МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Линке Юлиана Юрьевна

Универсальные ядерные оценки в непараметрической регрессии с приложениями к нелинейным регрессионным моделям

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный косультант: **Яровая Елена Борисовна**
доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры теории
вероятностей механико-математического
факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты: **Мелас Вячеслав Борисович**
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
статистического моделирования механико-математического факультета СПбГУ

Хохлов Юрий Степанович
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
математической статистики ВМК
МГУ имени М.В. Ломоносова

Наумов Алексей Александрович
доктор компьютерных наук (физико-математических наук), заведующий международной
лабораторией стохастических алгоритмов
и анализа многомерных данных
Института искусственного интеллекта
и цифровых наук факультета
компьютерных наук НИУ ВШЭ

Защита диссертации состоится «21» июня 2024 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.3/2957

Автореферат разослан «   » апреля 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
доктор физико-математических наук В.Б. Шерстюков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Регрессионный анализ является одной из широко востребованных и активно развивающихся областей статистической обработки данных. Диссертационная работа посвящена методологии оценивания в задачах непараметрической и нелинейной регрессии в случае так называемых плотных данных.

Рассматриваются следующие классические задачи непараметрической регрессии: оценивание регрессионной функции по наблюдениям ее зашумленных значений в некотором известном наборе точек из области ее определения, называемых регрессорами, а также оценивание функций среднего и ковариации случайного процесса в схеме, когда каждая из независимых копий этого процесса наблюдается в зашумленном варианте в том или ином наборе регрессоров. Эти задачи общепризнаны фундаментальными [1,2,3] и многие работы по непараметрическому оцениванию были посвящены их решению (см. библиографические ссылки в диссертации).

Одними из популярных процедур оценивая в рассматриваемых задачах являются методы ядерного сглаживания, к которым относятся такие известные оценки, как Надарая–Ватсона, Пристли–Чжао, Гассера–Мюллера, локально–полиномиальные оценки и различные их модификации [4]. В качестве ориентира отметим работы в этой области таких известных специалистов, как Х.-Г. Мюллер, Э. А. Надарая, Т. Хсинг, Я. Фан, В. Хердле, П. Холл, Д. Мэйсон, У. Айнмаль, Т. Гассер, Ф. Яо, Э. Мэсри и многих других.

Для того чтобы оценить интересующие нас функции, нужно накладывать те или иные ограничения на регрессоры. Все известные нам исследования в этой области можно условно разделить на две группы в зависимости от стохастической природы регрессоров. В случае детерминированных регрессоров как правило предполагаются те или иные условия регулярного заполнения этими точками области определения регрессионной функции или случайного процесса[5,6,7]. В работах, имеющих дело со случайными регрессорами, рассматриваются или независимые одинаково

---

[1] Härdle W. Applied nonparametric regression. — Cambridge University Press, 1990.

[2] Wang J.-L., Chiou J.-M., Muller H.-G. Review of functional data analysis // Annu. Rev. Statist. — 2016. — V. 3. — P. 257–295.

[3] Kokoszka P., Reimherr M. Introduction to functional data analysis. — Chapman and Hall/CRC, 2017.

[4] Fan J., Gijbels I. Local polynomial modelling and its applications. — London: Chapman and Hall, 1996.

[5] Song Q., Liu R., Shao Q., Yang L. A simultaneous confidence band for dense longitudinal regression // Comm. Statist. Theory Method. — 2014. — V. 43. — P. 5195–5210.

[6] Gu W., Roussas G. G., Tran L. T. On the convergence rate of fixed design regression estimators for negatively associated random variables // Stat. Probab. Lett. — 2007. — V. 77. — P. 1214–1224.

[7] Degras D. Asymptotics for the nonparametric estimation of the mean function of a random process // Stat. Prob. Lett. — 2008. — V. 78. — P. 2976–2980.

распределенные величины [8,9,10,11,12,13,14], или наблюдения (нередко стационарно связанные), удовлетворяющие тем или иным формам слабой зависимости. В частности, используются различные варианты условий перемешивания, схемы скользящих средних, ассоциированных случайных величин, марковские или мартингальные свойства и др. [15,16,17,18,19]

В диссертации предложены концепция плотных данных и классы универсальных относительно стохастической природы регрессоров состоятельных оценок в моделях непараметрической и нелинейной регрессии. Эта концепция позволила в задачах непараметрического оценивания существенно ослабить известные условия на регрессоры без какой-либо спецификации их типа. В частности, в работе построены новые непараметрические ядерные оценки для регрессионной функции, равномерно состоятельные при более общих и легко проверяемых условиях на регрессоры, чем были известны ранее, а именно — при условии асимптотически (при растущем объеме наблюдений) плотного заполнения регрессорами области определения регрессионной функции. В отличие от известных ранее предположений новое условие нечувствительно к характеру зависимости регрессоров, по существу является необходимым для восстановления функции с той или иной точностью и включает в себя как ситуацию детерминированных регрессоров без дополнительного требования регулярности, так и случайных регрессоров, которые могут не удовлетворять условиям слабой зависимости. Концепция плотных данных и универсальности

[8] Li Y., Hsing T. Uniform convergence rates for nonparametric regression and principal component analysis in functional/longitudinal data // Ann. Statist. — 2010. — V. 38. — P. 3321–3351.

[9] Einmahl U., Mason D. M. Uniform in bandwidth consistency of kernel-type function estimators // Ann. Statist. — 2005. — V. 33. — P. 1380–1403.

[10] Hall P., Müller H.-G., Wang, J.-L. Properties of principal component methods for functional and longitudinal data analysis // Ann. Statist. — 2006. — V. 34. — P. 1493–1517.

[11] Zhang X., Wang J.-L. From sparse to dense functional data and beyond // Ann. Statist. — 2016. — V. 44 — P. 2281–2321.

[12] Lin Z., Wang J.-L. Mean and covariance estimation for functional snippets // J. Amer. Statist. Assoc. — 2022. — V. 117.

[13] Yao F., Muller H.-G., Wang J.-L. Functional data analysis for sparse longitudinal data // J. Amer. Statist. Assoc. — 2005. — V. 100. — P. 577–590.

[14] Gu J., Li Q, Yang J.-C. Multivariate local polynomial kernel estimators: leading bias and asymptotic distribution // Econom. Rev. — 2015. — V. 34. — P. 979–1010.

[15] Laib N., Louani D. Nonparametric kernel regression estimation for stationary ergodic data: asymptotic properties // J. Multivar. Anal. — 2010. — V. 101. — P. 2266–2281.

[16] Hansen B. E. Uniform convergence rates for kernel estimation with dependent data // Econ. Theory. — 2008. — V. 24. — P. 726–748.

[17] Chan N., Wang Q. Uniform convergence for Nadaraya-Watson estimators with nonstationary data // Econ. Theory. — 2014. — V. 30. — P. 1110–1133.

[18] Миллионщиков Н. В. Асимптотическая нормальность оценок регрессии для слабозависимых случайных полей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2005. — № 2. — С. 3–8.

[19] Gao J., Kanaya S., Li D., Tjostheim D. Uniform consistency for nonparametric estimators in null recurrent time series // Econ. Theory. — 2015. — V. 31. — P. 911–952.

оценок реализуется и в различных регрессионных постановках задачи оценивания функций среднего и ковариации случайного процесса. Доказать равномерную состоятельность новых ядерных оценок лишь при указанных ограничениях на регрессоры (в терминах плотных данных) во многом удается благодаря специальной структуре оценок, содержащей конструкции сумм определенным образом взвешенных наблюдений со структурой интегральных сумм Римана. Конструкции интегральных сумм открывают возможность исследовать асимптотические свойства оценок за счет близости интегральных сумм и соответствующих интегралов, а не предельных теорем теории вероятностей.

В рамках нашей концепции мы исследуем также два наиболее востребованных [20,21] варианта ядерных оценок: оценки Надарая–Ватсона и классические локально–линейные ядерные оценки. В диссертации для асимптотически плотных данных доказаны как поточечная, так и равномерная состоятельность этих наиболее популярных ядерных оценок. При этом мы, в отличие от предшественников, не используем те или иные эргодические свойства наблюдаемой выборки регрессоров.

Таким образом, в задачах непараметрической регрессии выделяется некоторое свойство регрессоров (в терминах плотных данных), которое в оценивании играет роль «по существу». Принципиальная новизна этих результатов заключается, на наш взгляд, в возможности оценить интересующие нас функции без использования какой-либо информации о структуре регрессоров и характере их зависимости. Полезно отметить, что характер зависимости реальных выборочных данных в статистике, если зависимость наблюдений имеет место по природе стохастического эксперимента, определить бывает достаточно трудно. В этой связи создание и развитие новых методов и подходов статистического анализа зависимых наблюдений, не удовлетворяющих классическим условиям перемешивания и другим известным формам корреляции, а также исследование новых форм зависимостей, которые были бы статистически более наглядными и обоснованными, представляет интерес не только с теоретической точки зрения, но и является актуальным и особенно важным для приложений.

В задачах нелинейной регрессии асимптотически оптимальные оценки как правило задаются неявно и нередко определяются как решения тех или иных уравнений [22,23,24]. При этом для задач нелинейной регрессии весьма типична ситуация, когда имеется несколько корней того или иного

---

[20] Hirukawa M. Asymmetric kernel smoothing. — Springer Singapore, 2018.

[21] Yao F. Asymptotic distributions of nonparametric regression estimators for longitudinal or functional data // J. Multivariate Anal. — 2007. — V. 98. — P. 40–56.

[22] Heyde C. C. Quasi-likelihood and its application: a general approach to optimal parameter estimation. — Springer, 1997.

[23] Seber G. A. F., Wild C. J. Nonlinear regression. — Wiley, 2003.

[24] Wakefield J. Bayesian and frequentist regression methods. — Springer, 2013.

уравнения, определяющего оценку[25,26]. Данное обстоятельство существенно усложняет использование численных методов: при неудачном выборе начального приближения параметра итерационные процедуры обнаруживают лишь корень, ближайший к стартовой точке, а не к параметру. Если корней несколько, при этом уравнение не порождается экстремальной задачей, то как среди всех выбрать корень, приближающий параметр? Данная проблема хорошо известна в англоязычной литературе как *multiple root problem* [27]. Подобные сложности свойственны многим задачам статистического оценивания, связанным с поиском корней уравнений.

Один из подходов при решении указанных проблем состоит в использовании одношаговых оценок. Идея одношагового оценивания, восходящая к работам Р. Фишера и получившая дальнейшее развитие в работах Л. Ле Кама, П. Бикела, П. Хьюбера и др., заключается в следующем: в качестве стартовой точки итерационной процедуры ньютоновского типа используется некоторая предварительная состоятельная оценка, сходящаяся к параметру с нужной скоростью. В этом случае достаточно лишь одного шага итерационной процедуры, чтобы получить явную оценку (так называемую «одношаговую», в англоязычной литературе — *one–step*), имеющую ту же асимптотическую точность, что и искомая статистика[28]. В последнее время появилось большое количество публикаций, в которых исследуются одношаговые оценки в различных статистических задачах, связанных с поиском корней уравнений. В этой связи отметим, например, работы Я. Фана[29], В. Йохай, Х. Юречковой[30], П. Холла[31] и недавние публикации [32,33,34,35] (см. также многочисленные ссылки в диссертации).

---

[25]Small C. G., Wang J. Numerical methods for nonlinear estimating equations. — Oxford: Clarendon press, 2003.

[26]Small C. G., Yang Z. Multiple roots of estimating functions // Canad. J. Statist. — 1999. — V. 27. — P. 585–598.

[27] см. сноски 22, 25 выше и сноску 28 далее.

[28]Van der Vaart A. W, Wellner J. A. Weak convergence and empirical processes. — Springer, 1996.

[29]Fan J., Xue L., Zou H. Strong oracle optimality of folded concave penalized estimation // Ann. Statist. — 2014. — V. 42. — P. 819–849.

[30]Jureckova J. Tail-behavior of estimators and of their one-step versions // J. Soc. fr. stat. — 2012. — V. 153 — P. 44–51.

[31]Hall P., Ma Y. Quick and easy one-step parameter estimation in differential equations // J. R. Stat. Soc. Series B Stat. Methodol. — 2014. — V. 76. — P. 735–748.

[32]Duchesne P., Micheaux P. L., Tatsinkou J. F. T. On strong consistency and asymptotic normality of one-step Gauss-Newton estimators in ARMA time series models // Statistics. — 2020. — V. 54. — P. 1030–1057.

[33]Dattner I., Gugushvili S. Application of one-step method to parameter estimation in ODE models // Stat. Neerl. — 2018. — V. 72. — P. 126–156.

[34]Li H., Calder C.A., Cressie N. One-step estimation of spatial dependence parameters: properties and extensions of the APLE statistic // J. Multivar. Anal. — 2012. — V. 105. — P. 68–84.

[35]Taddy M. One-step estimator paths for concave regularization // J. Comput. Graph. Stat. — 2016. — V. 26. — P. 525–536.

Основа одношагового оценивания — это наличие подходящей предварительной оценки. В специальных постановках задач нелинейной регрессии одношаговые оценки исследуются в нескольких работах, но существование предварительных оценок, как правило, лишь постулируется (см. подробности в диссертации). Важность разработки методологии одношагового оценивания для задач нелинейной регрессии подчеркивается, например, в монографии К. Смола и Дж. Ванга[36].

В диссертации предложены методы построения явных состоятельных с некоторой скоростью (так называемых α_n-состоятельных) или асимптотически нормальных оценок конечномерных параметров в моделях нелинейной регрессии в случае плотного заполнения регрессорами некоторой области и без требования полного контроля над ними. В статистической литературе подобной регулярной методологии построения явных оценок в задачах нелинейной регрессии до настоящего времени, по-видимому, не было, и лишь для нескольких простых регрессионных моделей с аддитивными погрешностями были известны явные состоятельные оценки[37]. Применительно к упомянутым выше одношаговым процедурам оценивания эти новые оценки могут быть использованы в качестве предварительных, так что наличие подобных методик открывает возможность использования одношаговых оценок в задачах нелинейной регрессии.

Исследования в области нелинейной и непараметрической регрессии, представленные в диссертационной работе, тесно связаны между собой единым подходом к решению поставленных задач. В частности, построение оценок основано на конструкциях сумм специальным образом взвешенных наблюдений со структурой интегральных сумм Римана. Кроме того, в одном из подходов к построению явных оценок в нелинейной регрессии используются непараметрические ядерные оценки.

В диссертационной работе исследуются также и некоторые варианты одношаговых оценок, которые могут найти применение в задачах нелинейной регрессии. Одним из общих методов получения статистических оценок является M-оценивание. С точки зрения задач нелинейной регрессии этот подход включает в себя методы наименьших квадратов, максимального правдоподобия (в регулярных случаях), квазиправдоподобия и др. В диссертации проведен подробный асимптотический анализ одношаговых M-оценок, построенных по выборке разнораспределенных наблюдений и имеющих ту же точность, что и асимптотически нормальные M-оценки. Необходимость такого исследования во многом обусловлена приложениями к задачам нелинейной регрессии. Ранее одношаговые M-оценки и, в частности, оценки Фишера были исследованы достаточно полно лишь

[36]см. сноску 25 выше.

