ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Черных Георгия Сергеевича «Операции и умножения, связанные с SU- и c_1-сферическими бордизмами»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «геометрия и топология»

Диссертация Георгия Сергеевича Черных относится к важному и красивому разделу алгебраической топологии – теории бордизмов. Создание этой теории и наиболее яркие результаты приходятся на середину прошлого века и связаны с именами выдающихся математиков, чьи фундаментальные результаты определили направления её развития. Теория бордизмов восходит к работе Л. С. Понтрягина, посвященной гладким многообразиям и их применению в теории гомотопий, где он связал теорию оснащенных многообразий с изучением стабильных гомотопических групп сфер, и к работе Р. Тома, где он вычислил кольцо неориентированных бордизмов Ω_*^O. Чуть позже, усилиями Дж. Милнора, С. П. Новикова, В. А. Рохлина, Ч. Т. К. Уолла и других математиков, были полностью вычислены кольца ориентированных бордизмов Ω_*^{SO} и комплексных бордизмов Ω_*^U.

При этом, проблема описание кольца SU-бордизмов так и не получила своего окончательного решения. Благодаря работам С. П. Новикова, П. Коннера и Э. Флойда, Ч. Т. К. Уолла и Р. Стонга было получено полное описание кручения, но свободная от него часть (фактор по кручению) была описана лишь как некоторое довольно сложное подкольцо в кольце полиномов. Это кольцо полиномов является кольцом коэффициентов Ω^W теории c_1-сферических многообразий. Группы Ω^W c_1-сферических бордизмов, как подгруппы в группах комплексных бордизмов Ω^U, были определены Коннером и Флойдом для вычисления кручения в SU-бордизмах. Затем Стонг расширил это определение до целой теории c_1-сферических бордизмов W, промежуточной теории между SU- и U-бордизмами, и использовал её для описания структуры кольца SU-бордизмов.

В настоящее время новый виток интереса к SU-многообразиям обусловлен зеркальной симметрией и другими геометрическими конструкциями из теоретической физики, в которых ключевую роль играют многообразия Калаби–Яу, являющиеся частным случаем SU-многообразий.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 93 страницы. Библиография включает 54 наименований, в том числе 3 работы автора по теме диссертации.

Во **введении** обосновывается актуальность работы; формулируются цели и задачи диссертации; приводятся положения, выносимые на защиту; описываются объект и предмет исследования, а также используемые методы; указывается в чем заключается его научная новизна, указываются сведения о публикациях и апробации результатов диссертации. Далее, описывается структура диссертации и раскрывается ее содержание по главам.

В **главе 1** приводятся необходимые определения и предварительные сведения.

В **главе 2** исследуются SU-линейные операции в комплексных кобордизмах. А именно, описывается структура MSU-модуля на спектре MU комплексных кобордизмов, что позволяет получить необходимые и достаточные условия того, что семейство операций образовывает топологический базис левого Ω_*^U-модуля SU-линейных операций в комплексных кобордизмах. Основным результатом данной главы является **теорема 2.3.4**, которая утверждает, что введённые Коннером и Флойдом геометрические операции ∂_k образуют топологический базис левого Ω_*^U-модуля SU-линейных операций из $[MU, MU]_*$. Кроме того, в **теореме 2.3.6** описана мультипликативная структура кольца SU-линейных операций в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов.

Глава 3 посвящена вычислению спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU и его применению для описания кольца SU-бордизмов. Проведенные вычисления основаны на фундаментальной работе С. П. Новикова «Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов», при этом, полное изложение технических деталей потребовало от Георгия Сергеевича Черных весьма кропотливой работы. А именно, в **теореме 3.1.2** для вычисления начального члена спектральной последовательности описана структура A^U-модуля на $MU^*(MSU)$. При вычислении групп $\mathrm{Ext}^{*,*}_{A^U}(MU^*(MSU), \Omega_U^*)$ естественно возникают группы коэффициентов Ω_*^W теории c_1-сферических бордизмов. Итогом вычисления спектральной последовательности (она вырождается в члене E_4) является описание свободной части и кручения в кольце Ω_*^{SU}, представленное в **теореме 3.2.11**. В отличие от работы Коннера и Флойда, где описание было получено геометрически, Георгию Сергеевичу удалось получить описание в процессе вычислении спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра SU-бордизмов.

Глава 4 посвящена развитию теории c_1-сферических бордизмов W. Выделим следующие основные результаты этой главы. Описаны все SU-билинейные умножения на спектре c_1-сферических бордизмов W (**теорема 4.5.8**) и для них вычислены кольца коэффициентов (**теорема 4.5.9**). Описаны все SU-линейные проекторы $MU \to W$ (**теоремы 4.5.2** и **4.5.4**).

