ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук Осинского Александра Игоревича на тему: «Существование и построение близких к оптимальным столбцовых и крестовых аппроксимаций матриц»
по специальности 1.1.6 Вычислительная математика

Актуальность темы диссертации.

Диссертация Осинского А.И. посвящена исследованию малоранговых столбцовых и крестовых аппроксимаций матриц, которые являются обобщениями частичных QR- и LU-разложений. Такого рода разложения особенно привлекательны тем, что их можно строить существенно быстрее сингулярного разложения. При этом нельзя упускать из виду сохранение приемлемой точности таких аппроксимаций. Так, хорошо известно, что простейшие реализации частичных QR- и LU-разложений могут приводить к экспоненциальному по порядку матрицы росту элементов погрешности.

Таким образом, актуальным является изучение точности такого рода аппроксимаций. Ставится вопрос о возможности достижения с помощью крестовых аппроксимаций точности, близкой к сингулярному разложению, без существенных вычислительных затрат. В данной работе дается положительный ответ на данный вопрос. Более того, в тех случаях, когда для частичных QR- или LU-разложений оценки оказываются неулучшаемы, предлагаются альтернативы, которые все же позволяют приблизиться к точности сингулярного разложения, путем использования большего числа строк и столбцов, чем ранг построенной аппроксимации.

Новизна диссертационной работы.

Новизна определяется следующими результатами. Во-первых, предложен принцип максимизации проективного объема подматриц, который позволяет гарантировать высокую точность соответствующих аппроксимаций по норме Чебышева. Во-вторых, полученные оценки по норме Фробениуса существенно ближе к точности сингулярного разложения, чем любые другие методы построения крестовых аппроксимаций. В частности, строго доказано, что полученные верхние оценки точности близки к оптимальным. Для спектральной нормы также приведены верхние и нижние оценки, асимптотически совпадающие друг с другом с ростом числа исходных и используемых строк и столбцов. Наконец, предложенные быстрые методы поиска подматриц большого проективного объема позволяют достичь высокой точности аппроксимации почти за то же время, какое необходимо для построения неполного LU-разложения. Численные методы также обоснованы вероятностными оценками для RANDSVD-ансамбля.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность.

Достоверность результатов подтверждается строгими математическими доказательствами. Для рассмотренных алгоритмов обоснована вычислительная сложность и проведены численные эксперименты. Результаты диссертационной работы опубликованы в 15 работах, индексируемых WoS и Scopus, и доложены на российских и международных конференциях.

Краткое содержание диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения и приложения.

В первой главе рассматриваются основные свойства крестовых и столбцовых аппроксимаций, приводятся связанные с ними определения. Доказывается, что частичные LU- и QR-разложения можно рассматривать как частные случаи крестовой и столбцовой аппроксимации соответственно. Рассматриваются полезные свойства, которые требуются от аппроксимаций такого рода, чтобы с помощью них можно было с высокой точностью восстановить численный ранг или спектр приближаемой матрицы. Доказывается, что, хотя наилучшая столбцовая аппроксимация полного ранга может быть записана в виде частичного QR-разложения, для крестовой аппроксимации это оказывается не так. Рассматривается связь столбцовой аппроксимации с задачей одновременной аппроксимации, решаемой жадными алгоритмами. При этом оказывается, что последние применяются в в такой важной области исследований, как "сжатые измерения" (compressed sensing). Наконец, рассматриваются свойства подматриц максимального и локально максимального объема и проективного объема. Использование строк и столбцов, соответствующим таким подматрицам, важно для построения крестовых и столбцовых аппроксимаций высокой точности. В частности, доказаны границы для норм псевдообратных к подматрицам, обладающим большим объемом или проективным объемом. Доказывается обобщение теоремы Бине-Коши, позволяющее связать объемы и проективные объемы подматриц с сингулярными числами матрицы.

