Отзыв официального оппонента на диссертацию Орловой Анастасии Сергеевны “О сходимости и скорости сходимости жадных приближений в специальных случаях” на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена некоторым специальным вопросам жадных приближений. Суть жадных алгоритмов состоит в том, что вместо поиска глобально оптимального решения делается много “жадных”, то есть локально оптимальных шагов. В простейшем случае разложения по ортонормированному базису в гильбертовом пространстве жадный алгоритм выбирает на каждом шаге максимальный по модулю коэффициент Фурье; после n шагов вместо начального отрезка ряда Фурье мы получаем аппроксимацию, содержащую n самых больших по величине элементов ряда Фурье. Такие аппроксимации изучались С.Б. Стечкиным (1955) в контексте абсолютной сходимости ортогональных рядов. Общая теория жадных алгоритмов аппроксимации была развита в 1990-х годах рядом авторов. Упомянем лишь классические результаты L.K. Jones о сходимости жадного алгоритма в гильбертовом пространстве и оценки R. DeVore и В.Н. Темлякова скорости сходимости такого алгоритма. Жадная аппроксимация остаётся актуальной тематикой: исследуются новые алгоритмы, расширяется область их применения, даются ответы на классические открытые вопросы. Отметим также востребованность разреженной аппроксимации в прикладных задачах. Поэтому актуальность темы диссертации не вызывает сомнений.

В диссертации рассмотрены известные алгоритмы (чисто жадные и ортогональные жадные) в специальных случаях и обнаружены новые интересные эффекты. Также рассмотрен относительно новый и менее изученный алгоритм приближения по двум словарям и проведено полное сравнительное исследование этого алгоритма и его классических вариантов.

Диссертация объёмом 80 страниц состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Во введении даётся краткий исторический обзор тематики, мотивировка результатов и их описание. Первая глава содержит формальные определения жадных алгоритмов.

Вторая и третья глава посвящены слабым жадным алгоритмам в специальных случаях. Напомним определения. Пусть дан словарь D в гильбертовом пространстве и вектор x. В слабом жадном алгоритме с ослабляющей последовательностью $(t_k)_{k=1}^\infty$ на k-м жадном шаге для остатка r_{k-1} (изначально остаток $r_0 := x$) выбирается элемент словаря g_k, удовлетворяющий неравенству

$$|\langle g_k, r_{k-1}\rangle| \geqslant t_k \sup_{g\in D} |\langle g, r_{k-1}\rangle|.$$

В слабом чисто жадном алгоритме мы полагаем $r_k := r_{k-1} - g_k\langle r_{k-1}, g_k\rangle$. В слабом ортогональном жадном алгоритме из r_{k-1} вычитаеся его проекция на подпространство $\mathrm{span}\{g_1, \dots, g_k\}$. Известно (В.Н. Темляков), что при условии

$$\sum_{k=1}^\infty t_k^2 = \infty \tag{1}$$

для произвольного словаря в гильбертовом пространстве и для любого начального вектора x слабый ортогональный жадный алгоритм сходится к x (т.е. остаток стремится к нулю). В теореме 2.1 диссертации доказывается, что в простейшем случае, когда словарь это ортонормированный базис, а x лежит в $A_1(D)$ (в замыкании выпуклой оболочки векторов, пропорциональных векторам из D), условие (1) можно ослабить:

$$\sum_{k=1}^\infty t_k = \infty. \tag{2}$$

Теорема 2.2 даёт оценку скорости сходимости:

$$\sup_{x\in A_1(\{e_k\})} |r_n(x)| = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n t_k)^{-1/2}(1 + o(1)).$$

Отметим, что оценка является асимптотически точной, что встречается относительно редко. Показано, что условие 2 нельзя ослабить. При этом, если в D добавить специальный вектор, то условие (2) не гарантирует сходимости на классе $A_1(D)$. Это составляет содержание теорем 3.2 и 3.4 (тут нужно уже отдельно рассматривать чисто жадный и ортогональный жадный алгоритмы).

