МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Резниченко Игорь Олегович

Улучшенные квадратурные формулы для вычисления потенциалов простого и двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023 г.

Работа выполнена на кафедре математики Физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Колыбасова Валентина Викторовна**
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математики физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Петров Александр Георгиевич**
доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Лаборатория механики систем, главный научный сотрудник

Сетуха Алексей Викторович
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.», Научно-исследовательский вычислительный центр, ведущий научный сотрудник

Марчевский Илья Константинович
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана (национальный исследовательский университет)», научно-учебный комплекс «Фундаментальные науки», профессор

Защита диссертации состоится " 12 " апреля 2023 года в 15 часов 00 минут на заседании совета МГУ.011.8 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы д. 1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 16-10.

io.reznichenko@physics.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж) и на сайте https://istina.msu.ru/dissertations/527531352/ .

Автореферат разослан " 10 " марта 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.8
доктор физико-математических наук,
профессор

Чечкин Г. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработанности темы

Диссертационная работа посвящена одному из разделов математической физики — методу потенциалов. В первой главе решается задача об обтекании твёрдого тела потенциальным потоком однородной несжимаемой жидкости в трёхмерном случае. Вторая глава посвящена пространственной задаче определения стационарного теплового поля. Для решения этих задач в диссертационной работе автором получены новые квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоя в трёхмерных областях для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

Использование потенциалов в математической литературе называют также методом граничных интегральных уравнений. У этого метода можно выделить две основные области применения: доказательство разрешимости краевых задач и разработка алгоритмов их численного решения. Большое количество задач математической физики сводится к краевым задачам для уравнений Лапласа и Гельмгольца: обтекание препятствий потенциальным течением, распределение стационарного теплового поля, расчёт электростатического и гравитационного поля поверхностей сложной формы, распространение акустических и электромагнитных волн[1].

Стандартные квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоя, используемые при решении задач математической физики, не дают равномерной аппроксимации и равномерной сходимости потенциалов вблизи поверхности Г, на которой задана плотность. При этом погрешность стандартных формул стремится к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, приближается к определенным точкам на поверхности Г [2]. Следовательно, стандартные квадратурные формулы не сохраняют важнейшее свойство потенциалов, а именно их ограниченность и непрерывность вблизи поверхности. В связи с вышесказанным автором диссертационной работы были получены результаты в виде новых квадратурных формул, сохраняющих указанное свойство этих потенциалов.

Основы классической теории потенциала приведены в книге Гюнтера[3], где даётся последовательное изложение классической теории гармонических поверхностных потенциалов в пространстве с плотностями, заданными на поверхностях Ляпунова. Потенциалы позволяют перейти от исходной краевой задачи к интегральному уравнению по границе области. Тем самым размерность исход-

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.

[2] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л., Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

[3] Гюнтер Н.М., Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 415 с.

ной задачи уменьшается на единицу. Особенно данное преимущество заметно при решении внешних краевых задач для скалярного и векторного уравнений Гельмгольца, к которым во многих случаях сводится система уравнений Максвелла для установившихся электромагнитных колебаний[4]. В монографии[5] изучаются дифракционные явления, исследование которых сводится к скалярным двумерным задачам. В общем случае решается задача дифракции электромагнитного поля на периодической структуре из цилиндров произвольного сечения. Для применения методов, представленных в диссертации, не требуется симметрия поверхности. В то время как в случае прямой задачи теории дифракции теоретические основы метода потенциалов разработаны[6], существенные трудности остаются при численной реализации метода потенциалов. Таким образом, разработка улучшенных алгоритмов приближённого вычисления потенциалов является актуальной задачей математической физики.

Гармонические потенциалы простого и двойного слоя используются при решении краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений. Такие задачи возникают в различных областях математической физики, например, в теории обтекания препятствий потоком идеальной жидкости. В работе[7] рассмотрена внешняя задача Неймана в рамках численного решения задачи обтекания трёхмерных тел. На основе идей К.И. Бабенко о ненасыщаемых алгоритмах было построено решение интегрального уравнения для потенциала простого слоя в задаче обтекания эллипсоидов вращения большого удлинения. Однако, не во всех задачах можно воспользоваться пространственной симметрией. К уравнениям Лапласа и Гельмгольца сводятся задачи электростатики, стационарной теплопроводности[8], теории фильтрации, теории гравитации и т.д.

Численное решение краевых задач с помощью поверхностных потенциалов состоит из двух этапов[9]. На первом этапе, численно решая граничное интегральное уравнение, находят плотность потенциала. На втором этапе, подставляя численное значение плотности в квадратурную формулу, находят решение краевой задачи в любой точке области. Ввиду того, что стандартные квадратурные формулы для потенциалов не дают равномерной сходимости и равномерной ап-

[4]Смирнов Ю.Г. — Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009. 268 с.

[5]Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. — Численные методы в задачах дифракции. М.:Издательство МГУ, 1987. 207 с.

[6]Колтон Д., Кресс Р., Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987. 311 с.

[7]Белых В.Н., К проблеме численной реализации интегральных операторов осесимметричных краевых задач (алгоритмы без насыщения) // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, N 4. С. 22 — 37.

[8]Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 553 с.

[9]Сетуха А.В., Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М.: Аргамак-медиа, 2016. 256 с.

