Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Алмохамед Муатаз

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Специальность
1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре математической физики Факультета вычислительной математики и кибернетики «ВМК» ФГБОУ ВО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова «МГУ».

Научный руководитель: **Тихонов Иван Владимирович**
доктор физико–математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова «МГУ», факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической физики, профессор.

Официальные оппоненты: **Камынин Виталий Леонидович**
доктор физико–математических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Институт общей профессиональной подготовки, кафедра высшей математики, профессор.

Ломов Игорь Сергеевич
доктор физико–математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова «МГУ», факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра общей математики, профессор, и. о. заведующего кафедры.

Федоров Владимир Евгеньевич
доктор физико–математических наук, профессор, Челябинский государственный университет «ЧелГУ», Математический факультет, кафедра математического анализа, профессор, проректор по учебной работе.

Защита диссертации состоится « 27 » декабря 2023 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Россия, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16 -10.

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций фундаментальной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.8/2809.

Автореферат разослан « 27 » ноября 2023 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
МГУ.011.8,
д.ф.-м.н., профессор Чечкин Григорий Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация относится к одному из важных направлений дифференциальных уравнений — теория обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений. Основным вопросом, изучаемым в диссертации, является единственность решения некоторых линейных обратных задач в банаховом пространстве. Как известно, вопрос о единственности решения является одним из центральных в математической физике.

Актуальность рассматриваемой темы обусловлена необходимостью постоянного развития аналитического направления в рамках современной теории дифференциальных уравнений. Важность изучения линейных обратных задач объясняется тем, что такие задачи часто встречаются на практике — как задачи «определения источника», когда заранее неизвестные внешние воздействия на физическую систему восстанавливаются при помощи дополнительных условий («переопределений»).

Степень разработанности темы исследования. Различные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений второго и высших порядков изучаются с 1950 гг. Отметим здесь важные работы Хилле[1,2], Вишика[3], Вишика и Ладыженской[4]. При этом упомянутые работы Хилле[1,2] содержат общую постановку задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ (см. также гл. XXIII книги Хилле и Филлипса[5]). Из последующих наиболее заметных работ по тематике упомянем статьи Прокопенко[6], Фаторини[7,8], Херша[9], Сандефура[10] и Нойбрандера[11]. Имеется специализированная монография Сяо Тиджина и Лян Цзиня[12], целиком посвященная задаче

[1] *Hille E.* Une Généralisation du Problème de Cauchy // Annales de l'Institut Fourier. 1952. T. 4. P. 31–48.

[2] *Hille E.* Sur le Problème Abstrait de Cauchy // Comptes Rendus des Séances de L'Académie des Sciences. 1953. T. 236, № 15. P. 1466–1467.

[3] *Вишик М. И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Матем. сборник. 1956. Т. 39 (81), № 1. С. 51–148.

[4] *Вишик М. И., Ладыженская О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений // Успехи матем. наук. 1956. Т. 11, вып. 6 (72). С. 41–97.

[5] *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 832 с.

[6] *Прокопенко Л. Н.* О единственности решения задачи Коши для операторно-дифференциальных уравнений // Доклады Академии Наук СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1030–1033.

[7] *Fattorini H. O.* Ordinary Differential Equations in Linear Topological Spaces, I // Journal of Differential Equations. 1968. V. 5, № 1. P. 72–105.

[8] *Fattorini H. O.* Ordinary Differential Equations in Linear Topological Space, II // Journal of Differential Equations. 1969. V. 6, № 1. P. 50–70.

[9] *Hersh R.* Explicit Solution of a Class of Higher-Order Abstract Cauchy Problems // Journal of Differential Equations. 1970. V. 8, № 3. P. 570–579.

[10] *Sandefur J. T.* Higher Order Abstract Cauchy Problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1977. V. 60, № 3. P. 728–742.

[11] *Neubrander F.* Well-Posedness of Higher Order Abstract Cauchy Problems // Transactions of the American Mathematical Society. 1986. V. 295, № 1. P. 257–290.

[12] *Xiao T. J., Liang J.* The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations. (Lecture notes in mathematics; 1701). Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. xiv+300 p.

Коши для абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка (см. также диссертацию Сяо Тиджина[13]). Ряд типичных задач для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрен в третьей главе книги Крейна[14]. В последние десятилетия активно изучаются более сложные варианты абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка и неклассических задач для них (см., например, работы Эйдельмана и Тихонова[15], Тихонова[16,17], Поблете и Поцо[18], Лизамы и Мурилло[19], Мурилло-Арчила[20]). В перечисленных публикациях есть множество дополнительных ссылок на сопутствующую литературу, включая указания на некоторые примеры с физическим содержанием (см., например, работу Мурилло-Арчила[20]).

Теория неклассических *обратных задач* для эволюционных дифференциальных уравнений составляет важную часть общей теории обратных задач (см. монографии Денисова[21] и Прилепко, Орловского, Васина[22]). С абстрактной точки зрения эволюционные уравнения часто рассматривают в банаховом пространстве E на конечном отрезке $[0, T]$. Типичная задача: требуется восстановить неизвестную правую часть уравнения при помощи дополнительного условия в финальный момент времени. Обычно финальное условие имеет вид $u(T) = v_T$, где v_T — заданный элемент из E. Будем называть это *финальным переопределением первого рода.* Обратные задачи с таким условием при тех или иных специальных ограничениях для уравнений первого или второго порядков рассматривались многими авторами, среди которых Прилепко[23,24], Искендеров[25], Искендеров и Таги-

[13] *Xiao T. J.* Higher Order Evolution Equations and Dynamic Boundary Value Problems: Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften. Tag der mundlichen Qualifikation 23.12.02. Sichuan, China, 2002.

