, так как $\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma_0(t)}{t} < +\infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\sigma_0(t)}{t} < +\infty. \tag{7.9}$$

Но в то же время

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\sigma_0(t)}{t} \geq \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{t_{k+1}} > \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})/P}. \tag{7.10}$$

В силу (7.9) и (7.10) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} \tag{7.11}$$

сходится, и, следовательно, $\frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} \to 0$ при $k \to +\infty$, значит, $\varepsilon_k = \frac{\sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} \to 1$ слева (так как $\sigma_0(t)$ неубывает и $\sigma_0(t_k)/\sigma_0(t_{k+1}) \leq 1$).

Далее, в некоторой левой окрестности 1, а именно $(r, 1]$, выполняется неравенство $x - 1 \leq (\ln x)/2$ или $1 - x \geq -\ln x/2$. Выберем k_0 такое, что при $k > k_0$ выполняется $\varepsilon_k \in (r, 1]$. Естественно, сходимость ряда (7.11) влечет сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(t_{k+1}) - \sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k). \tag{7.12}$$

Так как на $(r, 1]$ выполняется $1 - x \geq -\ln x/2$, и $\varepsilon_k \in (r, 1]$, сходимость (7.12) влечет сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (-\ln \varepsilon_k) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(-\ln \frac{\sigma_0(t_k)}{\sigma_0(t_{k+1})} \right) =$$

$$= \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\ln \sigma_0(t_{k+1}) - \ln \sigma_0(t_k)) = \lim_{k \to \infty} \ln \sigma_0(t_k) - \ln \sigma_0(t_{k_0+1}).$$

Так как $t_k \to \infty$, то $\sigma_0(t_k) \to \infty$, и $\ln \sigma_0(t_k) \to \infty$. Противоречие. Значит, $\sigma_0(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 7.1. *Пусть выполняется условие* (7.4)*. Тогда*

$$K(ia_n) = C_1 \frac{\sigma(a_n)}{a_n}(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to +\infty. \tag{7.13}$$

Кроме того, если $D = \{z : |z - ia_n| < |C_1|\sigma(a_n)\}$*, то*

$$\max_{\overline{D}} |K'(z)| \leq C_2 \frac{\sigma(a_n)}{a_n^2} \tag{7.14}$$

для некоторой константы C_2 *при достаточно большом* n*.*

Доказательство.

Утверждение 7.4. *Известны неотрицательные числа* M_i, $i = 1, \ldots, n$, *и положительная возрастающая последовательность* t_i, $i = 1, \ldots, n$.

Числа $v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n$ *удовлетворяют соотношениям* $0 \leq v_i \leq M_i$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда максимум суммы* $s(v_1, \ldots, v_n) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{v_{i+1} - v_i}{t_i}$ *достигается при* $v_1 = 0$ *и* $v_i = M_i$, $i = 2, \ldots, n$.

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial v_{i+1}} = \frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_{i+1}} > 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ &\frac{\partial s}{\partial v_1} = -\frac{1}{t_1} < 0, \end{aligned}$$

то $s(v_1, \ldots, v_n)$ возрастает по каждой из переменных, начиная со второй, и убывает по первой, а значит, достигает максимума при $v_i = M_i$, $i = 2, \ldots, n$ и $v_1 = 0$.

Что и требовалось доказать.

Утверждение 7.5. *Положим далее* $\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in \mathbf{F}[0, +\infty)$*. Кроме того, известно, что*

$$\sigma_2(t) < \sigma_1(t) \tag{7.15}$$

при $t > N$*. Тогда можно оценить*

$$\int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_2(t)}{t} \leq \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_1(t)}{t}. \tag{7.16}$$

Доказательство. При $M > N$

$$\int\limits_N^M \frac{d\sigma_2(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i}, \tag{7.17}$$

где $t_i = N + i(M-N)/n$ — положительная неубывающая последовательность. Тогда применяя утверждение 7.4 при $v_i = \sigma_2(t_i),\ M_i = \sigma_1(t_i)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_{i+1} - v_i}{t_i} \le \frac{M_2}{t_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{t_i} =$$
$$= \frac{\sigma_1(t_2)}{t_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\sigma_1(t_{i+1}) - \sigma_1(t_i)}{t_i}. \tag{7.18}$$

Устремляя $n \to \infty$, имеем $t_2 \to N,\ t_1 \to N$, а значит,

$$\int\limits_N^M \frac{d\sigma_2(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_2(t_{i+1}) - \sigma_2(t_i)}{t_i} \le \frac{\sigma_1(N)}{N} + \int\limits_N^M \frac{d\sigma_1(t)}{t}. \tag{7.19}$$

Устремляя здесь $M \to +\infty$, получаем (7.16).

Что и требовалось доказать.

Ранее было обозначено $\hat{\sigma}(x, v) = \dfrac{\sigma(xv)}{\sigma(v)}$.

Начнем доказательство леммы 7.1. Делая замену $t = qa_n$, получим

$$K(ia_n) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t + ia_n} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{a_n(i+q)} = \frac{1}{a_n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{i+q} = \frac{\sigma(a_n)}{a_n} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(\dfrac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)}{i+q}. \tag{7.20}$$

Для того чтобы получить (7.13), необходимо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(\dfrac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)}{i+q} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\hat{\sigma}(q, a_n)}{i+q} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr(q)}{i+q} = C_1, \tag{7.21}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для него выберем N и n такими большими, что

1. $\dfrac{\sigma_1(N)}{N} + \displaystyle\int\limits_N^{+\infty} \frac{d\sigma_1(t)}{t} < \varepsilon;$

2. $\left|\int\limits_0^N \frac{d\hat{\sigma}(q,a_n)}{i+q} - \int\limits_0^N \frac{dr(q)}{i+q}\right| < \varepsilon;$

3. $\int\limits_N^{+\infty} \frac{dr(q)}{q} < \varepsilon.$

Условие 1. возможно осуществить в силу утверждения 7.3 и соотношения (7.7). Условие 2. возможно в силу первой теоремы Хелли:

Предложение 7.3 (первая теорема Хелли)**.** *Пусть функции Φ_n с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$ поточечно на этом отрезке сходятся к некоторой функции Φ, причем полные вариации функций ограниченны в совокупности*[2]*:*

$$V_a^b[\Phi_n] \leq C, \ n = 1,\, 2, \ldots. \tag{7.22}$$

Тогда предельная функция Φ тоже имеет ограниченное изменение и для любой непрерывной функции f справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)d\Phi_n(x) = \int\limits_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Доказательство этой теоремы см. в [26].

Действительно, положив $\Phi_n(q) = \hat{\sigma}(q,a_n)$, $\Phi(q) = r(q)$, $a = 0,\ b = N$, по условию (7.2) мы получаем поточечную сходимость. Кроме того последовательность $d_n = V_0^N[\Phi_n] = \dfrac{\sigma(Na_n)}{\sigma(a_n)}$ сходится к $g(N)$, а значит, ограничена, что и повлечет за собой (7.22). Условие 3. возможно осуществить в силу условия (7.2).

[2] V_a^b здесь означает вариацию на отрезке $[a,b]$.

Окончательно,

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{i+q}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{dr(q)}{i+q}\right|\le$$
$$\le\left|\int\limits_0^{N}\frac{d\hat\sigma(q,a_n))}{i+q}-\int\limits_0^{N}\frac{dr(q)}{i+q}\right|+\int\limits_N^{+\infty}\frac{dr(q)}{|i+q|}+\int\limits_N^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{|i+q|}\le$$
$$\le\left|\int\limits_0^{N}\frac{d\hat\sigma(q,a_n))}{i+q}-\int\limits_0^{N}\frac{dr(q)}{i+q}\right|+\int\limits_N^{+\infty}\frac{dr(q)}{q}+\int\limits_N^{+\infty}\frac{d\hat\sigma(q,a_n)}{q}<3\varepsilon \quad (7.23)$$

согласно условиям 1–3, а также результату (7.16) утверждения 7.5 при $\sigma_2(q)=\hat\sigma(q,a_n)$. Из этого и следует соотношение (7.21).

Докажем теперь соотношение (7.14). Предположим, что n достаточно большое, и

$$\sigma(a_n)/a_n<1/(2|C_1|). \quad (7.24)$$

Тогда D из условия леммы лежит в круге $D_0=\{z\,:\,|z-ia_n|<a_n/2)\}$. Далее, произведем следующие оценки при $t=a_nq\in[0,+\infty)$:

$$|z+t|^2\ge|\operatorname{Im}(z+t)||z+t|\ge|\operatorname{Im}z||z+t|\ge\frac{a_n}{2}|z+t|\ge\frac{a_n}{2}(|t+ia_n|-|ia_n-z|)\ge$$
$$\ge\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{|ia_n-z|}{|t+ia_n|}\right)\ge\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{|ia_n-z|}{|\operatorname{Im}(t+ia_n)|}\right)=$$
$$=\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{|ia_n-z|}{a_n}\right)>\frac{a_n}{2}|t+ia_n|\left(1-\frac{a_n/2}{a_n}\right)=\frac{a_n}{4}|t+ia_n|=\frac{a_n^2}{4}|i+q|.$$

Таким образом, при $z\in D_0$ имеем

$$|K'(z)|=\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t+z)^2}\right|\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{|t+z|^2}\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{\frac{a_n^2}{4}|i+q|}=\frac{4}{a_n^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{|i+q|} \quad (7.25)$$

Проведя рассуждения аналогично (7.20)—(7.23), но использовав в них вместо $i+q$ модуль $|i+q|$, можно получить, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\sigma(qa_n)}{|i+q|}=\sigma(a_n)(C_3+\overline{o}(1)),\quad C_3=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dr(q)}{|i+q|}. \quad (7.26)$$

Вследствие (7.25)—(7.26) получаем, что (7.14) выполняется, если положить $C_2 = 8C_3$ при достаточно большом n.

Что и требовалось доказать.

Утверждение 7.6. *Если в некоторой области D для комплексной функции $h(z)$ выполняется разложение*

$$h(z) = a + b(z - z_0) + h_1(z)$$

для некоторых комплексных чисел a, b и точки z_0, и, кроме того,

1. *в области D выполнено $|h_1(z)| < c|z - z_0|$, где $c < |b|$;*
2. *круг $B = \{|z - z_1| \le r\}$, где $z_1 = z_0 - a/b$ и $r = \left|\frac{a}{b}\right| \frac{c}{|b| - c}$, целиком лежит в D.*

Тогда в B существует единственный ноль $h(z)$.

Доказательство. Имеем $h(z) = f_1(z) + g_1(z)$, где $f_1(z) = a + b(z - z_0)$ и $g_1(z) = h_1(z)$. Функция $f_1(z)$ имеет один ноль в $z_1 = z_0 - a/b$, а на границе ∂B модуль $|f_1(z)| = |b|r$. Кроме того, на границе ∂B также можно оценить

$$\begin{aligned}|g_1(z)| < c|z - z_0| = c|z_1 + re^{i\varphi} - z_0| = \\ = c|re^{i\varphi} - a/b| \le c\left(r + \left|\frac{a}{b}\right|\right) = c\left|\frac{a}{b}\right|\left(\frac{c}{|b| - c} + 1\right) = \\ = c\left|\frac{a}{b}\right|\frac{|b|}{|b| - c} = |b|\left|\frac{a}{b}\right|\frac{c}{|b| - c} = |b|r = |f_1(z)|.\end{aligned}$$

Значит, по теореме Руше в области $B \setminus \partial B$ существует 1 ноль функции $h(z)$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 7.2. *Пусть $f(z)$, $g(z)$ — голоморфные функции в области $D \subset \mathbb{C}$ и выполнены следующие условия:*

1. *$f(z)$ имеет 1 ноль в D в точке z_0, $g(z_0) = g_0$,*
2. *$f'(z) = C + v(z)$, где C — константа, и, кроме того, $|v(z)| < V$ в области D,*
3. *$|g'(z)| \le G$ в области D,*

4. $G+V<|C|$*,*

5. Для $r=\left|\dfrac{g_0}{C}\right|\dfrac{G+V}{|C|-V-G}$ *круг* $B=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_1|\le r\}$ *лежит в* D*, где* $z_1=z_0-g_0/C$*.*

Тогда функция $f(z)+g(z)$ *имеет единственный ноль в* B*.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(z)=f(z)+g(z)=f(z_0)+\int\limits_{z_0}^{z}f'(z)\,dz+g(z_0)+\int\limits_{z_0}^{z}g'(z)\,dz=$$

$$=0+\int\limits_{z_0}^{z}(C+v(z))\,dz+g_0+\int\limits_{z_0}^{z}g'(z)\,dz=g_0+C(z-z_0)+\int\limits_{z_0}^{z}(v(z)+g'(z))\,dz.$$

Тогда можно применить предыдущее утверждение, так как

$$\left|\int\limits_{z_0}^{z}(v(z)+g'(z))\,dz\right|\le\max_{B}|v(z)+g'(z)||z-z_0|\le\sup_{D}|v(z)+g'(z)||z-z_0|\le$$

$$\le(V+G)|z-z_0|$$

при $a=g_0,\ b=C,\ c=G+V$.

Что и требовалось доказать.

Начнем доказательство теоремы 7.2. Выберем при достаточно большом n (то есть при $n>n_0$, где n_0 будет указано в дальнейшем) $z_0=ia_n$, $D=\{z:|z-z_0|<|C_1|\sigma(a_n)\}$. Тогда с помощью леммы 7.2 найдем местоположение нуля $l_n(z)$. Положим $f(z)=z^2+a_n^2,\ g(z)=-a_n^2K(z)$. В области D можно записать $f'(z)=2z=2ia_n+2(z-ia_n)$.

В обозначениях леммы 7.2, очевидно, $C=2ia_n,\ V=2|C_1|\sigma(a_n)$. Кроме того, согласно лемме 7.1 выполнено $g_0=-a_n^2\cdot C_1\dfrac{\sigma(a_n)}{a_n}(1+\bar{o}(1))=C_1a_n\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))$. Положим далее n достаточно большим, так что выполняется (7.14):

$$\max_{\overline{D}}|K'(z)|\le C_2\frac{\sigma(a_n)}{a_n^2}$$

с некоторой константой C_2. В этом случае G можно положить равным $C_2\sigma(a_n)$.

