Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Калинин Александр Николаевич

СВЯЗЬ ЗАДАЧ МОНЖА И КАНТОРОВИЧА

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор В.И. Богачев

Москва, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Тематика диссертации находится на стыке функционального анализа, теории меры, теории вероятностей и теории экстремальных задач. Рассмотренные в ней задачи важны не только для указанных областей, но и для бесконечномерного анализа, нелинейного анализа и дифференциальной геометрии (см. работы[7],[59]). В данной работе объектами исследования выступают задачи оптимизации на бесконечномерных пространствах. Основные результаты работы относятся к области теории меры и теории экстремальных задач, хотя в силу специфики задач иногда используется вероятностная терминология.

Задача Монжа возникла еще в XVIII веке и в первоначальной постановке заключалась в нахождении оптимальных путей переноса масс (в частности грунта) с минимизацией работы. При этом считалось, что оптимальная транспортировка есть, а вопрос состоял только в ее описании. Точная постановка этой задачи появилась спустя два столетия после работ Монжа и состояла в следующем. Для вероятностных мер μ и ν на $\mathbb{R}^n$, заданных плотностями относительно меры Лебега, надо найти борелевское отображение T пространства $\mathbb{R}^n$, переводящее μ в ν, т. е. $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ для всех борелевских множеств B, которое минимизирует интеграл

$$\int |x - T(x)| \, \mu(dx)$$

среди всевозможных отображений, переводящих μ в ν. Однако доказательство существования оптимального отображения оказалось удивительно сложным и было получено уже в XXI веке. В 1970-х годах, начиная с работ А. М. Вершика [11] [10], стала рассматриваться более общая задач минимизации интеграла от функции $h(x, T(x))$ для так называемой функции стоимости h на произведении множеств, на которых заданы меры μ и ν (например для метрики на произведении двух общих метрических пространств). В общей задаче Монжа в современной трактовке исследуются отображения T одного пространства с мерой (X, μ) в другое пространство (Y, ν), которые переводят меру μ в меру ν, причем на $X \times Y$ также задана неотрицательная функция стоимости h. Сама задача состоит в минимизации интеграла

$$\int_X h(x, T(x))\, \mu(dx)$$

по отображениям T, переводящим μ в ν. Значение указанного интеграла называют стоимостью транспортировки T.

В конце 1930-х – начале 1940-х годов Л. В. Канторович поставил свою задачу оптимизации, не зная о существовании задачи Монжа. Эта задача вызвала значительный поток исследований, которые продолжаются и на данный момент. Задача Канторовича также ставится на измеримых пространствах X и Y с вероятностными мерами μ и ν и заданной функцией стоимости h на $X \times Y$, но теперь требуется найти вероятностную меру π на $X \times Y$, проекции которой на X и Y есть μ и ν соответственно и которая минимизирует интеграл

$$\int_{X \times Y} h(x, y)\, \pi(dxdy)$$

по всем мерам π с данными проекциями. Меры с заданными проекциями называются планами Канторовича или транспортными планами. Минимизирующая мера (если такая есть) называется оптимальным планом или решением задачи Канторовича. Минимальное значение интеграла, соответствующее решению задачи, называют стоимостью оптимальной транспортировки. Связь двух задач состоит в том, что для всякого отображения T, переводящего меру μ в меру ν, можно взять меру σ на $X \times Y$, равную образу μ при отображении $x \mapsto (x, T(x))$. Эта мера имеет проекции μ и ν на сомножители. В постановке Л. В. Канторовича X и Y — метрические компакты, h — соответствующая метрика на их произведении, но позже стало ясно, что его задача имеет смысл в гораздо более широкой постановке. Узнав после выхода своей заметки о работах Г. Монжа, Л. В. Канторович указал, что решение его задачи позволяет решить и задачу Монжа, что в общем случае не совсем так. Оказалось, что задача Канторовича имеет решение при более широких условиях, чем задача

Монжа. Например, для существования решения в задаче Канторовича достаточно полунепрерывности снизу функции стоимости на вполне регулярных топологических пространствах с мерами Радона, в то время как задача Монжа может быть неразрешима даже для хороших функций стоимости. Тем не менее есть очень глубокая связь между обеими задачами в случае непрерывных функций стоимости и радоновских мер без атомов. В этом случае решения задач совпадают при довольно общих условиях на пространства и меры. Часть основных результатов диссертации посвящена построению точных достаточных условий для совпадения этих решений. В силу того, что получены точные условия, дальнейшее направление изучения вопросов связи задач можно перенести на задачи с дополнительными ограничениями на исходные меры, транспортные планы или на функцию стоимости. Такие задачи получили широкое распространение за последние десять лет. Задачи на $\mathbb{R}^n$ с дополнительными ограничениями на плотности транспортных планов были рассмотрены в работах Korman J., McCann R. J. [61], [60], [63], [62]. Позднее эти результаты были распространены на бесконечномерные пространства (см. работы [13],[6]). Общие ограничения иного характера были изучены в работе [14]. Часть результатов диссертации посвящена теории локализации и в частности свойствам α-вогнутых мер, которые в дальнейшем можно использовать для получения конструктивных ограничений для задач Монжа и Канторовича.