[14] *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. (Сер.: «Современные проблемы математики»). М.: Наука, 1967. 464 с.

[15] *Eidelman Y. S., Tikhonov I. V.* On Periodic Solutions of Abstract Differential Equations // Abstract and Applied Analysis. 2001. V. 6, № 8. P. 489–499.

[16] *Тихонов И. В.* Структурные свойства нуль-решений абстрактной задачи Коши // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. 2002. Т. 3, № 1. С. 22–38.

[17] *Тихонов И. В.* Абстрактные дифференциальные нуль-уравнения // Функц. анализ и его прилож. 2004. Т. 38, вып. 2. С. 65–70.

[18] *Poblete V., Pozo J. C.* Periodic Solutions of an Abstract Third-Order Differential Equation // Studia Mathematica. 2013. V. 215, № 3. P. 195–219.

[19] *Lizama C., Murillo M.* Well-Posedness for a Fourth-Order Equation of Moore–Gibson–Thompson Type // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2021. № 81. P. 1–18.

[20] *Murillo-Arcila M.* Well-Posedness for the Fourth-Order Moore–Gibson–Thompson Equation in the Class of Banach-Space-Valued Hölder-Continuous Functions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2023. V. 46, № 2. P. 1928–1937.

[21] *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

[22] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel: Marcel Dekker Inc, 2000. 744 p.

[23] *Прилепко А. И.* Обратные задачи теории потенциала. (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнение переноса) // Матем. заметки. 1973. Т. 14, № 5. С. 755–767.

[24] *Прилепко А. И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. С. 151–162.

[25] *Искендеров А. Д.* Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Известия АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук. 1976. № 2. С. 58–63.

ев[26], Ранделл[27], Амиров[28], Эйдельман[29], Прилепко и Соловьев[30], Орловский[31], Прилепко и Костин[32], Камынин[33], Соловьев[34], Костин[35]. Критерий единственности решения для уравнения первого порядка без всяких лишних ограничений получен в работе Тихонова и Эйдельмана[36]. После этого в работе Тихонова и Эйдельмана[37] подходы перенесены на задачу для уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ с финальным переопределением первого рода. В последующей работе Тихонова[38] показано, что разработанный метод применим к краевым задачам для дифференциальных уравнений высокого порядка. Имеются также обобщения на случай уравнений с дробной производной, (см., например, работы Глушака[39], Федорова и Нагумановой[40,41], Костина и Пискарева[42]).

Для уравнений второго порядка представляет интерес также *финальное переопределение второго рода*, когда при $t = T$ задано значение производной $u'(T) = v_T$. Возможно, что задачи с последним условием еще не изучены с должной подробностью. Отметим

[26] *Искендеров А. Д., Тагиев Р. Г.* Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Вопросы прикл. матем. и киберн. Науч. труды Азербайджанского ун-та. 1979. № 1. С. 51–56.

[27] *Rundell W.* Determination of an Unknown Non-Homogeneous Term in a Linear Partial Differential Equation from Overspecified Boundary Data // Applicable Analysis. 1980. V. 10, № 3. P. 231–242.

[28] *Амиров А. Х.* О разрешимости обратных задач для уравнения второго порядка // Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20, вып. 3. С. 80–81.

[29] *Эйдельман Ю. С.* Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1647–1649.

[30] *Прилепко А. И., Соловьёв В. В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. II // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 11. С. 1971–1980.

[31] *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.

[32] *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.

[33] *Камынин В. Л.* Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения // Матем. заметки. 2003. Т. 73, вып. 2. С. 217–227.

[34] *Соловьев В. В.* Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестник МГОУ. Сер. Физика–Математика. 2012. № 1. С. 27–38.

[35] *Костин А. Б.* Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2014. Т. 54, № 5. С. 779–792.

[36] *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1132–1133.

[37] *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637–644.

[38] *Тихонов И. В.* Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 325–336.

[39] *Глушак А. В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. заметки. 2010. Т. 87, вып. 5. С. 684–693.

[40] *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто в секториальном случае // Известия Иркутского гос. университета. Серия Математика. 2019. Т. 28. С. 123–137.

[41] *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры ВИНИТИ. 2019. Т. 167. С. 97–111.

[42] *Kostin A. B., Piskarev S. I.* Inverse Source Problem for the Abstract Fractional Differential Equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. V. 54, № 5. P. 1–15.

здесь лишь результаты Прилепко, Орловского, Васина[43], где для уравнений «эллиптического типа» рассматривалась линейная обратная задача с финальным переопределением общего вида $\alpha\, u(T) + \beta\, u'(T) = v_T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, включающим в себя оба упомянутых выше условия. Подобное соотношение в случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, будем называть *переопределением третьего рода.*

Цель и задачи диссертации. Целью диссертационной работы является дальнейшее развитие теории линейных обратных задач с различными финальными условиями для эволюционных уравнений второго и высших порядков.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи.

1. Для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка получить критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением второго рода $u'(T) = v_T$ (без ограничений на тип эволюционного уравнения).

2. Для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка получить критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением третьего рода $\alpha\, u(T) + \beta\, u'(T) = v_T$ (без ограничений на тип эволюционного уравнения).

3. Исследовать распределение нулей характеристической целой функции, возникающей при изучении обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.

4. Указать достаточные признаки единственности решения обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.

5. Для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка построить присоединенные решения линейной однородной обратной задачи в тех случаях, когда соответствующая характеристическая целая функция имеет кратные нули.

6. Для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ установить критерий единственности решения модельной обратной задачи со специальным переопределением вида $u^{(q)}(T) = v_T$ (без ограничений на тип эволюционного уравнения).

7. Исследовать распределение нулей характеристической целой функции, возникающей при изучении обратной задачи для дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$. Использовать связи с теорией целых функций типа Миттаг-Леффлера.