Положим согласно условию 5 леммы 7.2

$$r_n = 2\frac{|g_0|}{|C|-V-G}\frac{G+V}{|C|} =$$
$$= 2\frac{|C_1|a_n\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))}{2a_n - 2|C_1|\sigma(a_n) - C_2\sigma(a_n)}\frac{2|C_1|\sigma(a_n)+C_2\sigma(a_n)}{2a_n} =$$
$$= 2\frac{|C_1|\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))}{2-(2|C_1|+C_2)\dfrac{\sigma(a_n)}{a_n}}\frac{2|C_1|+C_2}{2}\frac{\sigma(a_n)}{a_n} =$$
$$= \frac{(\sigma(a_n))^2}{a_n}\cdot 2\frac{|C_1|(1+\bar{o}(1))}{2-(2|C_1|+C_2)\dfrac{\sigma(a_n)}{a_n}}\frac{2|C_1|+C_2}{2}.$$

Учитывая также, что по утверждению 7.3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma(a_n)}{a_n} = 0, \tag{7.27}$$

можно видеть, что при $n \to \infty$ последовательность r_n эквивалентна $\dfrac{(\sigma(a_n))^2}{a_n}$. Значит, $r_n = \bar{o}(\sigma(a_n))$. Вспоминая также, что

$$z_1 = z_0 - g_0/C = ia_n + \frac{C_1 a_n\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))}{2ia_n} = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)), \tag{7.28}$$

заметим, что область $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < r_n\}$ при достаточно большом n лежит в области D. Действительно, если $|z - z_1| < r_n$, то при достаточно большом n выполнено

$$|z - z_0| \le |z - z_1| + |z_1 - z_0| < r_n + \left|\frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1))\right| =$$
$$= |C_1|\sigma(a_n)\frac{|1+\bar{o}(1)|}{2} + \bar{o}(\sigma(a_n)) < |C_1|\sigma(a_n). \tag{7.29}$$

Таким образом, при достаточно большом n выполнено условие 4 леммы 7.2 (здесь берется n достаточно большим, чтобы выполнялись условия (7.14) и (7.29)). Тогда применима лемма 7.2, и в области B находится 1 ноль функции $l_n(z)$.

В итоге можно записать (с учетом (7.28)):

$$\mu_n^+ = z_1 + \bar{o}(\sigma(a_n)) = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)) + \bar{o}(\sigma(a_n)) = ia_n + \frac{C_1}{2i}\sigma(a_n)(1+\bar{o}(1)),$$

так как $r_n = \bar{o}(\sigma(a_n))$.

Что и требовалось доказать.

Доказательство следствия 7.1. Представим (7.4) в эквивалентной форме:

$$\sigma(x) = Mx^{\alpha}(\ln x)^{\beta}(1 + d(x)), \quad \lim_{x\to+\infty} d(x) = 0. \tag{7.30}$$

Утверждение 7.7. $\lim\limits_{v\to+\infty} \hat{\sigma}(x, v) = x^{\alpha}, \quad x > 0.$

Доказательство. Для начала заметим простое свойство: если $\sigma(x) = \sigma_1(x)\sigma_2(x)$, то

$$\hat{\sigma}(x, v) = \frac{\sigma(xv)}{\sigma(v)} = \frac{\sigma_1(xv)}{\sigma_1(v)}\frac{\sigma_2(xv)}{\sigma_2(v)} = \hat{\sigma}_1(x, v)\hat{\sigma}_2(x, v). \tag{7.31}$$

Далее,

$$\frac{(Mxv)^{\alpha}}{(Mv)^{\alpha}} = x^{\alpha}, \tag{7.32}$$

$$\frac{(\ln(xv))^{\beta}}{(\ln v)^{\beta}} = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln v}\right)^{\beta} \to 1, \quad v \to +\infty, \tag{7.33}$$

$$\frac{1 + d(xv)}{1 + d(v)} \to 1, \text{ т. к. } d(v) \to 0,\ d(xv) \to 0, \quad v \to +\infty. \tag{7.34}$$

Учитывая соотношения (7.31)–(7.34), несложно получить, что $\lim\limits_{v\to+\infty} \hat{\sigma}(x, v) = x^{\alpha}, \quad x > 0.$

Что и требовалось доказать.

В обозначениях теоремы 7.2 с помощью утверждения 7.7 и замечания после теоремы 7.1 можно записать

$$r(q) = \begin{cases} q^{\alpha}, & q > 0, \\ 0, & q = 0, \end{cases}, \quad \sigma_1(x) = \begin{cases} Sx^{\theta}, & x > e, \\ Se^{\theta}, & x \le .e \end{cases}$$

Последнее равенство (7.21) при $\alpha > 0$ вытекает из того, что (см. например [27], задача 28.22)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dq^{\alpha}}{z + q} = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} z^{\alpha-1},$$

а при $\alpha = 0$ — из того, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dr(q)}{i+q} = \frac{1}{i+0}(r(0+) - r(0)) + \int\limits_{0+}^{+\infty} \frac{d\,1}{i+q} = \frac{1}{i} + 0 = \frac{1}{i}. \qquad (7.35)$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство следствия 7.2. В случае следствия 7.2, представляющего собой частный случай следствия 7.1, имеем $\alpha = \beta = 0$, $M = \sigma(+\infty)$, то есть случай конечной меры Стилтьеса $\sigma(t)$. В данном случае функция

$$r(q) = \begin{cases} 1, & q > 0, \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$

является функцией Хевисайда на $[0, +\infty)$, доопределенная в нуле значением 0.

Что и требовалось доказать.

Доказательство следствий 7.3, 7.4. Докажем вначале следствие 7.3. Используя вместо функции $i+q$ функцию e^q, можно также провести рассуждения аналогично (7.20)—(7.23) и получить, что

$$\Gamma(1/a_n) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t/a_n} d\sigma(t) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{e^{t/a_n}} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\sigma(qa_n)}{e^q} = \sigma(a_n) \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\left(\dfrac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)}{e^q} =$$

$$= \Gamma_0(\alpha+1)\sigma(a_n)(1 + \bar{o}(1)), \quad n \to \infty, \quad (7.36)$$

где $\Gamma_0(x)$ — гамма-функция Эйлера, так как аналогично (7.21) получаем при $\alpha > 0$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\left(\dfrac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)}{e^q} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-q} dr(q) = \alpha\Gamma_0(\alpha) = \Gamma_0(\alpha+1),$$

вследствие того, что

$$r(q) = \begin{cases} q^{\alpha}, & q > 0, \\ 0, & q = 0. \end{cases}.$$

Если же рассмотреть $\alpha = 0$, то по аналогии с (7.35) получим

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(\dfrac{\sigma(qa_n)}{\sigma(a_n)}\right)}{e^q} = e^0(r(0+) - r(0)) = 1 = \Gamma_0(\alpha+1).$$

Тогда, заменяя асимптотику $\sigma(a_n)$ согласно соотношению (7.36), получим утверждение следствия.

Следствие 7.4 — частный случай следствия 7.3 для конечной меры $\sigma(x)$.

Что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 7.1.

$$\sigma(t) = \int\limits_0^t d\sigma = \sum_{j\,:\,\gamma_j<t} c_j = \sum_{j\,:\,\gamma_j<t} c_j = \sum_{j\,:\,g(j)<t} f(j) = \sum_{j\,:\,j<g^{-1}(t)} f(j) = \sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]} f(j).$$

Допустим, $f(y)$ убывает. Тогда при $y \in [j, j+1]$ будет выполнено $f(y-1) \geq f(j) \geq f(y)$, а значит,

$$f(1) \geq f(1) \geq \int\limits_1^2 f(y)dy,$$

$$\int\limits_{j-1}^{j} f(y)dy = \int\limits_j^{j+1} f(y-1)dy \geq f(j) \geq \int\limits_j^{j+1} f(y)dy, \quad j = 2, 3, \ldots, [g^{-1}(t)],$$

$$f(1) + \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]} f(y)dy \geq \sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]} f(j) \geq \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]+1} f(y)dy.$$

Итак,

$$f(1) + F([g^{-1}(t)]) \geq \sigma(t) \geq F([g^{-1}(t)]+1). \tag{7.37}$$

Так как f положительна и непрерывна, то F возрастает и дифференцируема, а также $F(t) \to +\infty,\ t \to +\infty$. Следовательно, для некоторых функций $\theta_1(t),\ \theta_2(t)$, таких что $|\theta_1(t)| < 1,\ |\theta_2(t)| < 1$, выполнено

$$f(1) \geq \sigma(t) - F([g^{-1}(t)]) \geq f([g^{-1}(t)] + \theta_1(t)) > 0$$

Тогда

$$\sigma(t) = F([g^{-1}(t)]) + O(1) = F(g^{-1}(t)) - \{g^{-1}(t)\}f([g^{-1}(t)] + \theta_2(t)) + O(1) = \\ = F(g^{-1}(t)) + O(1), \quad t \to \infty.$$

Следовательно,

$$\sigma(t) = F(g^{-1}(t))(1 + \bar{o}(1)), \quad t \to \infty.$$

Допустим, $f(j)$ возрастает. Тогда при $y \in [j, j+1]$ будет выполнено $f(y-1) \leq f(j) \leq f(y)$, а значит,

$$f(1) \leq f(1) \leq \int\limits_1^2 f(y)dy,$$

$$\int\limits_{j-1}^{j} f(y)dy = \int\limits_{j}^{j+1} f(y-1)dy \leq f(j) \leq \int\limits_{j}^{j+1} f(y)dy, \quad j = 2, 3, \ldots, [g^{-1}(t)],$$

$$f(1) + \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]} f(y)dy \leq \sum_{j=1}^{[g^{-1}(t)]} f(j) \leq \int\limits_1^{[g^{-1}(t)]+1} f(y)dy.$$

Итак,

$$F([g^{-1}(t)]) < f(1) + F([g^{-1}(t)]) \leq \sigma(t) \leq F([g^{-1}(t)] + 1). \tag{7.38}$$

Следовательно, для некоторых функций $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, таких что $|\theta_1(t)| < 1$, $|\theta_2(t)| < 1$, выполнено

$$0 < \sigma(t) - F([g^{-1}(t)]) \leq F([g^{-1}(t)] + 1) - F([g^{-1}(t)]) = \\ = f([g^{-1}(t)] + \theta_1(t)) = \overline{o}(F(g^{-1}(t))), \quad t \to \infty,$$

согласно условию (7.6). Тогда

$$\sigma(t) = F([g^{-1}(t)])(1+\bar{o}(1)) = (F(g^{-1}(t)) - \{g^{-1}(t)\}f([g^{-1}(t)] + \theta_2(t)))(1+\bar{o}(1)) = \\ = F(g^{-1}(t))(1 + \bar{o}(1)), \quad t \to \infty.$$

Следовательно, если $f(t)$ монотонна, то

$$\sigma(t) = F(g^{-1}(t))(1 + \bar{o}(1)), \quad t \to \infty.$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство следствия 7.5. Согласно условию, $g^{-1}(t) = (t/B)^{1/\beta}$, а

$$F(t) = \begin{cases} M\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha > -1, \\ M\ln(t), & \alpha = -1. \end{cases}$$

Значит,

$$F(g^{-1}(t)) = \begin{cases} M\dfrac{t^{s}}{B^{s}(\alpha+1)}, & \alpha > -1, \\ \dfrac{1}{\beta}(\ln t - \ln B)), & \alpha = -1. \end{cases}$$

Для завершения доказательства следствия нужно совместить утверждение 7.3 и следствие 7.1.

Что и требовалось доказать.

8 Разрешимость в шкале пространств

В данном разделе приводятся результаты, касающиеся разрешимости в шкале пространств уравнения Гуртина–Пипкина. Сначала будет определена шкала пространств, связанная с оператором A, и приведены основные её свойства. После этого с помощью анализа резольвенты символа уравнения бкдет найдено сильное решение уравнения для невесовых пространств Соболева. Для ядер релаксации, представляющих собой бесконечную сумму убывающих экспонент с полиномиальными коэффициентами, существенно ослабляются требования, предъявляемые к начальным данным для получения сильного решения. Кроме того, доказывается теорема для нахождения слабого решения уравнения. На основании трех представленных выше результатов в конце доказывается корректная разрешимость в шкале пространств уравнения Гуртина–Пипкина.

8.1 Определение и основные свойства шкалы пространств

Определим шкалу пространств H_α, связанную с неограниченным оператором A, для действительных α. Будем следовать методу, описанному в первой главе монографии [25], для сепарабельного гильбертова пространства H и неограниченного, положительно определенного, самосопряженного оператора A, имеющего компактный обратный. Рассмотрим оператор A, действующий в пространстве $H_0 = H$. Помимо области определения $\operatorname{Dom} A = H_1$ можно также в силу спектральной теоремы рассмотреть множества $\operatorname{Dom} A^\alpha = H_\alpha$ и ввести на них структуру гильбертова пространства с нормой $||f||_{H_\alpha} = ||A^\alpha f||_H$ и скалярным произведением $(f,g)_{H_\alpha} = (A^\alpha f, A^\alpha g)_H$. Константа α здесь может быть любым неотрицательным действительным числом. При введении этих пространств можем утверждать, что оператор A может действовать из пространства $H_{\alpha+1}$ в пространство H_α. Это отображение биективно за счет обратимости A и даже осуществляет изоморфизм между этими пространствами. Допустимо также введение H_α с отрицательными α, тогда $H_\alpha = (H_{-\alpha})^*$ — сопряженное к пространству $H_{-\alpha}$. Оператор A тогда будет действовать как раньше из пространства $H_{\alpha+1}$ в пространство H_α, но уже в соответствии с теорией сопряженных пространств на функционалы: $(Af)(g) = f(Ag)$.