Работу можно разделить на три основных части, соответствующие трем главам.

В первой и второй главах изучаются вопросы, связанные с решениями задач Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости и радоновских мер на вполне регулярных пространствах. Исследованием этого вопроса на протяжении последних пятидесяти лет занимались многие российские и зарубежные математики, в том числе А. М. Вершик [11], В. Н. Судаков [22], Л. Амброзио [23] и А. Прателли [68]. В случае разрывной функции стоимости несложно построить пример задач на квадрате, где равенство значений в задачах Монжа и Канторовича нарушается (такой пример можно найти в работе [7]). Однако в случае непрерывной функции стоимости известно, что равенство сохраняется при довольно общих условиях (см. работы [23], [68], [20]). В частности, в работе [20] доказано, что равенство верно для пространств, в которых компакты метризуемы (например для суслинских пространств). Таким образом, возникает вопрос об обобщении этих результатов и поиске точных достаточных условий на равенство значений в задачах. В первой главе диссертации построен пример, показывающий, что нельзя без дополнительных ограничений отказаться от метризуемости компактов. А именно можно построить непрерывную функцию стоимости на пространстве, являющемся объединением счетной и несчетной степеней отрезка с мерой, равной полусумме счетной и несчетной степеней меры Лебега на $[0,1]$, для которой значения в задачах Монжа и Канторовича различны.

Вторая глава посвящена нахождению достаточных условий для равенства значений в задачах. Для обоснования примера из первой главы было существенно, что мера μ на пространстве X была несепарабельна (т. е. $L^1(\mu)$ несепарабельно), что позволяло ограничить множество допустимых отображений в задаче Монжа так, чтобы их не хватало для достижения минимума Канторовича. Во второй главе получены достаточные условия для равенства и показано, что полученные условия являются точными. Просто формулируемое достаточное условие в терминах сепарабельности таково: меры μ и ν сепарабельны, причем μ не имеет атомов.

Третья глава посвящена задачам теории локализации, которые не относятся напрямую к задачам Монжа и Канторовича, однако идейно и технически тесно связаны с ними, поскольку их решение также сводится к поиску экстремума функционала на пространстве мер. В данной главе используются вероятноснтые радоновские меры на локально выпуклых пространствах и, в некоторых результатах, пространства Фреше. В частности, для решения задач локализации вводится специальный класс радоновских мер, который в дальнейшем можно использовать для постановки задач Монжа и Канторовича с ограничением на меру исходного пространства. Локализационная теория имеет множество приложений в геометрии и геометрических задачах теории меры (см. работы [59], [57], [31], [3], [2]). Большой интерес в этой теории представляют локализация гиперболических мер и описание крайних точек семейств α-вогнутых мер на локальнов выпуклых пространствах. В работе [53] дана геометрическая интерпретация локализационной теории, где искомая мера выступает как крайняя точка множества всех α-вогнутых мер, для которых интегралы по заданным полунепрерывным снизу функциям положительны. В статье [4] напротив, рассматривается задача локализационной теории в случае бесконечномерного пространства, но для одной функции. В третьей главе диссертации построено обобщение локализационной теории с использованием обоих подходов одновременно и получено два важных результата. Первый результат заключается в описании крайних точек семейства α-вогнутых мер, для которых интегралы по заданному конечному числу полунепрерывных снизу функций положительны. А именно найдены ограничения на размерность носителя крайней точки и получено описание меры в терминах плотностей для мер с дополнительным ограничением на параметр α. Второй основной результат касается метода нахождения локализующей меры на пространствах Фреше. В работе [68] описан метод бисекций для нахождения локализующей меры на пространстве Фреше с борелевской вероятностной мерой μ, с помощью которого по заданным полунепрерывным снизу функциям u и v с положительными интегралами строится локализующая мера на отрезке. Закономерно поставить вопрос о том, можно ли построить локализующую меру для произвольного конечного числа функций. Доказательство основной теоремы этого метода в случае двух функций существенно опиралось на теорему о промежуточном значении на окружности, которая в случае большего числа функций становится сферой, где применение теоремы о промежуточном значении невозможно. Второй основной результат третьей главы заключается в построении алгоритма метода бисекции для произвольного конечного числа функций без использования теоремы о промежуточном значении.