8. Указать достаточные признаки единственности решения линейной обратной задачи для дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$.

[43] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel: Marcel Dekker Inc, 2000. (См. там гл. 8, разд. 3.)

9. Особо отметить явный критерий единственности решения обратной задачи для уравнения четвертого порядка с финальным переопределением $u''(T) = v_T$ (новый элементарный случай).

Поставленные задачи нашли полное решение при подготовке настоящей диссертации.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Показано, что обратная задача с финальным переопределением второго рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка допускает полное исследование с точки зрения единственности решения. Результат (критерий единственности решения) имеет универсальный характер и применим ко всем эволюционным уравнениям второго порядка вида $u''(t) = Au(t) + g$ с линейным замкнутым оператором A и неизвестным элементом g из банахова пространства E.

2. На основе классических результатов из теории целых функций (принцип Фрагмена-Линделефа, теорема Мюнца) доказан критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением третьего рода. Подобное условие рассматривалось ранее лишь при специальных ограничений на тип дифференциального уравнения второго порядка. От этих ограничений удалось отказаться, что позволило существенно расширить круг возможных примеров.

3. Получены результаты по распределению нулей возникающей характеристической функции, содержащей линейную комбинацию двух элементарных целых функций порядка $1/2$. Указаны типичные конфигурации нулей в зависимости от выбираемых коэффициентов.

4. Найден ряд эффективных признаков единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением третьего рода. Все утверждения носят конструктивный характер и легко проверяются в конкретных примерах из математической физики.

5. Для уравнения второго порядка построены присоединенные решения линейной однородной обратной задачи в тех случаях, когда соответствующая характеристическая целая функция имеет кратные нули. Приведены конкретные примеры обратных задач, где реализуются присоединенные решения.

6. Рассмотрена общая постановка модельной обратной задачи с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{ 0, \ldots, n-1 \}$. Здесь n — порядок абстрактного дифференциального уравнения, а q — порядок производной в финальном условии. В подобной общности обратная задача прежде не изучалась. Без специальных ограничений на тип эволюционного уравнения удалось получить универсальный критерий единственности решения

обратной задачи. Результат носит завершенный характер и требует для доказательства использования некоторых тонких принципов из теории целых функций.

7. В модельной обратной задаче с параметрами n, q указан ряд эффективных достаточных признаков единственности решения. Они получаются путем сравнения спектра основного оператора из дифференциального уравнения с нулями характеристической функции, относимой классу целых функций типа Миттаг-Леффлера. Выделены случаи, когда нули находятся элементарно (в явном виде).

8. Отдельно указан конкретный критерий единственности решения обратной задачи для уравнения четвертого порядка с параметрами $n = 4$ и $q = 2$ в связи с явным нахождением здесь нулей характеристической функции. Приведены соответствующие примеры для уравнений в частных производных.

Теоретическая и практическая значимость. Рассмотренные обратные задачи в общей постановке могут найти применение в математической физике как задачи о нахождении дополнительных источников в физической системе по заданной информации о следах основной неизвестной функции. Использование языка абстрактных дифференциальных уравнений существенно расширяет круг возможных примеров и делает наглядной схему исследования обратных задач. Возникающие спектральные соотношения обеспечивают связь с теорией целых функций, предлагая новые задачи в этой области. Вопрос о распределении нулей целых функций типа Миттаг-Леффлера находится в центре внимания крупных аналитиков в последние десятилетия, и связи с обратными задачами здесь весьма перспективны. Кроме того, на основе проведенных исследований можно выполнять численные расчеты, связанные с обратными задачами.

Методология и методы исследования. Основным используемым аппаратом является современная теория дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наши постановки обратных задач согласуются с общими подходами, принятыми в московской школе А. И. Прилепко. При достижении поставленных научных целей важную роль играют средства комплексного анализа, связанные с целыми функциями одной переменной. Активно используются целые функции типа Миттаг-Леффлера, а также применяются теоремы Фрагмена-Линделефа и подходящий вариант теоремы Мюнца. Доказательства некоторых результатов проведены по методу работ Тихонова и Эйдельмана (см. ссылки [36, 37, 38] выше). Кроме того, ряд технических расчетов, связанных с распределением нулей характеристических целых функций, выполнен с использованием современных систем компьютерной математики.

Положения, выносимые на защиту:

- Критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением второго рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка без ограничений на тип эволюционного уравнения.
- Критерий единственности решения линейной обратной задачи с финальным переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка без ограничений на тип эволюционного уравнения. Ряд эффективных достаточных признаков единственности решения.
- Исследование присоединенных решений линейной однородной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка.
- Критерий единственности решения модельной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ с переопределением, содержащим производную искомой функции в выбранный финальный момент времени (также без ограничений на тип эволюционного уравнения).
- Новый случай линейной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка, где критерий единственности решения принимает законченный элементарный вид.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами. Все результаты с полными доказательствами были представлены на научном семинаре «Анализ и его приложения» Института математики и информатики МПГУ (руководители — профессора Г. Г. Брайчев, И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков). Большинство результатов представлено также на специализированном семинаре «Обратные задачи математической физики и естествознания» Механико-математического факультета МГУ (руководители — профессор А. И. Прилепко и академик В. А. Садовничий). Еще несколько докладов по тематике диссертации было сделано на факультете Вычислительной математики и кибернетики МГУ: на научном семинаре по обратным задачам (руководители — профессора А. В. Баев, А. М. Денисов, И. В. Тихонов) и на научном семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» (руководители — профессор И. С. Ломов и академик Е. И. Моисеев). Также результаты докладывались на международных научных конференциях. Основные результаты каждой главы опубликованы в научных журналах должного уровня (Web of Science, Scopus, ВАК РФ; см. список публикаций в конце автореферата).