Во второй главе приведены доказательства всех основных результатов о существовании крестовых и столбцовых аппроксимаций высокой точности. Рассматриваются три часто используемых на практике матричные нормы – спектральная, норма Фробениуса (евклидова) и норма Чебышева (max-норма). Для каждой доказываются как верхние, так и нижние оценки, показывающие не только существование аппроксимаций высокой точности, но (почти-) неулучшаемость полученных для соответствующих норм оценок. Рассматриваются как оценки для аппроксимаций общего вида, так и аппроксимации на основе частичного LU-разложения. Для нормы Чебышева отдельно рассмотрены оценки аппроксимаций тензоров, а также получены нижние оценки для точности малоранговой аппроксимации единичной матрицы, что позволило улучшить соответствующие оценки для сферических кодов. В конце главы полученные и известные оценки точности крестовых и столбцовых аппроксимаций собраны в таблицу из 13 типов аппроксимаций и 3 типов норм. Здесь можно отметить отличное подтверждение точности малоранговой аппроксимации единичной матрицы в чебышевской норме при сопоставлении с известными свойствами "равноугольных нормализованных жестких фреймов" (equiangular normalized tight frames, ENTF).

В третьей главе доказаны вероятностные оценки точности для аппроксимаций матриц из randsvd-ансамбля. Отдельно доказывается среднеквадратичная погрешность для матриц из ансамбля (при фиксированных сингулярных числах), а также вероятность существенно превысить полученные оценки. Наконец, отдельно рассматривается случай, когда сингулярные числа приближаемой матрицы медленно убывают, для которого удается существенно улучшить оценки.

В четвертой главе рассматриваются алгоритмы поиска подматриц, нормы псевдообратных к которым ограничены. Особенное внимание уделено именно алгоритмам поиска подматриц локально максимального объема и проективного объема. В начале главы рассматривается жадный набор столбцов или элементов подматрицы и доказываются оценки на объем полученных подматриц. Далее рассматривается алгоритм поиска подматриц локально максимального объема в фиксированных строках и столбцах. Затем этот алгоритм обобщается на одновременные замены, что позволяет гарантированно находить подматрицы почти локально максимального объема во всей матрице. Отдельно рассматривается эвристический подход поиска подматриц локально максимального объема и проективного объема: когда максимальность в текущих строках и столбцах гарантирована, но максимальности во всей матрице может не быть. Это позволяет существенно ускорить алгоритм, однако создает ту же проблему, что и частичный выбор ведущего элемента при разложении Гаусса по сравнению с полным – отсутствие гарантий точности полученной аппроксимации. После описания каждого из алгоритмов выводится оценка числа его шагов и вычислительной сложности, а также устанавливаются гарантии локальной близости объема подматрицы к максимальному. Все рассматриваемые алгоритмы основаны на поочередной замене одной из строк или столбцов матрицы. Алгоритмы для поиска прямоугольных матриц рассматриваются отдельно для замен вдоль строк и столбцов, поскольку требуют разных критериев в зависимости от того, идет ли замена вдоль меньшего или большего измерения. В конце главы рассматриваются альтернативные методы поиска подматриц с небольшой нормой псевдообратной. Большинство альтернативных алгоритмов взято из существующей литературы, однако почти каждый из них был ускорен или для него доказываются лучшие оценки величины нормы псевдообратной. Наконец, рассматривается связь алгоритмов поиска подматриц большого объема с задачей поиска минимального охватывающего эллипсоида. При этом для приближенного поиска минимального охватывающего эллипсоида используется алгоритм поиска подматриц локально максимального объема.

