ОТЗЫВ официального оппонента

на диссертацию на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Иванова Александра Сергеевича

на тему: «Развитие методов вычисления функциональных интегралов в моделях квантовой теории поля»,

по специальности 1.3.3. – теоретическая физика.

Развитый Р. Фейнманом в 1948 г. формализм интеграла по траекториям (функциональный интеграл) является оригинальным связующим звеном между классическим и квантовым описанием физических систем. Принцип наименьшего действия, получивший широкое распространение в классической механике, имеет своё продолжение в квантовой механике, в которой отсутствующая траектория заменяется бесконечным множеством вероятных траекторий.

Несмотря на активные исследования в области статистической физики, квантовой механики и квантовой теории поля, на сегодняшний день математический аппарат континуальных интегралов содержит ряд нетривиальных особенностей, требующих особых подходов в практическом их использовании.

Получить точное значение функционального интеграла для реальных физических систем не представляется возможным. В результате используются различные приближенные методы, например, метод теории возмущений (пертурбативный метод), основанный на представлении решения задачи в виде разложения в ряд по малому параметру (константа взаимодействия). В силу построения ряд теории возмущений является асимптотически расходящимся в смысле Пуанкаре. Если константа взаимодействия является малой величиной (КЭД), то первые несколько членов ряда дают приемлемое приближение. В противном случае (КХД), ряд теории возмущений быстро расходится. Иногда удаётся выполнить суммирование методом Бореля.

Непертурбативным методом вычисления функционального интеграла является переход на пространственно-временную решётку. Используя поворот Вика $t \to -it$, подынтегральное выражение e^{iS} преобразуется в e^{-S_E}, где S_E соответствует Евклидову действию. Для положительно-определённого действия S_E подынтегральное выражение e^{-S_E} можно интерпретировать как плотность вероятностей и воспользоваться методом Монте-Карло. Заметим, что при отсутствии положительно-определённого действия возникает так называемая проблема знака.

В силу сказанного тема диссертационной работы Иванова А. С. «Развитие методов вычисления функциональных интегралов в моделях квантовой теории поля» является актуальной.

С использованием формализма функциональных интегралов в диссертационной работе Иванова А. С. представлено развитие новых пертурбативных и непертурбативных методов вычисления наблюдаемых величин в квантовой механике и квантовой теории поля.

Корректное применение математического аппарата, сравнение результатов численного эксперимента с известными точными решениями модельных систем показывает достоверность полученных в диссертации результатов и их обоснованность.

Диссертация А.С. Иванова состоит из 4 глав, заключения и списка литературы. Первая глава оформлена как «Введение». Объём диссертации 105 стр., список литературы включает 94 ссылки.

Введение (глава 1) содержит обзор литературы по теме диссертации, описание проблемы вычисления функциональных интегралов в квантовой механике и квантовой теории поля, обоснование актуальности темы диссертации, формулировку целей и задач исследования. Показана научная новизна полученных результатов, теоретическая и практическая значимость работы. Приведены основные положения, выносимые на защиту.

В главе 2 произведено расширение метода Монте-Карло для вычисления функциональных интегралов для релятивистских квантовых систем с мгновенным взаимодействием между частицами. В рамках приближения $e^{-\tau(T+V)} \approx e^{-\tau T}e^{-\tau V}$ получено выражение для матрицы плотности $\rho(q'',q';\tau)$, средней кинетической $\langle T(p)\rangle$, потенциальной $\langle V(q)\rangle$ энергий и корреляционной функции $\langle q(t)q(t+n\tau)\rangle$. «Временной» параметр τ связан с обратной температурой $\beta=\tau N_t$, где N_t – число шагов. Корректность предложенного метода была проверена на модельной системе – релятивистском квантовом гармоническом осцилляторе с кинетической энергией $T(p)=\sqrt{p^2+m^2}$ в двух предельных случаях: ультрарелятивистский $m^2 << \langle p^2\rangle$ и нерелятивистский $m^2 >> \langle p^2\rangle$. С одной стороны, для указанных предельных случаев известны явные выражения корреляционных функций, кинетической и потенциальных энергий. С другой стороны, используя численный метод Метрополиса, те же величины могут быть найдены через построенную ранее матрицу плотности. Результаты численного моделирования показали хорошую эффективность предложенного обобщения метода Монте-Карло для функциональных интегралов на рассмотренном классе систем.

Для моделей с полиномиальным взаимодействием, определенных на конечной (глава 3) и бесконечной (глава 4) решётке, предложен метод суммирования расходящихся рядов теории возмущений.