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов. Различные части исследования докладывались на шестнадцати международных научных конференциях, в том числе один доклад носил обзорный характер (Санкт-Петербург, РГПУ им. А. И. Герцена, 2023 г.). Представим в следующем списке точные названия конференций.

- Международная конференция: Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (**Воронеж**, 28 января – 02 февраля 2019 г.).
- LXXII Научная конференция: Герценовские чтения – 2019 «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» (**Санкт-Петербург**, РГПУ им. А. И. Герцена, 08 – 12 апреля 2019 г.).
- Международная конференция памяти академика А. А. Самарского к 100-летию со дня рождения «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (**Москва**, ВМК МГУ, 18 – 20 июня 2019 г.).
- 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences: ICMMAS 2019 (**Russia**, **Belgorod**, BSU, 20 – 24 august 2019).
- 20-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (**Саратов**, 28 января – 01 февраля 2020 г.).
- XXI Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (**Смоленск**, СмолГУ, 22 – 23 мая 2020 г.).
- Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» (**Узбекистан**, **Ташкент**, 17 – 18 ноября 2020 г.).
- Международная конференция: Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (**Воронеж**, 28 января – 02 февраля 2021 г.).
- Научная сессия Московского педагогического государственного университета (**Москва**, МПГУ, 15 марта 2021 г.).
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (**Белгород**: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 25 – 29 октября 2021 г.).
- Научная конференция: «Тихоновские чтения» (**Москва**, ВМК МГУ, 25 – 30 октября 2021 г.).

- 21-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (**Саратов**, 31 января – 04 февраля 2022 г.).

- XXIII Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (**Смоленск**, СмолГУ, 27 – 28 мая 2022 г.).

- Научная конференция: «Тихоновские чтения»
(**Москва**, ВМК МГУ, 24 – 28 октября 2022 г.).

- LXXVI Герценовские чтения: международная научная конференция «Современные проблемы математики и математического образования»
(**Санкт-Петербург**, РГПУ им. А. И. Герцена, 18 – 20 апреля 2023 г.).

- XXIV Международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (**Смоленск**, СмолГУ, 26 – 27 мая 2023 г.).

Публикации. По теме исследования опубликовано 20 работ [1–20]. Из них статья [1] в журнале из списка ВАК РФ с переводом в журнале, индексируемом в *Web of Science*, *Scopus*, *RSCI*; статья [2] в журнале, индексируемом в *Scopus*, *RSCI*; статья [3] в журнале, индексируемом в *Web of Science*, *Scopus*, *RSCI*; статья [4] в журнале из списка ВАК РФ; и шестнадцать работ [5–20] в сборниках трудов научных конференций.

Личный вклад автора. Автором решены все поставленные задачи: установлены критерии единственности решения линейных обратных задач для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка с финальными переопределениями второго и третьего рода (оба критерия — без ограничений на тип эволюционного уравнения); исследовано распределение нулей возникающей характеристической целой функции; получены эффективные достаточные признаки единственности решения линейной обратной задачи с переопределением третьего рода; исследованы присоединенные решения линейной однородной обратной задачи. Кроме того, для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ установлен критерий единственности решения модельной обратной задачи с переопределением, содержащим производную искомой функции в выбранный финальный момент времени (без ограничений на тип эволюционного уравнения); здесь также исследовано распределение нулей возникающей характеристической функции (связанной с функциями типа Миттаг-Леффлера) и получены эффективные достаточные признаки единственности решения обратной задачи. Отдельно установлен новый элементарный критерий единственности решения обратной задачи, действующий для уравнения четвертого порядка.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 127 страниц, включая один рисунок. Список литературы состоит из 115 наименований.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствуют паспорту специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физико-математические науки).

Области исследований: 2. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. 3. Спектральные задачи для дифференциальных операторов. 8. Аналитическая теория дифференциальных уравнений. 10. Теория дифференциально-операторных уравнений. 11. Теория функционально-дифференциальных уравнений и нелокальных краевых задач.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, отмечена значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В основных трех главах рассматриваются модельные обратные задачи для эволюционных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Охарактеризуем материал по каждой главе отдельно, но прежде зафиксируем следующие общие положения.

Все обсуждаемые обратные задачи являются линейными. Всюду в работе используем обозначения: E — комплексное банахово пространство; A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в E); $T > 0$ — фиксированное число (финальный момент времени). Специально подчеркнем, что основные полученные результаты, предполагают лишь минимальные ограничения на A типа линейности и замкнутости.

Перейдем к обзору основного текста диссертации. Нумерация приводимых теорем и формул соответствует их нумерации в диссертации.

Во вводной главе 1 (§§ 1 – 3) изучается обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка со стандартными условиями Коши и *финальным переопределением второго рода* — когда в финальный момент времени задано значение производной от основной эволюционной функции. Это наиболее простая модель, дающая ориентиры для последующих результатов.

Краткий § 1 посвящен точной постановке задачи

$$u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 < t < T, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{1.2}$$

$$u'(T) = u_2, \tag{1.3}$$

с неизвестной функцией $u\colon [\,0, T\,] \to E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Здесь u_0, u_1, u_2 — заданные элементы в E.

Решением задачи считаем пару $(u(t), g)$, удовлетворяющую всем соотношениям в системе (1.1)–(1.3). При этом предполагаем, что

$$u \in C^2(\,(0,T\,),\,E\,) \cap C^1(\,[\,0,T\,],\,E\,) \quad \text{и} \quad u(t) \in D(A) \quad \text{при} \quad 0 < t < T.$$

Обратная задача (1.1)–(1.3) называется *однородной*, если $u_0 = u_1 = u_2 = 0$.