[37]Sakhanenko A. I. On existence of explicit asymptotically normal estimators in nonlinear regression problems // Analytical Methods in Statistics (AMISTAT 2015) Springer Proceed. in Math. and Statist. 193, ed. J. Antoch, J. Jureckova, M. Maciak, M. Pesta — Springer, 2017. — P. 159–187.

в случае однородных выборок и, нередко, одномерного параметра. В этом направлении укажем работы Л. Ле Кама, Ш. Закса, Р. Серфлинга, Э. Лемана, Х. Юречковой, П. К. Сена, Н. Веравербеке, П. Янсена, С. Верилла, А. А. Боровкова, Ю. Ю. Линке, А. И. Саханенко и др.

Цели диссертационной работы. Основная цель состоит в построении универсальных относительно стохастической природы регрессоров оценок ядерного типа в задачах непараметрической регрессии, являющихся равномерно состоятельными при близких к минимальным и наглядных условиях на регрессоры, а также в получении более общих, чем ранее известные, и универсальных условий состоятельности некоторых классических ядерных оценок. Другая цель состоит в разработке методики построения явных асимптотически близких к оптимальным оценок для широкого класса моделей нелинейной регрессии в случае плотных данных. Эти оценки основаны на применении одношаговых процедур.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В регрессионном анализе, как правило, модели с фиксированными или случайными регрессорами принято рассматривать отдельно. В диссертации предложена концепция плотных данных и универсальности статистических оценок, открывающая возможность в едином подходе рассматривать ситуацию детерминированных и случайных регрессоров. В непараметрической регрессиии эта концепция реализуется как для новых классов ядерных оценок, так и известных ранее, и позволяет существенно ослабить известные ограничения на регрессоры. В задачах нелинейной регрессии предлагаемая концепция позволяет решить открытую проблему поиска явных оценок конечномерных параметров. Остановимся подробнее на полученных результатах.

• Построены универсальные относительно стохастической природы регрессоров равномерно состоятельные ядерные оценки для регрессионной функции. Предложено наглядное, близкое к минимальному и универсальное достаточное условие равномерной состоятельности оценок — условие асимптотически плотного заполнения регрессорами области задания регрессионной функции. В отличие от известных ранее результатов новое условие нечувствительно к стохастической природе регрессоров и включает в себя как ситуацию детерминированных регрессоров без дополнительного требования регулярности, так и случайных регрессоров, которые могут не удовлетворять условиям слабой зависимости.

• Построены универсальные ядерные оценки для функций среднего и ковариации случайного процесса, когда зашумленные значения независимых копий этого процесса наблюдаются в некоторых наборах точек (регрессорах), имеющих как плотную, так и разреженную структуру. Универсальные условия, накладываемые на регрессоры и гарантирующие равномерную состоятельность этих оценок, сформулированы в терминах плотных данных.

• Получены более общие, чем ранее известные, и универсальные относительно стохастической природы регрессоров условия состоятельности оценок Надарая–Ватсона и классических локально–линейных ядерных оценок в терминах плотных данных. Новые условия равномерной состоятельности этих классических ядерных оценок предполагают «более равномерное» (т.е. без резких перепадов) плотное заполнение регрессорами области задания функции, чем требуется для новых ядерных оценок, предложенных в диссертации. В отличие от известных ранее результатов, новые условия универсальны и позволяют выйти, например, за рамки слабо зависимых наблюдений, что обосновывает использование этих популярных ядерных оценок при качественном ослаблении условий на регрессоры.

• Разработаны методы построения явных α_n-состоятельных оценок конечномерных параметров в задачах нелинейной регрессии в случае плотного заполнения регрессорами некоторой области, что решает проблему поиска предварительных оценок для рассматриваемых моделей. Ранее явные оценки в задачах нелинейной регрессии были известны лишь для очень ограниченного круга моделей, и проблема построения предварительных оценок для широких классов моделей нелинейной регрессии оставалась открытой. Так что достаточно общие методы построения явных оценок в нелинейной регрессии предложены, по-видимому, впервые.

• Проведен асимптотический анализ одношаговых M-оценок, построенных по разнораспределенным выборочным данным. В такой общности в случае разнораспределенных наблюдений рассматриваемые типы одношаговых оценок исследуются впервые. Эти результаты, вместе с методами построения предварительных оценок, позволяют для широкого класса моделей нелинейной регрессии находить явные одношаговые оценки, асимптотически эквивалентные оценкам метода наименьших квадратов, квазиправдоподобия, максимального правдоподобия и др.

Методы исследования. Основными методами исследования являются общие методы теории вероятностей и математической статистики. В основе доказательств равномерной состоятельности всех изучаемых в работе непараметрических оценок лежит метод диадических цепочек[38], предложенный А.Н. Колмогоровым для оценки хвоста распределения супремальной нормы стохастического процесса с почти наверное непрерывными траекториями. Кроме того, используются методы математического анализа и линейной алгебры.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы специалистами в области математической статистики и, в частности,

[38] Ченцов Н. Н. Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода и так называемый «эвристический» подход к критериям согласия типа Колмогорова–Смирнова // Теория вероятн. и ее примен. — 1956. — Т. 1. — С. 155–161; Theory Probab. Appl. — 1956. — V. 1. — P. 140–144.

регрессионного анализа. Предлагаемые идеи, методы и подходы могут получить дальнейшее развитие в тех или иных статистических задачах и уже применяются авторами, работающими в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Международном математическом центре в Академгородке, Институте математики имени С. Л. Соболева, Новосибирском государственном университете и других научных центрах.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты, выносимые на защиту, состоят в следующем.

1. Теоремы о равномерной состоятельности новых универсальных локально–постоянных и локально–линейных ядерных оценок для регрессионной функции скалярного и векторного аргумента в условиях плотного заполнения регрессорами области задания регрессионной функции. Теоремы об асимптотической нормальности новых универсальных локально–постоянных оценок.
2. Теоремы о поточечной и равномерной состоятельности оценок Надарая–Ватсона и классических локально–линейных ядерных оценок. Универсальные достаточные условия состоятельности в терминах плотного заполнения регрессорами области задания регрессионной функции.
3. Теоремы о равномерной состоятельности новых универсальных оценок для функций среднего и ковариации непрерывного случайного процесса как в случае разреженных данных, так и плотных.
4. Новый подход получения явных состоятельных оценок конечномерных параметров в задачах нелинейной регрессии, основанный на использовании ядерных непараметрических оценок регрессионной функции. Теорема об α_n-состоятельности оценок.
5. Метод построения явных состоятельных оценок конечномерных параметров, основанный на аддитивных преобразованиях откликов. Теоремы об α_n-состоятельности и асимптотической нормальности оценок.
6. Асимптотический анализ одношаговых M-оценок, построенных по разнораспределенным выборочным данным: теорема об асимптотической нормальности одношаговых оценок в широком спектре ограничений на точность предварительной оценки, теорема о минимальном достаточном условии на точность предварительной оценки, теорема о сходимости к нормальному закону погрешностей оценивания при замене асимптотических дисперсий их оценками.
7. Алгоритм построения асимптотически эффективных одношаговых оценок неизвестного параметра в случае однородной выборки из однопараметрического семейства распределений и достаточно медленно сходящейся к параметру предварительной оценки. Теорема об асимптотической эффективности новых оценок.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

– Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ (2021, 2022, 2023);
– семинар проекта МГУ «Диалог о настоящем и будущем» (2023);
– научно–исследовательский семинар кафедры математической статистики ВМК МГУ (2024);
– Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН (2016);
– семинар по непараметрической статистике в Высшей школе экономики (2023);
– семинар «Прикладная статистика» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (2022-2024, неоднократно);
– объединенный семинар лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН и кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ (2014-2021, неоднократно);
– вторая и третья конференции Математических центров России (Москва, 2022 и Майкоп, 2023);
– научная конференция сотрудников ИМ СО РАН, посвященная подведению итогов 2022 года (Новосибирск, 2022);
– международная конференция «Limit theorems of probability theory and mathematical statistics» (Ташкент, 2022);
– международная конференция «Modern challenges of inverse problems» (Новосибирск, 2022);
– международная конференция «Марчуковские научные чтения» (Новосибирск, 2022);
– международная конференция «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017);
– международная конференция «Modern problems in theoretical and applied probability» (Новосибирск, 2016);
– международная конференция «Limit theorems in probability theory and their applications» (Новосибирск, 2011);
– международная конференция «Стохастические модели в биологии и предельные алгебры» (Омск, 2010).

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 статьях, из которых 10 — без соавторов. Все работы опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и/или Scopus, список работ приведен в конце диссертации и автореферата. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации является решающим. Все представленные в диссертации основные результаты и положения, выносимые на защиту, получены лично автором.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 — «Теория вероятностей и математическая статистика» (физико-математические науки).

Области исследований: 18. Непараметрическая статистика. 20. Линейные модели, регрессия. 23. Статистика случайных процессов и полей. 24. Анализ статистических данных.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка. Во введении приводится обзор работ по теме исследований и обсуждается содержание диссертации по главам. В первой главе рассматриваются методы ядерного сглаживания в задачах непараметрической регрессии, во второй — методы построения явных оценок в моделях нелинейной регрессии, а в третьей — асимптотические свойств одношаговых оценок. Общий объём диссертации составляет 318 страниц, библиография включает 350 наименований.

Содержание работы

Введение содержит общую характеристику диссертации, обзор работ по теме исследований и основные полученные результаты. В автореферате, как и во введении, некоторые утверждения приведены при упрощающих предположениях. Отметим, что нумерация формул, предположений и утверждений в автореферате не совпадает с нумерацией в диссертации. Всюду в дальнейшем пределы, если не оговорено иное, берутся при $n \to \infty$. По умолчанию арифметические операции рассматриваются на расширенной числовой прямой при естественных соглашениях типа $c/0 = \infty$ при $c > 0$, $c/\infty = 0$ и специальном соглашении $0/0 = 0$.

Первая глава диссертации посвящена задачам непараметрической регрессии. В разделах 1.1-1.4 рассматривается следующая регрессионная модель: даны наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ (так называемые отклики), которые представимы в виде

$$X_i = f(\mathbf{z}_i) + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где неизвестная скалярная функция $f(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in [0,1]^k$, непрерывна; ненаблюдаемые погрешности $\{\varepsilon_i\}$ являются центрированными случайными величинами; k-мерные векторы $\{\mathbf{z}_i\}$ (регрессоры) известны и могут быть как случайными, так и детерминированными. Задача состоит в том, чтобы по парам наблюдений $\{(\mathbf{z}_i, X_i);\ i = 1, \ldots, n\}$ оценить функцию f.

Напомним, что в случае одномерных регрессоров оценки Надарая–Ватсона задаются соотношением

$$\widehat{f}_{NW}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i K_h(t - z_i)}{\sum_{i=1}^n K_h(t - z_i)},$$

где $K_h(t) = h^{-1}K(h^{-1}t)$ и $K(\cdot)$ — ядерная функция (как правило, это плотность симметричного распределения с носителем $[-1,1]$ или $\mathbb{R}$), $h > 0$

— размер окна (параметр «сглаживания»). Классическая локально–полиномиальная оценка порядка p для функции f определяется как первая координата $(p+1)$-мерной точки, на которой достигается минимум

$$\min_{(a,b_1,\ldots,b_p)} \sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - a - \ldots - b_p(z_i - t)^p)^2 K_h(t - z_i).$$

Отметим, что оценки Надарая–Ватсона (т.е. классические локально–постоянные оценки) и классические локально–линейные оценки являются представителями класса локально–полиномиальных оценок соответственно порядка $p = 0$ и $p = 1$.

Перейдем к некоторым полученным результатам. Всюду далее, если не оговорено иное, будем предполагать, что регрессоры $\{\mathbf{z}_i;\, i = 1,\ldots,n\}$ в модели (1) — это наблюдаемые случайные величины со значениям в $[0,1]^k$ (вообще говоря, с неизвестными распределениями), не обязательно независимые и одинаково распределенные. Регрессоры можно рассматривать в схеме серий (т.е. они могут зависеть от n), так что данное предположение включает в себя и модели с фиксированными регрессорами. В диссертации предполагается, что функция f в модели (1) представляет собой случайный процесс с почти наверное непрерывными траекториями. Такая более общая постановка, нежели классическая, нам потребовалась для того, чтобы в качестве приложения использовать полученные результаты в задаче оценивания функций среднего и ковариации случайного процесса. Здесь для простоты будем считать, что в модели (1) функция f неслучайна.

В разделах 1.1 и 1.2 рассматривается случай $k = 1$. Обозначим через $K(t)$ плотность симметричного распределения с носителем $[-1,1]$. Считаем, что ядерная функция $K(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L \geq 1$ и $K(\pm 1) = 0$. Сохраним обозначение $K_h(t) = h^{-1}K(h^{-1}t)$ для плотности с носителем на отрезке $[-h,h]$. Элементы вариационного ряда, построенного по выборке регрессоров $\{z_i;\, i = 1,\ldots,n\}$, обозначим через $z_{n:1} \leq \ldots \leq z_{n:n}$. Положим $z_{n:0} = 0$, $z_{n:n+1} = 1$ и $\Delta z_{ni} = z_{n:i} - z_{n:i-1}$, $i = 1,\ldots,n+1$. Отклик из (1), ассоциированный с порядковой статистикой $z_{n:i}$, обозначим через X_{ni}. Определим оценку $f^*_{n,h}(t)$ для функции $f(t)$ равенством

$$f^*_{n,h}(t) = \frac{\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_{ni} K_h(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}}{\sum\nolimits_{i=1}^{n} K_h(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}}. \tag{2}$$

Заметим, что $f^*_{n,h}(t) = \arg\min_a \sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - a)^2 K_h(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}$, т.е. ядерная оценка $f^*_{n,h}(t)$, как и классическая оценка Надарая-Ватсона, является оценкой взвешенного метода наименьших квадратов и принадлежит классу локально–постоянных оценок. Но в методе наименьших квадратов предлагается использовать другие веса, определяемые порядковыми статистиками $\{z_{n:i}\}$, а исходные наблюдения X_i заменить на конкомитанты X_{ni}, ассоциированные с указанными порядковыми статистиками.