проксимации, при их использовании для повышения точности приходится либо уменьшать шаг сетки, либо проводить дополнительные построения вблизи границы, что увеличивает стоимость вычислений. Недостаточная точность вычисления потенциалов вблизи поверхности Γ с помощью стандартных квадратурных формул называется эффектом пограничного слоя[10]. Известны также ограничения использования интерполяционного подхода к подынтегральным выражениям поверхностных потенциалов[11]. Объединением идей метода конечных разностей и метода потенциалов является метод разностных потенциалов[12]. Этот метод позволяет численно решать краевые задачи, используя вместо граничных интегральных уравнений т.н. граничные псевдо-дифференциальные уравнения. Тем не менее, вблизи поверхности использование данного метода также имеет ограничения. Таким образом, задача по получению улучшенных квадратурных формул, обеспечивающих повышенную точность вблизи границы, является актуальной задачей математической физики.

Необходимость точного вычисления потенциалов вблизи границы области возникает при решении задач в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, пленках и на концах трещин[13]. Пусть вычисление некоторого потенциала или его производной осуществляется в точке x. В методе граничных интегральных уравнений граница интересующей области Γ разбивается на ряд граничных элементов (ГЭ) Γ_i, в каждом из которых осуществляется некоторая аппроксимация подынтегрального выражения, после чего производится интегрирование. Ядра интегральных операторов имеют особенности в точках $y \in \Gamma$, поэтому выделяют несколько видов ГЭ Γ_i, где $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$. Сингулярные ГЭ соответствуют случаю, когда $x \in \Gamma_i$, несингулярные ГЭ — когда точка $x \notin \Gamma_i$ и находится далеко от Γ_i. Используют понятие почти сингулярных ГЭ. В этом случае $x \notin \Gamma_i$, но расстояние от точки x мало по сравнению с Γ_i. Для вычисления интегралов на сингулярных и почти сингулярных граничных элементах требуются специальные методы. В случае вычислений очень близко к поверхности необходимо с осторожностью использовать стандартные квадратурные формулы[14]. Для очень тонких пограничных слоёв показательными являются численные примеры с разным выбором многоточечного (от 4 до

[10] Shilpa Khatri, Arnold Kim, Ricardo Cortez, Camille Carvalho. Close evaluation of layer potentials in three dimensions. Journal of Computational Physics, 2020, Vol. 423, № 109798

[11] J. Helsing, R. Ojala, On the evaluation of layer potentials close to their sources, J. Comput. Phys., 2008, Vol. 227, №5, P. 2899 - 2921.

[12] Рябенький В.С., Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: Физматлит, 2001. 432 с.

[13] Zhang YM., Gu Y., Chen JT. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities // Comput Mech, 2011, Vol. 47, P. 493 - 504.

[14] Araujo F.C., Gray L.J. Analysis of thin-walled structural elements via 3D standard BEM with generic substructuring // Comput. Mech., 2008, Vol. 41, P. 633-645.

16 точек) шаблона для формулы Гаусса в зависимости от расстояния до точки сингулярности (метод адаптивного деления граничной области)[15]. Существуют методы приближённого вычисления почти сингулярных интегралов, основанные на нелинейном преобразовании переменной интегрирования — экспоненциальные и $sinh$-преобразования[16]

Другой метод вычисления поверхностных потенциалов вблизи точек сингулярности называется квадратурным разложением (quadrature by expansion - QBX)[17]. В этом подходе для вычисления потенциалов в точке поверхности либо вблизи поверхности выбирается вспомогательная точка вблизи поверхности, в которой ядро потенциала разлагается в ряд по полиномам Лежандра (сферическим функциям). Конечная сумма ряда при этом будет гладкой. Однако, для каждой точки, где вычисляется потенциал, надо выбирать свою вспомогательную точку и вычислять разложение по полиномам Лежандра заново. Если вычисления необходимо провести в большом числе точек, метод выглядит очень затратным. Проще использовать стандартную квадратурную формулу с малым шагом, так как она не использует локальные координаты. Погрешность данного метода сильно зависит от гладкости разложения и сходимости получаемого выражения при стремлении точки разложения к исходной. Строгое обоснование применения данного метода очень близко к поверхности пока рассмотрено только для двумерных потенциалов простого и двойного слоя.

Для некоторых классов поверхностей возможно оценить расстояния до поверхностей, при которых необходимо перейти от стандартных формул численного интегрирования к более совершенным при вычислении поверхностных потенциалов вблизи поверхности, на которой задаётся плотность потенциала. Известны комплексные оценки для двух методов — квадратурной формулы Гаусса-Лежандра и формулы трапеции для гладких поверхностей в трёхмерном пространстве[18].

Существует метод вычисления потенциала простого и двойного слоя, основанный на характерной замене переменной в сферических координатах с последовательным интегрированием по зенитному и азимутальному углу. Потенциалы вычисляются в локальных координатах в точке x, лежащей вблизи по-

[15]Xiao-Wei Gao, Jin-Bo Zhang, Bao-Jing Zheng, Ch. Zhang, Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2016, Volume 66, P. 145-154

[16]Guizhong Xie, Ke Li, et al A systematic derived sinh based method for singular and nearly singular boundary integrals // Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 123, 2021, P. 147-153

[17]Klockner A., Barnett A., Greengard L., O'Neil M., Quadrature by expansion: a new method for the evaluation of layer potentials, // J. Comput. Phys., 2013, Vol. 252, P. 332 — 349.