Следующий § 2 делится на три пункта. В первом, в предположении, что какое-то из чисел $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ с некоторым $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$, получено нетривиальное элементарное решение

$$u_k(t) = \frac{T^2}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{k\pi t}{T}\right) f_k, \qquad g_k = f_k$$

для однородной версии обратной задачи (1.1)–(1.3). Методом разделения переменных дается общая схема для нахождения подобных решений, после чего проверка полученного производится просто — с учетом условий $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ и $Af_k = \lambda_k f_k = (-k^2\pi^2/T^2)f_k$.

Во втором пункте § 2 установлен критерий единственности решения (теорема 2.1) с полным доказательством для однородной обратной задачи. Результат перенесен на обратную задачу (1.1)–(1.3).

Теорема 2.2. *Для того чтобы обратная задача* (1.1)–(1.3) *при любом выборе элементов* $u_0, u_1, u_2 \in E$ *имела не более одного решения* $(u(t), g)$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

не являлось собственным значением оператора A.

Во третьем пункте § 2 сформулирован удобный достаточный признак единственности решения (теорема 2.3).

Далее, в § 3, показывается, как реализуются полученные результаты применительно к обратным задачам для некоторых уравнений в частных производных. Параграф делится на два пункта. В первом рассмотрены модельные примеры для простых уравнений типа колебания струны и Пуассона в прямоугольнике, а во втором — обратная задача для трехмерного уравнения Пуассона, взятого в цилиндрической области. Представленные результаты носят иллюстративный характер.

В главе 2 (§§ 4−8) для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка изучается обратная задача с условиями Коши, как в первой главе, но с *переопределением третьего рода*, содержащим комбинацию значений эволюционной функции и ее производной в заданный финальный момент времени $T > 0$. Здесь ситуация намного сложнее и исследование требует больших усилий.

Постановка задачи дана в § 4. В банаховом пространстве E рассматриваем соотношения

$$u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 < t < T, \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1, \tag{4.2}$$

$$\alpha u(T) + \beta u'(T) = u_2, \tag{4.3}$$

с неизвестной функцией $u\colon [\,0, T\,] \to E$ и неизвестным элементом $g \in E$. Выбранные элементы u_0, u_1, $u_2 \in E$ и числовые значения α, $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ считаем заданными. Понятие решения вводим аналогично тому, как это сделано в главе 1. Обратная задача (4.1)–(4.3) называется *однородной*, если $u_0 = u_1 = u_2 = 0$.

Следующий § 5 делится на два пункта. В первом из них с однородной версией задачи (4.1)–(4.3) связывается ее скалярная модель и характеристическая целая функция

$$L(\lambda) \;=\; \alpha\, L_1(\lambda) + \beta\, L_2(\lambda) \;\equiv\; \alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, T - 1}{\lambda} \;+\; \beta\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, T}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.12}$$

В предположении, что некоторый нуль $\lambda = a$ функции (5.12) является собственным значением оператора A с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$, для однородной версии обратной задачи (4.1)–(4.3) получено нетривиальное элементарное решение вида

$$u(t) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{a}\, t - 1}{a}\, f, \qquad g = f. \tag{5.14}$$

Формула (5.14) допускает также прямую проверку подстановкой в систему (4.1)–(4.3) с учетом условий $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ и $Af = af$.

Во втором пункте § 5 сформулирован следующий критерий единственности решения обратной задачи (4.1)–(4.3).

Теорема 5.1. *Предположим, что при некоторых элементов* u_0, u_1, $u_2 \in E$ *обратная задача* (4.1)–(4.3) *имеет решение* $(u(t), g)$. *Для того чтобы это решение было единственным необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции* $L(\lambda)$ *из формулы* (5.12) *не являлся собственным значением оператора* A.

После этого, в теореме 5.2, приведена эквивалентная версия критерия для однородного случая обратной задачи (4.1)–(4.3).

Далее, в § 6, установлено полное доказательство теорем 5.1 и 5.2. Сначала обсуждаются технические факты, связанные с целыми функциями $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ и с образованной из них характеристической функцией (5.12). Затем следует основное доказательство. Оно является нетривиальным и довольно объемным (около двенадцати страниц). Существенную роль здесь играют соображения из теории функций (оценки поведения функций на мнимой оси, принцип Фрагмена–Линделефа, теорема Мюнца и т. п.).

Отдельный § 7 посвящен распределению нулей характеристической функции (5.12) в зависимости от выбора параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Эта информация важна для применения полученного критерия единственности (см. теорему 5.1 выше). Приводятся общие сведения про нули, их кратности и локализацию в некоторых специальных случаях. Здесь же (на основе результатов о распределении нулей) сформулированы эффективные условия единственности и неединственности решения, относимые к изучаемой обратной задаче (4.1)–(4.3). Все установленные утверждения (теоремы 7.7–7.18) имеют простые формулировки и допускают непосредственную проверку при выборе конкретных примеров из математической физики.

Следующий § 8 посвящен *присоединенным решениям*, иногда возникающим в однородной обратной задаче (4.1)–(4.3). Этот существенно новый эффект был обнаружен при подготовке диссертации. Исследование показывает, что характеристическая целая функция $L(\lambda)$ из формулы (5.12) может иметь кратные нули кратности два при некоторых сочетаниях параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, $T > 0$. Допустим, что $\lambda = a$ — именно такой кратный нуль, т. е. $L(a) = L'(a) = 0$. В предположении, что то же число оказалось кратным собственным значением оператора A с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$, и присоединенным вектором $f^+ \in D(A^2)$, $f^+ \neq 0$ (когда $Af = af$ и $Af^+ = af^+ + f$), получено присоединенное решение соответствующей однородной обратной задачи:

$$u(t) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) - 1}{a}\, f^+ + \frac{\sqrt{a}\,t\,\operatorname{sh}(\sqrt{a}\,t) - 2\operatorname{ch}(\sqrt{a}\,t) + 2}{2a^2}\, f, \qquad g = f^+. \tag{8.9}$$

Пары вида (8.9) являются независимыми по отношению к элементарным решениям (5.14). Показано, что формула (8.9) допускает реализацию на практике: в гильбертовом пространстве $E = L_2(0, l)$ для несамосопряженных операторов A с кратными спектрами приведены примеры конкретных обратных задач, имеющих присоединенные решения. Очень полезной здесь оказалась идея В. А. Ильина[44,45], позволяющая строить операторы A с нужными свойствами (дальнейшее развитие теории несамосопряженных операторов Ильина представлено в недавних монографиях Ломова[46,47]).