Возможно и дальше определять свойства пространств H_α через функционалы, но в нашей ситуации с сепарабельным гильбертовым пространством H и самосопряженным положительно определенным оператором A, имеющим обратный компактный, разумно воспользоваться изоморфизмом H и пространства последовательностей l_2. В пространстве H существует ортономированный базис из собственных векторов A — $\{e_n\},\ n = 1, 2, \ldots$, им соответствуют собственные значения $a_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим тогда ряды (возможно, расходящиеся)

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, \quad f_i \in \mathbb{C}.$$

В этом случае $f \in H_\alpha$, если $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^{2\alpha}|f_i|^2 < \infty$, действие оператора A^β определяется как $A^\beta \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\beta f_i e_i$, а скалярное произведение в H_α можно определить следующим образом:

$$(f,g)_{H_\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, \sum_{i=1}^{\infty} g_i e_i \right)_{H_\alpha} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{2\alpha} f_i \overline{g}_i.$$

Элементы H_α с неотрицательными α соответствуют классическим векторам из H_0, а с отрицательными — функционалам из $(H_{-\alpha})^*$ (см. также первую главу [64]), где действие функционала на вектор определяется следующим образом:

для $\gamma > 0$, $f \in H_{-\gamma}$ и $g \in H_\gamma$ выполнено

$$f(g) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \overline{g}_i = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{-\gamma} f_i)(a_i^{\gamma} \overline{g}_i) = (A^{-\gamma} f, A^{\gamma} g)_H < ||f||_{H_{-\gamma}} ||g||_{H_\gamma} < \infty.$$

Тогда для H_α с неотрицательными α имеем $f_i = (f, e_i)_H$, а для H_α с отрицательными α имеем $f_i = f(e_i)$. Как и ранее, оператор A действует из пространства $H_{\alpha+1}$ в пространство H_α биективно, и даже осуществляет изоморфизм между этими пространствами. Очевидно также, что и оператор A^r, $r \in \mathbb{R}$, тоже осуществляет изоморфизм между соответствующими пространствами. Кроме того, заметим, что $f \in H_r$ тогда и только тогда, когда $A^r f \in H$. Рассматривая при различных действительных α вышеупомянутые множества, получим *шкалу пространств*, порожденную оператором A.

8.2 Корректная разрешимость интегродифференциального уравнения Гуртина–Пипкина.

В данном разделе будут использоваться ядра релаксации вида (2.3) с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} < 1.$$

Выпишем определение сильного решения из раздела 2 для уравнения Гуртина–Пипкина и нулевого веса γ.

Определение. Вектор-функция $u(t)$ называется *сильным решением* задачи (6.1),(6.2), если она принадлежит пространству Соболева $W_2^2([0, +\infty); A)$, выполнены равенства (6.2), и соотношение (6.1) выполнено почти всюду на $[0, +\infty)$.

Теорема 8.1. *Пусть* $\varphi_0 \in H_2$ *и* $\varphi_1 \in H_1$, *а* $f(t) \in L_2([0, +\infty), H_1)$, *тогда существует единственное сильное решение задачи* (6.1), (6.2) $u(t)$, $t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво и для некоторой положительной константы d (не зависящей от начальных данных φ_0, φ_1 и правой части $f(t)$) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);A)} \leq d \left(||Af||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A^2\varphi_0||_H + ||A\varphi_1||_H \right). \tag{8.1}$$

В третьей главе монографии [7] рассмотрен вопрос корректной разрешимости задачи (6.1), (6.2) в весовых пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}([0,+\infty),A)$ для положительного веса γ. Теорема 8.1 является естественным продолжением данного результата, в ней для нулевого экспоненциального веса обоснована корректная разрешимость задачи (6.1), (6.2) и асимптотическая устойчивость решений.

Рассмотрим теперь частный случай задачи (6.1),(6.2) с условиями степенного поведения c_k и γ_k при $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$:

$$c_k = Ak^{-\alpha},\ \gamma_k = Bk^{\beta}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{8.2}$$

$$c_k > 0,\ \gamma_{k+1} > \gamma_k > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{8.3}$$

$$\alpha + \beta > 1,\ -1 < \alpha < 1,\ \beta > 0. \tag{8.4}$$

Тогда для $s = (1-\alpha)/(2\beta)$ верна

Теорема 8.2. *Пусть $\varphi_0 \in H_{2-s}$ и $\varphi_1 \in H_{1-s}$, а $f(t) \in L_2([0,+\infty), H_{1-2s})$, тогда существует единственное сильное решение задачи* (6.1), (6.2) *$u(t)$, $t \geq 0$. Более того, оно асимптотически устойчиво и для некоторой положительной константы d (не зависящей от начальных данных φ_0, φ_1 и правой части $f(t)$) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);A)} \leq d \left(||A^{1-2s}f||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A^{2-s}\varphi_0||_H + ||A^{1-s}\varphi_1||_H \right). \tag{8.5}$$

Выпишем определение слабого решения из раздела 2 для уравнения Гуртина–Пипкина и нулевого веса γ.

Определение. Вектор-функция $u(t)$ является *слабым решением* задачи (6.1), (6.2), если она принадлежит пространству Соболева $W_2^1([0,+\infty);A)$, удовлетворяет условию $u(0+) = \varphi_0$, и для любого $v(t) \in W_2^1([0,+\infty);A)$ выполнено

$$\Phi(u,v) = -(u'(t), v'(t)) - (\varphi_1, v(0+))_H +$$
$$+ (Au(t), Av(t)) - \left(\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) Au(\tau) d\tau, Av(t) \right) - (f(t), v(t)) = 0. \tag{8.6}$$

Здесь все скалярные произведения, кроме второго слагаемого, берутся в пространстве $L_2([0,+\infty),H)$

Теорема 8.3. *Пусть* $\varphi_0 \in H_1$ *и* $\varphi_1 \in H$, *а* $f(t) \in L_2([0,+\infty),H)$, *тогда существует единственное слабое решение задачи* (6.1), (6.2) $u(t)$, $t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво и для некоторой положительной константы* d *(не зависящей от начальных данных* φ_0, φ_1 *и правой части* $f(t)$*) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^1([0,+\infty),A)} \leq d\left(||f||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A\varphi_0||_H + ||\varphi_1||_H\right). \tag{8.7}$$

Доказательство теоремы 8.1. Будем действовать способом, аналогичным тому, что описан в [5]. Применив преобразование Лапласа к (6.1), (6.2), получим следующее уравнение:

$$z^2\widehat{u}(z) - z\varphi_0 - \varphi_1 + A^2\widehat{u}(z) - K(z)A^2\widehat{u}(z) = \widehat{f}(z), \tag{8.8}$$

где $K(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{z+\gamma_j}$ — преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$. Таким образом, если воспользоваться обозначением (6.3), уравнение запишется в виде

$$L(z)\widehat{u}(z) = z\varphi_0 + \varphi_1 + \widehat{f}(z). \tag{8.9}$$

Лемма 8.1. *Для любых* $\widehat{f}(z) \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$ *и* $\varphi \in H$ *вектор-функции* $zL^{-1}(z)\widehat{f}(z)$ *и* $zL^{-1}(z)\varphi$ *лежат в* $H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$.

Доказательство. Для начала оценим снизу по модулю функцию $l_n(z) = (L(z)e_n, e_n) = z^2 + a_n^2(1 - K(z))$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $l_{r,n}(z) = z^2 + a_n^2(1 - K_r(z))$, где $K_r(z) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{c_j}{z+\gamma_j}$.

Из монографии [5] известно, что рациональная функция $l_{r,n}(z)$ имеет r действительных нулей $\mu_{r,n,k}$, $k = 1, \ldots, r$ таких, что

$$-\gamma_r < \mu_{r,n,r} < -\gamma_{r-1} < \mu_{r,n,r-1} < \ldots < -\gamma_1 < \mu_{1,n,1} < 0,$$

и 2 комплексно-сопряженных нуля $\mu_{r,n}^{\pm}$. Обозначим также $\widetilde{\mu}_{r,k}$, $k = 1, \ldots, r$ — нули функции $1 - K_r(z)$. Несложно доказать, что $-\gamma_k < \mu_{r,n,k} < \widetilde{\mu}_{r,k}$. Действительно, $l_{r,n}(\widetilde{\mu}_{r,k}) = \widetilde{\mu}_{r,k}^2 > 0$, но $l_{r,n}(-\gamma_k + 0) = -\infty$, так что по теореме о промежуточном значении мы получим, что на интервале $(-\gamma_k, \widetilde{\mu}_{r,k})$ находится

$\mu_{r,n,k}$ — ноль функции $l_{r,n}(z)$. В итоге получим, что выполнено

$$-\gamma_r < \mu_{r,n,r} < \widetilde{\mu}_{r,r} < -\gamma_{r-1} < \mu_{r,n,r-1} < \widetilde{\mu}_{r,r-1} < \ldots <$$
$$< -\gamma_k < \mu_{r,n,k} < \widetilde{\mu}_{r,k} < \ldots < -\gamma_1 < \mu_{1,n,k} < \widetilde{\mu}_{r,1} < 0.$$

Оценим теперь на $i[0,+\infty) = \{iy : \ y \geq 0\}$ функцию $l_{r,n}(z)$: так как эта функция рациональна, можно записать, что

$$|l_{r,n}(iy)| = |iy - \mu^+_{r,n}||iy - \mu^-_{r,n}| \frac{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy - \mu_{r,n,k}|}{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy + \gamma_k|} >$$
$$> |iy||iy - \mu^+_{r,n}| \frac{|iy - \mu^-_{r,n}|}{|iy|} \frac{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy - \widetilde{\mu}_{r,k}|}{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy + \gamma_k|}. \quad (8.10)$$

Последнее неравенство выполнено в силу того, что

$$|iy - \mu_{r,n,k}|^2 = |\operatorname{Re}(iy - \mu_{r,n,k})|^2 + |\operatorname{Im}(iy - \mu_{r,n,k})|^2 =$$
$$= y^2 + |\mu_{r,n,k}|^2 > y^2 + |\widetilde{\mu}_{r,k}|^2 = |iy - \widetilde{\mu}_{r,k}|^2.$$

Кроме того, несложно заметить, что (здесь предполагается, что $\operatorname{Im} \mu^-_{r,n} < 0$)

$$|iy - \mu^-_{r,n}|^2 = (y + |\operatorname{Im} \mu^-_{r,n}|)^2 + |\operatorname{Re} \mu^-_{r,n}|^2 > y^2 = |iy|^2.$$

Далее отметим, что в силу рациональности функций $\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{r} (z - \widetilde{\mu}_{r,k})}{\prod\limits_{k=1}^{r} (z + \gamma_k)}$ и $1 - K_r(z)$ они совпадают, так как их нули и полюсы совпадают, и сами они стремятся к 1 при $z \to \infty$.

С учетом вышесказанного цепочку неравенств (8.10) можно продолжить (при $y \geq 0$):

$$|l_{r,n}(iy)| > |iy||iy-\mu^+_{r,n}|\frac{|iy-\mu^-_{r,n}|}{|iy|}\frac{\prod\limits_{k=1}^{r}|iy-\widetilde{\mu}_{r,k}|}{\prod\limits_{k=1}^{r}|iy+\gamma_k|} >$$

$$> |iy||iy-\mu^+_{r,n}|\cdot 1\cdot|1-K_r(iy)| \geq |iy||iy-\mu^+_{r,n}||1-|K_r(iy)|| \geq$$

$$\geq |iy||iy-\mu^+_{r,n}|(1-K_r(0)) \geq C_1|iy||iy-\mu^+_{r,n}|, \quad (8.11)$$

если положить

$$C_1 = 1 - K(0) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\gamma_j}.$$

При фиксированных $y \geq 0$ и n перейдем к пределу по $r \to \infty$ в правой и левой части неравенства (8.11):

$$|\lim_{r\to\infty} l_{r,n}(iy)| \geq C_1|iy||iy-\lim_{r\to\infty}\mu^+_{r,n}| = C_1 y|iy-\lim_{r\to\infty}\mu^+_{r,n}|. \quad (8.12)$$

Можно заметить, что $\lim\limits_{r\to\infty} l_{r,n}(iy) = l_n(iy)$, так как

$$|l_{r,n}(iy)-l_n(iy)| = \left|\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{c_k}{iy+\gamma_k}\right| \leq \sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}.$$

Найдем теперь $\lim\limits_{r\to\infty}\mu^+_{r,n}$. По предложению 7.2 функция $l_n(z)$ имеет в верхней полуплоскости один комплексный ноль — μ^+_n. Кроме того, можно доказать (см. [7]), что существуют такие константы $C_2, C_3 > 0$, что для любого n

$$|\operatorname{Re}\mu^+_n| > C_2, \quad (8.13)$$

$$|\operatorname{Im}\mu^+_n| > a_n C_3. \quad (8.14)$$

Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon < |\operatorname{Im}\mu^+_n|/2$ и рассмотрим круг $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-\mu^+_n| < \varepsilon\}$. Функция $l_n(z)$ будет голоморфна в D_ε, и кроме того она не будет в замыкании $\overline{D}_\varepsilon$ обращаться в ноль нигде, кроме точки μ^+_n. Значит для некоторой положительной константы m_ε при $z \in \partial D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-\mu^+_n| = \varepsilon\}$ будет выполнено $0 < m_\varepsilon \leq |l_n(z)|$. Возьмем достаточно большое

$r_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что при $r \geq r_\varepsilon$ будет выполнено $-|\operatorname{Re}\mu_n^+| - \varepsilon + \gamma_k > 0$ и

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{c_k}{-|\operatorname{Re}\mu_n^+| - \varepsilon + \gamma_k} < m_\varepsilon. \tag{8.15}$$

Тогда при $z \in \partial D_\varepsilon$ можно представить $l_{r,n}(z)$ как сумму голоморфных функций $f(z) = l_n(z)$ и $g(z) = -\sum\limits_{k=r+1}^{\infty} \dfrac{c_k}{z+\gamma_k}$, при этом, исходя из (8.15), можно записать

$$|g(z)| \leq \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{c_k}{|z+\gamma_k|} \leq \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{c_k}{|\operatorname{Re}(z+\gamma_k)|} \leq$$
$$\leq \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{c_k}{-|\operatorname{Re}\mu_n^+| - \varepsilon + \gamma_k} < m_\varepsilon \leq |f(z)|.$$

В этом случае можно применить к вышеуказанным функциям теорему Руше и получить, что $\mu_{r,n}^+ \in D_\varepsilon$ и $|\mu_{r,n}^+ - \mu_n^+| < \varepsilon$ при любом $r > r_\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_{r,n}^+ = \mu_n^+$.