[18]Ludvig af Klinteberg, Chiara Sorgentone, Anna-Karin Tornberg, Quadrature error estimates for layer potentials evaluated near curved surfaces in three dimensions // Comp. and Math. with Appl., 2022, V. 111, P. 1-19

верхности на расстоянии ϵ от основания перпендикуляра y^*, опущенного из x на поверхность. Рассматривая асимптотическое разложение потенциала для малых ϵ, задача сводится к вычислению вспомогательных интегралов в точке y^*. Вычисление возникающих интегралов происходит по формуле трапеций и по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра[19]. Тем не менее, методы, использующие локальные координаты, нацелены на вычисление потенциала в одной точке, поэтому они не дают равномерной аппроксимации вблизи поверхности.

Возможно использовать различные варианты замены ядра почти сингулярных операторов потенциала простого и двойного слоя (линейные функции, приближение на основе фундаментальных решений, функций Грина)[20]. Значение потенциала в точке, лежащей вблизи поверхности, можно также выразить через разложение Тейлора по нормальным производным с центром в основании перпендикуляра, опущенного из точки на поверхность. Сам потенциал и его нормальная производная в основании перпендикуляра считаются известными[21].

Цель работы

В работе[22] была построена квадратурная формула для потенциала простого слоя, обеспечивающая равномерную сходимость и равномерную аппроксимацию, а также сохраняющая свойство непрерывности этого потенциала при переходе через поверхность, на которой задана его плотность. Цель диссертации состоит в расширении этого метода и создании новых квадратурных формул для поверхностных потенциалов, обеспечивающих повышенную точность, в том числе вблизи поверхности, где задана плотность потенциала, без увеличения времени вычислений. Качественные квадратурные формулы нужны для численного решения краевых задач математической физики для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений.

К целям работы относится усиление результатов из [22], а именно повышение порядка равномерной сходимости и равномерной аппроксимации квадратурной формулы для потенциала простого слоя, получение новой формулы с повышенной точностью. А также получение других квадратурных формул повышенной точности для поверхностных потенциалов, создающих замкнутую инфраструктуру для более точного решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

[19] Shilpa Khatri, Arnold Kim, Ricardo Cortez, Camille Carvalho. Close evaluation of layer potentials in three dimensions // Journal of Computational Physics, 2020, Vol. 423, № 109798

[20] Carvalho, C. Modified Representations for the Close Evaluation Problem. Math. Comput. Appl. 2021, V. 26(4), № 69.

[21] Schwab C., Wendland W. On the extraction technique in boundary integral equations. Math. Comput. 1999, Vol. 68, P. 91-122.

[22] Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В., Квадратурная формула для потенциала простого слоя., // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, N 9. С. 1269 — 1284.

Для достижения указанных выше целей решаются следующие **задачи**:

- Получение новой квадратурной формулы для вычисления потенциала простого слоя в любой точке вне поверхности, где задана плотность потенциала, а также на самой поверхности.
- Построение квадратурной формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. Построение квадратурных формул для потенциала двойного слоя и его прямого значения.
- Применение полученных автором в диссертации квадратурных формул для решения краевых задач, возникающих при изучении процессов обтекания и определении стационарного теплового поля, в том числе вблизи поверхности, где задано граничное условие.

Положения, выносимые на защиту

1) Автором решена проблема вычисления потенциала простого слоя вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала. Для этого в работе автором построена новая квадратурная формула для потенциала простого слоя и доказано, что она обеспечивает равномерную сходимость и равномерную аппроксимацию потенциала вне указанной поверхности, что также подтверждается численными тестами. Полученная квадратурная формула сохраняет свойство непрерывности потенциала при переходе через указанную поверхность. Разработана квадратурная формула также для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя, обладающая повышенной точностью.

2) Автором решена проблема вычисления потенциала двойного слоя вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала. Для этого в работе построена квадратурная формула для потенциала двойного слоя, показывающая значительно меньшую погрешность вычислений вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала, чем стандартные квадратурные формулы, что подтверждается численными тестами. Получена квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя.

3) Представленные в работе решения краевых задач для уравнения Лапласа (внешней задачи Неймана и внутренней задачи Дирихле) при помощи полученных квадратурных формул показывают эффективность разработанного метода для решения стационарной задачи обтекания твёрдого тела потенциальным потоком идеальной жидкости, а также для решения задачи по определению стационарного теплового поля.

Научная новизна

В диссертации автором разработаны новые квадратурные формулы для поверхностных потенциалов для уравнений Лапласа и Гельмгольца. В первой главе при решении задачи обтекания твёрдого тела потенциальным потоком идеальной жидкости полученные формулы позволяют определять потенциал скорости с равномерной сходимостью и равномерной аппроксимацией. Используя результаты, полученные во второй главе, решается задача определения стационарного теплового поля на расстояниях порядка размера аппроксимации и менее. В работе развит новый метод приближения поверхностных потенциалов, позволяющий в случае малых расстояний до поверхности (где задана плотность потенциала) сохранять важнейшие свойства потенциала простого слоя и повысить точность вычислений потенциала двойного слоя. Все результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования.

В рамках исследования применяются подходы математической физики, математического анализа, методов вычислительной математики и аналитического интегрирования. Автором были получены явные аналитические выражения для возникающих в работе интегралов. Для реализации численных тестов с использованием составленных квадратурных формул были написаны вычислительные программы для компьютера.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими выкладками и доказательствами утверждений, апробацией на конференциях и семинарах, а также публикациями в рецензируемых журналах. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

В численных тестах известные точные значения потенциалов сравнивались с приближёнными значениями, вычисленными по новым квадратурным формулам. Для точных значений потенциалов были использованы явные выражения для потенциалов простого и двойного слоя, получаемые аналитически. Как показано в численных тестах, значения потенциалов, полученные с помощью новых квадратурных формул, хорошо аппроксимируют точные выражения для этих потенциалов. При разработке вычислительных программ для реализации численных тестов использовалось современное программное обеспечение.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Тема, объект и предмет исследования диссертации соответствуют паспорту специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки) по следующим пунктам:

1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

2. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

17. Математические проблемы механики сплошной среды.