В главе 3 (§§ 9 – 15) изучается модельная обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ с условиями Коши и специальным финальным переопределением.

[44] *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 796–799.

[45] *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.

[46] *Ломов И. С.* Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. I. Оператор второго порядка. Базисность и равномерная сходимость спектральных разложений. М.: МАКС Пресс, 2019. 132 с.

[47] *Ломов И. С.* Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. II. Оценки скорости равносходимости спектральных разложений. М.: МАКС Пресс, 2023. 380 с.

Вводный § 9 носит подготовительный характер. Сначала дается краткий обзор по теории так называемых *обобщенных экспонент* или, как говорят еще, *обобщенных* λ*-гиперболических функций*[48] вида

$$y_{n,m}(t,\lambda) = \frac{t^m}{m!} + \lambda\,\frac{t^{n+m}}{(n+m)!} + \lambda^2\,\frac{t^{2n+m}}{(2n+m)!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\,\frac{t^{jn+m}}{(jn+m)!}\,. \tag{9.1}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. При $t = 1$ и $\lambda = z$ вводится основное, нужное семейство целых функций $Y_{n,m}(z) = y_{n,m}(1,z)$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, со следующей явной формулой

$$Y_{n,m}(z) = \frac{1}{m!} + \frac{z}{(n+m)!} + \frac{z^2}{(2n+m)!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(jn+m)!}\,, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{9.14}$$

Отмечается связь $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\, m+1)$ с функциями типа Миттаг-Леффлера[49]

$$E_\rho(z;\,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\rho^{-1}+\mu)}\,, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ — два параметра, а Γ — символ гамма-функции. Для каждой из функций $Y_{n,m}(z) = E_{1/n}(z;\, m+1)$ рассматриваем (бесконечное) множество нулей

$$\Lambda_{n,m} \equiv \big\{\, z \in \mathbb{C} : Y_{n,m}(z) = 0 \,\big\} = \big\{\, z_k(n,m) \,\big\}_{k\in J} \tag{9.21}$$

с индексацией $k \in J = J(n,m) \subseteq \mathbb{Z}$, проведенной без учета кратности. Выделены три элементарных случая $\Lambda_{1,1}$, $\Lambda_{2,2}$ и $\Lambda_{2,1}$, когда все нули находятся явно.

Следующий § 10 посвящен точной постановке общей обратной задачи с фиксированными значениями $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{\, 0, \ldots, n-1 \,\}$. Рассматриваем соотношения

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{10.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \ldots\;, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \tag{10.2}$$

$$u^{(q)}(T) = u_n. \tag{10.3}$$

Все элементы $u_0, \ldots, u_n \in E$ считаем заданными. Неизвестными, как и ранее, являются функция $u\colon [\,0,T\,] \to E$ и элемент $g \in E$. Предполагаем, что

$$u \in C^n((\,0,T\,),E) \cap C^{n-1}([\,0,T\,],E) \quad \text{и} \quad u(t) \in D(A) \quad \text{при} \quad 0 < t < T.$$

Обратная задача (10.1)–(10.3) называется *однородной*, если $u_0 = \ldots = u_n = 0$.

[48] *Muldoon M. E., Ungar A. A.* Beyond Sin and Cos // Mathematics Magazine. 1996. V. 69, № 1. P. 3–14.
[49] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Отдельно отмечаются специальные, изученные ранее, случаи задачи (10.1)–(10.3) с параметрами: а) $n = 1$ и $q = 0$; б) $n = 2$ и $q = 0$ или $q = 1$. Эти случаи включены сейчас в общую схему с некоторыми особенностями при рассмотрении.

Далее, в § 11, сформулирован наш основной критерий единственности решения.

Теорема 11.1. *Для того чтобы обратная задача* (10.1)–(10.3) *с фиксированными значениями* $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{0, \ldots, n-1\}$ *при любом выборе элементов* $u_0, \ldots, u_n \in E$ *имела не более одного решения* $(u(t), g)$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = \lambda_k(n, n-q) = \frac{z_k(n,\, n-q)}{T^n}, \qquad k \in J = J(n, n-q) \subset \mathbb{Z}, \tag{11.1}$$

не являлось собственным значением оператора A. *Здесь* $z_k = z_k(n,\, n-q)$ — *нули целой функции* $Y_{n,\, n-q}(z)$ *из семейства* (9.14) (*см. также формулу* (9.21)).

Для упомянутых выше специальных случаев при $n = 1$ и $n = 2$ приведены отдельные формулировки критерия единственности решения (теоремы 11.2 – 11.4), совпадающие с прежними результатами Тихонова, Эйдельмана и автора. Тем самым, теорема 11.1 охватывает все допустимые ситуации.