С учетом вышеизложенного неравенство (8.12) можно записать как

$$|l_n(iy)| \geq C_1|iy||iy - \mu_n^+| = C_1 y|iy - \mu_n^+|. \tag{8.16}$$

Аналогично, при $z \in i\mathbb{R}^- = \{-iy : \ y \geq 0\}$, получим, что $|l_n(z)| \leq C_1|z||z - \mu_n^-|$.

Далее докажем, что $zl_n^{-1}(z) \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, \mathbb{C})$ и оценим её норму в этом пространстве.

Так как $\overline{l_n(z)} = l_n(\bar{z})$, то при $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$,

$$||zl_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} = 2\int_0^\infty |iyl_n^{-1}(iy)|^2 dy = 2\int\limits_{[0,+\infty)} |zl_n^{-1}(z)|^2 dy.$$

Тогда согласно оценке (8.16)

$$||zl_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} = 2\int\limits_{[0,+\infty)} |zl_n^{-1}(z)|^2 dy \leq$$

$$\leq \frac{2}{C_1}\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{1}{|z-\mu_n^+|^2}dy < \frac{2}{C_1}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{|z-\mu_n^+|^2}dy =$$

$$= \frac{2}{C_1}||(z-\mu_n^+)^{-1}||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} = \frac{2}{C_1}||e^{\mu_n^+ t}||^2_{L_2([0,\infty);\mathbb{C})} =$$

$$= \frac{2}{C_1}\frac{1}{2|\operatorname{Re}\mu_n^+|} = \frac{1}{C_1|\operatorname{Re}\mu_n^+|} = \frac{1}{C_1 R_n}. \quad (8.17)$$

Здесь и в дальнейшем будем обозначать

$$R_n = |\operatorname{Re}\mu_n^+|.$$

Несложно также оценить норму функции $zl_n^{-1}(z)$ в пространстве непрерывных функций $C(i\mathbb{R})$ со стандартной нормой: согласно оценке (8.16) при $y \in \mathbb{R}$

$$|iyl_n^{-1}(iy)| \leq \frac{1}{C_1|iy-\mu_n^+|} \leq \frac{1}{C_1 R_n}. \quad (8.18)$$

Функции $zL^{-1}(z)\widehat{f}(z)$ и $zL^{-1}(z)\varphi$, очевидно, голоморфны в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, и тогда остается только доказать, что их норма в $H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$ конечна. Для этого заметим, что, если обозначить $(\varphi, e_n) = \varphi_n$,

$$||zL^{-1}(z)\varphi||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||iyL^{-1}(iy)\varphi||^2_H dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |(iyL^{-1}(iy)\varphi, e_n)|^2 dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |iyl_n^{-1}(iy)\varphi_n|^2 dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |iyl_n^{-1}(iy)|^2|\varphi_n|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty}\left(||zl_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})}|\varphi_n|^2\right) \quad (8.19)$$

В неравенстве (8.19) можно переставить интегрирование и суммирование, так как согласно (8.17) и (8.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(||zl_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})}|\varphi_n|^2\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n|^2}{C_1R_n} \le \frac{1}{C_1C_2}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|^2 = \\ = \frac{||\varphi||^2_H}{C_1C_2} < \infty. \quad (8.20)$$

Окончательно получим, что

$$||zL^{-1}(z)\varphi||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} < \infty,$$

следовательно, $zL^{-1}(z)\varphi \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$.

Обозначим далее $f_n(z) = (\widehat{f}(z), e_n)_H$, тогда

$$||zL^{-1}(z)\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}||iyL^{-1}(iy)\widehat{f}(iy)||^2_H dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|(iyL^{-1}(iy)\widehat{f}(iy), e_n)|^2 dy = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|iyl_n^{-1}(iy)f_n(iy)|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|iyl_n^{-1}(iy)f_n(iy)|^2 dy. \quad (8.21)$$

В неравенстве (8.21) можно переставить интегрирование и суммирование, так как согласно (8.18) и (8.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|iyl_n^{-1}(iy)f_n(iy)|^2 dy \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(C_1R_n)^2}|f_n(iy)|^2 dy \le \\ \le \frac{1}{(C_1C_2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}||f_n(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} = \frac{||\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)}}{(C_1C_2)^2} < \infty. \quad (8.22)$$

Окончательно получим, что

$$||zL^{-1}(z)\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} < \infty,$$

следовательно, $zL^{-1}(z)\widehat{f}(z) \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 8.2. *Для любых* $\widehat{f}(z) \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$ *и* $\varphi \in H$ *вектор-функции*

$AL^{-1}(z)\widehat{f}(z)$ *и* $AL^{-1}(z)\varphi$ *лежат в* $H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$.

Доказательство. Следуя доказательству леммы 8.1 заметим, что согласно (8.10)

$$|l_{r,n}(iy)| > |iy - \mu_{r,n}^{+}||iy - \mu_{r,n}^{-}| \frac{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy - \widetilde{\mu}_{r,k}|}{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy + \gamma_k|}.$$

Кроме того, при $y \geq 0$ выполнено

$$|iy - \mu_{r,n}^{-}|^2 = (y + |\operatorname{Im} \mu_{r,n}^{-}|)^2 + |\operatorname{Re} \mu_{r,n}^{-}|^2 > |\operatorname{Im} \mu_{r,n}^{-}|^2.$$

Тогда аналогично (8.11)

$$\begin{gathered} |l_{r,n}(iy)| > |\operatorname{Im} \mu_{r,n}^{-}||iy - \mu_{r,n}^{+}| \frac{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy - \widetilde{\mu}_{r,k}|}{\prod\limits_{k=1}^{r} |iy + \gamma_k|} > \\ > |\operatorname{Im} \mu_{r,n}^{-}||iy - \mu_{r,n}^{+}| \cdot 1 \cdot |1 - K_r(iy)| \geq |\operatorname{Im} \mu_{r,n}^{-}||iy - \mu_{r,n}^{+}||1 - |K_r(iy)|| \geq \\ \geq |\operatorname{Im} \mu_{r,n}^{-}||iy - \mu_{r,n}^{+}|(1 - K_r(0)) \geq C_1 |\operatorname{Im} \mu_{r,n}^{-}||iy - \mu_{r,n}^{+}|. \end{gathered}$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$, и учитывая, что $\lim\limits_{r\to\infty} l_{r,n}(iy) = l_n(iy)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_{r,n}^{+} = \mu_n^{+}$, а также (8.14), имеем

$$|l_n(iy)| \geq C_1 |\operatorname{Im} \mu_n^{-}||iy - \mu_n^{+}| \geq C_1 C_3 a_n |iy - \mu_n^{+}|. \tag{8.23}$$

Получим далее, что

$$|a_n l_n(iy)^{-1}| \leq (C_1 C_3 |iy - \mu_n^{+}|)^{-1}$$

и тогда доказательство можно продолжить полностью аналогично лемме 8.1.

Последовательно получим

$$||a_n l_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\mathrm{Re}\,z>0,\mathbb{C})} \le \frac{1}{C_1C_3R_n}, \tag{8.24}$$

$$|a_n l_n^{-1}(iy)| \le \frac{1}{C_1C_3R_n}, \tag{8.25}$$

$$||AL^{-1}(z)\varphi||^2_{H_2(\mathrm{Re}\,z>0,H)} \le \frac{||\varphi||^2}{C_1C_2C_3} < \infty, \tag{8.26}$$

$$||AL^{-1}(z)\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\mathrm{Re}\,z>0,H)} \le \frac{||\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\mathrm{Re}\,z>0,H)}}{(C_1C_2C_3)^2} < \infty. \tag{8.27}$$

Что и требовалось доказать.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Определим функцию

$$\widehat{u}(z) = zL^{-1}(z)\varphi_0 + L^{-1}(z)\varphi_1 + L^{-1}\widehat{f}(z). \tag{8.28}$$

Так как $\widehat{u}(z)$ удовлетворяет (8.9), её обратное преобразование Лапласа $u(t)$ удовлетворяет (6.1). Для того чтобы $u(t)$ принадлежала пространству $W_2^2([0,+\infty);A)$ необходимо, чтобы $u''(t)$ и $A^2u(t)$ принадлежали пространству $L_2([0,+\infty);H)$. Согласно разделу 2 это выполнено, когда их преобразования Лапласа лежат в пространстве Харди, то есть вектор-функции $A^2\widehat{u}(z)$ и $z^2\widehat{u}(z) - z\varphi_0 - \varphi_1$ принадлежат пространству $H_2(\mathrm{Re}\,z > 0, H)$.

Рассмотрим функцию $A^2\widehat{u}(z)$:

$$A^2\widehat{u}(z) = zL^{-1}(z)A^2\varphi_0 + AL^{-1}(z)A\varphi_1 + AL^{-1}(z)A\widehat{f}(z). \tag{8.29}$$

Согласно условию теоремы и леммам 8.1 и 8.2 получим, что $A^2\widehat{u}(z) \in H_2(\mathrm{Re}\,z > 0, H)$.

Далее, согласно (8.9)

$$z^2\widehat{u}(z) - z\varphi_0 - \varphi_1 = \widehat{f}(z) - (1 - K(z))A^2\widehat{u}(z) \tag{8.30}$$

и

$$\begin{aligned}||z^2\widehat{u}(z) - z\varphi_0 - \varphi_1||_{H_2(\mathrm{Re}\,z>0,H)} \le ||A^{-1}||\ ||A\widehat{f}(z)||_{H_2(\mathrm{Re}\,z>0,H)} + \\ + (1 + K(0))||A^2\widehat{u}(z)||_{H_2(\mathrm{Re}\,z>0,H)} < \infty.\end{aligned} \tag{8.31}$$

Таким образом, $u(t)$ действительно принадлежит $W_2^2([0,+\infty);A)$. Константа d в разложении (8.1) находится с учетом соотношений (8.19)–(8.22), (8.26)–(8.31).

Докажем теперь, что $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям (6.2).

Замечание. Если $\varphi(t)\in L_2([0,\infty),H)$ (или, что то же самое, $\widehat{\varphi}(z)\in H_2(\operatorname{Re} z>0,H)$), то её преобразование Лапласа $\widehat{\varphi}(z)\to 0$ при $z\to+\infty,\ z\in\mathbb{R}$. Действительно,

$$||\widehat{\varphi}(z)||_H^2 \leq \left(\int\limits_0^\infty ||\varphi(t)||_H e^{-zt}dt\right)^2 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty ||\varphi(t)||_H^2 dt \int\limits_0^\infty e^{-2zt}dt = \frac{||\varphi(t)||^2_{L_2([0,\infty),H)}}{2z} \to 0$$

вследствие неравенства Коши-Буняковского.

Докажем далее бесконечномерный аналог теоремы о начальном значении.

Лемма 8.3. *Для любой ограниченной функции $v(t)$, имеющей преобразование Лапласа $\widehat{v}(z)$, будет выполнено равенство*

$$v(0+) = \lim_{z\to+\infty} z\widehat{v}(z).$$

Доказательство. Сделаем замену переменных:

$$z\widehat{v}(z) = z\int\limits_0^\infty v(t)e^{-zt}dt = \int\limits_0^\infty v(t/z)e^{-t}dt.$$

Тогда, если $z\to+\infty$, то

$$\int\limits_0^\infty v(t/z)e^{-t}dt \to \int\limits_0^\infty v(0+)e^{-t}dt = v(0+)$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Что и требовалось доказать.

Заметим, что по теореме 2.2 полученная в ходе доказательства теоремы функция $u(t)$ ограничена, её производная тоже ограничена. Тогда согласно замечанию выше и соотношению (8.31) получим, что

$$z\widehat{u}(z) = \frac{z^2\widehat{u}(z) - z\varphi_0 - \varphi_1}{z} + \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{z} \to \varphi_0,$$

при $z \to +\infty$. Значит, по лемме 8.3 $u(0+) = \varphi_0$. Кроме этого верно соотношение

$$z(z\widehat{u}(z) - u(0+)) = z^2\widehat{u}(z) - z\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_1 \to \varphi_1$$

при $z \to +\infty$. Значит,

$$u'(0+) = \lim_{z\to+\infty} z\widehat{u'}(z) = \lim_{z\to+\infty} z(\widehat{u}(z) - u(0+)) = \varphi_1.$$

Решения уравнения являются асимптотический устойчивыми. Так как уравнение линейно, необходимо доказать устойчивость лишь нулевого решения. Действительно, устойчивость по Ляпунову следует из (8.1) и того, что $C([0,\infty), H)$ — пространство непрерывных на положительной полуоси вектор-функций со значениями в H — непрерывно вложено в $W_2^2([0,+\infty); A)$ по теореме 2.2. Кроме этого для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем t_0 такое, что

$$\left(\int_{t_0}^{+\infty} (||u''(t)||_H^2 + ||A^2u(t)||_H^2)dt\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Обозначим

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда для любого $t > t_0$ получим, что :

$$||u(t)||_H \leq ||u(t)H(t-t_0)||_{C([0,\infty),H)} \leq C||u(t)H(t-t_0)||_{W_2^2([0,+\infty);A)} < C\varepsilon.$$

Это по определению и означает асимптотическую устойчивость нулевого решения (а значит, и всех остальных) задачи (6.1),(6.2).

Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 8.2.

Согласно теореме 7.5

$$R_n = |\operatorname{Re}\mu_n^+| > C_4 a_n^{2s}, \tag{8.32}$$

где $s = \frac{1-\alpha}{2\beta}$, с некоторой положительной константой C_4.

Докажем аналоги лемм 8.1 и 8.2.

Лемма 8.4. *Для любых* $\widehat{f}(z) \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$ *и* $\varphi \in H$ *вектор-функции* $A^{2s} z L^{-1}(z)\widehat{f}(z)$, $A^s z L^{-1}(z)\varphi$, $A^{1+s}L^{-1}(z)\varphi$, *и* $A^{1+2s}L^{-1}(z)\widehat{f}(z)$ *лежат в* $H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$.