18. Математические проблемы оптики и электродинамики.

20. Математические проблемы термодинамики, кинетики и статистической физики.

Апробация работы

Полученные автором результаты прошли апробацию и обсуждение на международных и всероссийских конференциях и научных семинарах:

Научная конференция "Вычислительная математика и ее приложения", посвященная памяти профессора Александра Александровича Абрамова, МФТИ, Долгопрудный, 9 ноября 2019.

Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2020", МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 10-27 ноября 2020;

VI Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Современные проблемы физико-математических наук", ФГБОУ ВО "Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева", Орёл, 4-5 декабря 2020;

Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2021", МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 12-23 апреля 2021;

4th international Moscow conference "Computer Algebra" CCAS 2021, Москва, 28-29 июня 2021;

13th International ISAAC Congress, Ghent, Belgium, Бельгия, 3-6 августа 2021;

VII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Современные проблемы физико-математических наук", ФГБОУ ВО "Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева", Орёл, 18-21 ноября 2021;

Научный семинар кафедры математики физического факультета МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, 2022.

Научный семинар им. К.И. Бабенко, ИПМ им М.В. Келдыша, Москва, 2022;

Научный семинар "Обратные задачи математической физики" под руководством А.Б. Бакушинского, А.В. Тихонравова, А.Г. Яголы, МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, 2022.

Публикации по теме диссертации

Результаты работы изложены в 10 публикациях в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI и из списка ВАК Минобрнауки России: из них - 6

- в изданиях, индексируемых в Web of Science, Scopus, RSCI.

Теоретическая и практическая значимость работы

Получение новых, более точных квадратурных формул для приближённого вычисления потенциалов простого и двойного слоя, а также их прямых значений, имеет большое значение для метода граничных интегральных уравнений. Одно из главных преимуществ этого метода состоит в понижении размерности решаемой задачи на единицу. В определённых случаях это оказывает решающее влияние на стоимость вычислений и, как следствие, на оправданность применяемого метода. Таким образом, получение улучшенных квадратурных формул, обеспечивающих повышенную точность вблизи границы, открывает новые возможности применения метода граничных интегральных уравнений для решения задач математической физики.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 4 рисунка и 25 таблиц. Список литературы содержит 100 наименований. Полный объем диссертации составляет 171 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Общей для всех разделов является задание поверхности, на которой задана плотность потенциала, а также основные необходимые формулы и требования для последующего вывода канонических интегралов. Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область. Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u,v),\ y_2 = y_2(u,v),\ y_3 = y_3(u,v);$$

$$u \in [0, A], \ \ v \in [0, B];$$

$$y_j(u,v) \in C^2([0,A] \times [0,B]), \quad j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Потребуем также, чтобы различным внутренним точкам прямоугольника при указанном отображении соответствовали различные точки поверхности. Введём

N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$, который отображается на поверхность Γ

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0, ..., N - 1;$$

$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0, ..., M - 1.$$

Тем самым прямоугольник $[0, A] \times [0, B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков и через (u_n, v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно, что компоненты вектора нормали (не единичного) $|\eta(y(u, v))|$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ определяется через определители второго порядка. Заметим, что если $|\eta(y(u, v))| = 0$ в некоторой точке, то функция $|\eta(y(u, v))|$ может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| \in C^1([0, A] \times [0, B]). \tag{2}$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0, \quad \forall\ (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \tag{3}$$

Из условия (3) следует, что $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$, но условие (2) не следует.

Диссертация состоит из двух глав.

В первой главе решается задача пространственного стационарного обтекания тела в идеальной невязкой несжимаемой среде со скорость $v = (v_1, v_2, v_3)$. Плотность среды не изменяется при обтекании.

Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Считая движение безвихревым, вводим потенциал скорости $u(x_1, x_2, x_3)$ так что $v = \mathrm{grad}\, u$. С учётом уравнения неразрывности $div\ v = 0$, функция u должна удовлетворять уравнению Лапласа.

Граничное условие на поверхности твердого тела в идеальной жидкости - это условие о непротекании потока сквозь поверхность тела[23] $(v_n)|_\Gamma = f(x)$, где $f(x)$ — нормальная составляющая скорости точки на поверхности Γ. Поскольку $v_n = \partial u/\partial n$, то это условие на поверхности твёрдого тела принимает вид $\partial u/\partial n|_\Gamma = f(x)$.

Таким образом задача математической физики по определению скорости жидкости вне тела сводится к внешней краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа относительно потенциала скорости u с непрерывным граничным

[23]Лифанов И.К., Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995. 521 с.

условием, заданным на Γ

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & u \in C^0(\overline{R^3 \setminus D}) \cap C^2(R^3 \setminus \overline{D}), \\ \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma} = f(x), & x \in \Gamma,\ f(x) \in C^0(\Gamma), \\ u = O\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

где $\partial/\partial\mathbf{n}$ означает правильную нормальную производную к поверхности Γ извне в точке x (то есть $\forall x \in \Gamma$ существует предел нормальной производной при стремлении к точке x вдоль нормали). Подразумевается, что функция $u(x)$ имеет правильную нормальную производную на Γ.