Условие на регрессоры, обеспечивающее существование равномерно состоятельной оценки в классе оценок (2), состоит в следующем:

(П1) *Имеет место предельное соотношение* $\delta_n = \max_{1\le i\le n+1} \Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0.$

Таким образом, относительно регрессоров требуется лишь, чтобы они образовывали измельчающееся разбиение области определения регрессионной функции, диаметр которого стремится к нулю по вероятности с увеличением объема выборки. На наш взгляд, условие вида (П1) весьма наглядно и по сути является необходимым для восстановления регрессионной функции. Очевидно, что неслучайные регрессоры, регулярно заполняющие [0,1], удовлетворяют условию (П1). Если $\{z_i\}$ независимы и одинаково распределены, а отрезок [0,1] является носителем их общего распределения, то условие (П1) также выполнено. Если $\{z_i\}$ — стационарная последовательность с условием α-перемешивания и маргинальным распределением с носителем [0,1], то условие (П1) также выполнено. Все другие известные в литературе формы зависимости регрессоров также влекут за собой условие (П1). Понятно, что выполнение этого условия вполне возможно и для существенно более сильной формы зависимости наблюдений.

Пример 1 (Примеры 1.1. и 1.2). Пусть последовательность $\{z_i;\, i\ge 1\}$ определяется соотношением $z_i = \nu_i U_i^l + (1-\nu_i)U_i^r$, где $\{U_i^l\}$ и $\{U_i^r\}$ независимы в совокупности и равномерно распределены на [0,1/2] и [1/2,1] соответственно, последовательность $\{\nu_i\}$ не зависит от $\{U_i^l\}$, $\{U_i^r\}$ и состоит из бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха 1/2, а зависимость между ними при любом натуральном i определяется равенствами $\nu_{2i-1} = \nu_1$, $\nu_{2i} = 1-\nu_1$. Нетрудно видеть, что $\{z_i;\, i \ge 1\}$ образуют стационарную последовательность случайных величин, равномерно распределенных на отрезке [0,1], при этом при всех натуральных m и n выполнено $\mathbb{P}(z_{2m}\le 1/2, z_{2n-1}\le 1/2) = 0$. Таким образом, наиболее популярные условия слабой зависимости случайных величин (различные виды перемешивания, асимптотическая некоррелируемость и др.) не выполнены. Тем не менее, последовательность $\{z_i;\, i\ge 1\}$ удовлетворяет условию (П1). Определим теперь бернуллиевские переключатели иначе: $\nu_j = 1-\nu_1$ при $j = 2^{2k-1},\ldots,2^{2k}-1$ и $\nu_j = \nu_1$ при $j = 2^{2k},\ldots,2^{2k+1}-1$, где $k = 1,2,\ldots$ (т.е. мы разыгрываем, в какой из отрезков бросаем наудачу первую точку, и далее чередуем количество бросаний на каждый из двух указанных отрезков следующим образом: 2, 4, 8, 16 и т.д.). В этом случае $\{z_i\}$ — нестационарная последовательность, не удовлетворяющая закону больших чисел, при этом условие (П1) также выполнено. $\square$

Чтобы сформулировать основной результат раздела 1.1, нам потребуется следующее ограничение на погрешности в модели (1): при всех $n\ge 1$ случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ при всех $i,j\le n$ и $i\ne j$ с вероятностью 1 удовлетворяют условиям $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\varepsilon_i = 0$, $\sup_{i\le n}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\varepsilon_i^2 \le \sigma^2 < \infty$, $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$, где константа $\sigma^2 > 0$ не зависит от n, а символ $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}$ обозначает условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной набором $\{z_i;\, i \le n\}$. В приведенных условиях справедлива [39]

Теорема 1 (Теорема 1.1). *Для любого фиксированного $h \in (0{,}1/2)$ с вероятностью 1 выполнено*

$$\sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| \le \omega_f(h) + \zeta_n(h), \tag{3}$$

где $\omega_f(h) = \sup_{t,s\in[0,1]:|t-s|\le h} |f(t) - f(s)|$, а случайная величина $\zeta_n(h)$ такова, что

$$\mathbb{P}\left(\zeta_n(h) > y\right) \le C\sigma^2 L^2 y^{-2} h^{-2} \mathbb{E}\delta_n + \mathbb{P}(\delta_n > h/(8L)),$$

и C есть абсолютная положительная константа.

Если выполнено (П1), то[40] $\zeta_n(h) = O_p\big((\sigma+1)Lh^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2}\big)$ и в качестве размера окна $h = h_n$ можно взять, например, решение уравнения $h^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = \omega_f(h)$, которое уравнивает порядки малости обоих слагаемых в правой части (3). Следствием теоремы 1 является следующая теорема о равномерной состоятельности новых ядерных оценок.

Теорема 2 (Следствие 1.1). *Пусть выполнено условие* (П1) *и $\mathcal{C}$ есть произвольное подмножество равностепенно непрерывных функций в $C[0{,}1]$. Тогда в условиях теоремы* 1

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \sup_{f\in\mathcal{C}} \sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h_n}(t) - f(t)| \xrightarrow{p} 0,$$

где h_n есть решение уравнения $h_n^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = \omega_f^{\mathcal{C}}(h_n)$ при $\omega_f^{\mathcal{C}}(h) = \sup_{f\in\mathcal{C}} \omega_f(h)$. Кроме того, выполнено $\gamma_n(\mathcal{C}) = O_p\big((\sigma+1)L\omega_f^{\mathcal{C}}(h_n)\big)$.

Например, если $\mathbb{E}\delta_n = O(1/n)$ и $\mathcal{C}$ состоит из функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0{,}1]$ и универсальной константой, то $h_n = O\big(n^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}\big)$ и $\omega_f^{\mathcal{C}}(h_n) = O\big(n^{-\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\big)$. В частности, если функции из $\mathcal{C}$ удовлетворяют условию Липшица ($\alpha = 1$) с универсальной константой, то $\gamma_n(\mathcal{C}) = \widetilde{O}_p(n^{-1/4})$.

Следующее утверждение об асимптотической нормальности может быть полезно при построении доверительных интервалов для значений регрессионной функции f. Положим $J_{n,h}(t) = \sum_{i=1}^n K_h(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}$,

$$r_{n,h}(t) = J^{-1}_{n,h}(t) \sum_{i=1}^n (f(z_{n:i}) - f(t)) K_h\left(t - z_{n:i}\right),$$

$$B^2_{n,h}(t) = J^{-2}_{n,h}(t) \sum_{i=1}^n K_h^2\left(t - z_{n:i}\right)(\Delta z_{ni})^2.$$

[39] Формально в теореме 1 не требуется выполнение условия (П1), но оценки, полученные в теореме, становятся, на наш взгляд, содержательными лишь в этом случае.

[40] Запись $\zeta_n = O_p(\eta_n)$ означает, что для некоторой величины $\eta_n > 0$ (возможно, случайной) и всех чисел $M > 0$ выполнено $\limsup \mathbb{P}(|\zeta_n|/\eta_n > M) \le \beta(M)$, где функция $\beta(M)$ не зависит от параметров рассматриваемой модели и $\lim_{M\to\infty} \beta(M) = 0$. Символ $\widetilde{O}_p(\eta_n)$ будет использоваться в случае, если функция $\beta(M)$ не зависит от n (но может зависеть от других параметров модели).

Теорема 3 (см. теорему 1.2). *Пусть погрешности* $\{\varepsilon_i\}$ *независимы и одинаково распределены, не зависят от регрессоров* $\{z_i\}$, $\mathbb{E}\varepsilon_1 = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2$, $\mathbb{E}|\varepsilon_1|^3 < \infty$. *Кроме того, выполнены условия на ядро из теоремы* 1, *условие* (П1), *и при некотором* $t \in [0,1]$ *и* $h \equiv h_n$ *имеет место соотношение* $\max_{k\le n} K_h^2(t - z_{n:k})(\Delta z_{nk})^2 \left(\sum_{j=1}^n K_h^2(t - z_{n:j})(\Delta z_{nj})^2\right)^{-1} \xrightarrow{p} 0$. *Тогда* $B_{n,h}^{-1}(t)\left(f_{n,h}^*(t) - f(t) - r_{n,h}(t)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.[41]

Сравним в среднеквадратичном смысле новые универсальные локально–постоянные оценки и классические локально–постоянные оценки (оценки Надарая–Ватсона) в следующей простейшей ситуации: регрессоры $\{z_i\}$ независимы, одинаково распределены и не зависят от $\{\varepsilon_i\}$, погрешности $\{\varepsilon_i\}$ независимы, одинаково распределены, центрированы, $0 < \mathbb{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$, а функция распределения $F(t)$ случайной величины z_1 имеет непрерывно дифференцируемую положительную на $(0,1)$ плотность $p(t)$. Положим $\kappa_2 = \int_{-1}^1 u^2K(u)du$, $\|K\|^2 = \int_{-1}^1 K^2(u)du$. Хорошо известен следующий результат, связанный с асимптотическим поведением смещения и дисперсии оценок Надарая–Ватсона $\widehat{f}_{NW}(t)$.

Предложение 1 (Предложение 1.1; Rosenblatt, 1969). *Если* $n \to \infty$ *и* $h \to 0$ *так, что* $h^3 n \to \infty$, *то для любого* $t \in (0,1)$

$$\mathbb{E}\widehat{f}_{NW}(t) - f(t) = \frac{h^2\kappa_2}{2p(t)}\left(f''(t)p(t) + 2f'(t)p'(t)\right) + o(h^2),$$

$$\mathbb{D}\widehat{f}_{NW}(t) \sim \frac{\sigma^2}{hnp(t)}\|K\|^2.$$

Асимптотическое представление соответствующих величин для новой ядерной оценки $f_{n,h}^*(t)$ содержится в следующем утверждении.

Предложение 2 (Предложение 1.2). *Если* $\inf_{t\in[0,1]} p(t) > 0$, *при этом* $n \to \infty$ *и* $h \to 0$ *так, что* $h\sqrt{n}/\log n \to \infty$, $h^{-2}\mathbb{E}\delta_n \to 0$ *и* $h^{-3}\mathbb{E}\delta_n^2 \to 0$, *то при любом* $t \in (0,1)$

$$\mathbb{E}f_{n,h}^*(t) - f(t) = \frac{h^2\kappa_2}{2}f''(t) + o(h^2), \qquad \mathbb{D}f_{n,h}^*(t) \sim \frac{2\sigma^2}{hnp(t)}\|K\|^2.$$

Приведенный асимптотический анализ показывает, что в рассматриваемых условиях дисперсия оценки Надарая–Ватсона $\widehat{f}_{NW}(t)$ асимптотически в два раза меньше дисперсии новой оценки $f_{n,h}^*(t)$. Но за счет разницы в смещениях, асимптотически определяемых величинами $f''(t)p(t) + 2f'(t)p'(t)$ и $f''(t)p(t)$ соответственно, среднеквадратичная погрешность новой оценки может быть меньше, чем среднеквадратичная погрешность оценки Надарая–Ватсона. Так, если σ не сильно велико и справедливо неравенство $|f''(t)p(t) + 2f'(t)p'(t)| > |f''(t)p(t)|$, то оценка

[41] Запись вида $\zeta_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ означает слабую сходимость распределений ζ_n к нормальному закону с соответствующими параметрами.

$f^*_{n,h}(t)$ может быть точнее, чем $\widehat{f}_{NW}(t)$. В противоположной ситуации точнее оценка Надарая–Ватсона $\widehat{f}_{NW}(t)$. Указанный эффект подтверждают результаты компьютерного моделирования (см. раздел 1.1.5). Отметим, что коэффициент 2 в асимптотическом представлении для дисперсии новой оценки может быть уменьшен до 1.5, если в определении оценки $f^*_{n,h}(t)$ использовать иной вариант разбиения с отмеченными точками (разбиение Вороного; см. подробности в замечании 1.15).

В разделе 1.2 предложен и исследуется второй класс новых универсальных оценок, относящихся к локально–линейным. Эти оценки проще всего определить как первую координату вектора, на котором достигается минимум $\min_{(a,b)}\sum_{i=1}^{n}(X_{ni}-a-b(t-z_{n:i}))^2K_h(t-z_{n:i})\Delta z_{ni}$, где величины $z_{n:i}$, Δ_{ni} и X_{ni} введены выше перед формулой (2). Универсальные локально–линейные оценки имеют близкие свойства с универсальными локально-постоянными оценками, определенными в (2). В частности, равномерную состоятельность оценок в обоих случаях обеспечивает условие (П1). Качественное отличие этих двух новых классов оценок наблюдается, например, в окрестностях граничных точек 0 и 1: для оценки $f^*_{n,h}(t)$ в h-окрестностях указанных точек порядок малости смещения h, а для универсальной локально–линейной оценки — порядок h^2.

В разделе 1.3 получены обобщения некоторых результатов разделов 1.1 и 1.2 на случай оценивания случайной вещественнозначной регрессионной функции нескольких переменных (случайного поля). Пусть в модели (1) произвольное $k\geq 1$ фиксировано. Для простоты считаем, что регрессоры $\{\mathbf{z}_i, i\leq n\}$ попарно различны. В этом случае относительно этого набора предполагается выполненным следующее условие (см. предположение (D_2) и замечание 1.16).

(П2) *Для каждого n существует такое разбиение k-мерного куба $[0,1]^k$ на n измеримых по Жордану подмножеств $\{\mathcal{P}_i,\ i\leq n\}$, что каждый элемент этого разбиения содержит ровно по одной точке из набора $\{\boldsymbol{z}_i;\, i\leq n\}$ (нумерация элементов разбиения такова, что $\boldsymbol{z}_i\in\mathcal{P}_i$), при этом $\delta_n=\max_{i\leq n}d(\mathcal{P}_i)\xrightarrow{p}0$, где $d(A)=\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ – диаметр множества, $\|\cdot\|$ — супремальная норма в $\mathbb{R}^k$.*

Условие (П2) означает, что случайные величины $\{\mathbf{z}_i, i\leq n\}$ образуют ε-сеть множества $[0,1]^k$ при $\varepsilon=\delta_n$ с условием $\delta_n\xrightarrow{p}0$. Один из двух вариантов новых универсальных оценок для функции f определяется равенством

$$f^*_{n,h}(\mathbf{t})=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iK_h(\mathbf{t}-\mathbf{z}_i)\Lambda_k(\mathcal{P}_i)}{\sum_{i=1}^{n}K_h(\mathbf{t}-\mathbf{z}_i)\Lambda_k(\mathcal{P}_i)},\tag{4}$$

где $\{\mathcal{P}_i\}$ есть разбиение множества $[0,1]^k$, введенное в условии (П2), $K_h(\mathbf{s})=h^{-k}K(h^{-1}\mathbf{s})$ и $K(\mathbf{s})$, $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^k$ — ядерная функция, $\Lambda_k(\cdot)$ здесь и далее обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^k$. Нетрудно видеть, что $f^*_{n,h}(\mathbf{t})=$

$\arg\min_a \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 K_h(\mathbf{t} - \mathbf{z}_i)\Lambda_k(\mathcal{P}_i)$, так что предлагаемые оценки относятся к классу локально–постоянных, но с некоторыми иными весами, нежели в классическом варианте. Эти веса задаются мерой Лебега элементов некоторого конечного случайного разбиения выборочного пространства регрессоров, введенного в (П2), и позволяют нам образовать конструкцию кратных интегральных сумм Римана в структуре предлагаемых ядерных оценок. Указанное разбиение с отмеченными точками можно построить, например, методом последовательных покоординатно-медианных сечений или с помощью мозаики Вороного (см. раздел 1.3).

В диссертации доказана равномерная состоятельность и асимптотическая нормальность оценок $f^*_{n,h}(\mathbf{t})$. Остановимся подробнее на первом свойстве оценок. Относительно ядра будем считать, что функция $K(\mathbf{s})$ является плотностью распределения с носителем $[-1,1]^k$, удовлетворяет условию Липшица с константой $L \geq 1$ и $K(-\mathbf{s}) = K(\mathbf{s})$. Кроме того, существуют константы $\rho > 0$ и $h_0 \in (0,1]$ такие, что $\int_{[0,1]^k} K_h(\mathbf{t} - \mathbf{x})\,\Lambda_k(\mathbf{dx}) \geq \rho$ при всех $\mathbf{t} \in [0,1]^k$ и $0 < h \leq h_0$. Предполагается, что погрешности $\{\varepsilon_i\}$ не зависят от $\{\mathbf{z}_i\}$ и при всех $n \geq 1$ случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ образуют последовательность мартингал-разностей с условием $M_p = \sup_{i \leq n} \mathbb{E}|\varepsilon_i|^p < \infty$ при некотором $p > k$ и $p \geq 2$, где M_p не зависит от n. В приведенных условиях справедлива

Теорема 4 (см. теорему 1.4). *Для любого фиксированного* $h \in (0,h_0)$ *с вероятностью* 1 *выполнено*

$$\sup_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^k} |f^*_{n,h}(\boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{t})| \leq \omega_f(h) + \zeta_n(h), \tag{5}$$

где $\omega_f(h)$ *— модуль непрерывности* f, *а случайная величина* $\zeta_n(h) > 0$ *такова, что*

$$\mathbb{P}\left(\zeta_n(h) > y\right) \leq C\rho^{-p} M_p L^p y^{-p} h^{-k(p/2+1)} \mathbb{E}(\delta_n^{kp/2}) + \\ \mathbb{P}(\delta_n > h + \min\{1, \rho(k2^{k+1}L)^{-1}\});$$

константа C *зависит от* k *и* p.

В следующем утверждении (теореме о равномерной состоятельности оценок) величина h_n выбирается так, чтобы минимизировать по h порядок малости правой части соотношения (5).

Теорема 5 (Следствие 1.5). *Пусть* $\mathcal{C}$ *— множество равностепенно непрерывных функций из пространства* $C\big([0,1]^k\big)$. *Тогда в условиях теоремы* 4

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \sup_{f \in \mathcal{C}} \sup_{\boldsymbol{t} \in [0,1]^k} |f^*_{n,h_n}(\boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{t})| \xrightarrow{p} 0,$$

где h_n *определяется как решение уравнения* $\mathbb{E}(\delta_n^{kp/2}) = h^{k(p/2+1)}\big(\omega_f^{\mathcal{C}}(h)\big)^p$ *при* $\omega_f^{\mathcal{C}}(h) = \sup_{f \in \mathcal{C}} \omega_f(h)$. *Кроме того,* $\gamma_n(\mathcal{C}) = \widetilde{O}_p(\omega_f^{\mathcal{C}}(h_n))$.

Второй класс новых оценок, исследуемых в работе, — универсальные локально–линейные оценки. Эти оценки можно определить как первую координату $(k+1)$-мерного вектора, на котором достигается минимум

$$\min_{a,\mathbf{b}} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left(X_i - \left(a + \mathbf{b}^\top(\mathbf{t} - \mathbf{z}_i)\right)\right)^2 K_h(\mathbf{t} - \mathbf{z}_i)\Lambda_k(\mathcal{P}_i).$$

Явное представление для этих оценок, требующее введения матричных обозначений, а также аналоги теорем 4 и 5, мы опускаем. Отметим лишь, что единственное условие на регрессоры $\{\mathbf{z}_i\}$, гарантирующее существование равномерно состоятельных оценок в данном классе — это условие (П2) плотного заполнения регрессорами области определения функции f.

В разделе 1.4 исследуются оценки Надарая–Ватсона и классические локально–линейные оценки. Цель данного раздела — ослабить известные ограничения на регрессоры, гарантирующие состоятельность (в смысле как поточечной, так и равномерной сходимости по вероятности) указанных популярных ядерных оценок, а также реализовать для этих оценок идеи об универсальных условиях на регрессоры в терминах плотных данных. Доказано, что рассматриваемые классические ядерные оценки могут быть равномерно состоятельными не только в вышеуказанных в обзоре случаях зависимости, но и для существенно иной корреляции наблюдений, когда не выполняются условия эргодичности или стационарности, а также классические условия перемешивания и другие известные условия слабой зависимости. Каким образом удалось достичь этих целей? При изучении, например, асимптотических свойств оценки Надарая–Ватсона, нередко принято отдельно исследовать асимптотическое поведение числителя и знаменателя дроби, определяющей эту оценку[42]. При этом в ситуации случайных регрессоров используются, как правило, те или иные формы предельных теорем, что и объясняет известные в литературе условия на корреляцию наблюдений. Оказывается, если указанную дробь исследовать «в целом» как аддитивную статистику с нормированными весами и при этом для вывода равномерной состоятельности вместо оценок в теоремах типа Гливенко–Кантелли использовать метод диадических цепочек, то условия на регрессоры удается получить лишь в терминах асимптотического поведения числа регрессоров, попавших в ту или иную окрестность точек из области задания функции f.

Приведем результаты раздела 1.4, связанные с состоятельностью оценок Надарая–Ватсона, при этом для простоты рассмотрим модель (1) при $k = 1$. Сохраним обозначение $K(t)$ для плотности симметричного распределения с носителем $[-1,1]$, при этом $\sup_{t\in[0,1]} K(t) \le L < \infty$ и существует положительное $\delta \le 1$ такое, что $\inf_{|t|\le\delta} K(t) \ge l > 0$. Кроме того, относительно погрешностей $\{\varepsilon_i\}$ выполнено условие, введенное

[42]Надарая Э. А. Замечания о непараметрических оценках плотности вероятности и кривой регрессии // Теория вероятн. и ее примен. — 1970. — Т. 15, № 1. — С. 134–137.

перед теоремой 1. Для любых $z_1,\dots,z_n$, $h \in (0,1)$ и $t \in [0,1]$ положим $N_{n,h}(t) = \{i : |t - z_i| \le h, 1 \le i \le n\}$. Обозначим через $\#(\cdot)$ стандартную считающую меру. Нам также потребуется условие

(П3) При всех фиксированных $t \in [0,1]$ и $h \in (0,1)$ имеет место предельное соотношение $\#(N_{n,h}(t)) \xrightarrow{p} \infty$.

В приведенных условиях (за исключением (П3)) справедлива

Теорема 6 (Следствие 1.7). *Для любого $h \in (0,1)$ и любого $t \in [0,1]$ с вероятностью 1 выполнено*

$$\widehat{f}_{NW}(t) - f(t) = O_p\left(\omega_f(h) + \frac{\sigma\sqrt{L}}{\sqrt{l\#(N_{n,\delta h}(t))}}\right).$$

Следствием теоремы 6 является следующее утверждение о состоятельности оценок Надарая–Ватсона.

Теорема 7 (Следствие 1.8). *Если в условиях теоремы 6 выполнено* (П3), *то существует последовательность $h = h_n \to 0$, для которой при всех $t \in [0,1]$ имеет место предельное соотношение $\widehat{f}_{NW}(t) \xrightarrow{p} f(t)$.*

Отметим, что условие (П3), обеспечивающее *поточечную* состоятельность оценок Надарая–Ватсона, эквивалентно условию (П1), гарантирующему *равномерную* состоятельность новых универсальных оценок.

Рассмотрим теперь вопрос о равномерной состоятельности оценок Надарая–Ватсона. Нам потребуется следующее ограничение.

(П4) *При всех $h \in (0,1)$ имеет место сходимость*

$$\Delta_{n,h} = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\sup_{|s|\le h} \#^3(N_{n,h}(t+s))}{\#^4(N_{n,\delta h}(t))} \xrightarrow{p} 0.$$

Теорема 8 (Теорема 1.10). *Пусть в условиях теоремы 6 функция $K(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0,1)$ и $\sup_{t\in[0,1]} |K'(t)| \le L < \infty$. Тогда для любого фиксированного $h \in (0,1)$ с вероятностью 1 выполнено*

$$\sup_{t\in[0,1]} |\widehat{f}_{NW}(t) - f(t)| \le \omega_f(h) + \zeta_n(h),$$

где $\omega_f(\cdot)$ — модуль непрерывности функции f, а $\zeta_n(h)$ есть последовательность положительных случайных величин, удовлетворяющих соотношению $\zeta_n(h) = O_p\left(\sigma(L/l)^2\sqrt{\Delta_{n,h}h^{-1}}\right)$.

Теорема 9 (Следствие 1.10). *Если в условиях теоремы 8 выполнено предположение* (П4), *то существует последовательность $h = h_n \to 0$, для которой $\sup_{t\in[0,1]} |\widehat{f}_{NW}(t) - f(t)| \xrightarrow{p} 0$.*

Таким образом, условие (П4) — это единственное ограничение на регрессоры $\{z_i\}$, обеспечивающее равномерную состоятельность оценок Надарая–Ватсона. В частности, условие (П4) выполнено, если

$$\Delta'_{n,h} = \sup_{t\in[0,1]} \#^3(N_{n,h}(t)) \left(\inf_{t\in[0,1]} \#^4(N_{n,\delta h}(t))\right)^{-1} \xrightarrow{p} 0.$$

В широких условиях величина $\#(N_{n,h}(t))$ имеет порядок (в известном смысле) nh. Например, в случае независимых одинаково распределенных регрессоров с распределением z_1, имеющим ограниченную и отделенную от нуля на отрезке [0,1] плотность, а также в случае, когда регрессоры удовлетворяют условию φ-перемешивания. Аналогичная оценка в широких условиях справедлива, например, для неслучайных регулярных регрессоров, а также для последовательностей сильно зависимых случайных величин, построенных в примере 1. Для указанных $\{z_i\}$ величина $\Delta'_{n,h}$ имеет порядок $O((hn)^{-1})$, что гарантирует выполнение (П4). Сравнивая условия (П1) и (П4) отметим, что условие (П4) по сути предполагает «более равномерное» плотное заполнение регрессорами области определения регрессионной функции, нежели требуется в условии (П1)(см. пример 2 далее). Полезно также отметить, что результаты компьютерного моделирования, приведенные в разделах 1.1–1.3, показывают, что новые оценки в тех или иных ситуациях могут быть в известном смысле точнее классических аналогов (оценок Надарая–Ватсона и локально–линейных оценок).

Пример 2. (см. пример 1.18). Пусть для последовательности $\{z_i\}$ из примера 1 бернуллиевские случайные величины ν_i для любого i задаются равенствами $\nu_{[e^k]} = \nu_1$ при $k \geq 1$ и $\nu_i = 1 - \nu_1$ при всех $i \neq [e^k]$, $k \geq 1$ (т.е. мы разыгрываем на какой из отрезков [0,1/2] или [1/2,1] бросаем наудачу первую точку, а далее чередуем количество бросаний таким образом, чтобы с вероятностями $1/2$ в один из отрезков попадало порядка $\log n$ точек, а в другой — остальные). Можно показать, что в этом случае нестационарная последовательность $\{z_i\}$ не удовлетворяет закону больших чисел, при этом условие (П4) здесь не выполнено, но выполнено условие (П1). $\square$

Раздел 1.5 посвящен оцениванию некоторых характеристик случайного процесса. Постановка задачи следующая. Пусть $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — это независимые копии некоторого почти наверное непрерывного случайного процесса $f(t)$, определенного на [0,1]. Задача состоит в оценивании функций среднего $\mu(t) = \mathbb{E}f(t)$ и ковариации $\psi(t,s) = \mathbb{C}ov\{f(t),f(s)\}$, когда сами случайные функции $\{f_i(t), i = 1, \ldots ,n\}$ нам неизвестны и мы наблюдаем лишь зашумленные их значения в некотором известном наборе точек (вообще говоря, своем для каждой из этих функций). Обозначим через X_{ij} зашумленное значение i-ой функции $f_i(t)$ при $t = Z_{ij}$, $j = 1, \ldots , m_i$. Таким образом, нам даны пары наблюдений $\{(Z_{ij},X_{ij}),\ i = 1, \ldots n,\ j = 1, \ldots ,m_i\}$ со следующей структурой:

$$X_{ij} = f_i(Z_{ij}) + \varepsilon_{ij}, \qquad i = 1, \ldots ,n, \quad j = 1, \ldots , m_i, \tag{6}$$

где $\{\varepsilon_{ij}\}$ — ненаблюдаемые случайные погрешности, величины $\{Z_{ij}\}$ известны и могут быть как случайными, так и детерминированными.

Решению данной задачи посвящена обширная литература (см. библиографические ссылки во введении диссертации). Как и в классической постановке задачи непараметрической регрессии (1), модели (6) со случайными или детерминированными регрессорами принято рассматривать отдельно. Кроме того, данные в модели (6) нередко подразделяются на те или иные типы в зависимости от количества наблюдений для той или иной копии случайного процесса. В литературе основное внимание уделяется двум противоположным типам данных: разреженным или плотным (в англоязычной литературе *dense* и *sparse* соответственно). Данные принято относить к разреженным либо когда количество наблюдений в каждой серии неслучайно и равномерно ограничено, т.е. $\max_{1\le i\le n} m_i \le c$ и константа c не зависит от n, либо когда m_i случайны и являются независимыми копиями положительной целочисленной случайной величины. К плотным данным относят случаи, когда $\min_{1\le i\le n} m_i \ge m(n) \to \infty$. Методологии оценивания, используемые для плотных или разреженных данных, как правило, различны. В ситуации плотных данных естественно предварительно оценить случайный процесс в каждой серии, а затем провести усреднение по всем сериям. Для разреженных данных такой способ построения оценки не будет работать в силу недостаточности информации, относящейся к той или иной серии.

В диссертации предложены новые универсальные классы равномерно состоятельных оценок ядерного типа для функций среднего и ковариации как в случае разреженных, так и плотных данных. В отличие от работ предшественников, мы не накладываем на регрессоры общепринятых условий регулярности или независимости, предлагаемые условия нечувствительны к характеру корреляции регрессоров как внутри серии, так и между сериями. Так, при оценивании функции среднего в случае разреженных данных относительно регрессоров лишь требуется, чтобы вся их совокупность из всех серий с ростом объема наблюдений с высокой вероятностью образовывала измельчающееся разбиение отрезка [0,1] — области определения случайного процесса, а для плотных данных подобное условие должно быть выполнено для набора регрессоров каждой из серий.

Перейдем к некоторым результатам. Считаем, что в модели (6) набор $\{Z_{ij}\ i=1,\dots n,\ j=1,\dots,m_i\}$ состоит из наблюдаемых случайных величин со значениями в [0,1] и, вообще говоря, с неизвестными распределениями, при этом не обязательно независимых или одинаково распределенных. Для каждого i случайные величины i-й серии $\{Z_{ij},\ j=1,\dots,m_i\}$ могут зависеть от m_i (если m_i неслучайно) и n.

Рассмотрим сначала более сложную ситуацию — случай разреженных данных. Будем предполагать, что случайные функции $\{f_i(t)\}$ не зависят от $\{Z_{ij}\}$ и $\sup_{t\in[0,1]} \mathbb{D} f_1(t) \le \sigma_f^2 < \infty$. Ограничения на ядро K здесь те же, что и в теореме 1.

Определим оценку для функции среднего $\mu(t)$. Пусть случайные величины $\{m_i\}$ (не обязательно независимые или одинаково распределенные) не зависят от $\{f_i(t)\}$ и $\{Z_{ij}\}$, а также не зависят от n. Положим $N = m_1 + \ldots + m_n$ и по выборке $\{Z_{ij};\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m_i\}$ образуем вариационный ряд, элементы которого обозначим через $Z_{N:1} \le \ldots \le Z_{N:N}$. Пусть $N = lr + s$, где l, r и s — целые, r неслучайно, а случайные величины l и s таковы, что $1 \le s < r$ почти наверное. Считаем, что $r = r(n) \to \infty$

и $r = o(n)$, так что $l = l(n) \geq n/r$ также неограниченно возрастает с ростом n. Положим $Z_{N:0} = 0$, $Z_{N:N+1} = 1$, $\Delta Z_{Nl} = Z_{N:N+1} - Z_{N:r(l-1)}$, $\Delta Z_{Nk} = Z_{N:rk} - Z_{N:r(k-1)}$, $k = 1,\ldots,l-1$. Определим теперь множества $H_1 = \{(i,j):\ Z_{ij} \in [Z_{N:0},\, Z_{N:r}]\}$, $H_k = \{(i,j):\ Z_{ij} \in (Z_{N:r(k-1)},\, Z_{N:rk}]\}$, $k = 2,\ldots,l$, и введем обозначения $\overline{X}_k = r^{-1}\sum_{(i,j)\in H_k} X_{ij}$ при $k = 1,\ldots,l-1$, $\overline{X}_l = (r+s)^{-1}\sum_{(i,j)\in H_l} X_{ij}$. Оценка для функции $\mu(t)$ задается равенством

$$\widehat{\mu}_1(t) = \frac{\sum_{k=1}^{l} \overline{X}_k K_h(t - Z_{N:rk})\Delta Z_{Nk}}{\sum_{k=1}^{l} K_h(t - Z_{N:rk})\Delta Z_{Nk}}.$$

Относительно погрешностей считаем, что случайные величины $\{\varepsilon_{ij};\, i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m_i\}$ при всех i,j, а также $(i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)$, с вероятностью 1 удовлетворяют следующим условиям: $\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{ij} = 0$, $\max_{i,j}\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{ij}^2 \leq \sigma_\varepsilon^2$, $\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} = 0$, где константа $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ не зависит от n, символ $\mathbb{E}_{\mathcal{F}}$ обозначает условное математическое ожидание при фиксации σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденной случайными величинами $\{Z_{ij};\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m_i\}$ и $\{m_i, i = 1,\ldots,n\}$. В приведенных условиях справедлива

Теорема 10 (см. теорему 1.13). *Для любого фиксированного $h \in (0,1/2)$ с вероятностью 1 выполнено*

$$\sup_{t\in[0,1]} |\widehat{\mu}_1(t) - \mu(t)| \leq \omega_\mu(h) + \omega_\mu(\delta_l) + \zeta_{l,r,h} + \eta_{l,r},$$

где $\delta_l = \max_{1\leq k\leq l}\Delta Z_{Nk}$, $\omega_\mu(\cdot)$ — модуль непрерывности функции $\mu(t)$, а случайные величины $\zeta_{l,r,h}$ и $\eta_{l,r}$ таковы, что

$$\mathbb{P}\big(\zeta_{l,r,h} > y, \delta_l \leq h/(8L)\big) \leq C\sigma_\varepsilon^2 L^2 y^{-2} r^{-1} h^{-2}\mathbb{E}\delta_l,$$
$$\mathbb{P}(\eta_{l,r} > y) \leq 2\sigma_f^2 M^3 n r^{-2} y^{-2} + \mathbb{P}\big(\max_{i\leq n} m_i > M\big);$$

здесь $C > 0$ — абсолютная постоянная, а M — произвольное положительное число.

Из теоремы 10 вытекает, что условие на регрессоры, гарантирующее в случае разреженных данных существование равномерно состоятельной оценки для функции среднего, состоит в следующем: $\delta_l \xrightarrow{p} 0$ с ростом n. Теорема 10 универсальна и относительно стохастической природы величин $\{m_i\}$ — количества наблюдений по сериям. Если $\delta_l \xrightarrow{p} 0$ и выполнены все ограничения, введенные перед теоремой 10, то имеют место следующие два утверждения, включающие в себя оба популярных варианта разреженных данных, рассматриваемых в работах предшественников.

Теорема 11 (Следствие 1.15). *Пусть $\{m_i\}$ случайны и являются независимыми копиями положительной целочисленной случайной величины, $\mathbb{E}m_1^\alpha < \infty$ при некотором $\alpha > 3$ и $h \to 0$, $r^{-1}h^{-2}\mathbb{E}\delta_l \to 0$, $\mathbb{P}(\delta_l > h/(8L)) \to 0$, $n^{(3+\alpha)/(2\alpha)}r^{-1} \to 0$. Тогда $\sup_{t\in[0,1]}|\widehat{\mu}_1(t) - \mu(t)| \xrightarrow{p} 0$.*

Теорема 12 (Следствие 1.17). *Пусть величины* $\{m_i\}$ *неслучайны,* $\max_{i\le n} m_i \le c$ *для некоторой константы* c, *не зависящей от* n, *и* $h \to 0$, $r^{-1}h^{-2}\mathbb{E}\delta_l \to 0$, $\mathbb{P}(\delta_l > h/(8L)) \to 0$, $l/r \to 0$. *Тогда* $\sup\limits_{t\in[0,1]} |\widehat{\mu}_1(t) - \mu(t)| \xrightarrow{p} 0$.

Определим теперь в случае разреженных данных оценку для второго смешанного момента $\varphi(t,s) = \mathbb{E}f_1(t)f_1(s)$. Пусть $\{m_i\}$ неслучайны, $m_i \ge 2$ при всех i и $\max_{i\le n} m_i \le c$, где константа c не зависит от n. Положим $\widetilde{N} = \widetilde{N}(n) = m_1(m_1-1)+\ldots+m_n(m_n-1)$. Без ограничения общности считаем, что $\widetilde{N} = \tilde{l}\times\tilde{r}$, где $\tilde{l}$ и $\tilde{r}$ — целые, при этом $\tilde{l} = \tilde{l}(n) \to \infty$ $\tilde{r} = \tilde{r}(n) \to \infty$. Пусть случайные погрешности $\{\varepsilon_{ij}\}$ независимы, одинаково распределены и не зависят от $\{Z_{ij}\}$ и $\{f_i(\cdot)\}$, при этом $\mathbb{E}\varepsilon_{11} = 0$, $\mathbb{E}|\varepsilon_{11}|^p < \infty$ при некотором $p > 2$. Кроме того, $\mathbb{E}\sup_{t\in[0,1]} |f_1(t)|^p < \infty$, $\sup_{t\in[0,1]} \mathbb{D}f_1^2(t) < \infty$. Относительно регрессоров предполагается выполненным следующее несколько более сильное предположение, нежели используемое выше условие плотного заполнения всей совокупностью точек $\{Z_{ij}\}$ отрезка $[0,1]$.

(П5) *Все точки из набора* $\{(Z_{ij_1},Z_{ij_2}), 1 \le j_1 \ne j_2 \le m_i, i = 1,\ldots,n\}$ *попарно различны и для каждого* $\widetilde{N}$ *существует случайное разбиение множества* $[0,1]^2$ *на* $\tilde{l}$ *измеримых по Жордану подмножеств* $\{\mathcal{P}_k;\ k = 1,\ldots,\tilde{l}\}$ *таких, что каждое подмножество* $\mathcal{P}_k$ *содержит ровно по* $\tilde{r}$ *двумерных точек из указанного набора, при этом* $\widetilde{\delta}_{\tilde{l}} = \max_{k\le\tilde{l}} d(\mathcal{P}_k) \xrightarrow{p} 0$, *где* $d(A) = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ *и* $\|\cdot\|$ — *супремальная норма в* $\mathbb{R}^2$.

При $k = 1,\ldots,\tilde{l}$ положим $\widetilde{H}_k = \big\{\big((i,j_1),(i,j_2)\big) : \big(Z_{ij_1},Z_{ij_2}\big) \in \mathcal{P}_k\big\}$, $\widetilde{X}_k = \tilde{r}^{-1}\sum_{((i,j_1),(i,j_2))\in\widetilde{H}_k} X_{ij_1}X_{ij_2}$. Оценку для $\varphi(t,s)$ зададим равенством

$$\widehat{\varphi}_1(t,s) = \frac{\sum_{k=1}^{\tilde{l}} \widetilde{X}_k K_h(t - Z_{i_kj_{1k}})K_h(s - Z_{i_kj_{2k}})\Lambda_2(\mathcal{P}_k)}{\sum_{k=1}^{\tilde{l}} K_h(t - Z_{i_kj_{1k}})K_h(s - Z_{i_kj_{2k}})\Lambda_2(\mathcal{P}_k)},$$

где $\big(Z_{i_kj_{1k}},Z_{i_kj_{2k}}\big)$ — произвольная фиксированная точка, принадлежащую множеству $\mathcal{P}_k$. При выполнении вышеприведенных условий имеет место

Теорема 13 (Следствие 1.18). *Пусть справедливы соотношения*

$$h \to 0, \quad \tilde{r}^{-p/2}h^{-(p+2)}\mathbb{E}\widetilde{\delta}_{\tilde{l}}^p \to 0, \quad \tilde{l}/\tilde{r} \to 0, \quad \mathbb{P}\big(\widetilde{\delta}_{\tilde{l}} > h/(8L)^2\big) \to 0.$$

Тогда $\sup_{(t,s)\in[0,1]^2} |\widehat{\varphi}_1(t,s) - \varphi(t,s)| \xrightarrow{p} 0$.

Оценка для функции ковариации $\psi(t,s)$ определяется теперь равенством $\widehat{\psi}_1(t,s) = \widehat{\varphi}_1(t,s) - \widehat{\mu}_1(t)\widehat{\mu}_1(s)$. Отметим, что при построении оценок $\widehat{\mu}_1(t)$ и $\widehat{\varphi}_1(t,s)$ существенно используются новые методы ядерного сглаживания из разделов 1.1 и 1.3.

В более простой ситуации плотных данных в модели (6), когда $m_i = m_i(n) \to \infty$, мы следуем общепринятому подходу: сначала оцениваем случайные функции f_i по наблюдениям i-ой серии, а затем проводим соответствующие усреднения по всем сериям. Но при оценивании функций f_i, $i = 1, \ldots, n$, мы используем методы ядерного сглаживания, предложенные в диссертационной работе. Последнее обстоятельство и позволяет нам накладывать весьма слабые ограничения на регрессоры. Точный вид оценок и формулировки утверждений об их равномерной состоятельности мы здесь опускаем. Отметим лишь, что оценки для функций среднего и ковариации имеют следующую структуру:

$$\widehat{\mu}_2(t) = n^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(t), \qquad \widehat{\psi}_2(t,s) = n^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(t)\widehat{f}_i(s) - \widehat{\mu}_2(t)\widehat{\mu}_2(s),$$

где $\widehat{f}_i(t)$ — универсальная локально–постоянная оценка для функции $f_i(t)$, построенная по наблюдениям i-ой серии. Условие на регрессоры, гарантирующее равномерную состоятельность этих оценок, состоит в следующем: набор регрессоров каждой из серий с высокой вероятностью образует измельчающееся разбиение области определения случайного процесса.

Разделы 1.1.7, 1.2.3 и 1.3.3 главы 1 содержат примеры компьютерного моделирования и обработки реальных данных.

Во второй главе рассматриваются модели нелинейной регрессии.

В разделе 2.1 обсуждается понятие внутренней линейности моделей. К внутренне линейным принято относить модели регрессии, для которых регрессионное уравнение можно трансформировать к линейному (с аддитивным шумом). Для таких моделей явные оценки параметров могут быть построены методами линейного регрессионного анализа. Ранее считалось, что внутренне линейными могут быть только модели с мультипликативными погрешностями[43]. В диссертации уточнено и расширено определение внутренней линейности моделей и установлено, что несколько известных моделей нелинейной регрессии с аддитивными погрешностями удовлетворяют этому определению. Показано, что известные ранее явные оценки для этих моделей, построенные исходя из тех или иных эвристических соображений, можно построить методами линейного регрессионного анализа, если под внутренней линейностью понимать новое расширенное определение. Кроме того, показано, что одна из известных интерпретаций внутренней линейности, связанная с трансформацией регрессионного уравнения без учета погрешностей, может приводить к несостоятельным оценкам. Отметим, что возможность преобразования модели регрессии с аддитивными погрешностями к линейной является скорее редким исключением, нежели правилом. Поэтому и возникает необходимость разработки подходов к построению явных оценок для собственно нелинейных моделей.

В разделах 2.2 и 2.3 предложены два подхода к построению явных α_n-состоятельных или асимптотически нормальных оценок для широких классов моделей. Эти подходы тесно связаны с результатами главы 1 и

[43]Rawlings J.O., Pantula S.G., Dickey D.A. Applied regression analysis: a research tool. — Springer, 2001.

предполагают плотное заполнение регрессорами некоторой области. Постановка задачи следующая: наблюдения $\{X_i,\, i=1,\ldots,n\}$ имеют структуру

$$X_i = f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_i) + \varepsilon_i, \qquad i=1,\ldots,n, \tag{7}$$

где f — некоторая известная функция, набор k-мерных регрессоров $\{\mathbf{z}_i\}$ состоит из наблюдаемых случайных величин в схеме серий со значениями в некотором множестве $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^k$, $\{\varepsilon_i\}$ — ненаблюдаемые случайные погрешности, которые также могут зависеть от n. Подчеркнем, что условия на регрессоры включают в себя и ситуацию с детерминированными регрессорами. Задача состоит в оценивании m-мерного параметра $\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}$.

В разделе 2.2 предложен способ построения оценок, непосредственно использующий непараметрические ядерные методы главы 1. Эта методика близка к методологии метода моментов. Оценку для параметра $\boldsymbol{\theta}$ в модели (7) предлагается искать как решение системы уравнений

$$f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}_j) = \widehat{f}_n(\mathbf{t}_j), \quad j=1,\ldots,m,$$

где $\widehat{f}_n(\mathbf{t})$ — непараметрическая ядерная оценка для регрессионной функции $f(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{t})$ и $\boldsymbol{\theta}_0$ — истинное значение параметра $\boldsymbol{\theta}$. Набор точек $\{\mathbf{t}_j\}$ подбирается так, чтобы эта система была разрешима единственным образом и обратное отображение было бы непрерывным. По сути, предлагается приравнять значения регрессионной функции в тех или иных точках к соответствующим значениям ее состоятельной непараметрической оценки и решить эту систему уравнений относительно неизвестного m-мерного параметра. Число таких уравнений (или что то же — указанных точек) должно совпадать с размерностью m параметра $\boldsymbol{\theta}$. В качестве оценки $\widehat{f}_n(\mathbf{t})$ можно использовать универсальные ядерные оценки, предложенные в главе 1.

Приведем условия α_n-состоятельности оценок в случае, когда в качестве $\widehat{f}_n(\mathbf{t})$ используется универсальная локально-постоянная ядерная оценка $f^*_{n,h}(\mathbf{t})$, введенная в (4) (нормировка α_n, как правило, будет иметь порядок не больше, чем $n^{1/(k+2)}$). В приводимой далее теореме 14 предполагается, что погрешности $\{\varepsilon_i\}$ и ядро K удовлетворяют условиям, используемым в теореме 4, справедливо предположение (П2), $\mathcal{P}=[0,1]^k$ и $\|f\| = \sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^k}|f(\mathbf{t})|$.

Теорема 14 (Следствие 2.1). *Пусть имеется непрерывное отображение $\boldsymbol{G}$ банахова пространства $(C[0,1]^k, \|\cdot\|)$ в $\mathbb{R}^m$, для которого векторная функция $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \boldsymbol{G}\big(f(\boldsymbol{\theta},\cdot)\big)$ является гомеоморфизмом открытого множества $\boldsymbol{\Theta}$ на некоторую область пространства $\mathbb{R}^m$, отображение $\boldsymbol{G}$ и обратное отображение $\boldsymbol{g}^{-1}$ удовлетворяют условию Липшица в своих пространствах, для каждого $\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}$ регрессионная функция $f(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t})$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу и не является постоянной функцией. Тогда оценка $\boldsymbol{\theta}^*_n = \boldsymbol{g}^{-1}\big(\boldsymbol{G}(f^*_{n,h})\big)$ определена с вероятностью, стремящейся к 1, и является α_n-состоятельной, когда $\alpha_n = o(h_n^{-1})$ и $h_n = \big(\mathbb{E}(\delta_n^{kp/2})\big)^{\frac{1}{p(k/2+1)+k}}$.*

Пример 3. Рассмотрим модель (7) с регрессионной функцией $f(\boldsymbol{\theta},\mathbf{z}) = \theta_1 z_1^{\theta_2} z_2^{\theta_3}$, где $\mathbf{z} = (z_1,z_2) \in \mathbb{R}_+^2$ и $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in \mathbb{R}_+^3$. Это так называемая модель Кобба–Дугласа, популярная в эконометрике. Положим $\mathbf{t}_1 = (2^{-1},2^{-1})$, $\mathbf{t}_2 = (2^{-1},3^{-1})$, $\mathbf{t}_3 = (3^{-1},3^{-1})$ и рассмотрим систему уравнений

$$\theta_1 2^{-\theta_2} 2^{-\theta_3} = f_{n,h}^*(\mathbf{t}_1), \quad \theta_1 2^{-\theta_2} 3^{-\theta_3} = f_{n,h}^*(\mathbf{t}_2), \quad \theta_1 3^{-\theta_2} 3^{-\theta_3} = f_{n,h}^*(\mathbf{t}_3).$$

Единственное ее решение есть

$$\theta_{n1}^* = \exp\left\{\frac{s_1 \log 3 - s_3 \log 2}{\log(3/2)}\right\}, \quad \theta_{n2}^* = \frac{s_1 - s_2}{\log(3/2)}, \quad \theta_{n3}^* = \frac{s_2 - s_3}{\log(3/2)},$$

где $s_j = \log f_{n,h}^*(\mathbf{t}_j)$, $j = 1,2,3$. В широких условиях оценка $\boldsymbol{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)$ является α_n-состоятельной для параметра $\boldsymbol{\theta}$ при $\alpha_n = o\big(\mathbb{E}(\delta_n^p)^{-\frac{1}{2p+2}}\big)$, где значение $p > 3$ таково, что $\sup_{i \le n} \mathbb{E}|\varepsilon_i|^p < \infty$. $\square$

В разделе 2.3 предложен другой подход к построению оценок в моделях нелинейной регрессии, основанный на использовании сумм определенным образом взвешенных откликов и по сути повторяющий методологию главы 1. Как правило, этот подход позволяет получать α_n-состоятельные оценки с более высокой скоростью сходимости, чем оценки первого метода. Основную идею этого подхода опишем сначала в простейшей ситуации, когда параметр $\theta \in \Theta = (a,b)$ одномерный (границы a и b могут быть бесконечными с соответствующими знаками), регрессоры $\{z_i\}$ одномерны ($k = 1$) и с вероятностью 1 принадлежат некоторому конечному отрезку $[c,d]$. Прежде всего при каждом фиксированном $n \ge 1$ упорядочим $z_1, \ldots, z_n$ по возрастанию: $z_{n:1} \le \ldots \le z_{n:n}$. Отклики и погрешности из (7), ассоциированные с порядковой статистикой $z_{n:i}$, обозначим соответственно X_{ni} и ε_{ni}. В этом случае модель (7) примет вид $X_{ni} = f(\theta, z_{n:i}) + \varepsilon_{ni}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $\Delta z_{ni} = z_{n:i} - z_{n:i-1}$, $z_{n:0} = c$, $z_{n:n+1} = d$.

Основным предположением является следующее (первая часть этого условия при $c = 0$ и $d = 1$ уже фигурировала в предположении (П1).

(П6) *Совокупность $\{z_{ni}\}$ с ростом n образует измельчающееся разбиение отрезка $[c,d]$ в том смысле, что $\max_{1 \le i \le n+1} \Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0$. Функция $f(\theta,z)$ интегрируема по Риману по z на отрезке $[c,d]$ и интеграл Римана $T(t) = \int_c^d f(t,z)dz$ является строго монотонной и непрерывной функцией.*

Предположим дополнительно, что $\sum_{i=1}^n \Delta z_{ni} \varepsilon_{ni} \xrightarrow{p} 0$. Оценка θ_n^* определяется равенством (всюду, когда корректно задана правая часть)

$$\theta_n^* = T^{-1}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Delta z_{ni} X_{ni}\Big), \tag{8}$$

где T^{-1} — обратная функция. Во введенных условиях оценка θ_n^* из (8) определена с вероятностью, стремящейся к 1, и является состоятельной.

Чтобы использовать предлагаемые оценки в одношаговых процедурах, требуется бо́льшая точность, нежели просто состоятельность (см.

результаты главы 3). Отметим, что в широких условиях в приводимых далее теоремах 15 и 16 величина α_n имеет порядок $o(\sqrt{n})$, а величина D_n^{-1} — порядок $\sqrt{n}$.

Теорема 15 (см. следствие 2.10). *Пусть выполнено предположение* (П6), *функция* $T^{-1}(t)$ *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $p \in (0,1]$ *и для некоторой последовательности* $\alpha_n \to \infty$

$$\alpha_n^{1/p} \sum_{i=1}^{n} \Delta z_{ni} \varepsilon_{ni} \xrightarrow{p} 0, \ \alpha_n^{1/p} \sum_{i=1}^{n} \omega_f(\Delta z_{ni}) \Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0, \ \alpha_n^{1/p} \Delta z_{nn+1} \xrightarrow{p} 0, \qquad (9)$$

где $\omega_f(\delta) = \sup_{t_1,t_2:|t_1-t_2|\le\delta} |f(\theta,t_1) - f(\theta,t_2)|$. *Тогда оценка* θ_n^* *является* α_n*-состоятельной.*

Приведем условия асимптотической нормальности θ_n^* в предположении, что регрессоры неслучайны, погрешности $\{\varepsilon_i\}$ независимы, центрированы и имеют конечные и отличные от нуля вторые моменты.

Теорема 16 (см. следствие 2.3). *Пусть выполнено предположение* (П6), *функция* $T(\theta)$ *непрерывно дифференцируема и* $T'(\theta) \neq 0$. *Кроме того, справедливы соотношения*

$$D_n^2 = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \big(\Delta z_{ni}\big)^2 \mathbb{E}\varepsilon_{ni}^2 \to 0 \quad \textit{и} \quad D_n^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \Delta z_{ni} \varepsilon_{ni} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

а второе и третье условия из (9) *выполнены при замене* $\alpha_n^{1/p}$ *на* D_n^{-1}. *Тогда* $D_n^{-1}(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0,[T'(\theta)]^{-2}\big)$.

Иногда при построении оценки следует убрать из рассмотрения некоторое количество «лишних» наблюдений, чтобы обеспечить выполнение нужных нам условий (в частности, (П6)). Конечно, мы теряем при этом часть выборочной информации, но в задаче построения *предварительной* оценки данное обстоятельство не столь существенно. Например, если регрессоры образуют измельчающееся разбиение только части области своего задания (обозначим эту область «плотного» заполнения регрессорами через $A \subset \mathbb{R}$), то для построения θ_n^* следует использовать только регрессоры, принадлежащие A, и соответствующие им отклики. Если функция $T(t) = \int_A f(t,z)dz$ не является строго монотонной и непрерывной, но существует подмножество $A_o \subset A$ такое, что функция $T_o(t) = \int_{A_o} f(t,z)dz$ обладает нужными свойствами, то разумно использовать лишь регрессоры, принадлежащие множеству A_o, и соответствующие им наблюдения. Результаты распространяются на случай, когда $d = \infty$ и/или $c = -\infty$; в частности, если $d = \infty$, то требуется, чтобы $z_{n,n} \to \infty$ и $\max_{1\le i\le n} \Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0$, а интеграл Римана $T(\theta) = \int_c^\infty f(t,z)dz$ понимается как несобственный.

Более общая идея построения оценки θ_n^* для одномерного параметра состоит в том, чтобы подобрать такие $h_{ni} \ge 0$, A_n и функции $T_n(\theta)$, для которых $\sum_{i=1}^{n} h_{ni} f(\theta,z_{n:i}) - A_n - T_n(\theta) \xrightarrow{p} 0$ и $\sum_{i=1}^{n} h_{ni}\varepsilon_{ni} \xrightarrow{p} 0$, где, начиная с некоторого n, функции $T_n(\theta)$ с вероятностью 1 строго монотонны и непрерывны, а обратные функции $T_n^{-1}(t)$ равностепенно непрерывны. В этом случае оценка определяется равенством $\theta_n^* = T_n^{-1}\big(\sum_{i=1}^n h_{ni}X_{ni} - A_n\big)$ (выше, при определении оценки (8), мы положили $h_{ni} = \Delta z_{ni}$, $A_n = 0$ и $T_n(\theta) = T(\theta)$). Используя данную более общую конструкцию, в некоторых моделях удается оценить параметр θ при нарушении условия $\max_{1\le i\le n}\Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0$ плотного заполнения регрессорами некоторой области в случае, когда $z_{n:n} \xrightarrow{p} \infty$ и $\max_{1\le i\le n}\Delta z_{ni}/z_{n:n} \xrightarrow{p} 0$ (например, для $z_i = i$). При этом функция $f(\theta,z)$ может быть неинтегрируемой по z на луче $[0,\infty)$.

Приведем схематично вид оценок в случае многомерных параметра и регрессоров, опуская достаточные условия α_n-состоятельности или асимптотической нормальности. Пусть $\boldsymbol{\theta} \in\boldsymbol{\Theta}= (a_1,b_1)\times(a_2,b_2) \subset \mathbb{R}^2$, а регрессоры $\{z_i\}$ по-прежнему принадлежат конечному отрезку $[c,d]$ и образуют измельчающееся разбиение этого отрезка (см. (П6)). В предположении интегрируемости по Риману функции $f(\boldsymbol{\theta},z)$ по переменной z на $[c,d]$, выберем $c' \in [c,d]$ так, чтобы гарантировать гомеоморфность двумерного отображения $\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) = (T_1(\boldsymbol{\theta}),T_2(\boldsymbol{\theta}))$, $\boldsymbol{\theta} \in\boldsymbol{\Theta}$, где $T_1(\boldsymbol{\theta}) = \int_c^{c'} f(\boldsymbol{\theta},z)dz$, $T_2(\boldsymbol{\theta}) = \int_{c'}^d f(\boldsymbol{\theta},z)dz$. И пусть дополнительно $\sum_{i=1}^{n_1}\Delta z_{ni}\varepsilon_{ni} \xrightarrow{p} 0$ и $\sum_{i=n_1+1}^{n}\Delta z_{ni}\varepsilon_{ni} \xrightarrow{p} 0$, где n_1 таково, что $z_{n:i}\in[c,c']$ при $i\le n_1$. Состоятельная оценка $\boldsymbol{\theta}_n^*$ двумерного параметра $\boldsymbol{\theta}$ задается равенством

$$\boldsymbol{\theta}_n^* = \mathbf{T}^{-1}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^{n_1}\Delta z_{ni}X_{ni},\quad \sum\nolimits_{i=n_1+1}^{n}\Delta z_{ni}X_{ni}\Big).$$

Оценивание многомерного параметра $\boldsymbol{\theta}$ произвольной размерности происходит аналогично. В широких условиях доказана α_n-состоятельность и асимптотическая нормальность оценок.

В случае многомерных регрессоров $\{\mathbf{z}_i\}$ в предлагаемом подходе оценивания используются конструкции кратных интегральных сумм Римана. Считаем, что при всех i с вероятностью 1 выполнено $\mathbf{z}_i \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^k$, где множество $\mathcal{P}$ измеримо по Жордану, векторы $\{\mathbf{z}_i\}$ попарно различны и «плотно» заполняют $\mathcal{P}$ (подобное требование при $\mathcal{P} = [0,1]^k$ фигурировало в (П2)). В случае скалярного θ считаем, что $f(\theta,\mathbf{z})$ как функция k-мерного аргумента $\mathbf{z}$ интегрируема по Риману на множестве $\mathcal{P}$ и интеграл Римана $T(t) = \int_{\mathcal{P}} f(t,\mathbf{z})d\mathbf{z}$ есть строго монотонная непрерывная функция. В предположении, что $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\Lambda_k(\mathcal{P}_i) \xrightarrow{p} 0$, состоятельная оценка θ_n^* задается равенством $\theta_n^* = T^{-1}\left(\sum_{i=1}^n X_i\Lambda_k(\mathcal{P}_i)\right)$. Обобщение на случай m-мерного параметра $\boldsymbol{\theta}$ происходит согласно схеме, изложенной выше.

Третья глава посвящена асимптотическому анализу нескольких типов одношаговых оценок, связанных с M-оцениванием. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — наблюдения произвольной природы, распределения которых зависят от неизвестного параметра $\theta\in\Theta$ (чтобы упростить изложение, ограничимся здесь лишь случаем, когда $\Theta\subset\mathbb{R}$). Задача состоит в оценивании этого параметра по наблюдениям $X_1,\ldots,X_n$. Одним из общих методов получения оценок является M-оценивание, которое нередко сводится к поиску корней уравнения

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \psi_i(t,X_i) = 0 \tag{10}$$

для того или иного набора функций $\{\psi_i(t,x)\}$ с условием $\mathbb{E}\psi_i(\theta,X_i) = 0$ при всех i и $\theta \in \Theta$ (в дальнейшем символом θ мы будем обозначать истинное значение параметра, при этом зависимость от него в операторах усреднения $\mathbb{E}$ и вероятностях $\mathbb{P}$ указываться не будет). Определим M-оценки как статистики $\widetilde{\theta}_n$, которые на множестве асимптотически полной меры являются решениями уравнения (10), т.е. $\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \psi_i(\widetilde{\theta}_n,X_i) = 0\big) = 1 - \delta_n$ и $\delta_n \to 0$. Подчеркнем, что обычно функции $\{\psi_i(t,x)\}$ в той или иной статистической постановке выбираются таким образом, чтобы обеспечить желаемые свойства соответствующих M-оценок. Пусть, например, $X_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ и $\mathbb{E}\varepsilon_i = \sigma^2 w_i^{-1}(\theta)$ при всех i, где функции $\{f_i(\cdot)\}$ и $\{w_i(\cdot)\}$ известны, а параметр σ^2 может быть неизвестным. Оценки квазиправдоподобия (оптимальные в некотором классе) определяются здесь уравнением (10) при $\psi_i(t,X_i) = w_i(t)f_i'(t)(X_i - f_i(t))$.

С одной стороны, вопросы существования и асимптотические свойства M-оценок при тех или иных предположениях хорошо изучены. В частности, при некоторых условиях регулярности[44] M-оценки асимптотически нормальны:

$$Q_{n,\theta}\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \tag{11}$$

где величины $Q_{n,\theta}$ мы определим далее. С другой стороны, вычисление M-оценок может быть связано не только с техническими трудностями, но и с принципиальными. Например, если уравнение (10) имеет несколько корней, то возникает проблема выбора корня, приближающего неизвестный параметр. Проблема поиска M-оценок может быть решена, если известна некоторая предварительная состоятельная оценка θ_n^*, приближающая параметр с нужной нам скоростью сходимости. Положим

$$\theta_n^{**} = \theta_n^* - \sum\nolimits_{i=1}^{n} \psi_i(\theta_n^*,X_i) \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \psi_i'(\theta_n^*,X_i)\right)^{-1} \tag{12}$$

всюду, когда корректно задана правая часть данного соотношения; здесь $\psi_i'(t,X_i)$ обозначают частные производные этих функций по первому аргументу. Оценка θ_n^{**} представляет собой *одну итерацию* метода Ньютона с начальной точкой $t = \theta_n^*$ для приближенного вычисления одного из корней уравнения (10). В силу состоятельности θ_n^* этот корень в широких условиях будет ближайшим корнем к θ. Оценка θ_n^{**} является одним из вариантов так называемых *одношаговых оценок*.

В разделе 3.1 исследуются асимптотические свойства оценки θ_n^{**}, определенной в (12). В частности, доказано, что

$$Q_{n,\theta}\big(\theta_n^{**} - \theta\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1). \tag{13}$$

[44] Bai Z.D., Wu Y. General M-estimation // J. Multivar. Anal. — 1997. — V. 63. — P. 119–135.

Таким образом, одношаговая M-оценка θ_n^{**} оказывается асимптотически нормальной с той же асимптотической дисперсией, что и M-оценка $\widetilde{\theta}_n$ со свойством (11). Чтобы сформулировать указанное утверждение (для просты в случае одномерного параметра), нам понадобится условие

(П7) *Даны наблюдения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ со значениями в произвольном измеримом пространстве $\mathcal{X}$ и распределениями $\mathcal{L}_{1,\theta}, \mathcal{L}_{2,\theta}, \ldots, \mathcal{L}_{n,\theta}$, зависящими от параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, где Θ — открытое множество (распределения могут зависеть от n и дополнительного параметра $\sigma \in \Xi$ произвольной природы). При любом i на множестве $\Theta \times \mathcal{X}$ заданы, вообще говоря, зависящие от n, измеримые функции $\psi_i(t,x)$ и $\psi_i'(t,x)$. При этом для каждого интервала (t_1,t_2), целиком лежащего в Θ, при любом $x \in \mathcal{X}$ выполнено $\psi_i(t_2,x) - \psi_i(t_1,x) = \int_{t_1}^{t_2} \psi_i'(t,x)dt$. Кроме того, $\mathbb{E}\psi_i(\theta,X_i) = 0$, $\mathbb{E}\psi_i^2(\theta,X_i) < \infty$, $\mathbb{E}|\psi_i'(\theta,X_i)| < \infty$, начиная с некоторого n*

$$I_{n,\theta} = \mathbb{E}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \psi_i(\theta,X_i)\Big)^2 > 0, \ J_{n,\theta} = \sum\nolimits_{i=1}^n \mathbb{E}\psi_i'(\theta,X_i) \neq 0,$$

и имеют место следующие предельные соотношения:

$$I_{n,\theta}^{-1/2} \sum\nolimits_{i=1}^n \psi_i(\theta,X_i) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \ I_{n,\theta}^{-1/2}|J_{n,\theta}| \to \infty,$$
$$J_{n,\theta}^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^n \psi_i'(\theta,X_i) \xrightarrow{p} 1, \ \limsup \mathcal{E}_{n,\theta}(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

где $\mathcal{E}_{n,\theta}(\delta) = |J_{n,\theta}|^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\sup_{t\in\Theta:\ |t-\theta|\le\delta} \big|\psi_i'(t,X_i) - \psi_i'(\theta,X_i)\big|$.

Теорема 17 (см. теорему 3.1). *Пусть выполнено условие* (П7) и оценка θ_n^* такова, что

$$I_{n,\theta}^{-1/2}|J_{n,\theta}||\theta_n^* - \theta|\mathcal{E}_{n,\theta}(|\theta_n^* - \theta|) \xrightarrow{p} 0. \tag{14}$$

Тогда одношаговая M-оценка θ_n^{**} определена с вероятностью, стремящейся к 1, и имеет место сходимость (13) при $Q_{n,\theta} = I_{n,\theta}^{-1/2} J_{n,\theta}$.

Положим $Q_n^* = \big(\sum_{i=1}^n \psi_i^2(\theta_n^{**},X_i)\big)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \psi_i'(\theta_n^*,X_i)$.

Теорема 18 (Теорема 3.3). *Пусть выполнены условия* (П7), (14) *и*

$$J_{n,\theta}^{-2} \sum\nolimits_{i=1}^n \big(\psi_i'(\theta,X_i)\big)^2 \xrightarrow{p} 0, \qquad I_{n,\theta}^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^n \psi_i^2(\theta,X_i) \xrightarrow{p} 1.$$

Тогда $Q_n^*\big(\theta_n^{**} - \theta\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.

Утверждение теоремы 18 может быть полезным при построении доверительных интервалов и проверке гипотез, поскольку нормирующий множитель Q_n^* является статистикой. Отметим еще, что центральное условие (14) включает в себя широкий спектр ограничений на точность предварительной оценки θ_n^*. Это условие связывает гладкость функций $\{\psi_i(t,X_i)\}$, определяющих одношаговую M-оценку, и скорость сближения предварительной оценки θ_n^* и параметра θ, которые нужны для асимптотической нормальности одношаговых M-оценок, при этом точность θ_n^* и гладкость функций $\{\psi_i(t,X_i)\}$ в известном смысле обратно пропорциональны друг другу. Условие (14) выполнено, когда величина $\mathcal{E}_{n,\theta}(\delta)$ и оценка θ_n^* одновременно (для некоторого α из указанной области) удовлетворяют одному из следующих двух предположений:

1) при некотором $0 \le \alpha < 1$ выполнено $\limsup \mathcal{E}_{n,\theta}(\delta) = o(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$ и $\left(I_{n,\theta}^{-1/2}|J_{n,\theta}|\right)^{1/(1+\alpha)}|\theta_n^* - \theta| = O_p(1)$;

2) при некотором $0 < \alpha \le 1$ выполнено $\limsup \mathcal{E}_{n,\theta}(\delta) = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$ и $\left(I_{n,\theta}^{-1/2}|J_{n,\theta}|\right)^{1/(1+\alpha)}|\theta_n^* - \theta| \xrightarrow{p} 0$.

В частности, в двух крайних случаях получаем следующие условия на точность θ_n^*: $|J_{n,\theta}|I_{n,\theta}^{-1/2}|\theta_n^* - \theta| = O_p(1)$ при $\alpha = 0$ и $|J_{n,\theta}|^{1/2}I_{n,\theta}^{-1/4}|\theta_n^* - \theta| \xrightarrow{p} 0$ при $\alpha = 1$. Если $|J_{n,\theta}|I_{n,\theta}^{-1/2}$ имеет порядок $\sqrt{n}$ (например, в случае независимых одинаково распределенных наблюдений), то указанные условия на точность θ_n^* есть либо предположение о $\sqrt{n}$-ограниченности, либо об $n^{1/4}$-состоятельности оценки θ_n^*.

В разделе 3.1 исследуется также вопрос о минимальном достаточном условии на точность предварительной оценки θ_n^*. Доказано (см. теорему 3.5), что при широких ограничениях указанное выше условие $\left(J_{n,\theta}^2 I_{n,\theta}^{-1}\right)^{1/4}|\theta_n^* - \theta| \xrightarrow{p} 0$ является необходимым для справедливости соотношения $Q_{n,\theta}\left(\theta_n^{**} - \theta\right) + \zeta_n \xrightarrow{p} 0$, где $\zeta_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. Таким образом, данное ограничение на точность θ_n^* по сути необходимо для доказательства асимптотической нормальности (13) одношаговой M-оценки θ_n^{**}.

Одношаговые оценки обладают еще одним интересным и несколько неожиданным свойством: сходимость (13) может иметь место, в то время как для соответствующей M-оценки $\widetilde{\theta}_n$ соотношение (11) не выполнено. По-видимому, впервые этот эффект был отмечен Л. Ле Камом[45] в случае оценок максимального правдоподобия для однородных выборок. Чем объясняется этот эффект? Дело в том, что при весьма слабых ограничениях (не гарантирующих даже состоятельность M-оценок из некоторого набора) в окрестности θ существует единственный корень $\widetilde{\theta}_n(\theta)$ уравнения (10), имеющий требуемую точность. Этот корень уравнения $\widetilde{\theta}_n(\theta)$, не являющийся статистикой, и приближают одношаговые M-оценки. В работе исследуется асимптотическое поведение ближайшего к θ корня $\widetilde{\theta}_n(\theta)$ уравнения (10) и некоторые смежные вопросы. Доказано (см. теорему 3.6), что при широких ограничениях $Q_{n,\theta}\left(\widetilde{\theta}_n(\theta) - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.

В диссертационной работе исследуются еще два класса одношаговых оценок. Во-первых, в разделе 3.1 рассматривается следующая модификация оценки θ_n^{**}: $\widehat{\theta}_n^{**} = \theta_n^* - J_n^{*-1}\sum_{i=1}^n \psi_i(\theta_n^*,X_i)$, где статистика J_n^*

[45] Le Cam L. On the asymptotic theory of estimation and testing hypotheses // in Proc. Third Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. — 1956. — V. 1. — 129.

такова, что $J_n^* J_{n,\theta}^{-1} \xrightarrow{p} 1$. Выбор J_n^* может быть очевиден, например, если $J_{n,\theta} = J_{n,\theta,\sigma} \equiv J_n(\theta)$. Здесь проще всего положить $J_n^* = J_n(\theta_n^*)$. Подобная ситуация реализуется, например, в случае построения одношаговых приближений для оценок квазиправдоподобия и метода наименьших квадратов в задачах нелинейной регрессии. Во-вторых, в разделе 3.2 исследуются одношаговые взвешенные M-оценки. Отметим, что все три указанных варианта одношаговых оценок эквивалентны в смысле асимптотической точности, но та или иная оценка может быть предпочтительнее.

Раздел 3.3 посвящен одношаговому оцениванию по однородной выборке из однопараметрического семейства распределений в случае, когда предварительная оценка сближается с параметром достаточно медленно. Рассматривается задача оценивания числового параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ по выборке объема n из последовательности $X_1, X_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин произвольной природы, распределение которых имеет плотность $f_\theta(\cdot)$ относительно некоторой σ-конечной меры μ. В широких условиях некоторым эталоном точности при оценивании неизвестного параметра θ принято считать оценку максимального правдоподобия $\widetilde{\theta}_n$. Хорошо известно, что при выполнении некоторых условий регулярности $\sqrt{n}(\widetilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta))$, где $I(t)$ — информация Фишера, соответствующая плотности $f_t(x)$. Оценки, удовлетворяющие указанному соотношению, будем называть *асимптотически эффективными*. С вычислительной точки зрения более удобными, по сравнению $\widetilde{\theta}_n$, могут быть одношаговые оценки Фишера, определяемые равенствами

$$\theta_{n1}^{**} = \theta_n^* - \frac{L_n'(\theta_n^*)}{L_n''(\theta_n^*)} \quad \text{или} \quad \theta_{n2}^{**} = \theta_n^* + \frac{L_n'(\theta_n^*)}{nI(\theta_n^*)}, \tag{15}$$

где θ_n^* — некоторая предварительная оценка параметра θ (как правило, оценка метода моментов), $L_n(t) = \sum_{i=1}^n \ln f_t(X_i)$ — логарифмическая функция правдоподобия. Как известно, одношаговые оценки Фишера асимптотически эффективны в случае, когда предварительная оценка θ_n^* является n^β-состоятельной (т.е. $n^\beta(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{p} 0$ с ростом n) при $\beta \geq 1/4$. Но задача поиска явной асимптотически эффективной оценки может быть актуальной и в ситуации, когда скорость сближения предварительной оценки и параметра оказывается медленнее, чем $n^{-1/4}$. Например, если плотность $f_\theta(x)$ элементов выборки задается соотношением $f_\theta(x) = \frac{(h+1)}{\theta(1+x/\theta)^{2+h}}$ при $h \in (0,1/3]$ и $x \geq 0$, то оценка по методу моментов $\theta_n^* = h\sum_{i=1}^n X_i/n$ является лишь n^β-состоятельной при $\beta < h/(h+1) \in (0,1/4]$.

Известно, что в случае медленно сходящей предварительной оценки ее точность можно улучшить многократным применением метода Ньютона (см. подробности в подразделе 3.1.8). В диссертационной работе предлагается другой подход. А именно, приведен алгоритм построения новых одношаговых оценок, специально ориентированных на медленно сближающиеся с параметром предварительные оценки. Эти оценки «одношаговые» в том смысле, что они позволяют *за один шаг* n^β-состоятельную оценку при $\beta < 1/4$ улучшить до асимптотически эффективной, но шаг определяется уже не методом Ньютона, а несколько иным преобразованием. Иными словами, нам хотелось бы понять, как можно «подправить», скажем, информацию Фишера в (15), чтобы существенно улучшить точность соответствующей оценки. Опишем кратко структуру предлагаемых оценок. Пусть для некоторого натурального k нам известна $n^{1/2(k+2)}$-состоятельная оценка $\theta^*_{n,k}$ параметра θ, т.е. $n^{1/2(k+2)}(\theta^*_{n,k} - \theta) \xrightarrow{p} 0$. В этом случае одношаговая асимптотически эффективная задается соотношением

$$\theta^{**}_{n,k} = \theta^*_{n,k} + \frac{L'_n(\theta^*_{n,k})}{\sum_{i=1}^n \lambda_k(\theta^*_{n,k}, X_i)}.$$

Здесь функция $\lambda_k(\theta,x)$ имеет следующую структуру

$$\lambda_k(\theta,x) = I(\theta) + c_{k1,\theta}\frac{f'_\theta(x)}{f_\theta(x)} + c_{k2,\theta}\frac{f''_\theta(x)}{f_\theta(x)} + \ldots + c_{kk,\theta}\frac{f^{(k)}_\theta(x)}{f_\theta(x)},$$

где $c_{k1,\theta},\ldots,c_{kk,\theta}$ — решения некоторой системы линейных уравнений, дифференцирование производится по переменной θ и через $f^{(k)}_t(x)$ обозначена k-я производная плотности $f_t(x)$ по t. В частности, при $k = 1$ (т.е. в случае $n^{1/6}$- состоятельности предварительной оценки) имеем

$$\theta^{**}_{n,1} = \theta^*_{n,1} + \frac{L'_n(\theta^*_{n,1})}{nI(\theta^*_{n,1}) + L'_n(\theta^*_{n,1})c(\theta^*_{n,1})}, \text{ где } c(\theta) = \frac{1}{2I(\theta)}\int \frac{f'_\theta(x)f''_\theta(x)}{f_\theta(x)}\mu(dx).$$

Доказано (см. теоремы 3.10, 3.11 и следствие 3.2), что в широких условиях новые одношаговые оценки $\theta^{**}_{n,k}$ асимптотически эффективны. Как видно из приведенных выше определений, оценки $\theta^{**}_{n,k}$ отличаются от оценки Фишера θ^{**}_{n2} наличием некоторых дополнительных слагаемых в знаменателе соответствующей дроби, при этом количество этих слагаемых определяется скоростью сходимости предварительной оценки $\theta^*_{n,k}$ (т.е. задается значением k). Кроме того, от значения k зависят и коэффициенты $c_{k1,\theta},\ldots,c_{kk,\theta}$, задающие эти аддитивные добавки.

Раздел 3.4 посвящен компьютерному моделированию, связанному с одношаговыми процедурами приближения оценок квазиправдоподобия и метода наименьших квадратов в задачах нелинейной регрессии.

Заключение. Регрессионный анализ относится к интенсивно развивающему разделу математической статистики. В диссертации установлен ряд взаимосвязанных результатов, относящихся к непараметрической и нелинейной регрессии. Все поставленные цели достигнуты, а результаты, включенные в диссертацию, являются новыми и актуальными. В качестве наиболее значимых результатов выделим следующее.

В диссертации предложены концепция плотных данных и классы универсальных относительно стохастической природы регрессоров состоятельных оценок в моделях непараметрической и нелинейной регрессии. Эта концепция позволила в задачах непараметрической регрессии значительно ослабить известные ограничения на регрессоры и выделить одно существенное их свойство (условие плотного заполнения), а в задачах нелинейной — решить проблему поиска явных оценок конечномерных параметров. Кроме того, предлагаемая концепция позволила в едином подходе рассматривать ситуацию детерминированных и случайных регрессоров.

Важно подчеркнуть, что полученные в непараметрической регрессии результаты позволяют строить равномерно состоятельные оценки ядерного типа при отсутствии какой-либо информации о характере зависимости регрессоров, лишь бы они плотно заполняли нужную область. Условия на регрессоры в терминах плотных данных нечувствительны к типу регрессоров, характеру их корреляции и включают в себя как ситуацию детерминированных регрессоров без дополнительного требования регулярности, так и случайных, при этом не обязательно удовлетворяющих условиям слабой зависимости.

Методы построения явных оценок, предложенные в диссертации, не имеют аналогов в научной литературе. Ранее явные оценки были известны лишь для небольшого числа нелинейных регрессионных моделей, и проблема их построения для достаточно широких классов моделей оставалась открытой. Отметим, что явные оценки играют важную роль в одношаговых процедурах статистического оценивания, позволяющих обойти вычислительные трудности поиска оценок, задаваемых уравнениями.

Идеи и методы диссертационной работы могут получить дальнейшее развитие в различных статистических задачах. Например, концепция плотных данных и универсальности ядерных оценок может быть реализована, на наш взгляд, в случае оценивания разрывной регрессионной функция без разрывов второго рода и других постановках. Результаты диссертации, связанные с одношаговыми оценками, могут быть перенесены на другие статистические задачи, допускающие применение метода одношагового оценивания. Ожидается, что полученные в работе результаты стимулируют дальнейшие исследования, связанные как с использованием новых наглядных форм зависимости, так и с построением явных оценок в тех или иных статистических задачах.

Благодарность. Автор выражает особую благодарность научному консультанту профессору Елене Борисовне Яровой за ценные советы и постоянное внимание к работе. Автор признателен профессору Игорю Семеновичу Борисову за научные дискуссии и полезные замечания к работе. Кроме того, автор благодарит Владимира Александровича Куценко и Павла Сергеевича Рузанкина за помощь в подготовке графических иллюстраций первой главы диссертации.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Линке Ю. Ю., Борисов И. С. Универсальные непараметрические ядерные оценки для функций среднего и ковариации случайного процесса // Теория вероятн. и ее примен. — 2024. — Т. 69, № 1. — С. 46–75.

ИФ Scopus (SJR) - 0.37 / 1.88 п.л. / вклад соискателя 1.79 п.л.

Постановки задач и общие подходы к их решению принадлежат Ю. Ю. Линке, И. С. Борисовым предложена идея оценивания функции ковариации в случае разреженных данных. Доказательства выполнила Ю. Ю. Линке.

[2] Линке Ю. Ю. К вопросу о нечувствительности оценок Надарая–Ватсона относительно корреляции элементов дизайна // Теория вероятн. и ее примен. — 2023. — Т. 68, № 2. — С. 236–252. Linke Yu. Yu. Towards insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation // Theory Probab. Appl. — 2023. — V. 68, no. 2. — P. 198–210.

ИФ Scopus (SJR) - 0.37 / 1.06 п.л.

[3] Линке Ю. Ю. О достаточных условиях состоятельности локально–линейных ядерных оценок // Матем. заметки. — 2023. — Т. 114, № 3. — С. 353–369.
Linke Yu. Yu. On sufficient conditions for the consistency of local linear kernel estimators // Math. Notes. — 2023. — V. 114, no. 3. — P. 283–296.

ИФ Scopus (SJR) - 0.49 / 1.06 п.л.

[4] Linke Yu. Yu., Borisov I. S., Ruzankin P. S. Universal kernel-type estimation of random fields. // Statistics. — 2023. — V. 57, no. 4. — P. 785–810.

ИФ Scopus (SJR) - 0.38 / 1.63 п.л. / вклад соискателя 1.47 п.л.

И. С. Борисовым предложена постановка задачи. Доказательства всех результатов выполнила Ю. Ю. Линке. П. С. Рузанкиным получены результаты численного анализа.

[5] Линке Ю. Ю. Оценивание функции среднего для зашумленного случайного процесса при наличии разреженных данных // Чебышевский сб. — 2023. — Т. 24, № 5. — С. 112–125.

ИФ Scopus (SJR) - 0.31 / 0.88 п.л.

[6] Linke Yu. Yu., Borisov I. S. An approach to constructing explicit estimators in nonlinear regression // Siberian Adv. Math. — 2023. — V. 33, no. 4. — P. 338–346.

ИФ Scopus (SJR) - 0.19 / 0.56 п.л. / вклад соискателя 0.56 п.л.

И. С. Борисову принадлежит идея использования непараметрических ядерных методов в задаче оценивания конечномерных параметров нелинейной регрессии. Ю. Ю. Линке выполнила доказательства всех утверждений.

[7] Linke Yu. Yu. Kernel estimators for the mean function of a stochastic process under sparse design conditions // Siberian Adv. Math. — 2022. — V. 32, no. 4. — P. 269–276.

ИФ Scopus (SJR) - 0.19 / 0.5 п.л.

[8] Linke Y., Borisov I., Ruzankin P., Kutsenko V., Yarovaya E., Shalnova S. Universal local linear kernel estimators in nonparametric regression // Mathematics. — 2022. — V. 10. — no. 15. — 2693.

ИФ Scopus (SJR) - 0.45 / 1.88 п.л. / вклад соискателя 1.57 п.л.

Идея написания работы принадлежит Е. Б. Яровой. И. С. Борисовым доказаны результаты раздела 4 (предложения 2, 3 и следствия 3, 4). Все остальные теоретические результаты (включая поставку задачи, конструкцию универсальных ядерных оценок и доказательства основных результатов) получены Ю. Ю. Линке. Компьютерное моделирование, а также обработку реальных данных провели В. А. Куценко и П. С. Рузанкин. Реальные данные предоставлены Е. Б. Яровой и С. А. Шальновой.

[9] Linke Yu. Yu., Borisov I. S. Insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation // Commun. Stat. Theory Methods. — 2022. — V. 51, no. 19. — P. 6909–6918.

ИФ Scopus (SJR) - 0.41 / 0.63 п.л. / вклад соискателя 0.63 п.л.

Постановки задач предложены И. С. Борисовым. Все доказательства выполнила Ю. Ю. Линке.

[10] Borisov I. S., Linke Yu. Yu., Ruzankin P. S. Universal weighted kernel-type estimators for some class of regression models // Metrika. — 2021. — V. 84, no. 2. — P. 141–166.

ИФ Scopus (SJR) - 0.45 / 1.63 п.л. / вклад соискателя 1.31 п.л.

И. С. Борисовым доказаны леммы 2 и 3 из раздела 5. Постановка задачи, конструкция новых оценок и доказательства остальных результатов принадлежат Ю. Ю. Линке. П. С. Рузанкиным проведено компьютерное моделирование.

[11] Linke Yu. Yu. Asymptotic properties of one-step M-estimators // Commun. Stat. Theory Methods. — 2019. — V. 48, no. 16. — P. 4096–4118.

ИФ Scopus (SJR) - 0.41 / 1.44 п.л.

[12] Linke Yu. Yu., Borisov I. S. Toward the notion of intrinsically linear models in nonlinear regression // Siberian Adv. Math. — 2019. — T. 29, no. 3. — P. 210–216.

ИФ Scopus (SJR) - 0.19 / 0.44 п.л. / вклад соискателя 0.38 п.л.

И. С. Борисовым доказана несостоятельность оценок параметров трансформирующихся моделей. Все остальные результаты получены Ю. Ю. Линке.

[13] Линке Ю. Ю., Борисов И. С. Построение явных оценок в задачах нелинейной регрессии // Теория вероятн. и ее примен. — 2018. — Т. 63, № 1. — С. 29–56.

Linke Yu. Yu., Borisov I. S. Constructing explicit estimators in nonlinear regression models // Theory Probab. Appl. — 2018 — V. 63, no. 1. — P. 22–44.

ИФ Scopus (SJR) - 0.37 / 1.75 п.л. / вклад соискателя 1.56 п.л.

И. С. Борисовым доказаны результаты раздела 4.2 (*следствия* 2–5) *и следствие* 9 *из раздела* 6.1. *Все остальные результаты получены Ю. Ю. Линке.*

[14] Линке Ю. Ю. Асимптотические свойства одношаговых взвешенных M-оценок с приложениями к задачам регрессии // Теория вероятн. и ее примен. — 2017. — Т. 62, № 3. — С. 468–498.
Linke Yu. Yu. Asymptotic properties of one-step weighted M-estimators with application to some regression problems // Theory Probab. Appl. — 2018. — V. 62, no. 3. — P. 373–398.

ИФ Scopus (SJR) - 0.37 / 1.94 п.л.

[15] Linke Yu. Yu. Asymptotic normality of one-step M-estimators based on non-identically distributed observations // Statist. Probab. Lett. — 2017. — V. 129. — P. 216–221.

ИФ Scopus (SJR) - 0.45 / 0.38 п.л.

[16] Линке Ю. Ю. Двухшаговое оценивание параметра в одной неоднородной линейной регрессионной модели. // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. — 2017. — Т.17, № 2. — С. 39–51.
Linke Yu. Yu. Two-step estimation in a heteroscedastic linear regression model // J. Math. Sci. — 2018. — V. 231, no. 2. — P. 206–217.

ИФ Scopus (SJR) - 0.31 / 0.81 п.л.

[17] Linke Yu. Yu., Borisov I. S. Constructing initial estimators in one-step estimation procedures of nonlinear regression // Statist. Probab. Lett. — 2017. — V. 120. — P. 87–94.

ИФ Scopus (SJR) - 0.45 / 0.5 п.л. / вклад соискателя 0.44 п.л.

И. С. Борисовым доказана теорема 5. *Ю. Ю. Линке предложена методика построения оценок и получены все остальные результаты.*

[18] Линке Ю. Ю. Об уточнении одношаговых оценок Фишера в случае медленно сходящихся предварительных оценок // Теория вероятн. и ее примен. — 2015. — Т. 60, № 1. — С. 80–98.
Linke Yu. Yu. Refinement of Fisher's one-step estimators in the case of slowly converging preliminary estimators // Theory Probab. Appl. — 2016. — V. 60, no. 1. — P. 88–102.

ИФ Scopus (SJR) - 0.37 / 1.19 п.л.

[19] Линке Ю. Ю. Об асимптотике распределения двухшаговых статистических оценок // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52, № 4. — С. 841–860.
Linke Yu. Yu. On the asymptotics of distributions of two-step statistical estimates // Siberian Math. J. — 2011. — V. 52, no 4. — P. 665–681.

ИФ Scopus (SJR) - 0.4 / 1.25 п.л.

Линке Юлиана Юрьевна

Универсальные ядерные оценки в непараметрической регрессии с приложениями к нелинейным регрессионным моделям

Автореф. дис. на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 120 экз.
Типография ____