Последующий § 12 содержит полное доказательство основного результата. Параграф разбит на несколько пунктов. Сначала рассматривается однородная версия обратной задачи (10.1)–(10.3), для которой дана своя отдельная формулировка критерия единственности (см. теорему 12.1). Затем показана *необходимость* условия из критерия единственности: в предположении, что некоторое число λ_k из формулы (11.1) является собственным значением оператора A с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$, $Af_k = \lambda_k f_k$, для однородной обратной задачи получено нетривиальное элементарное решение вида

$$u(t) = y_{n,n}(t, \lambda_k)\, f_k, \qquad g = f_k. \tag{12.16}$$

Здесь $y_{n,n}(t, \lambda)$ — функция из семейства (9.1). Отдельно рассмотрены пары (12.16) для специальных случаев $n = 1$ и $n = 2$. Здесь результаты совпадают с полученными ранее.

Заключительная, весьма объемная часть § 12 посвящена доказательству *достаточности* условия в критерии единственности для задачи (10.1)–(10.3). Выводятся соответствующие операторные соотношения, анализ которых осуществлен при помощи «метода частных» Б. Я. Левина. Ключевую роль здесь играет один прием Карлемана[50], использующий теорему Вимана о поведении целых функций порядка $\rho < 1/2$. Как и в главе 2, завершение доказательства основано на теореме Мюнца.

Поскольку полученный критерий единственности решения задачи (10.1)–(10.3) тесно связан с нулями целых функций $Y_{n,m}(z)$ из семейства (9.14), то вопросу распределения этих нулей посвящен отдельный § 13.

[50] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Часть вторая. Изд. 3-е. М.: Наука, 1978. 432 с. (См. пример 199 из отд. 4, гл. 3, § 5.)

Известны три специальные множества $\Lambda_{1,1}$, $\Lambda_{2,2}$, $\Lambda_{2,1}$ вида (9.21), когда все нули вычисляются явно. Основной интерес для нас представляют прочие $\Lambda_{n,m}$ при $n \geqslant 3$, где явное вычисление нулей весьма затруднительно. Здесь были использованы недавние результаты Попова и Седлецкого[51], на основании которых показано, что все числа (11.1) при $n \geqslant 3$ и $q \in \{\,0,\,1,\,\dots\,,\,n-1\,\}$ являются вещественными и отрицательными, причем

$$\lambda_k = \lambda_k(n, n-q) = -\left(\frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \left(k - \frac{1}{2} + \frac{n-q}{n} \right) + \varepsilon_k \right)^n \Big/ T^n$$

с нумерацией $k \in \mathbb{N}$ и значениями $\varepsilon_k = \varepsilon_k(n,\, n{-}q)$, экспоненциально стремящимся к нулю при $k \to \infty$.

Особо отмечены функции $Y_{4,m}(z)$ при $m = \{-2,\,0,\,2\}$, для которых нули вычисляются явно. В развитии одной идеи И. В. Тихонова[52], показано, что

$$\Lambda_{\,4,m} = \left\{ -4 \left(k + \frac{m-2}{4} \right)^4 \pi^4 \right\}_{k\in\mathbb{N}}, \qquad m = -2,\, 0,\, 2. \tag{13.10}$$

Этот интересный случай дополняет общую теорию А. Ю. Попова и А. М. Седлецкого и позволяет сформулировать отдельную, вполне завершенную версию критерия единственности для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка (см. теорему 14.7 ниже).

Далее, в § 14, устанавливаются некоторые следствия. Параграф делится на два пункта. В первом, на основе полученных результатов о нулях характеристической функции, отмечен ряд достаточных признаков единственности решения, действующих для общей обратной задачи (10.1)–(10.3). Приведем типичный пример, пригодный для случая $n \geqslant 3$.

Теорема 14.5. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E. Обратная задача* (10.1)–(10.3) *с фиксированными $n \geqslant 3$, $q \in \{\,0,\,\dots\,,\,n-1\,\}$ при любом выборе значения $T > 0$ и элементов $u_0,\,\dots\,,\,u_n \in E$ имеет не более одного решения $(u(t), g)$, если у оператора A нет собственных значений на луче*

$$M = M(n,q,T) \equiv \big(\, -\infty,\; -\,T^{-n}(\,2n-q\,)!/(\,n-q\,)!\;\big) \subset \mathbb{R}.$$

Компьютерная проверка показывает, что верхняя граница в указанном множестве является достаточно точной.

[51] *Попов А. Ю., Седлецкий А. М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.

[52] *Тихонов И. В.* Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 325–336.

Во втором пункте § 14 рассматривается специальный случай обратной задачи для уравнения четвертого порядка:

$$\frac{d^4u(t)}{dt^4} = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{14.2}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0, \tag{14.3}$$

$$u''(T) = 0, \tag{14.4}$$

где критерий единственности приобретает особенно простой вид.

Теорема 14.7. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E. Для того чтобы однородная обратная задача* (14.2)–(14.4) *имела на* $(0, T)$ *только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{4k^4\pi^4}{T^4}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{14.5}$$

не являлось собственным значением оператора A.

Числа (14.5) получаются согласно (11.1) на основе явно найденных нулей из множества $\Lambda_{4,2}$ (см. формулу (13.10) при $m = 2$).

В предположении, что какое-то число $\lambda_k = -4k^4\pi^4/T^4$ с некоторым $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$, для обратной задачи (14.2)–(14.4) указано нетривиальное элементарное решение

$$u(t) = \frac{T^4}{4k^4\pi^4} \left(1 - \cos\frac{k\pi t}{T} \, \mathrm{ch}\,\frac{k\pi t}{T}\right) f_k, \qquad g = f_k. \tag{14.8}$$

При проверке соотношений (14.2)–(14.4) используется то, что $Af_k = (-4k^4\pi^4/T^4)f_k$.

Завершает основной текст § 15, в котором приведены конкретные примеры обратных задач для уравнений в частных производных четвертого порядка. Здесь реализуются идеи, связанные с задачей (14.2)–(14.4) и ее возможными решениями вида (14.8). Все отмечаемые примеры неединственности выражаются через элементарные функции.