Найдём решение задачи Неймана в виде потенциала простого слоя $\mathcal{V}_0[\mu](x)$

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int_{y\in\Gamma} \mu(y)\frac{1}{|x-y|}dS_y, \tag{5}$$

где $\mu = \mu(y) \in C^0(\Gamma)$ — плотность потенциала. Потенциал простого слоя $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ — гармоническая функция в области $R^3 \setminus \overline{D}$.

При помощи теоремы о разрыве прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя получается уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \left.\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right|_{\Gamma} = f(x),\ x \in \Gamma. \tag{6}$$

Равенство (6) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как известно, однозначно разрешимо. Найденные значения плотности потенциала используются в выражении для потенциала простого слоя вне поверхности (5), находя таким образом решение задачи (4) в любой точке пространства.

В разделе 1.1 рассмотрен потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in \Gamma$

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} \frac{\mu(y)e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} \frac{\mu(y(u,v))\exp(ik|x-y(u,v)|)}{|x-y(u,v)|}|\eta(y(u,v))|dudv, \tag{7}$$

где для простоты $k \geq 0$. Если $k = 0$, то потенциал $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ переходит в потенциал простого слоя для уравнения Лапласа.

Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, а $\eta_{nm} = \eta(y(u_n, v_m))$. Разложим $y_j(u, v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m), тогда для $j = 1, 2, 3$ получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$
$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m). \tag{8}$$

Тогда вычисление значения потенциала простого слоя сводится к вычислению интеграла, который можно записать в виде

$$\mathcal{S}_k(x) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)\times$$
$$\times\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\frac{|\eta(y(u,v))|}{|x - y(u,v)|} \approx \int_{-h/2}^{h/2}dU\int_{-H/2}^{H/2}dV\times$$
$$\times\frac{|\eta(y(u_n, v_m))| + |\eta|'_uU + |\eta|'_vV}{\beta\sqrt{(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 + (-(\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2}} = \Theta_{nm}(x). \tag{9}$$

где $\alpha, \beta, \delta, r, P, Q$ — некоторые константы, а функция $\Theta_{nm}(x)$ найдена в явном виде.

Если дополнительно потребовать $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$,

$$y_j(u, v) \in C^3([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3; \tag{10}$$

$$|\eta(y(u, v))| \in C^2([0, A] \times [0, B]), \tag{11}$$

то для потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца имеет место соотношение

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \mathcal{S}_k(x) + \sigma_k(x), \tag{12}$$

где $\mathcal{S}_k(x)$ даётся выражением

$$\mathcal{S}_k(x) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\times$$
$$\times\frac{|\eta_{nm}| \ + \ (|\eta|)'_u(u,v)(u - u_n) \ + \ (|\eta|)'_v(u,v)(v - v_m)}{|x - y(u,v)|}, \tag{13}$$

а для $\sigma_k(x)$ выполняется оценка

$$|\sigma_k(x)| \le \frac{c_2}{4\pi}\|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}\|\eta(y(u,v))\|_{C^2([0,A]\times[0,B])}(h^2 + H^2), \tag{14}$$

где c_2 - некоторая положительная константа, и оценка выполняется равномерно по $x \notin \Gamma$.

Из приведённых рассуждений вытекает следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть* Γ *— простая гладкая замкнутая поверхность класса* C^3*, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область. Пусть* Γ *допускает параметризацию (10) со свойствами (11), (3), и* $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$*. Тогда для потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца (7) при* $x \notin \Gamma$ *справедливо представление (12), где для* $\tilde{\sigma}_k(x)$ *при любом расположении* x *выполняется оценка (14). Кроме того, для* $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$ *имеет место квадратурная формула (9), где интегралы* Θ_{nm}, θ_{nm}, $J_1(H)$ *и* $J_2(H)$ *вычислены в явном виде.*

Как следует из приведенных численных тестов, остаточный член квадратурной формулы можно оценить как $O(hH)$ равномерно по $x \notin \Gamma$, т.е. формула даёт равномерную аппроксимацию и обеспечивает равномерную сходимость к потенциалу простого слоя для точек, расположенных вне Γ. Для единичной сферы максимальная погрешность квадратурной формулы для точек x расположенных по всей сфере на некотором расстоянии ΔR не повышается даже при расстояниях порядка $\Delta R = (hH)^4$.

Также в этом разделе получена квадратурная формула для прямого значения потенциала простого слоя, обеспечивающая повышенную точность вычислений.

В разделе 1.2 рассмотрено прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y \tag{15}$$

Представим (15), в виде

$$\frac{\partial \mathcal{V}_k[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} = \tilde{\mathcal{S}}_k(x) + \tilde{\sigma}_k(x), \tag{16}$$

где

$$\tilde{\mathcal{S}}_k(x) = \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)\times$$

$$\times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv |\eta(y(u,v))| \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(x)(x_j - y_j(u,v))}{|x-y(u,v)|^3}, \tag{17}$$

а для $\tilde{\sigma}_k(x)$ выполняется оценка

$$|\tilde{\sigma}_k(x)| \le c_2 \|\mu(y(u,v))\|_{C^0([0,A]\times[0,B])} \tilde{f}(h,H). \tag{18}$$

Множитель $\tilde{f}(h,H)=o(1)$, т.е. $\tilde{f}(h,H)\to 0$, при $h,H\to 0$. Константа $c_2>0$ и оценка (18) выполняется при любом расположении x в узлах Г. Следовательно, $\tilde{\sigma}_k(x)=o(1)$, если $h,H\to 0$, при любом возможном положении x.