С математической точки зрения, основная идея состоит в построении аналога «регуляризирующего функционала» $S_{\eta,\sigma}[\phi]$ для исходного функционала действия $S[\phi]$. Параметры η и σ фактически играют роль параметров регуляризации. При $\eta=1$ действие $S_{\eta,\sigma}[\phi]$ переходит в исходное

$S[\phi]$. Действие $S_{\eta,\sigma}[\phi]$ необходимо выбрать так, чтобы по теореме Фубини ряд допускал перестановку знака суммы и континуального интеграла. Параметр σ может влиять на скорость сходимости построенного регуляризирующего ряда. На основе построенного сходящегося ряда для модели ϕ^4 скалярного поля делается расширение на случай так называемого «полиномиального» действия $P[\phi]$ с чётной старшей «степенью» взаимодействия. Так как построенный сходящийся ряд в модели ϕ^4, определенной на конечной решётке, при численном моделировании имел существенное замедление скорости сходимости при увеличении объёма решётки V, то в главе 3 было произведено построение вариационного ряда, в котором введен вариационный параметр $\tau = V + \alpha$. Варьируя параметр τ, можно увеличивать скорость сходимости ряда. Подробное рассмотрение области параметров τ и η для сходимости вариационного ряда дает ограничение на $\tau > -2$ и $|\eta| < \eta^* < 1$. Для расширения области сходимости в диапазоне параметров $\eta^* < \eta < 1$ строится новая γ-регуляризация для действия $S_\gamma[\phi] = S[\phi] + \gamma\|\phi\|^6$.

Для рассматриваемой полиномиальной модели, определенной на конечной решётке, показано существование вариационного ряда. Так как свойство сходимости не связано с суммируемостью модели по Борелю, то предложенный метод логично протестировать на моделях, которые не являются суммируемыми по Борелю. Для рассматриваемых полиномиальных моделей, определенных на бесконечной решётке и суммируемых по Борелю, показано существование вариационного и сходящегося ряда.

Произведен расчет двухточечной функции Грина на конечной и бесконечной решётке методом сходящихся рядов, вариационного ряда, суммирования по Борелю и методом Монте-Карло для функциональных интегралов. Предложенный в данной работе метод построения сходящихся рядов был численно верифицирован методом Монте-Карло для функциональных рядов и методом суммирования по Борелю.

По работе имеются замечания:

- На стр. 5 в формулировке теоремы Фубини есть неточности. Во-первых, написано «**Последовательность** $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x)$ сходится равномерно на любом компактном **интервале** в $(-\infty,\infty)\ldots$». Может быть, **ряд** сходится равномерно? Во-вторых, **интервал** в $(-\infty,\infty)$ не является компактным множеством. В-третьих, откуда взята данная формулировка теоремы Фубини? В ссылке [17] диссертационной работы, имеется ссылка на книгу А.Н. Колмогорова, С.В. Фомина «Элементы функционального анализа», в которой формулировка теоремы Фубини (стр. 335) отличается от приведённой в диссертации.

- На стр. 7 недостаточно указать, что $a<1$, a должно быть положительным, так как определяет радиус сходимости $|\lambda t|<1/a$ ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}(-a\lambda t)^n=\frac{1}{1+a\lambda t}$.

- На стр. 8 выражение (1.12) требует корректировки. Во-первых, необходимо заменить $\lambda t(u)$ на $u(\lambda t)$. Во-вторых, дробь (1.12) должна быть перевернутой.

- На стр. 8 переход в выражении (1.14) от переменной λt к функции $u^n(\lambda t)$ требует уточнения, так как при подстановке выражения (1.13) в ряд $\overline{J}(\lambda t)$ коэффициенты $v_n=v_n(u)\sim\frac{g_n}{a^n(1-u)^{2n}}$, то есть зависимость от u сохраняется, более того величина u согласно (1.13) может быть близкой к единице. Следовательно, коэффициенты v_n зависят не только от g_n и a, но и от u.

- В формуле (2.9) (справа) потерян знак минус в показателе экспоненты. Аналогично в формуле (2.12).

- В формуле (2.16) опечатка «$q_1 - q_1$», а должно быть «$q_0 - q_1$».

- В формуле (2.29) в третьей строчке потерян знак минус перед последним слагаемым.

- В формуле (3.5), когда вводится первый раз параметр η (а также в (3.10)), недостаточно написать условие $\eta \le 1$, необходимо указать, что $\eta > 0$.

- Стоит отметить, что неравенство (3.12) не соответствует нижней границе для параметра σ. Квадратичная форма «$-\frac{1}{2}\sum_{\mu}\left(\phi_{n+\mu} + \phi_{n-\mu} - 2\phi_n\right)\phi_n$» является положительной и справедливо условие $\sigma \ge \frac{\lambda}{6M^4(1+\varepsilon)}$, где $\varepsilon > 0$.