В **главе 5** изучаются комплексные ориентации теории W и соответствующие им формальные группы. Комплексная ориентируемость теории W является её важным преимуществом по сравнению с теорией SU-бордизмов. Г. Е. Черных демонстрирует это развивая результаты работы В. М. Бухштабера «Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией». А именно, следуя подходу В. М. Бухштабера, в **предложении 5.2.8** для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислена соответствующая формальная группа F_W с точностью до разложимых элементов. Далее устанавливаются следующие обобщение результатов В. М. Бухштабера: (1) ни для какой комплексной ориентации w и ни для какого SU-билинейного умножения $*_q$ на W коэффициенты соответствующей формальной группы F_W не порождают всего кольца $(\Omega_*^W, *_q)$ (**теорема 5.3.1**); (2) если A — подкольцо в Ω_*^W, порождённое коэффициентами формальной группы F_W, то существует ориентация на W, такая, что $A[\frac{1}{2}] = \Omega_*^W[\frac{1}{2}]$ (**теорема 5.3.3**). В работе В. М. Бухштабера соответствующие результаты были получены для умножения, задаваемого проектором Стонга, и для ориентаций, получаемых различными проекторами из стандартной ориентации в комплексных кобордизмах.

В **теореме 5.4.5** устанавливается, что формальная группа $F_W(u, v)$ над кольцом $(\Omega_W^*, *_q)$ точна по Ландвеберу для любого умножения $*_q$.

В **заключении** резюмируются полученные в диссертации научные результаты.

Результаты, выносимые на защиту, являются новыми, достоверными и состоят в следующем.

(1) Получено полное описание SU-линейных операций в комплексных кобордизмах в терминах введённых Коннером и Флойдом геометрических операций ∂_k, включая мультипликативную структуру относительно композиции (**теоремы 2.3.4** и **2.3.6**).

(2) Применяя метод С. П. Новикова, проведены вычисления спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра SU-бордизмов и из них выведены структурные результаты о кольце коэффициентов SU-бордизмов Ω^{SU} (**теорема 3.2.11**).

(3) Описаны все SU-билинейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W (**теорема 4.5.8**), для них вычислены кольца коэффициентов (**теорема 4.5.9**), описаны все SU-линейные проекторы $MU \to W$ (**теоремы 4.5.2** и **4.5.4**).

(4) Следуя подходу В. М. Бухштабера, для произвольного SU-билинейного умножения и произвольной комплексной ориентации на W вычислены соответствующие формальные группы по модулю разложимых элементов (**теорема 5.2.8**). Установлено обобщение результатов В. М. Бухштабера о том, что для произвольного умножения и произвольной ориентации кольцо бордизмов точки $W^*(\mathrm{pt})$ не порождаются коэффициентами соответствующей формальной группы, но если обратить двойку или все простые чисел Ферма большие 3, то для любого умножения найдётся такая ориентация, что коэффициенты формальной группы будут порождать всё локализованное кольцо $W^*(\mathrm{pt})$ (**теоремы 5.3.1**, **5.3.3** и **5.3.7**). Доказано, что для произвольного SU-билинейного умножения теория W точна по Ландвеберу (**теорема 5.4.5**).

Все результаты диссертации снабжены достаточно подробными доказательствами, а цитируемые результаты других авторов снабжены корректными ссылками. Мелкие опечатки и недостатки в оформлении не достойны упоминания, поскольку не умаляют значимости диссертационного исследования.

Диссертация Г. С. Черных «Операции и умножения, связанные с SU– и c_1-сферическими бордизмами» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к диссертационным работам. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. «Геометрия и топология» (по физико-математическим наукам), а именно, направлению «13. Алгебраическая топология», а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, Георгий Сергеевич Черных заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. «Геометрия и топология».

Официальный оппонент:
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник лаборатории динамических систем
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения
Российской академии наук
Веснин Андрей Юрьевич

5 декабря 2023 г.

Контактные данные:
тел.: 7(913)9237413, e-mail: vesnin@math.nsc.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация: 01.01.04 - геометрия и топология

Адрес места работы:
630090, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, д. 4.
Тел.: 8(383)3297616, e-mail: vesnin@math.nsc.ru

Подпись работника
Веснина А.Ю.
Заверяю
Специалист отдела ДОУ
ИМ СО РАН Е.Г.Кирда
«05» декабря 2023 г.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
Для документов
(ИМ СО РАН)
Россия г.Новосибирск