Согласно (16), нахождение квадратурной формулы для нормальной производной потенциала простого слоя сводится к нахождению квадратурной формулы для $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$, а чтобы построить эту квадратурную формулу надо вычислить интеграл в (17). При его вычислении будем различать 2 случая. В первом случае $(\hat{n},\hat{m})=(n,m)$, т.е. $x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})=y(u_n,v_m)$, канонический интеграл обозначим $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$. Во втором случае $(\hat{n},\hat{m})\neq(n,m)$, т.е. $x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\neq y(u_n,v_m)$, канонический интеграл обозначим $T_{nm}(x)$.

Из условия (2) следует, что для всех возможных n, m, при $u\in[u_n-h/2,u_n+h/2]$ и $v\in[v_m-H/2,v_m+H/2]$ функции $|\eta(y(u,v))|$ и $\mu(y(u_n,v_m))$ могут быть разложены по формуле Тейлора с остаточным членом 1-го порядка

$$|\eta(y(u,v))|=|\eta(y(u_n,v_m))|+O(h+H). \tag{19}$$

$$\mu(y(u,v))=\mu(y(u_n,v_m))+o(1). \tag{20}$$

Также

$$y_j(u,v)-x_j=r_j+(y_j)'_u(u-u_n)+(y_j)'_v(v-v_m)+\frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u-u_n)^2+$$

$$+\frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v-v_m)^2+(y_j)''_{uv}(u-u_n)(v-v_m)+o\left((u-u_n)^2+(v-v_m)^2\right). \tag{21}$$

Все производные берутся в точке (u_n,v_m). С учетом (8), (20), (19) и (21) интегралы $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ и $T_{nm}(x)$ можно записать в виде

$$\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}\approx\int_{-h/2}^{h/2}dU\int_{-H/2}^{H/2}dV\frac{\xi_1U^2+\xi_2V^2+\xi_3UV}{(\alpha^2U^2+\beta^2V^2+2\delta UV)^{3/2}}, \tag{22}$$

$$T_{nm}(x)=\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\frac{\sum_{j=1}^{3}\eta_j(x)(y_j-x_j)}{|x-y|^3}\approx\int\limits_{-h/2}^{h/2}dU\int\limits_{-H/2}^{H/2}dV\times$$

$$\times\frac{R+\xi_4U+\xi_5V+\xi_1U^2+\xi_2V^2+\xi_3UV}{\beta^3((V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2-(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2)^{3/2}}, \tag{23}$$

где $\alpha,\beta,\delta,r,R,P,Q$ и $\xi_1,\ldots,\xi_5$ — некоторые константы.

Используя обозначения для канонического интеграла, формулу (17) для $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$ можно преобразовать к следующему виду

$$\tilde{\mathcal{S}}_k(x)\Big|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma}\approx\frac{1}{4\pi}\mu_{\hat{n}\hat{m}}\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}+\frac{1}{4\pi|\eta(x)|}\times$$

$$\times \sum_{\substack{n=0,\, m=0 \\ (n,m)\neq(\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\, m=M-1} \mu_{nm}|\eta(y(u_n, v_m))| \exp(ik|x-y(u_n, v_m)|)(1-ik|x-y(u_n, v_m)|)T_{nm}(x). \tag{24}$$

Теорема 1.2. *Пусть* Γ — *простая гладкая замкнутая поверхность класса* C^2, *ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область. Пусть* Γ *допускает параметризацию (1) со свойствами (2), (3). Пусть* $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$, *а точка* x *расположена в одном из узлов на* Γ. *Тогда для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца (15) справедливо представление (16), где для* $\tilde{\sigma}_k(x)$ *при любом расположении* x *в узлах* Γ *выполняется оценка (18). Кроме того, для* $\tilde{\mathcal{S}}_k(x)$ *имеет место квадратурная формула (24), где интегралы* $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ *и* $T_{nm}(x)$ *приближенно вычислены в явном виде.*

Результаты для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала простого слоя получаются из приведенных результатов в частном случае $k = 0$.

В разделе 1.3 рассмотрен вспомогательный интеграл $\theta_{nm}(x)$, который используется при выводе квадратурных формул.

В разделе 1.4 при помощи разработанных формул рассматривается решение задачи (4). Решение краевой задачи разбивается на два этапа. Сначала методом квадратур при помощи формулы (24) из раздела 1.2 для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя решается уравнение (6) относительно неизвестных значений $\mu(x)$. Второй этап состоит в использовании значений $\mu(x)$ для вычисления потенциала простого слоя при помощи квадратурной формулы из раздела 1.1.

Приведённые численные тесты показывают эффективность разработанного в диссертации метода к решению краевых задач математической физики.

Диссертация состоит из двух глав.

Во второй главе решается задача математической физики по определению стационарного теплового поля в трёхмерном случае.

Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область D. Установившееся распределение температуры $u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри области D с заданным на поверхности распределением температуры $f(x)$. Рассмотрим внутреннюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа с непрерывным граничным условием, заданным на Γ:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & u \in C^0(\overline{D}) \cap C^2(D), \\ u(x)|_{\Gamma} = f(x), & x \in \Gamma,\ f(x) \in C^0(\Gamma) \end{cases}, \tag{25}$$

где $f(x)$ — заданная температура на поверхности Γ.