Доказательство. Если обозначить $(\varphi, e_n) = \varphi_n$, то аналогично (8.19)

$$||A^s z L^{-1}(z)\varphi||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||A^s iy L^{-1}(iy)\varphi||^2_H dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |(A^s iy L^{-1}(iy)\varphi, e_n)|^2 dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^s iy l_n^{-1}(iy)\varphi_n|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a_n^s iy l_n^{-1}(iy)|^2 |\varphi_n|^2 dy =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(||a_n^s z l_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} |\varphi_n|^2 \right).$$

В неравенстве выше можно переставить интегрирование и суммирование, так как согласно (8.17) и (8.32)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(||a_n^s z l_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} |\varphi_n|^2 \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{2s}|\varphi_n|^2}{C_1 R_n} \le \frac{1}{C_1 C_4} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2 = \frac{||\varphi||^2}{C_1 C_4} < \infty.$$

Окончательно получим, что

$$||A^s z L^{-1}(z)\varphi||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} < \infty,$$

следовательно, $A^s z L^{-1}(z)\varphi \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$.

Обозначим далее $f_n(z) = (\widehat{f}(z), e_n)$, тогда

$$||A^{2s}zL^{-1}(z)\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||A^{2s}iyL^{-1}(iy)\widehat{f}(iy)||^2_H dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |(A^{2s}iyL^{-1}(iy)\widehat{f}(iy), e_n)|^2 dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{2s} iy l_n^{-1}(iy) f_n(iy)|^2 dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a_n^{2s} iy l_n^{-1}(iy) f_n(iy)|^2 dy$$

В неравенстве выше можно переставить интегрирование и суммирование, так как согласно (8.18) и (8.32)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a_n^{2s} iy l_n^{-1}(iy) f_n(iy)|^2 dy \le \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a_n^{2s}}{C_1 R_n}\right)^2 |f_n(iy)|^2 dy \le$$

$$\le \frac{1}{(C_1C_4)^2} \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} = \frac{||\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)}}{(C_1C_4)^2} < \infty.$$

Окончательно получим, что

$$||A^{2s}zL^{-1}(z)\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} < \infty,$$

следовательно, $A^{2s}zL^{-1}(z)\widehat{f}(z) \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$. Аналогично доказательству леммы 8.2 получим, что

$$||a_n^{1+s} l_n^{-1}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,\mathbb{C})} \le \frac{a_n^{2s}}{C_1C_3R_n},$$

$$|a_n^{1+s} l_n^{-1}(iy)| \le \frac{a_n^{s}}{C_1C_3R_n},$$

$$||A^{1+s}L^{-1}(z)\varphi||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} \le \frac{||\varphi||^2}{C_1C_4C_3} < \infty,$$

$$||A^{1+2s}L^{-1}(z)\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} \le \frac{||\widehat{f}(z)||^2_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)}}{(C_1C_4C_3)^2} < \infty.$$

Что и требовалось доказать.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Аналогично (8.29)

$$A^2\widehat{u}(z) = A^s z L^{-1}(z) A^{2-s}\varphi_0 + A^{1+s}L^{-1}(z)A^{1-s}\varphi_1 + \\ + A^{1+2s}L^{-1}(z)A^{1-2s}\widehat{f}(z). \quad (8.33)$$

Согласно условию теоремы и лемме 8.3 получим, что $A^2\widehat{u}(z) \in H_2(\operatorname{Re} z > 0, H)$.

Далее, согласно (8.31)

$$||z^2\widehat{u}(z) - z\varphi_0 - \varphi_1||_{H_2(\operatorname{Re} z>0,H)} < \infty.$$

Таким образом, $u(t)$ действительно принадлежит $W_2^2([0,+\infty); A)$. Оценка (8.5) получается из леммы 8.3 и соотношений (8.31) и (8.33).

Доказательство затем завершается полностью аналогично теореме 8.1.

Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 8.3.

Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2}{dt^2}w(t) + A^2 w(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)A^2 w(\tau)d\tau = A^{-1}f(t) =: F(t) \quad (8.34)$$

$$w(0+) = A^{-1}\varphi_0 =: \Phi_0 \quad (8.35)$$

$$w'(0+) = A^{-1}\varphi_1 =: \Phi_1. \quad (8.36)$$

Так как $\Phi_0 \in H_2$ и $\Phi_1 \in H_1$, а $F(t) \in L_2([0,+\infty), H_1)$, согласно теореме (8.1), существует единственное сильное (почти всюду) решение задачи (8.34), (8.36) $w(t)$ в пространстве Соболева $W_2^2([0,+\infty); A)$, оно асимптотически устойчиво, и выполняется оценка

$$||w||_{W_2^2([0,+\infty),A)} \le d\left(||AF||_{L_2([0,+\infty),H)} + ||A^2\Phi_0||_H + ||A\Phi_1||_H\right). \quad (8.37)$$

Положим $u(t) = Aw(t)$. Тогда $u(t) \in W_2^1([0,+\infty); A)$ и, вследствие (8.37), выполняется оценка (8.7). Для завершения доказательства осталось лишь доказать (8.6), так как $u(0+) = \varphi_0$ автоматически следует из (8.35).

Действительно, для произвольного $v \in W_2^1([0,+\infty); A)$, умножим скалярно обе части (8.34) на $Av(t)$ в $L_2([0,+\infty), H)$. Тогда $(A^2 w(t), Av(t)) = (Au(t), Av(t))$ и $(F(t), Av(t)) = (f(t), v(t))$. Далее, учитывая то, что $v'(t)$ и $w'(t)$

существуют почти всюду, рассмотрим в данный момент $t > 0$ производную скалярного произведения $(w'(t), Av(t))_H$:

$$((w'(t), Av(t))_H)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(w'(t+\Delta t), Av(t+\Delta t))_H - (w'(t), Av(t))_H}{\Delta t} =$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(w'(t+\Delta t), Av(t+\Delta t))_H - (w'(t+\Delta t), Av(t))_H}{\Delta t} +$$
$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(w'(t+\Delta t), Av(t))_H - (w'(t), Av(t))_H}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(w'(t), Av(t+\Delta t) - Av(t))_H}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(w'(t+\Delta t) - w'(t), Av(t))_H}{\Delta t} =$$
$$= \left(Aw'(t), \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t))}{\Delta t} \right)_H + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{w'(t+\Delta t) - w'(t)}{\Delta t}, Av(t) \right)_H =$$
$$= (Aw'(t), v'(t))_H + (w''(t), Av(t))_H$$

Из этого соотношения по правилу интегрирования по частям следует, что $(w''(t), Av(t))_{L_2([0,+\infty),H)} = -(Aw'(t), v'(t))_{L_2([0,+\infty),H)} - (\Phi_1, Av(0+))_H = -(u'(t), v'(t))_{L_2([0,+\infty),H)} - (\varphi_1, v(0+))_H$.

Таким образом,

$$\Phi(u,v) = -(u'(t), v'(t)) - (\varphi_1, v(0+))_H +$$
$$+ (Au(t), Av(t)) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)Au(\tau)d\tau, Av(t) = 0.$$

Скалярные произведения здесь берутся в $L_2([0,+\infty), H)$.

Асимптотическая устойчивость проверяется так же, как и в теореме 8.1, поскольку $C([0,\infty), H)$ непрерывно вложено в $W_2^1([0,+\infty); A)$.

Что и требовалось доказать.

8.3 Корректная разрешимость интегродифференциального уравнения Гуртина–Пипкина в шкале пространств

Применим к теоремам 8.1, 8.2, 8.3 соображения, изложенные в начале раздела. Возьмем произвольную константу $r \in \mathbb{R}$.

Определение. Вектор-функция $u(t)$ называется *сильным решением* задачи (6.1), (6.2) со значениями в H_r, если она принадлежит пространству Соболева

$W_2^2([0,+\infty);H_r;A)$ со скалярным произведением

$$(u(t),v(t))_{W_2^2([0,+\infty);H_r;A)} = \int\limits_0^{+\infty} ((u''(t),v''(t))_{H_r} + (A^2u(t),A^2v(t))_{H_r})dt,$$

выполнены равенства (6.2), и соотношение (6.1) выполнено почти всюду на $[0,+\infty)$.

Следствие 8.1. *Пусть* $\varphi_0 \in H_{2+r}$ *и* $\varphi_1 \in H_{1+r}$, *а* $f(t) \in L_2([0,+\infty),H_{1+r})$, *тогда существует единственное сильное решение задачи* (6.1), (6.2) $u(t),\ t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы* d *(не зависящей от начальных данных* $\varphi_0,\ \varphi_1$ *и правой части* $f(t)$*) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);H_r;A)} \leq d\left(||f||_{L_2([0,+\infty),H_{1+r})} + ||A\varphi_0||_{H_{2+r}} + ||A\varphi_1||_{H_{1+r}}\right). \quad (8.38)$$

Если же рассмотрим теперь частный случай задачи (6.1), (6.2) с условиями степенного поведения (8.2)–(8.4), то для $s = (1-\alpha)/(2\beta)$ верно

Следствие 8.2. *Пусть* $\varphi_0 \in H_{2-s+r}$ *и* $\varphi_1 \in H_{1-s+r}$, *а* $f(t) \in L_2([0,+\infty),H_{1-2s+r})$, *тогда существует единственное сильное решение задачи* (6.1), (6.2) $u(t),\ t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво и для некоторой положительной константы* d *(не зависящей от начальных данных* $\varphi_0,\ \varphi_1$ *и правой части* $f(t)$*) выполняется оценка*

$$||u(t)||_{W_2^2([0,+\infty);H_r;A)} \leq d(||f||_{L_2([0,+\infty),H_{H_{1-2s+r}})} + ||\varphi_0||_{H_{2-s+r}} + ||\varphi_1||_{H_{1-s+r}}). \quad (8.39)$$

Определение. Вектор-функция $u(t)$ является *слабым решением* задачи (6.1), (6.2) со значениями в H_r, если она принадлежит пространству Соболева $W_2^1([0,+\infty);H_r;A)$ со скалярным произведением

$$(u(t),v(t))_{W_2^1([0,+\infty);H_r;A)} = \int\limits_0^{+\infty} ((u'(t),v'(t))_{H_r} + (Au(t),Av(t))_{H_r})dt,$$

удовлетворяет $u(0+) = \varphi_0$, и для любого $v(t) \in W_2^1([0,+\infty); H_r; A)$ выполнено

$$\Phi(u,v) = -(u'(t), v'(t)) - (\varphi_1, v(0+))_H +$$
$$+ (Au(t), Av(t)) - \left(\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) Au(\tau) d\tau, Av(t) \right) - (f(t), v(t)) = 0.$$

Здесь все скалярные произведения, кроме второго слагаемого, берутся в пространстве $L_2([0,+\infty), H_r)$ со скалярным произведением

$$(u(t), v(t))_{L_2([0,+\infty),H_r)} = \int\limits_0^{+\infty} (u(t), v(t))_{H_r} dt.$$

Следствие 8.3. *Пусть $\varphi_0 \in H_{r+1}$ и $\varphi_1 \in H_r$, а $f(t) \in L_2([0,+\infty), H_r)$, тогда существует единственное слабое решение задачи* (6.1), (6.2) $u(t)$, $t \geq 0$. *Более того, оно асимптотически устойчиво, и для некоторой положительной константы d (не зависящей от начальных данных φ_0, φ_1 и правой части $f(t)$) выполняется оценка*

$$||u||_{W_2^1([0,+\infty);H_r;A)} \leq d \left(||f||_{L_2([0,+\infty),H_r)} + ||\varphi_0||_{H_{1+r}} + ||\varphi_1||_{H_r} \right). \tag{8.40}$$

Доказательства данных следствий базируются на том, что при рассмотрении задачи (6.1), (6.2), к данным равенствам можно применить оператор A^r:

$$A^r \frac{d^2}{dt^2} u(t) + A^{2+r} u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) A^{2+r} u(\tau) d\tau = A^r f(t),$$
$$A^r u(0+) = A^r \varphi_0,$$
$$A^r u'(0+) = A^r \varphi_1,$$

и сделать замену $w = A^r u$:

$$\frac{d^2}{dt^2} w(t) + A^2 w(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) A^2 w(\tau) d\tau = A^r f(t)$$
$$w(0+) = A^r \varphi_0$$
$$w'(0+) = A^r \varphi_1.$$

Данные задачи уже можно решить с помощью теорем 8.1, 8.2, 8.3, так как начальные данные уже подходят под условия теорем. После этого можно сделать обратную замену $u = A^{-r}w$. Обе замены, как уже было отмечено, являются изоморфизмами соответствующих пространств.

9 Спектральный анализ уравнения Гуртина–Пипкина со слагаемым внутреннего трения Кельвина–Фойгхта

В данном разделе получен ряд результатов о локализации спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина со слагаемым внутреннего трения Кельвина–Фойгхта для ядер свёртки, представимых в виде ряда из экспонент; построен пример задач для этого интегродифференциального уравнения, в которых спектр соответствующего символа состоит из бесконечного числа невещественных точек, кроме того, показано отсутствие непрерывной зависимости спектральных свойств от ядра свертки.

9.1 Постановка задачи и первоначальные замечания о структуре спектра

Рассмотрим задачу (при $\beta > 0$)

$$u''(t) + \alpha A^2 u'(t) + \beta A^2 u(t) - \int\limits_0^t \Gamma(t-s) A^2 u(s) ds = f(t), \quad t > 0, \tag{9.1}$$

$$u(0+) = \varphi_0, \quad u'(0+) = \varphi_1. \tag{9.2}$$

Второе слагаемое (9.1) соответствует трению Кельвина–Фойгхта. При $\alpha = 0$ задача может быть сведена к уравнению Гуртина–Пипкина (6.1), (6.2), если вместо A взять $\sqrt{\beta}A$, а вместо $\Gamma(t)$ взять $\Gamma(t)/\sqrt{\beta}$. В дальнейшем всегда будем предполагать, что $\alpha > 0$.

В данном разделе будут использоваться ядра релаксации вида (2.3). Дополнительно рассмотрим условие, которое соответствует тому, что $\Gamma(t) \in$

$C([0,+\infty))$, то есть $\Gamma(0) < +\infty$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty. \tag{9.3}$$

Применение преобразования Лапласа к (9.1) приводит к оператор-функции

$$L(z) = z^2 I + \alpha z A^2 + \beta A^2 - K(z) A^2, \tag{9.4}$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь

$$K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j + z}$$

является преобразованием Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Основной задачей является изучение спектра оператор-функции (9.4).