- На стр. 47 в определении нормы $\|\phi\| = \left(\frac{1}{2}\phi_n K_{nm}\phi_m\right)^{1/2}$ потерян знак суммирования.

- Используя формулу (3.14), нужно помнить, что слева и справа под одним и тем же обозначением ϕ_n понимаются разные величины.

- В формуле (3.15) степень $V + 4l + 1$ верная, а в тексте ниже опечатка $V + 4l - 1$.

- В формулировке Утверждения на стр. 48 отсутствует математическая строгость. Во-первых, не понятно, что подразумевается под полиномиальным действием $P[\phi]$ с чётной старшей степенью $\deg(P)$. Вообще говоря, полином со степенью $\deg(P)$ может содержать слагаемые $K_{n_1 \ldots n_{\deg(P)}}\phi_{n_1}\ldots\phi_{n_{\deg(P)}}$. В этом случае степень ϕ_{n_s} может варьироваться. Во-вторых, потребуются дополнительные условия на «положительность» формы $K_{n_1 \dots n_{\deg(P)}} \phi_{n_1} \dots \phi_{n_{\deg(P)}}$ для тензора $K_{n_1 \dots n_{\deg(P)}}$ ранга $\deg(P)$. Скорее всего в Утверждении идет речь о простейшем виде $\sum_n K_{n_1 \dots n_{\deg(P)}} \phi_{n_1} \dots \phi_{n_{\deg(P)}} \sim \lambda \|\phi\|^{\deg(P)}$, где $\lambda = const > 0$.

- В формуле (3.35) опечатка, должна быть степень $\tau + 4l + 1$.

- Определение функционала $S_I[\phi] = S[\phi] - N[\phi]$ на стр. 77 после выражения (4.5) требует корректировки, так как противоречит неравенствам (4.5) и выражениям (4.9). Наверное, правильное определение: $S_I[\phi] = S[\phi] - S_2[\phi] = -\frac{\lambda}{4!}\int \phi^4 dx$. В этом случае $N[\phi] - S[\phi] = S_2[\phi] + \sigma S_2^2[\phi] - S[\phi] = \sigma S_2^2[\phi] - S_I[\phi]$.

- В соответствии с (4.11) и (4.12) в выражениях (4.13)-(4.14) потерян множитель «2», аналогично для (4.16) и (4.26)-(4.29). В формуле (4.23) коэффициент «2» присутствует.

- В тексте после выражения (4.16) приведено некорректное математическое выражение: количество открывающихся скобок не равно количеству закрывающихся скобок, а также неверные показатели степени. Корректное выражение должно быть: $\left[\sigma\left(\frac{1}{2}m^2x^2\right)^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4\right]^k = 0$.

- На стр. 91 написано: «Также абсолютная сходимость позволяет изменить порядок операций суммирования и интегрирования (4.28)». Согласно теореме Фубини должна быть еще равномерная сходимость ряда $\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^{4l} f_l}{l!\,\Gamma\left(\frac{w+4l}{2}\right)}$.

В работе имеются опечатки:

- На стр. 1 Оглавление. Глава 2 «Интеграл по траекториЕм в моделях релятивисткой квантовой динамики». Аналогичная ошибка и на стр. 23
- На стр. 2 Оглавление. Глава 3 «СходящиЕЙся ряды для моделей с полиномиальным взаимодействием, определенных на конечной решетке». Аналогичная ошибка на стр. 42.
- На стр. 4 два раза (в начале и в конце страницы) и далее на стр. 9 написано «теория возмущениЯ»
- На стр. 8 написано «…аПроксимации Паде.»
- На стр. 9 «Методы вычислениЕ функциональных интегралов»
- На стр. 11 два раза повторяется «на реЩетке будет» «Евклидово действие (1.16) на реЩетке»
- Стр. 44 написано «Подытоживая свойства метода построения сходящихся Пядов…»

Вместе с тем указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.3.3 — «теоретическая физика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Иванов Александр Сергеевич заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — «теоретическая физика».

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

ПЕРЕПЁЛКИН Евгений Евгеньевич

15.02.2024

Контактные данные:

тел.: +7(495)939-12-90, e-mail: perepelkin@phys.msu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом

защищена диссертация:

05.13.18 – математическое моделирование численные методы и комплексы

программ

Адрес места работы:

119991, г. Москва, Ленинские горы д.1, стр. 2
физический факультет ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Тел.: +7 495 939-16-82; e-mail: info@physics.msu.ru

Подпись профессора кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» Е.Е. Перепёлкина удостоверяю:

Учёный секретарь Учёного совета
физического факультета МГУ
профессор С.Ю. Стремоухов