Найдём решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя $W_0[\mu](x)$:

$$W_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{y\in\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y, \tag{26}$$

где $\mu = \mu(y) \in C^0(\Gamma)$ — плотность потенциала, а $\mathbf{n}_y$ — внутренняя единичная нормаль. Потенциал двойного слоя $\mathcal{W}_0[\mu](x)$ — гармоническая функция в области D. Используя теорему о предельном значении потенциала двойного слоя на поверхности Γ из области D и приравнивая это выражение к функции, заданной на Γ, получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \mathcal{W}_0[\mu](x)|_\Gamma = f(x),\ x \in \Gamma. \tag{27}$$

Равенство (27) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое, как известно, однозначно разрешимо.

Подход, использованный в Главе 1 с целью построения квадратурной формулы для потенциала простого слоя, применяется в Главе 2 к построению квадратурных формул для потенциала двойного слоя.

В разделе 2.1 рассмотрен потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv\, \mu(y(u,v)) \times$$

$$\times \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1) \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}, \tag{28}$$

где $k \geq 0$. Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, тогда

$$\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + o(1), \tag{29}$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$.

В силу (2), для всех возможных n, m, при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u,v))|$ также может быть разложена в точке (u_n, v_m) по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\eta_j(u,v) = \eta_j(u_n, v_m) + (\eta_j)'_u(u-u_n) + (\eta_j)'_v(v-v_m) + o\left(\sqrt{(u-u_n)^2 + (v-v_m)^2}\right). \tag{30}$$

Все производные берутся в точке (u_n, v_m).

В итоге, с учетом (8), (20), (30), (21) и (29) вычисление потенциала двойного слоя сводится к вычислению интеграла, который можно записать в виде

$$K_{nm}(x) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \times$$

$$\times \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}}, \quad (31)$$

где $\alpha, \beta, \delta, r, R, P, Q$ и $\xi_1, \ldots, \xi_5$ — некоторые константы. В процессе вычисления этого выражения в явном виде, необходимо вычислить интеграл

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1 U + S_0}{(C_2 U^2 + C_1 U + C_0)\sqrt{B_2 U^2 + B_1 U + B_0}},$$

где B_2, B_1, B_0 и S_1, S_2 — некоторые константы. Способ вычисления интеграла зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена $C_2U^2+C_1U+C_0$, стоящего в знаменателе подынтегральной функции. Особый интерес представляет случай, когда многочлен неприводимый и $B_1 \neq B_2C_1/C_2$. Для этого в диссертационной работе представлен специальный способ вычисления подобных интегралов с иррациональностью в знаменателе, основанный на рассмотрении подынтегрального выражения в комплексной плоскости (см. Случай 3, Вариант 2). Данный подход позволяет получить формулу, учитывающую все возможные случаи для коэффициентов подынтегрального выражения.

Теорема 2.1. *Пусть Γ — простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки. Пусть Γ допускает параметризацию (1) со свойством (3), и $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$. Тогда для потенциала двойного слоя (28) при $x \notin \Gamma$ и $k \geq 0$ имеет место квадратурная формула*

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) K_{nm}(x), \quad (32)$$

где интеграл $K_{nm}(x)$ вычислен в явном виде.

Эта квадратурная формула дает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами. Преимущество новой квадратурной формулы особенно заметно вблизи поверхности, где стандартная квадратурная формула быстро расходится, тогда как новая формула обеспечивает приемлемую точность вычислений для точек, отстоящих от поверхности на расстояниях, сопоставимых с шагом интегрирования и более.

В разделе 2.2 выводится улучшенная квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя.

Теорема 2.2. *Пусть* Γ *— простая гладкая замкнутая поверхность класса* C^2*, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса* C^2*, содержащая свои предельные точки. Пусть* Γ *допускает параметризацию (1) со свойством (3), и* $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$*. Тогда для прямого значения потенциала двойного слоя на* Γ *при* $x = y(u_{\hat{n}}, v_{\hat{m}}) \in \Gamma$ *и* $k \geq 0$ *имеет место квадратурная формула*

$$\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma} \approx -\frac{1}{4\pi}\mu_{\hat{n}\hat{m}}\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{n=0,\, m=0\\(n,m)\neq(\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\, m=M-1} \mu_{nm}\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)K_{nm}(x), \quad (33)$$

где интегралы $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$ *и* $K_{nm}(x)$ *вычислены в явном виде.*

Если $k = 0$, то потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, соответственно, квадратурная формула (33) при $k = 0$ принимает вид квадратурной формулы для прямого значения гармонического потенциала двойного слоя на поверхности Γ.

Улучшенная формула даёт значительно более высокую точность чем стандартная, что подтверждается численными тестами. Формула, построенная в разделе 2.2, позволяет получить замкнутую инфраструктуру для решения краевых задач методом граничных интегральных уравнений.

В разделе 2.3 проведено обобщение формулы из раздела 2.1 на случай дифференцируемой плотности в потенциале, что позволяет повысить точность вычислений потенциала двойного слоя, если плотность в потенциале дифференцируема.

В разделе 2.4 построенные в главе 2 квадратурные формулы применяются к численному решению внутренней краевой задачи Дирихле с непрерывным граничным условием, заданным на Γ. Процесс аналогичен решению краевой задачи из раздела 1.4. Граничное интегральное уравнение Фредгольма 2 рода решается при помощи квадратурной формулы для прямого значения потенциала двойного слоя из раздела 2.2. Непосредственно для вычисления решения краевой задачи используется квадратурная формула для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью потенциала из раздела 2.1.