Для нахождения точек спектра рассмотрим сужение оператор-функции $L(z)$ на собственные подпространства:

$$l_n(z) := (L(z)e_n, e_n)_H = z^2 + \alpha a_n^2 z + a_n^2 \beta - a_n^2 K(z), \tag{9.5}$$

где $\{e_n\}_n^{\infty}$ — последовательность собственных векторов опрератора A, $Ae_n = a_n e_n$, причем $0 < a_{n-1} < a_n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \to +\infty$. Спектр (9.4) есть замыкание множества всех нулей мероморфных функций $l_n(z)$:

$$\sigma(L(z)) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : l_n(z) = 0\}}.$$

Необходимо начать с самого простого, но важного свойства, касающегося устойчивости решений уравнения (9.1).

Утверждение 9.1. *Если $\beta > K(0)$, то в правой полуплоскости нет точек спектра оператор-функции $L(z)$.*

Это означает, что решения уравнения (9.1) не могут неограниченно расти со временем.

Кроме того, можно заметить, что верно

Утверждение 9.2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $l_n(z)$ имеет не более двух невещественных нулей.*

Значит, спектр $L(z)$ имеет не более чем по два невещественных нуля на каждое n.

Отметим еще одно важное свойство данной оператор-функции, а именно,

Утверждение 9.3. *Пусть z — невещественный корень уравнения $l_n(z) = 0$. Тогда* $\mathrm{Re}\ z < -\frac{\alpha a_n^2}{2}$.

Тогда можно заключить, что даже если существует бесконечное множество невещественных точек спектра, с возрастанием n их действительные части стремятся к $-\infty$.

Теперь можно перейти к рассмотрению границ, в которых может находиться спектр оператор-функции (9.4). Введём важную функцию, характеризующую ядро:

$$p(x) = \sum_{j:\ \gamma_j < -x} c_j.$$

Сразу заметим, что так как для таких j, что $-\gamma_j > x$ верно $1 < \dfrac{|x|}{\gamma_j}$, имеем

$$p(x) = \sum_{j\,:\,-\gamma_j > x} c_j \cdot 1 < \sum_{j\,:\,-\gamma_j > x} c_j \cdot \frac{|x|}{\gamma_j} = |x| \cdot \sum_{j\,:\,-\gamma_j > x} \frac{c_j}{\gamma_j} \le |x| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} = K(0)|x|. \quad (9.6)$$

Рассмотрим область в левой полуплоскости для некоторых $B, C > 0$:

$$D^1_{B,C} = \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\, z < 0,\ |\mathrm{Im}\, z| < B + C\sqrt{p(2\,\mathrm{Re}\, z)} \right\}$$

в случае, когда условие (9.3) не выполнено, то есть $p(x)$ не ограничена при $x \to -\infty$.

Теорема 9.1. *Пусть условие (9.3) не выполнено. Тогда существуют постоянные $B > 0$ и $C > 0$ такие, что спектр оператор-функции $L(z)$ полностью содержится в области $D^1_{B,C}$.*

Учитывая соотношение (9.6), можно утверждать, что спектр всегда будет лежать в области

$$D^2_{B,C} = \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\, z < 0,\ |\mathrm{Im}\, z| < B + C\sqrt{2K(0)}\sqrt{|\,\mathrm{Re}\, z|} \right\}$$

для некоторых положительных B и C.

Отметим, что если условие (9.3) выполнено и $p(x) \to \Gamma(0)$ при $x \to -\infty$, поведение невещественной части спектра зависит от асимптотического поведения функции $p(x)$, а следовательно, от скорости сходимости ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$. Итак, если этот ряд сходится, то будет выполняться

Теорема 9.2. *Пусть выполнено условие* (9.3). *Тогда, если существует бесконечное число невещественных точек спектра $z \in \sigma(L) \setminus \mathbb{R}$, то они стремятся к отрицательной полуоси при $\operatorname{Re} z \to -\infty$. А именно, существует такая вещественная константа $x^* < 0$, что в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z < x^*\}$ весь спектр содержится в области*

$$D^3_{x_0,C} = \Bigg\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |\operatorname{Im} z| < \frac{8}{\alpha|\operatorname{Re} z|}\Gamma(0) + \\ + \sqrt{\frac{2}{\alpha}\left(\Gamma(0) - p(\operatorname{Re} z/2)\right)},\ \operatorname{Re} z < x^* \Bigg\}. \quad (9.7)$$

Замечание. Несложно заметить, что в случае полиномиального поведения c_j и γ_j :

$$c_j = j^a,\ \gamma_j = j^b, \quad a - b + 1 < 0,\ b > 0,$$

$p(x)$ будет асимптотически эквивалентна $|x|^{\frac{a+1}{b}}$ при $a > -1$. Это означает, что $\sqrt{p(x)}$ будет асимптотически эквивалентна $|x|^{\frac{a+1}{2b}}$.

В случае, когда $a < -1$ и $\Gamma(0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, разность $\Gamma(0) - p(x)$ будет асимптотически эквивалентна $|x|^{\frac{a+1}{b}}$. Это означает, что $\sqrt{\Gamma(0) - p(x)}$ будет асимптотически эквивалентна $|x|^{\frac{a+1}{2b}}$.

Утверждения 9.1–9.3, а также теоремы 9.1, 9.2 были доказаны в совместной работе с Ю.А. Тихоновым [68].

9.2 Вопрос о бесконечности невещественного спектра

Теперь рассмотрим вопрос о том, может ли число невещественных точек в спектре $\sigma(L)$ быть бесконечным. Данный вопрос был поставлен впервые в работе [4]. В статье было показано, что спектр $\sigma(L)$ содержит лишь конечное число невещественных точек при $c_n = 0,\ n = N+1,\ N+2,\ \ldots$, то есть при ядре $\Gamma(t)$, представимом в виде (2.3) с конечной суммой экспонент.

В настоящей работе будет приведено условие наличия бесконечного невещественного спектра символа $L(z)$ при ядре релаксации $\Gamma(t)$, представимом в виде (2.3) с бесконечной суммой экспонент.

Необходимо сразу заметить, что будут рассмотрены лишь большие значения n, при которых главная часть $l_n(z)$

$$z^2 + \alpha a_n^2 z + a_n^2 \beta \tag{9.8}$$

имеет два действительных нуля. Введём обозначение:

$$g_n = \frac{\alpha a_n^2 + \sqrt{\alpha^2 a_n^4 - 4a_n^2\beta}}{2}$$

для модуля меньшего нуля функции (9.8), а также

$$d_k = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\neq k}} \frac{c_m}{|\gamma_m - \gamma_k|}. \tag{9.9}$$

Тогда верна

Теорема 9.3. *Если выполнены условия*

$$d_k = \overline{o}(\sqrt{c_k}), \tag{9.10}$$

$$\sqrt{c_k} = \overline{o}(\gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}), \tag{9.11}$$

и существуют две возрастающие к бесконечности подпоследовательности натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ *и* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$*, что*

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{c_{k_j}}}|g_{n_j} - \gamma_{k_j}| = 0, \quad \lim_{j\to+\infty} \sqrt{c_{k_j}}\, a_{n_j}^2 = +\infty, \tag{9.12}$$

то спектр содержит две взаимно-сопряженные последовательности $\mu_n^{\pm}$ *невещественных точек комплексной плоскости.*

Рассмотрим теперь два примера последовательностей $\{c_j\}$, $\{\gamma_j\}$, удовлетворяющих условию теоремы.

Выберем последовательность $n(k)$ так, что $a_{n(1)} > a_1^2$, $\quad a_{n(k+1)}^2 - a_{n(k)}^2 >$

$(k+1)^2 - k^2$. Тогда зададим коэффициенты ядра свёртки следующим образом:

$$c_k = 1, \quad \gamma_k = g_{n(k)}. \tag{9.13}$$

Заметим, что условия (2.4) выполнены, но не выполнено условие (9.3). Условия теоремы 9.3 выполнены, и при этом можно показать, что мнимые части невещественных точек спектра отделены от нуля.

Оказывается, что и в случае выполнения условия (9.3) можно построить пример задачи с бесконечным невещественным спектром. Выберем последовательность $n(k)$ так, что $a_{n(1)} > a_1^2, \quad a_{n(k+1)}^2 - a_{n(k)}^2 > (k+1)^q - k^q$. Для задачи (9.1) рассмотрим следующие коэффициеты:

$$c_k = \frac{1}{k^{2p}}, \quad \gamma_k = g_{n(k)} \tag{9.14}$$

Выбирая, $p > 1$, $q > p+1$, получим оператор-пучок, удовлетворяющий условию теоремы 9.3, при этом условие (9.3) также окажется выполненным. Таким образом, получен пример оператор-пучка $L(z)$ с бесконечным числом невещественных точек в спектре, стремящимся к отрицательной полуоси.

Замечание. В обоих примерах необходимо, чтобы $g_{n(k)}$ были действительны. Так как a_n стремится к бесконечности с ростом n, то и $g_{n(k)}$, начиная с некоторого $k = k_0$, будут действительны; невещественные $g_{n(k)}$ тогда можно отбросить. Также необходимо заметить, что добавление или отбрасывание некоторого конечного числа начальных c_k, γ_k не влияет на то, будет невещественный спектр конечен или бесконечен, так как наличие бесконечного невещественного спектра — асимптотическое свойство спектра.

Отметим одно важное утверждение: бесконечная последовательности невещественных точек спектра символа уравнения (9.1) может появиться в результате бесконечно малого изменения ядра $\Gamma(t)$.

Предположим, что спектр оператор-функции $L(z)$ имеет лишь конечное число невещественных точек в спектре. Тогда справедлива

Теорема 9.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Gamma^*(t) \in L_1([0,+\infty))$ такое, что*

$$\|\Gamma(t) - \Gamma^*(t)\|_{L_1([0,+\infty))} < \varepsilon$$

и оператор-функция

$$L^*(z) = z^2 I + \alpha z A^2 + \beta A^2 - K^*(z) A^2,$$

где $K^*(z)$ — преобразование Лапласа $\Gamma^*(t)$, имеет бесконечное число невещественных точек в спектре.

Отметим, что для обратной ситуации, когда спектр $\sigma(L)$ содержит бесконечное число невещественных точек, а $\sigma(L^*)$ должно быть конечным, аналогичное утверждение есть простое следствие результатов работы [4]: $\Gamma(t)$ с некомпатным носителем меры нужно приблизить некоторым $\Gamma^*(t)$, имеющим меру с компактным носителем.

Замечание. Пусть для ядра $\Gamma(t)$ выполнено ещё условие (9.3), то есть $\Gamma(t) \in C([0, +\infty))$, тогда приближения в теореме 9.4 можно проводить по норме в $C([0, +\infty))$.

9.3 Итоговые замечания о структуре спектра

В этом разделе рассмотрена полная структура спектра оператор-функции $L(z)$ с опорой на утверждения и теоремы, представленные выше.

Оператор $L(z)$, как легко видеть можно представить в виде суммы двух операторов: $L(z) = L_0(z) + S(z)$, где $L_0(z) = z^2 + \alpha A^2 z + \beta A^2$ — главная часть оператор-функции $L(z)$, и $S(z) = K(z) \cdot A^2$ — добавка, связанная со свойствами памяти среды. Можно доказать, что $K(z)$ не имеет невещественных нулей, а значит, весь спектр $S(z)$ лежит на действительной оси. Значит разумно предположить, что структура невещественного спектра $L(z)$ будет определяться его основной частью $L_0(z)$.

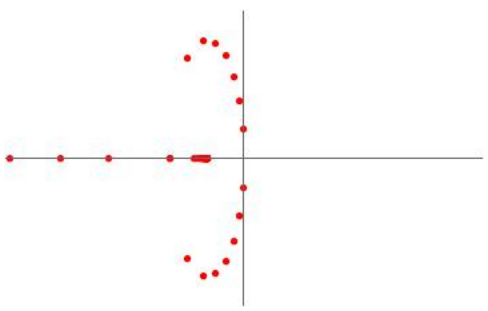

Рис. 1: Спектр оператор-функции $L_0(z)$, $\alpha > 0$.

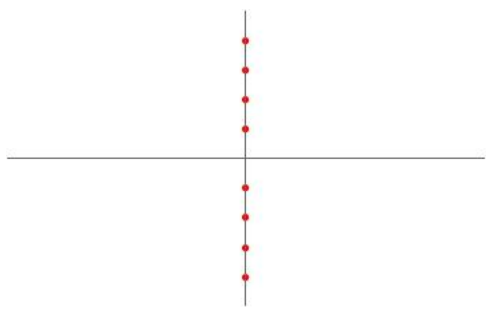

Рис. 2: Спектр оператор-функции $L_0(z)$, $\alpha = 0$.

Типичная структура спектра L_0 представлена на рис. 1. Он состоит из конечного количества комплексно-сопряженных невещественных точек и вещественной части. Сразу необходимо заметить, что при $\alpha = 0$ оператор-функция $L_0(z)$ превращается в обычный символ гиперболического уравнения: $L_0(z) = z^2 + \beta A^2$. Его спектр представлен на рис. 2. Как можно видеть, лучи $I_\pm = \{\, iy \, : \, y \in \mathbb{R}^\pm\}$ как бы «падают» на действительную ось при $\alpha > 0$, при этом спектр, начиная с некоторого n, становится вещественным. Похожая ситуация наблюдается и со спектром $L(z)$.

В работе [7] был исследован спектр $L(z)$ в случае $\alpha = 0$. (см. рис. 4). Спектр здесь разбивается на три части: набор вещественных кластеров R и два комплескно-сопряженных друг другу набора невещественных точек спектра B и B', стремящихся к прямой, параллельной мнимой оси (будем считать, что выполнено условие (9.3)).