Заключение

Итак, основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

- Без ограничений на тип абстрактного дифференциального уравнения второго порядка установлены критерии единственности решения для линейных обратных задач с переопределениями второго и третьего рода.

- Получены результаты по распределению нулей характеристической целой функции, возникшей при изучении обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.

- На основании результатов о распределении нулей характеристической целой функции установлены эффективные достаточные признаки единственности решения обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.

- Указаны конструкции присоединенных решений однородной обратной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в тех случаях, когда соответствующая характеристическая целая функция имеет кратные нули.

- Без ограничений на тип абстрактного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$ установлен критерий единственности решения модельной обратной задачи с переопределением, содержащим производную искомой функции в выбранный финальный момент времени.

- Без ограничений на тип и порядок уравнения получены эффективные достаточные признаки единственности решения изучаемой линейной обратной задачи.

- Обнаружен новый пример обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения четвертого порядка, где вопрос единственности решения допускает полное исследование в элементарных терминах.

Результаты диссертационной работы представляют интерес для специалистов, работающих в области теории дифференциальных уравнений, математического анализа и теории функций.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Ивану Владимировичу Тихонову за постановку задач, внимание к работе и постоянную помощь в исследованиях. Автор благодарен также Антону Юрьевичу Попову и Владимиру Борисовичу Шерстюкову за ценные консультации по теории целых функций.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. Тихонов И. В., Алмохамед М. Обратная задача с переопределением третьего рода для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 890–911. — (Входит в перечень ВАК РФ, импакт-фактор РИНЦ 2022 — 1.052). Перевод:

Tikhonov I. V., Almohamed M. Inverse Problem with Overdetermination of the Third Kind for an Abstract Second-Order Differential Equation // Differential Equations. — 2022. — V. 58, № 7. — P. 877–898. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, CiteScore 2022 — 1.2).

2. Алмохамед М., Тихонов И. В. Примеры присоединенных решений в линейных обратных задачах // Челябинский физико-математический журнал. — 2022. — Т. 7, вып. 4. — С. 395–411. — (RSCI, Scopus, CiteScore 2022 — 0.7).

3. Almohamed M., Tikhonov I. V. Specific Cases of One General Inverse Problem for Abstract Differential Equations // Lobachevskii journal of mathematics. — 2023. — V. 44, № 2. — P. 502–509. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five year Impact Factor 2022 — 0.6, CiteScore 2022 — 1.5).

В работах [1, 2, 3] автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты, а соавтором — Тихоновым И. В. поставлены задачи и указаны направления проводимых исследований.

Иные публикации автора по теме диссертации

4. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2019. — № 3. — С. 50–58. — (Входит в перечень ВАК РФ, пятилетний импакт-фактор РИНЦ 2018 — 0.421).

5. Алмохамед М. Критерий единственности решения в одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 19–20. (РИНЦ).

6. Тихонов И. В., Алмохамед М. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения высокого порядка в банаховом пространстве // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2019. Материалы научной конференции. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. — С. 91–95. (РИНЦ).

7. Тихонов И. В., Алмохамед М. Единственность решения обратной задачи с финальным условием для эволюционного уравнения произвольного порядка // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Международная конференция. Тезисы докладов. — Москва: Издательский отдел ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2019. — С. 64.

8. Almohamed M., Tikhonov I. V. Uniqueness of the Solution in the Inverse Problem for an Evolution Equation of Arbitrary Order // Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS'19. — Belgorod, Russia: BSU, 2019. — P. 25–26. (РИНЦ).

9. Алмохамед М. Восстановление правой части в уравнении Пуассона при помощи специальных краевых условий // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2020. — С. 30–32. (РИНЦ).

10. Тихонов И. В., Алмохамед М. Обобщенные экспоненты и их применение в теории дифференциальных уравнений // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XXI Международной научной конференции. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. — Вып. 21. — С. 345–353. (РИНЦ).

11. Тихонов И. В., Алмохамед М. Спектральная теория линейных обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка // Современные методы математической физики и их приложения: тезисы докладов. — Ташкент, 2020. — № 1. — С. 105–107.

12. Алмохамед М., Тихонов И. В. Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 36–38. (РИНЦ).

13. Алмохамед М., Тихонов И. В. Единственность решения в модельной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сборник материалов международной конференции. — Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. — С. 19–21. (РИНЦ).

14. Тихонов И. В., Алмохамед М. Линейная обратная задача для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва: МАКС Пресс, 2021. — С. 105. (РИНЦ).

15. Алмохамед М., Тихонов И. В. О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 20–26. (РИНЦ).

16. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Алмохамед М. О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 294–299. (РИНЦ).

17. Тихонов И. В., Алмохамед М. Единственность и неединственность решения в линейной обратной задаче с переопределением третьего рода // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XXIII Международной научной конференции. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. — Вып. 23. — С. 291–298. (РИНЦ).

18. Тихонов И. В., Алмохамед М. Присоединенные решения в обратных задачах для эволюционных уравнений второго порядка // Тихоновские чтения: тезисы докладов: научная конференция. — Москва: МАКС Пресс, 2022. — С. 82.

19. Алмохамед М. Модельные обратные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений второго и высших порядков // Современные проблемы математики и математического образования: LXXVI Герценовские чтения: сборник научных статей. — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2023. — С. 207–215. (РИНЦ).

20. Алмохамед М., Тихонов И. В. Специальные примеры обратных задач для дифференциальных уравнений четвертого порядка // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2023. — Вып. 24. — С. 218–222. (РИНЦ).

Алмохамед Муатаз

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Обратные задачи для эволюционных дифференциальных уравнений

второго и высших порядков

Подписано в печать 00.00.2023. Формат 60*90 1/16. Тираж 000 экз. Заказ 000.