В численных тестах граничное условие задаётся на поверхности сферы. Решение с помощью предложенного метода сравнивается с решениями той же задачи при помощи стандартных квадратурных формул, а также при помощи квадратурной формулы для телесного угла, подробно описанной в разделе 2.3.

Заключение

Основным результатом диссертации является усовершенствованный автором метод, с помощью которого решается задача стационарного обтекания твёрдого тела потенциальным потоком жидкости и задача по определению стационарного теплового поля. Для этого автором были получены новые квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоя.

В диссертации построена новая квадратурная формула для потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, обеспечивающая равномерную сходимость и равномерную аппроксимацию вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала. Полученная квадратурная формула сохраняет свойства непрерывности потенциала при переходе через указанную поверхность. В работе также построена новая квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. Вместе эти формулы были применены к решению трёхмерной внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений. К такой краевой задаче сводится изучение стационарного обтекания твёрдого тела потенциальным потоком идеальной жидкости. Расчёты решения на малом расстоянии от поверхности, на которой задано граничное условие краевой задачи, показали, что полученные формулы обеспечивают повышенную точность по сравнению с известными квадратурными формулами.

В диссертационной работе автором построены квадратурные формулы для потенциала двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Отдельно изучены случаи непрерывной и дифференцируемой плотности потенциала. Обе формулы показывают значительно меньшую погрешность вычислений вблизи поверхности, на которой задана плотность потенциала, чем стандартные квадратурные формулы, что подтверждается численными тестами. В работе также получена квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя. Эти формулы были применены к решению трёхмерной внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений. К такой постановке сводится задача по определению стационарного теплового поля. Сравнение численного решения при помощи полученных автором квадратурных формул с численным решением, полученным при помощи известных квадратурных формул, показало эффективность созданного в диссертации подхода.

Разработанные в диссертации квадратурные формулы могут быть применены к численному решению краевых задач математической физики. Областью практического применения результатов служит численное моделирование физических процессов и явлений в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, плёнках. Результаты работы могут быть интересны специалистам, работающих в области математической физики, дифференциальных уравнений, математического моделирования и математического анализа.

Благодарности

Выражаю глубокую благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук Валентине Викторовне Колыбасовой за постановку задач, внимание к работе и поддержку. Выражаю глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Крутицкому Павлу Александровичу за плодотворную совместную работу и поддержку. Выражаю глубокую благодарность профессорско-преподавательскому составу физического факультета МГУ за полученное образование. Благодарю всех сотрудников кафедры математики физического факультета МГУ за внимание и доброжелательное отношение. Благодарю своих родителей.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 работах автора, 6 из которых индексируются в Web of Science и Scopus.

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по направлению 1.1.2 — «дифференциальные уравнения и математическая физика»

1) Резниченко И.О. О квадратурной формуле для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя в трёхмерном случае / Резниченко И.О., Крутицкий П.А. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 98. С. 1 - 31 (РИНЦ 0.512) 1.9 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

2) Резниченко И.О. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя / Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В В. // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 9. С. 1270 - 1288 (WoS 0.784, Scopus 0.509, РИНЦ 8.043) 1.1 п.л. / Соавторам принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

3) Резниченко И. О. О вычислении одного интеграла с квадратичной иррациональностью / Резниченко И. О., Крутицкий П. А. // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Международной научно-практической конференции, 4-5 декабря 2020 года, ОГУ им. И.С. Тургенева Орел. 2020. С. 92-99. (РИНЦ) 0.4 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

4) Reznichenko I. O. Quadrature Formula for the Double Layer Potential / I. O. Reznichenko, P. A. Krutitskii // Computer Algebra, 28 - 29 июня 2021 года, ООО "МАКС Пресс". 2021. С. 96 - 99. (РИНЦ) 0.2 п.л.

5) Резниченко И.О. Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя / Крутицкий П.А., Резниченко И.О. // Дифференциальные уравнения. 2021. Т.57, № 7. С. 932 - 950 (WoS 0.784, Scopus 0.509, РИНЦ 8.043) 1.1 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

6) Резниченко И.О. О вычислении прямого значения потенциала двойного слоя в трёхмерном случае // Современные проблемы физико-математических наук: Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Орел, 18-21 ноября 2021 года ОГУ им. И.С. Тургенева Орел. 2021. С. 104 - 113. (РИНЦ) 0.6 п.л.

7) Резниченко И.О. Квадратурная формула для прямого значения потенциала двойного слоя / Резниченко И.О., Крутицкий П.А. // Программирование. 2022. № 3. С. 92 - 100 (Scopus 0.37, РИНЦ 1.012) 0.5 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

8) Резниченко И.О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца / Крутицкий П.А., Резниченко И.О. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 3. С. 421 - 436 (WoS 0.769, Scopus 0.503, РИНЦ 0.884) 0.9 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

9) Резниченко И.О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью / Крутицкий П. А., Резниченко И.О. // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 8. С. 1121 - 1131 (WoS 0.784,

Scopus 0.509, РИНЦ 8.043) 0.6 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.

10) Резниченко И.О. Улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя / Крутицкий П. А., Резниченко И.О. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 2. С. 44-58 (WoS 0.769, Scopus 0.503, РИНЦ 0.884) 0.9 п.л. / Соавтору принадлежит постановка задачи и проверка результатов. Остальные результаты статьи получены Резниченко И.О.