В работе [4] был исследован спектр $L(z)$ в случае $\alpha > 0$, когда ядро представимо в виде конечной суммы экспонент $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k e^{-\gamma_k t}$ (см. рис. 3). Спектр здесь разбивается на три части: вещественный спектр R и два комплескно-сопряженных друг другу конечных набора невещественных точек спектра B и B'. Ясно видно, что вещественный спектр в этом случае будет сильно разрежен правее $-\gamma_N$ и будет представлять собой ничто иное, как немного возмущенную $S(z)$ часть спектра $L_0(z)$.

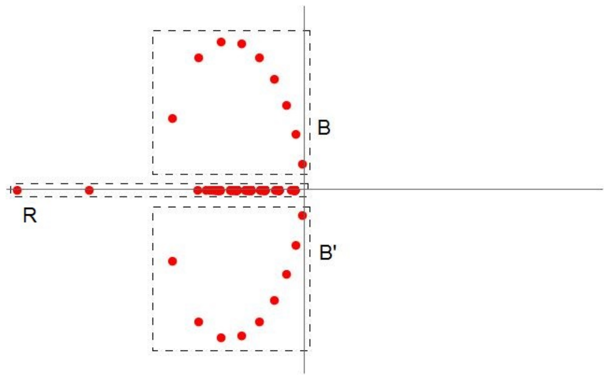

Рис. 3: Спектр оператор-функции $L(z)$, $\alpha > 0$, ядро имеет вид конечной суммы экспонент.

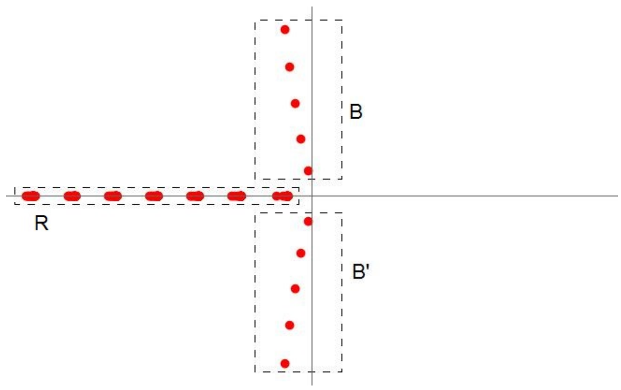

Рис. 4: Спектр оператор-функции $L(z)$, $\alpha = 0$.

В данной работе исследован случай, когда ядро представимо в виде бесконечной суммы экспонент (см. рис. 5). Спектр в данном случае состоит из пяти частей: вещественный спектр R, два комплескно-сопряженных друг другу конечных набора невещественных точек спектра B и B', соответствующих спектру $L_0(z)$, а также два комплескно-сопряженных друг другу бесконечных набора невещественных точек спектра C и C', получающихся в результате взаимодействия оператор-функций $L_0(z)$ и $S(z)$. Видно, что части C и B (C' и B' соответственно) могут быть не отделены друг от друга.

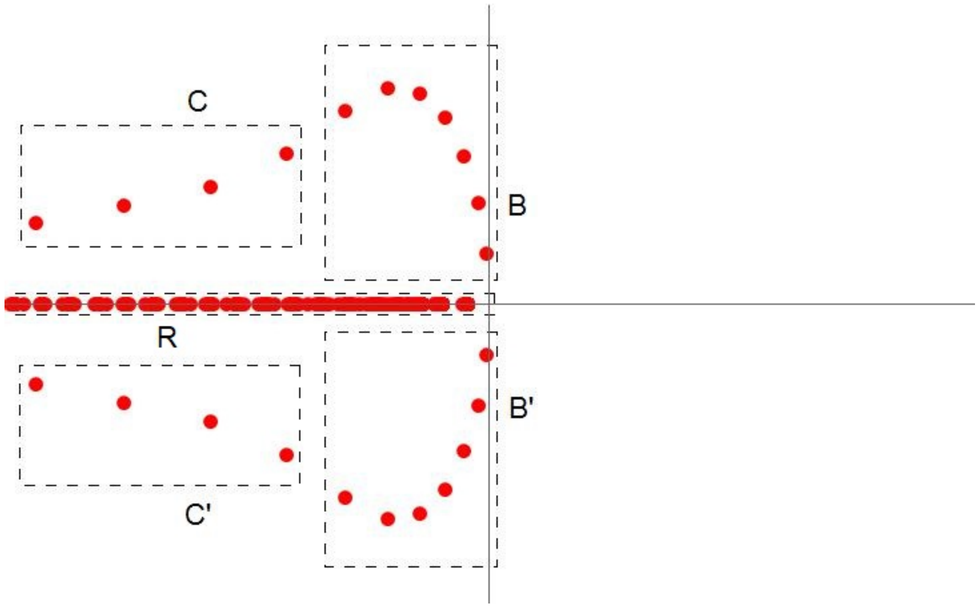

Рис. 5: Спектр оператор-функции $L(z)$, $\alpha \neq 0$, ядро имеет вид бесконечной суммы экспонент.

В предыдущем разделе были установлены самые общие свойства спектра оператор-функции $L(z)$, а также установили границы, в которых он может находится. Утверждение 9.1 говорит о том, что спектр не может лежать в правой полуплоскость, утверждение 9.2 — о том, что невещественный спектр имеет не более чем по две точки на каждое n, а утверждение 9.3 — о том, что их действительные части должны стремиться к $-\infty$. Границы, в которых может находиться невещественный спектр были даны в теоремах 9.1 и 9.2.

В пункте 9.2 была обоснована гипотетическая возможность существования частей спектра C и C' (теорема 9.3), а также приведены два примера, в которых число невещественных точек спектра бесконечно. Наконец, из теоремы 9.4 следует, что бесконечность и конечность невещественного спектра (в случае ядра, представимого в виде суммы бесконечного числа экспонент) равноправны.

9.4 Доказательства

Доказательство теоремы 9.3. Прежде чем доказывать теорему, необходимо сделать важные предварительные замечания о структуре функции $l_n(z)$. Отметим еще раз, что все рассуждения будут проводиться при достаточно большом n. Рассмотрим главную часть функции $l_n(z)$:

$$j_n(z) = z^2 + \alpha a_n^2 z + \beta a_n^2. \tag{9.15}$$

Эта функция имеет 2 нуля $\dfrac{-\alpha a_n^2 \pm \sqrt{(\alpha a_n^2)^2 - 4\beta a_n^2}}{2}$. Они будут комплексны при $D = (\alpha a_n^2)^2 - 4 \cdot \beta \cdot a_n^2 < 0$ и действительны в противном случае. Так как при достаточно большом a_n^2 имеем $D > 0$, то имеет смысл тогда рассматривать правый и левый дествительные нули, а именно, обозначим $g_n = \dfrac{\alpha a_n^2 + \sqrt{(\alpha a_n^2)^2 - 4\beta a_n^2}}{2}$ и $\beta_n = \dfrac{\alpha a_n^2 - \sqrt{(\alpha a_n^2)^2 - 4\beta a_n^2}}{2}$. Тогда $j_n(z) = (z + g_n)(z + \beta_n)$.

Положим далее $m(z) = n$, если $-\gamma_n \leq \operatorname{Re} z \leq -\gamma_{n-1}$ и $d(z) = \sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \neq m(z)}} \dfrac{c_k}{z + \gamma_k}$. В этом случае $l_n(z)$ принимает следующий вид:

$$l_n(z) = (z + g_n)(z + \beta_n) + a_n^2 \left(\frac{c_{m(z)}}{z + \gamma_{m(z)}} + d(z) \right)$$

для достаточно больших a_n. В дальнейшем будем находить нули этой функции около $-g_n$ ($\gamma_{m(z)} \approx g_n$).

Найдем асимптотику g_n по a_n^2:

$$\begin{aligned} g_n = -\frac{-\alpha a_n^2 - \sqrt{(\alpha a_n^2)^2 - 4\beta a_n^2}}{2} &= \frac{\alpha a_n^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\beta}{\alpha^2 a_n^2}} \right) = \\ &= \frac{\alpha a_n^2}{2} \left(2 - \frac{2\beta}{\alpha^2 a_n^2} + O(a_n^{-4}) \right) = \alpha a_n^2 - \frac{\beta}{\alpha} + O(a_n^{-2}). \end{aligned} \tag{9.16}$$

Асимптотика δ_n же может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \beta_n = -\frac{-\alpha a_n^2 + \sqrt{(\alpha a_n^2)^2 - 4\beta a_n^2}}{2} &= \frac{\alpha a_n^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta}{\alpha^2 a_n^2}} \right) = \\ &= \frac{\alpha a_n^2}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha^2 a_n^2} + O(a_n^{-4}) \right) = \frac{\beta}{\alpha} + O(a_n^{-2}). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Исходя из (9.16) и (9.17), можно заключить, что если z близко к $-g_n$

$$|z+g_n| = \overline{o}(a_n^2), \tag{9.18}$$

то $z+\beta_n = -\alpha a_n^2 + O\left(|z+g_n|+1\right)$. И тогда

$$l_n(z) = \alpha a_n^2 \left((z+g_n) + \frac{1}{\alpha}\frac{c_{m(z)}}{z+\gamma_{m(z)}} + \frac{d(z)}{\alpha} + O\left(\frac{|z+g_n|}{a_n^2} + a_n^{-2}\right)\right). \tag{9.19}$$

В дальнейшем будет исследоваться функция $\widehat{l}_n(z) = l(z)/(\alpha a_n^2)$, имеющая те же нули, что и $l_n(z)$.

Для начала докажем лемму, представляющую самостоятельную ценность.

Лемма 9.1. *Если существует такое n, что*

$$\alpha|g_n-\gamma_k| + \sup_{z\in D_k}|d(z)| \le \frac{1}{3}\sqrt{\alpha c_k}, \tag{9.20}$$

где $D_k = \left\{z\in\mathbb{C} : |z+\gamma_k| < 2\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}\right\}$, и $a_n^{-2} < c_k$, то около γ_k спектр (9.4) *будет иметь 2 комплексно-сопряженных корня.*

Доказательство. Рассмотрим $l_n(z)$ в области D_k. По условию выполняется соотношение (9.18), но тогда выполнено и (9.19). Кроме того, так как $a_n^{-2} < c_k$, то $O\left(\dfrac{|z+g_n|}{a_n^2} + a_n^{-2}\right) = \overline{o}(\sqrt{c_k})$. Вследствие этого имеем

$$\widetilde{l}_n(z) = l_n(z)/(\alpha a_n^2) = z+\gamma_k + \frac{\frac{c_k}{\alpha}}{z+\gamma_k} + (g_n-\gamma_k) + \frac{d(z)}{\alpha} + \overline{o}(\sqrt{c_k}).$$

Тогда разбив $\widetilde{l}_n(z)$ на две части $f(z) = z+\gamma_k + \dfrac{\frac{c_k}{\alpha}}{z+\gamma_k}$ и $g(z) = (g_n-\gamma_k) + \dfrac{d(z)}{\alpha} + \overline{o}(\sqrt{c_k})$, рассмотрим их в круге радиуса $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}$ с центром в $-\gamma_k + i\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}$: $B = \left\{z\in\mathbb{C} : \left|z+\gamma_k - i\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}\right| < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}\right\}$.

По условию для достаточно большого n имеем $|g(z)| < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}$ в B. Для дальнейшего анализа количества нулей $\widetilde{l}_n(z)$ в B необходимо оценить $|f(z)|$ на границе ∂B. Для этого заметим, что граница может быть записана параметрически как $-\gamma_k + i\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}} + \sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}\dfrac{\exp(i\delta)}{2}, \quad \delta \in [0, 2\pi)$. Подставив это выражение в $f(z)$, получим

$$f\left(-\gamma_k + i\sqrt{\frac{c_k}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c_k}{\alpha}}\frac{\exp(i\delta)}{2}\right) =$$

$$= i\sqrt{\frac{c_k}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c_k}{\alpha}}\frac{\exp(i\delta)}{2} + \frac{\dfrac{c_k}{\alpha}}{i\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}} + \sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}\dfrac{\exp(i\delta)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c_k}{\alpha}}\left(i + \frac{\exp(i\delta)}{2} + \frac{1}{i + \dfrac{\exp(i\delta)}{2}}\right) = \sqrt{\frac{c_k}{\alpha}}\left(\frac{2\dfrac{\exp(i\delta)}{2} + \dfrac{\exp^2(i\delta)}{4}}{i + \dfrac{\exp(i\delta)}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{c_k}{\alpha}}\left(\frac{2 + \dfrac{\exp(i\delta)}{2}}{2i\exp(-i\delta) + 1}\right).$$

Так как $\left|2 + \dfrac{\exp(i\delta)}{2}\right| \geq 1.5$, а $|2i\exp(-i\delta) + 1| \leq 3$, то $|f(z)| \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}} > |g(z)|$, и по теореме Руше получим, что в B имеется один ноль ($f(z)$ имеет нуль в $-\gamma_k + i\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}$). Заметим, что в B нет действительных чисел, потому этот нуль невещественен. Для $B^- = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z + \gamma_k + i\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}\right| < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c_k}{\alpha}}\right\}$ получим аналогично, что и там есть нуль, который должен быть комплекно-сопряжен первому.

Что и требовалось доказать.

Замечание. По доказательству леммы ясно, что невещественный ноль $\mu_n^{\pm}$ будет содержаться в B^+, а значит $\dfrac{\sqrt{c_k}}{2} < |\operatorname{Im}\mu_n^{\pm}| < \dfrac{3\sqrt{c_k}}{2}$ и $-\gamma_k - \dfrac{\sqrt{c_k}}{2} < \operatorname{Re}\mu_n^{\pm} < -\gamma_k + \dfrac{\sqrt{c_k}}{2}$.

Приступим к доказательству теоремы. По условию $\sqrt{c_k} = \overline{o}(\gamma_{k+1} - \gamma_{k-1})$, а значит, для достаточно большого k, если $z \in D_k$, то $m(z) = k$. Кроме того, определяемое в (9.9) d_k равно $\overline{o}(\sqrt{c_k})$, тогда

$$|d(z)| \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq m(z)}} \frac{c_n}{|z + \gamma_n|} < 2d_k,$$

так как $|z+\gamma_n|$ будет заведомо больше $|\gamma_n-\gamma_k|/2$ для достаточно большого k. Тогда по условию теоремы найдется такая последовательность k_i, что для каждого её члена будет выполнена лемма 9.1 и получим бесконечную последовательность невещественных точек спектра.

Что и требовалось доказать.

Следует заметить, что примеры главы 9.2 удовлетворяют условиям теоремы 9.3. Действительно, условия (9.11) и (9.12) выполнены автоматически, а то, что выполняется (9.10) можно доказать непосредственно.

Имеем $\gamma_k = \alpha a_{n(k)}^2 + O(a_{n(k)}^{-2})$. Далее, в силу выбора подпоследовательности $\{n(k)\}$,

$$\gamma_{k+1}-\gamma_k \sim \alpha((k+1)^q - k^q) \sim \alpha q k^{q-1}.$$

Оценим d_k

$$d_k = \sum_{m\in\mathbb{N}, m\neq k} \frac{c_m}{\gamma_m-\gamma_k} < \frac{1}{\gamma_{k+1}-\gamma_k}\sum_{m\in\mathbb{N}, m\neq k} c_m = O(k^{1-q}).$$

Далее, замечаем, что если $p>1, q>2,\ 1-q+p<0$, то $O(k^{1-q}) = o(k^{-p})$, следовательно, $d_k = o(\sqrt{c_k})$, кроме того $\sqrt{c_k}a_{n(k)}^2 \sim k^{q-p} \to +\infty$.

Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 9.4. Вместо первоначального ядра $\Gamma(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j e^{-\gamma_j t}$ возьмем $\Gamma_0(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j e^{-\gamma_j t}$. Из результатов работы [4] следует, что число невещественных точек спектра (9.4) с ядром $K_0(z)$ конечно, хотя ядра отличаются на $||\Gamma-\Gamma_0|| = |K(0)-K_0(0)| = \sum\limits_{j=N+1}^{\infty}\dfrac{c_j}{\gamma_j}$. Эту добавку можно сделать бесконечно малой за счет того, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{c_j}{\gamma_j}$ сходится.

Далее, учитывая первый пример раздела 9.2, можно прибавить к ядру $\Gamma_0(t)$ добавку $\Gamma_\delta(t) = \sum\limits_{j=N+1}^{\infty}\dfrac{\breve{c}_j}{\breve{\gamma}_j}e^{-\breve{\gamma}_j t}$ с $\breve{c}_j$ и $\breve{\gamma}_j$ взятыми из этого примера (здесь использовано то, что для малых j в примерах коэффициенты ядра можно взять любыми). Таким образом, у задачи с ядром $\Gamma^*(t) = \Gamma_0(t)+\Gamma_\delta(t)$ число точек невещественного спектра бесконечно. Добавка при этом имеет норму $||\Gamma-\Gamma_0-\Gamma_\delta|| \le ||\Gamma-\Gamma_0|| + \sum\limits_{j=N+1}^{\infty}\dfrac{\breve{c}_j}{\breve{\gamma}_j}$. И опять же эту добавку можно сделать бесконечно малой за счет того, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{\breve{c}_j}{\breve{\gamma}_j}$ сходится.

Если вместо сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{c_j}{\gamma_j}$ использовать сходимость $\sum\limits_{j=1}^{\infty}c_j$, а вместо первого примера раздела 9.2 использовать второй, то норму L_1 можно заменить на норму C, как указано в замечании к теореме 9.4.

Таким образом вначале получили, изменив немного ядро, конечное число точек спектра, а потом, еще немного его изменив, получили бесконечное число точек спектра. В этом и проявляются хаотические свойства асимптотического поведения спектра (9.4).

Что и требовалось доказать.

10 Заключение

В диссертации изучены спектральные свойства оператор-функций, являющихся символами уравнения (1.1) и различных модификаций уравнения (1.3), а также получены результаты о корректной разрешимости (1.1) и разрешимости в шкале пространств задачи (1.3), (1.4).

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Проведён спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом интегродифференциального уравнения (1.1): установлена общая структура спектра, построена асимптотика невещественного спектра, установлено условие отсутствия спектра в правой полуплоскости, а также приведены теоремы об устойчивости решений и корректной разрешимости задачи (1.3), (1.4).

2. Найдена асимптотика невещественного спектра символа уравнения Гуртина–Пипкина (1.3) в случае ядер релаксации, представимых в виде интеграла Стилтьеса.

3. Проведено исследование разрешимости в шкале пространств, порожденной оператором A, задачи (1.3), (1.4).

4. Обоснована возможность существования бесконечного невещественного спектра символа уравнения (1.3) при учете трения Кельвина–Фойгхта.

Полученные результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории интегродифференциальных уравнений, спектральной теории оператор-функций, при численном расчете возникновения флаттера в вязкоупругих материалах, а также в задачах теории управления и прикладных задачах, возникающих в теории вязкоупругости. Из перспективных направлений для дальнейшего исследования можно выделить следующие:

1. Исследование уравнения колебаний вязкоупругой пластины в сверхзвуковом потоке жидкости или газа для различных граничных условий.

2. Спектральный анализ уравнения колебаний вязкоупругой пластины, учитывая ненулевую толщину пластины (учет пространственной переменной).

3. Исследование разрешимости в шкале пространств уравнения (1.1).

4. Уточнение теоремы 4.1 для случая $M_1 = 0$, а также для $\varphi_0 \in H_{1/2}$, $\varphi_1 \in H_{-1/2}$.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Власову за постановку задачи, научное руководство и активную поддержку, а также участникам научного семинара “Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ”, в особенности доценту Н.А. Раутиан, за поддержку и ценные советы.

Список литературы

[1] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука. 2006.

[2] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. — М.; Ижевск: НИЦ «РХД», 2009.

[3] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

[4] Eremenko A., Ivanov S. Spectra of Gurtin-Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. — 2011. — Vol. 43. — P. 2296–2306.

[5] Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений // Тр. сем. имени И. Г. Петровского. — М.:Изд-во МГУ, 2011 — Т.28. — С. 75–113

[6] Гохберг И.Ц., Сигал Е.И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Матем. сб. — 1971. — Т. 84(126), №4. — С. 607–629;

[7] Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.

[8] Ларионов Г. С. Устойчивость колебаний вязкоупругой пластинки при больших сверхзвуковых скоростях. // В сб. Вопр. Вычисл. и прикл. мат. — Ташкент. 1970. — Вып. 3. — С. 156-163.

[9] Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В. Исследование одномодового флаттера пластин различной формы при малой сверхзвуковой скорости // Уч. зап. ЦАГИ. — 2017. — Т. 48, № 1. — С. 86–98

[10] Веденеев В.В. Связанный флаттер упругой пластины в потоке газа с пограничным слоем// Труды МИАН. — 2013. — Т. 281. — С. 149-161.

[11] Милославский А.И., О спектре неустойчивости операторного пучка // Мат. заметки. — 1991. — Т.49, №4. — С.88–94.

[12] Pipkin A.C., Gurtin M.E. A General theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. for Rational Mech. and Anal. — 1968. — Vol. 31. — P.113–126.

[13] Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Труды Московского математического общества. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 197–220

[14] Pandolfi L., Ivanov S., Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. — 2009. — Vol. 355. — P. 1–11.

[15] Pandolfi L., The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. and Optim. — 2005. — Vol. 52. — P.143–165.

[16] Rivera J.E.M., Naso M.G., On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indefinite Dissipation // Asympt. Anal. — 2006. — Vol. 49. — P. 189–204.

[17] Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. — Springer. N. Y.; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.

[18] Dafermos C. M., Asymptotic stability in viscoelasticity. // Arch. for Rational Mech.and Anal. — 1970. — V. 37. — P. 297–308.

[19] Fabrizio M., Giorgi C., Pata V., A New Approach to Equations with Memory // Arch. for Rational Mech. and Anal. — 2010. — Vol. 198. — P. 189–232.

[20] Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д., Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 924–928.

[21] Закора Д.А., Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. — 2018. — Т.103, № 5. — С.702–719

[22] Власов В.В., Раутиан Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, № 8. — С. 1122–1126.

[23] Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений наследственной механики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т.60, № 8. — с. 1367–1376

[24] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966.

[25] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[26] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: МАИК, 2012.

[27] Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Наука, 1972.

[28] Sanchez-Palencia E. Nonhomogeneous Media and Vibration Theory. Lecture notes in physics. — Springer. Berlin, 1980.

[29] Шамаев А.С., Шумилова В.В. Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2011. — №2. — С. 92–103.

[30] Гавриков А.А., Шамаев А.С. Некоторые вопросы акустики эмульсий // Труды семинара имени И. Г. Петровского. — 2011. — т. 28. — С. 114–146.

[31] Guyer R.A., Krumhansl J.A. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation // Physical Review. — 1966. — Vol. 148. — 766–778.

[32] Schwartz L. Théorie des distributions, I et II. — Hermann, Paris, 1950–1951

[33] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Мир, 1962.

[34] Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

[35] Duren P.L. Theory of H_p Spaces. — Academic Press, New York, 1970.

[36] Vlasov V.V., Rautian N.A. Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space // Operator Theory: Advances and Applications. — 2014. — Vol. 236. — P. 517–535.

[37] Лыков А.В. Проблема тепло и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.

[38] Fabrizzio M., Lazzari B., On the existence and the asympthotics stability of solutions for linearly viscoelastic solids // Archive of Rational Mechanics and Analysis. — 1991. — Vol.116. — P.139–152.

[39] Rivera J.E.M., Naso M.G., On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indefinite Dissipation // Asympt. Anal. — 2006. — Vol. 49. — P. 189–204.

[40] Rivera J.E.M., Naso M.G., Vegni F.M., Asymptotic behaviour of the energy for a class of a weakly dissipative second-order systems with memory// Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2003. — Vol. 286. — P. 692–704.

[41] Muñoz Rivera J. E., Grazia Naso M., Vuk E. Asymptotic behavior of the energy for electromagnetic systems with memory // Math. Meth. Appl. Sci. — 2004. — Vol. 27. — P. 819–841.

[42] Власов В.В., Раутиан Н.А. Власов В.В., Раутиан Н.А. О пространствах вектор-функций, голоморфных в угловой области // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. — Российский университет дружбы народов. М. 2022. — Т.68, № 3. — С. 393–406

[43] Власов В.В., Раутиан Н.А. О корректной разрешимости интегро-дифференциальных уравнений в пространствах вектор-функций, голоморфных в угле // Докл. РАН. Матем. информ. проц. упр. — 2022. — Т. 503. — С. 40–44

[44] Тихонов Ю.А. Об аналитичности полугруппы операторов, возникающей в задачах теории вязкоупругости. // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56 , № 6. — С.808–822.

[45] Тихонов Ю.А. Тихонов Ю.А., О свойствах одной полугруппы операторов, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением, возникающим в теории вязкоупругости // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т.58, № 5. — С. 669–685.

[46] Тихонов Ю.А. О локализации спектра оператор-функции, возникающей при изучении колебаний вязкоупругого трубопровода с учетом трения Кельвина–Фойгта // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2022. — № 2. — С. 23—34.

[47] Закора Д.А., Копачевский Н.Д. К проблеме малых колебаний системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача) // СМФН. – 2020. – Т.66, №2. – С.182–208.

[48] Kopachevsky N.D., Syomkina E.V., Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 64–87

[49] Закора Д.А., Модель сжимаемой жидкости Максвелла // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. — 2017. — Т.63, №2. — С. 247–265

[50] Закора Д.А., Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т.55, №9. — С. 1195–1208

[51] Закора Д.А., Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН. — 2016. — Т.61. — С.41–66

[52] Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С., Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // СМФН. — 2012. — Т. 45. — С.43–61.

[53] Романов И.В., Шамаев А.С., О задачах распределенного и граничного управления некоторыми системами с интегральным последействием // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2016. — Т. 31. — С. 134–157.

[54] И.В. Романов, А.С. Шамаев, О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием // Автомат. и телемех. — 2013. — Т. 11. — С.49–61.

[55] А.С. Шамаев, В.В. Шумилова, О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т.53, №2. — С.282–290.

[56] Власов В.В., Сакбаев В.Ж. О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева // Матем. заметки. — 2000. — Т.68, №6. — С. 939–942

[57] Власов В.В., Сакбаев В.Ж. О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т.37 №9. — С. 1194–1202

[58] Власов В.В., Сакбаев В.Ж. Корректная разрешимость дифференциальных уравнений с последействием в шкале пространств Соболева // Изв. вузов. Матем. — 2003. — № 4. — С. 8–16

[59] Келдыш М.В., О собственных значениях и собственных функциях некторых классов несамосопряжённых уравнений // ДАН СССР. — 1951. — Т. 77, №1. — С. 11–14

[60] Келдыш М.В., О полноте собственных функций некторых классов несамосопряжённых операторов // УМН. — 1971. — Т.24. — С. 15–41

[61] Дж. Э. Аллахвердиев, О несамосопряженных операторах, рационально зависящих от спектрального параметра // ДАН СССР. — 1969. — Т.186, №4. — С. 743–746.

[62] Милославский А.И., Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости // Деп. в Укр. НИИНТИ. — 13.07.1987. — №1229-УК87. — С.53.

[63] Радзиевский Г.В., Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // УМН. — 1982. — Т.37, №2. — С.81–145.

[64] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев : Наукова думка, 1965.

[65] Bingham N.H. Goldie C.M. Teugels J.L. Regular Variation. — Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — vol. 27. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987

[66] Seneta E. Regularly Varying Functions. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1976

[67] Давыдов А.В., Тихонов Ю.А. О свойствах спектра оператор-пучка, возникающего в теории вязкоупругости // Математические заметки. — 2018. — Т. 103, № 5. — С. 774–778.

[68] Давыдов А.В., Тихонов Ю.А. Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгта // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т.54, Вып. 12. — С. 1663–1677.

[69] Давыдов А.В. Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. — 2020. — № 2. — С. 15–22

[70] Davydov A.V. Asymptotics of the Spectrum of an Integro-Differential Equation Arising in the Study of the Flutter of a Viscoelastic Plate // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 28. № 2. — P. 188–197.

[71] Давыдов А.В. Об асимптотике невещественного спектра интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина с ядрами релаксации, представимыми в виде интеграла Стилтьеса // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т.58, Вып. 2. — С.238–251.