В четвёртой главе рассматриваются жадные алгоритмы по паре словарей D_1, D_2. Суть в том, что на нечётных шагах очередной g_k выбирается из первого словаря D_1, а на чётных шагах $g_k \in D_2$. В диссертации доказывается, что следующие способы проводить жадную аппроксимацию различны: А) по паре словарей D_1, D_2; Б) по объединённому словарю $D_1 \cup D_2$; В) по словарям D_1 и D_2 в отдельности. Так, например, в теореме 4.2(I) строятся словари D_1 и D_2 и вектор x такие, что по паре словарей получается сходимость с некоторой скоростью $s_n := |r_{2n+2}(x)|$, однако по каждому словарю в отдельности $|r_{2^n-1}(x)| \geqslant s_n$. В пункте (II) этой же теоремы строятся словари, для которых ситуация обратная. Данная глава содержит довольно полное сравнение пп.А),Б),В) и в ней приходится преодолевать основные технические трудности.

Замечания.

Теоремы 4.1(II) и 4.3(II), по существу, двумерные. Суть в том, что если взять в $\mathbb{R}^2$ словари $D_1 = \{f_1, f_2\}$ и $D_2 = \{(f_1+f_2)/\sqrt{2}, (f_1-f_2)/\sqrt{2}\}$, то при приближении по любому из них достаточно сделать два шага, а при попеременном приближении число шагов будет бесконечно. Правильно было бы формулировать эти теоремы для $\mathbb{R}^2$, дополнительные размерности ничего не дают.

Часть рассуждений можно упростить; много написано излишне формально. На стр.21 вместо рассмотрения функции $f(\alpha) = \sqrt{\alpha}/(\alpha+T_n)$ и её производной достаточно воспользоваться простым неравенством $\sqrt{a}/(a+b) \leqslant 1/(2\sqrt{b})$. Например, на стр. 71 получается остаток r_1, пропорциональный элементу словаря D_2; уже и так ясно, что $r_2 = 0$; не нужно формально считать супремум $\sup_{x\in D_2}\langle r_1^{\mathrm{OGA}(D_1,D_2)}, d\rangle$ и выписывать $e_2^{\mathrm{OGA}(D_1,D_2)}(x)$. Используются громоздкие обозначения. Поскольку везде рассматривается гильбертово пространство, было бы удобнее писать $|x|$ вместо $\|x\|_2$ для нормы вектора. Следует также использовать локальные обозначения. Доказательство теоремы 4.2(II) занимает 6 страниц, и десятки раз используются полные обозначения вида $r_{2n}^{\mathrm{PGA}(D_1,D_2)}(x)$, несмотря на то, что и вектор x и алгоритм фиксированы и можно было бы писать просто r_{2n} или $r(2n)$.

Терминология “множество $A_1(D)$ приближаемых словарём D векторов” неудачная. По определению, линейные комбинации элементов словаря приближают все векторы.

В теореме D (Сильниченко) показатель не в точности равен 0.182, а лишь приближённо; на самом деле это корень определённого уравнения. Это важно в связи с теоремой Siegel–Klusowski о том, что показатель Сильниченко является точным.

Приведённые замечания не влияют на общую оценку работы. В диссертации получены новые, содержательные теоремы, представляющие интерес для специалистов по жадной аппроксимации. Результаты опубликованы в 3 статьях, доложены на нескольких научных семинарах и конференциях.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация А.С. Орловой “О сходимости и скорости сходимости жадных приближений в специальных случаях” удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям и её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
к.ф.-м.н. (специальность 01.01.01),
с.н.с. МИАН,
Москва, ул. Губкина д.8,
+79163903973
malykhin@mi-ras.ru

________________ Малыхин Ю.В.

08.04.2024

Подпись Малыхина Ю.В. заверяю

Заведующий отделом кадров Усачева О. Г.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук * МОСКВА *
ОТДЕЛ КАДРОВ