В пятой главе рассматривается вопрос о возможности замены точного поиска локально максимального объема описанными ранее алгоритмами, заменяющими поочередно (но не одновременно) строки и столбцы. Здесь снова рассматривается вероятностный подход, где случайными считаются сингулярные векторы наилучшего приближения. Доказывается, что если погрешность достаточно мала, то с высокой вероятностью одновременные замены действительно не нужны. Отдельно также рассматривается вопрос о выборе ранга аппроксимации, поскольку все предшествующие алгоритмы предполагали ранг заданным. В качестве алгоритма выбора ранга предложен классический адаптивный крестовый метод. На основе полученных в этой же главе теоретических результатов предложена его модификация с большим числом шагов и выбором большего числа столбцов. Завершает главу таблица, из которой следует, что предложенные алгоритмы близки, а иногда и превосходят по точности исключение Гаусса с полным выбором ведущего элемента, при этом требуя существенно меньше вычислительных затрат.

В шестой главе проведены численные эксперименты на случайных матрицах. Показана как средняя, так и худшая среди тестовых матриц погрешность аппроксимации на основе предложенных крестовых методов. Показано, что даже при поиске точного локально максимального объема число шагов предложенных методов оказывается порядка ранга аппроксимации. Нормы псевдообратных к найденным алгоритмами подматрицам также соответствуют теоретическим оценкам.

В седьмой главе рассмотрены некоторые задачи, решение которых удается ускорить с применением крестовых методов. Первая из рассмотренных задач – решение уравнений Смолуховского, где малоранговая аппроксимация ядра позволяет ускорить вычисление правой части при решении системы дифференциальных уравнений. Вторая – восстановление матриц, где крестовая аппроксимация используется в качестве приближенного проектора в методе проекции градиента. Наконец, рассматривается построение неотрицательных аппроксимаций методом переменных проекций, где крестовая аппроксимация снова используется в качестве приближенного проектора на множество матриц фиксированного ранга. Во всех трех случаях наблюдаемая и асимптотическая сложность методов существенно ниже альтернативных подходов.

В приложении приведен подробный псевдокод для рассматриваемых в диссертации алгоритмов.

Автореферат в полной мере передает содержание диссертации

.

Замечания по диссертационной работе.

1. В диссертации частичные QR- и LU-разложения названы неполными. Поскольку термин “неполное LU” уже занят в другом контексте и используется для обозначения разреженного приближения LU-разложения разреженной матрицы, следовало бы использовать другую терминологию, напр., «частичное LU».

2. В тексте есть опечатки, например:

стр. 5, снизу 2-я строка: должно быть "столбцы и строки",

стр. 12, снизу 2-я строка: пропущено слово "объема",

стр. 25, снизу 4-я строка: должно быть "$m \leq n$",

стр. 50, в формуле (2.41) должно быть I вместо A,...

3. Формулировки ряда утверждений, например, Следствие 2.7, Лемма 1.2, Определение 2.3, имеют неполный вид, т.к. включают нерасшифрованные обозначения. Это происходит из-за того, что выкладки, фактически являющиеся доказательством, предшествуют формулировке утверждения. Это создает очевидные неудобства при чтении текста.

4. Ссылку [40] на обзор 2011 года, возможно, следовало бы дополнить более поздними работами, например, Murray R. et al. Randomized numerical linear algebra: A perspective on the field with an eye to software //arXiv preprint arXiv:2302.11474. – 2023. (202 pp.)

5. Заголовок гл. 5 должен быть "Эффективность поиска подматриц..."

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.6 Вычислительная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5

Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Осинский Александр Игоревич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.6 Вычислительная математика.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник Отдела 26 «Прикладных проблем оптимизации» Отделения 2 «Моделирование сложных физических и технических систем» Федерального государственного учреждения Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

КАПОРИН Игорь Евгеньевич

16 апреля 2025 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (916) 797-13-62, e-mail: igorkaporin@mail.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.07– Вычислительная математика
Адрес места работы:

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2
Федеральное государственное учреждение Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Отдел 26 «Прикладных проблем оптимизации» Отделения 2 «Моделирование сложных физических и технических систем»
Тел.: ++7 (916) 797-13-62; e-mail: igorkaporin@mail.ru

Подпись сотрудника Федерального государственного учреждения Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук И.Е. Капорина удостоверяю: