

Заключение диссертационного совета МГУ.011.3
по диссертации на соискание ученой степени кандидата наук
Решение диссертационного совета от «16» мая 2025 г. № 19
о присуждении Гармановой Татьяне Алексеевне, гражданке РФ,
ученой степени кандидата физико-математических наук.

Диссертация «Константы вложения в пространствах Соболева» по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ принята к защите диссертационным советом 28.03.2025, протокол № 18.

Соискатель **Гарманова Татьяна Алексеевна**, 1997 года рождения, в 2021 году окончила специалитет механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова на кафедре теории функций и функционального анализа. С 2021 года обучается в очной аспирантуре механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Соискатель является аспирантом 4-го года очного обучения аспирантуры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Диссертация выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В.Ломоносова».

Научный руководитель — Шейпак Игорь Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Официальные оппоненты:

- **Безродных Сергей Игоревич** — доктор физико-математических наук, профессор РАН, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела 21 федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»
- **Степанов Владимир Дмитриевич** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник вычислительного центра дальневосточного отделения Российской академии наук обособленного подразделения федерального государственного бюджетного учреждения науки «Хабаровский федеральный исследовательский центр дальневосточного отделения Российской академии наук»

- **Шапошников Станислав Валерьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

дали положительные отзывы на диссертацию.

Соискатель имеет 7 опубликованных работ, в том числе публикаций по теме диссертации — 7, из них 7 статей, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Основные публикации по теме диссертации:

1. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Свойства экстремумов оценок промежуточных производных нечетного порядка в классах Соболева // Доклады Академии наук. — 2019. — Т. 487, № 5. — С. 11–15. Общий объем 0.313 п. л. ИФ РИНЦ = 0.859

Garmanova T.A., Sheipak I.A. Properties of extrema of estimates for middle derivatives of odd order in Sobolev classes // Doklady Mathematics. — 2019. — Vol. 100, No. 1. — P. 367–371. Общий объем 0.313 п. л. SCOPUS SJR = 0.458

Шейпаку И.А. принадлежат постановка задачи и результаты нахождения констант вложения $\Lambda_{n,3,2,\infty}$ и $\Lambda_{n,5,2,\infty}$, которые не приводятся в диссертации. Все остальные доказательства результатов получены автором диссертации лично.

2. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева // Труды Московского математического общества. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 221–246. Общий объем 1.625 п. л. SCOPUS SJR = 0.325

Garmanova T.A., Sheipak I.A. An explicit form for extremal functions in the embedding constant problem for Sobolev spaces // Transactions of the Moscow Mathematical Society. — 2020. — Vol. 80. — P. 189–210. Общий объем 1.375 п. л. SCOPUS SJR = 0.325

Шейпаку И.А. принадлежат постановка задачи и результаты нахождения констант вложения $\Lambda_{n,3,2,\infty}$ и $\Lambda_{n,5,2,\infty}$, которые не приводятся в диссертации. Все остальные доказательства результатов

получены автором диссертации лично.

3. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. — 2021. — Т. 55, № 1. — С. 43–55.
Общий объем 0.647 п. л. ИФ РИНЦ = 0.813

Garmanova T.A., Sheipak I.A. On sharp estimates of even-order derivatives in Sobolev spaces // Functional Analysis and its Applications. — 2021. — Vol. 55, No. 1. — P. 34--44.
Общий объем 0.688 п. л. SCOPUS SJR = 0.600

Шейпаку И.А. принадлежат постановка задачи и формулировка теоремы, обозначенной в тексте диссертации как Теорема 1.4.1. Все доказательства результатов получены автором диссертации лично.

4. Гарманова Т.А. Оценки производных в пространствах Соболева в терминах гипергеометрических функций // Математические заметки. — 2021. — Т. 109, № 4. — С. 500–507.
Общий объем 0.5 п. л. ИФ РИНЦ = 0.455

Garmanova T.A. Estimates of derivatives in Sobolev spaces in terms of hypergeometric functions // Mathematical Notes. — 2021. — Vol. 109, No. 4. — P. 527–533.
Общий объем 0.438 п. л. SCOPUS SJR = 0.418

5. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. О соотношениях ортогональности первообразных многочленов Лежандра и их приложениях к некоторым спектральным задачам для дифференциальных операторов // Математические заметки. — 2021. — Т. 110, № 4. — С. 498–506.
Общий объем 0.563 п. л. ИФ РИНЦ = 0.455

Garmanova T.A., Sheipak I.A. Orthogonality relations for the primitives of Legendre polynomials and their applications to some spectral problems for differential operators // Mathematical Notes. — 2021. — Vol. 110. — P. 489–496.
Общий объем 0.5 п. л. SCOPUS SJR = 0.418

Шейпаку И.А. принадлежат постановка задачи и идея применения соотношений для первообразных многочленов Лежандра к спектральным задачам. Все доказательства результатов получены автором диссертации лично.

6. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Связь наилучших L_p приближений сплайнов многочленами с оценками значений промежуточных

производных в пространствах Соболева // Математические заметки. — 2023. — Т. 114, № 4. — С. 623–627.

Общий объем 0.313 п. л. ИФ РИНЦ = 0.455

Garmanova T.A., Sheipak I.A. Relationship between the best approximations of splines by polynomials with estimates of the values of intermediate derivatives in Sobolev spaces // Mathematical Notes. — 2023. — Vol. 114. — P. 625–629.

Общий объем 0.313 п. л. SCOPUS SJR = 0.418

Шейпаку И.А. принадлежат постановка задачи и формулировка теоремы, обозначенной в тексте диссертации как Теорема 2.3.2. Все доказательства результатов получены автором диссертации лично.

7. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Точные оценки производных высокого порядка в пространствах Соболева // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2024. — № 1. — С. 3–10.

Общий объем 0.313 п. л. ИФ РИНЦ = 0.455

Garmanova T.A., Sheipak I.A. Sharp estimates of high-order derivatives in Sobolev spaces // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2024. — Vol. 79. — P. 1–10.

Общий объем 0.625 п. л. SCOPUS SJR = 0.344

Шейпаку И.А. принадлежат постановка задачи и формулировка теоремы, обозначенной в тексте диссертации как Теорема 2.3.2. Все доказательства результатов получены автором диссертации лично.

На диссертацию и автореферат дополнительных отзывов не поступало.

Выбор официальных оппонентов обосновывался компетентностью в соответствующей отрасли науки, наличием публикаций в соответствующей сфере исследования.

Диссертационный совет отмечает, что представленная диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований получены следующие результаты.

В первой главе подробно исследуется гильбертов случай, а именно вложение пространств $\dot{W}_2^n[0,1]$ в пространства $\dot{W}_\infty^k[0,1]$ при $0 \leq k < n$. В ней описана структура локальных и глобальных максимумов оценочных функций $A_{n,k,2}$ и получено их представление через обобщенные гипергеометрические

функции, а также вычислены константы вложения при четных значениях параметра k .

Вторая глава посвящена вложению пространств $\dot{W}_p^n[0,1]$ с произвольным параметром $p \in [1, \infty]$ в пространства $\dot{W}_\infty^k[0,1]$, $0 \leq k < n$. Получено описание оценочных функций $A_{n,k,p}$ в терминах наилучшей аппроксимации сплайнов специального вида многочленами степени не выше $n - 1$ по норме пространства $L_{p'}[0,1]$, $1/p + 1/p' = 1$, а также вычислены константы вложения при $p = 1$, $k = n - 1$.

В третьей главе рассматриваются дополнительные свойства первообразных многочленов Лежандра фиксированного порядка, а именно вычислены их скалярные произведения при всех допустимых параметрах. Полученные соотношения применяются к некоторым спектральным задачам для дифференциальных операторов и для приближенного вычисления констант вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего развития теории вложений в пространствах Соболева, а также в различных вопросах теории функций, теории гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, теории приближений и спектральной теории операторов.

Диссертация представляет собой самостоятельное законченное исследование, обладающее внутренним единством и имеет важное значение для теории пространств Соболева. Положения, выносимые на защиту, содержат новые научные результаты и свидетельствуют о личном вкладе автора в науку:

1. Соотношения, описывающие экстремальные сплайны задачи в гильбертовом случае ($p = 2$), а именно функции, на которых достигается равенство в неравенстве

$$\left| f^{(k)}(a) \right| \leq A_{n,k,2}(a) \left\| f^{(n)} \right\|_{L_2[0,1]}.$$

2. Свойства локальных и глобальных максимумов функций $A_{n,k,2}(a)$. При всех четных k точка $a = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,k,2}(a)$, а при нечетных k точкой глобального максимума функций $A_{n,k,2}(a)$ является точка локального максимума, ближайшая к середине отрезка.
3. Соотношения, связывающие оценочные функции $A_{n,k,2}(a)$ и гипергеометрические функции, при произвольных $n > k \geq 0$.
4. Формулы для точных констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных k и сходящиеся двусторонние оценки для констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех нечетных k .

5. Утверждение об эквивалентности задачи о нахождении оценочных функций $A_{n,k,p}(a)$ задаче о приближении сплайнов специального вида многочленами по норме $L_p[0,1]$, в случае произвольного параметра $p \in [1, \infty]$, $1/p + 1/p' = 1$.
6. Значения точных констант вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.
7. Явные значения скалярных произведений первообразных многочленов Лежандра $P_m^{(-j)}(x)$ фиксированного порядка $j \geq 0$ при всех $m \geq j$.

На заседании 16.05.2025 диссертационный совет принял решение присудить Гармановой Татьяне Алексеевне ученую степень кандидата физико-математических наук.

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве 16 человек, из них 10 докторов наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, участвовавших в заседании, из 24 человек, входящих в состав совета, проголосовали: за — 16, против — 0, недействительных бюллетеней — 0.

Заместитель председателя

диссертационного совета МГУ.011.3,

доктор физико-математических наук, доцент

Яровая Е.Б.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.011.3,

доктор физико-математических наук

Шерстюков В.Б.

16.05.2025