Цель работы.

• Построить пример непрерывной функции стоимости, для которой значения в задачах Монжа и Канторовича различны.

• Исследовать условия для равенства значений в задачах Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости.

• Исследовать свойства крайних точек семейства вогнутых мер и дать их описание в терминах плотности.

• Исследовать метод построения локализующей меры для борелевских вероятностных мер на бесконечномерном пространстве.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены достаточные условия равенства значений в задачах Монжа и Канторовича на бесконечномерных вполне регулярных топологических пространствах с радоновскими вероятностными мерами для непрерывной функцией стоимости. В частности, достаточно, чтобы меры были сепарабельными безатомическими.

2. Построен пример компактного пространства с вероятностными мерами и непрерывной функции стоимости, для которых значения в задачах Монжа и Канторовича не совпадают.

3. Получено описание крайних точек семейств α-вогнутых мер на бесконечномерных пространствах с произвольным конечным числом ограничений.

4. Построено обобщение метода локализации гиперболических мер на пространствах Фреше на случай произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Положения, выносимые на защиту.

1. Пример непрерывной функции стоимости, для которой минимумы

в задачах Монжа и Канторовича различны.

2. Достаточные условия для совпадения значений в задачах Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости.

3. Оценка размерности носителя крайних точек семейства α-вогнутых мер, заданных конечным числом непрерывных ограничений, в терминах плотностей и описание свойств этих точек для разных показателей вогнутости.

4. Метод построения локализующей меры для мер, удовлетворяющих закону $0-1$, на пространстве Фреше для случая произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа и теории локализации, а также несколько оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, теории оптимального планирования и теории локализации. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» и Национальном исследовательском университете «Московский физико-технический университет».

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются меры и интегрирование в бесконечномерных пространствах, их линейные отображения, а также функционалы на бесконечномерных пространствах с мерами, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2018, 2019, 2020 г.),

2. Международная научная конференция "Infinite-dimensional analysis and mathematical physics" (Москва, МГУ, 2019 г.),

3. Международная конференция "Recent advances in mass transportation" (Москва НИУ ВШЭ, 2019 г.),

4. Третья Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, 2019 г.),

5. Международная конференция "New frontiers in high-dimensional probability and applications to machine learning" (Сочи, Сириус, 2021 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, С. В. Шапошникова и Н. А. Толмачева (МГУ, многократно, 2017–2021 г.),

2. Международный научно-исследовательский семинар "Infinite-dimensional stochastic analysis" в университете г. Билефельд, Германия(2018, 2019 г).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (см. [72],[73],[74], первые две из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, а также представлены в тезисах 3 международных конференций (см.[75], [76], [77]).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 77 наименований. Общий объем диссертации составляет 67 страниц.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проек-

том РНФ 17-01-00662 и проектом РФФИ 20-01-00432.

Краткое содержание диссертации.

Нумерация результатов в автореферате соответствует нумерации в самой диссертации.

Первая глава работы разделена на три параграфа. Первый является вводным. Он содержит описание задач, необходимые определения, обозначения и известные результаты. Для заданных вероятностных мер $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и неотрицательной измеримой функции h на произведении $X \times Y$, называемой функцией стоимости, задача Монжа заключается в нахождении величины

$$M_h(\mu, \nu) = \inf_T M_h(\mu, \nu, T), \quad M_h(\mu, \nu, T) := \int_X h(x, T(x))\, \mu(dx),$$

где inf берется по всем измеримым отображениям $T\colon X \to Y$, переводящим меру μ в меру ν. Задача Канторовича для тех же мер заключается в минимизации величины

$$K_h(\mu, \nu, \sigma) = \int_{X \times Y} h(x, y)\, \sigma(dx\, dy)$$

по мерам σ из множества $\Pi(\mu, \nu)$ вероятностных мер, для которых проекция на X есть μ, а проекция на Y есть ν. Таким образом, рассматривается величина

$$K_h(\mu, \nu) = \inf\{K_h(\mu, \nu, \sigma)\colon \ \sigma \in \Pi(\mu, \nu)\}.$$

Во втором параграфе сформулирован основной результат первой главы.

Теорема 1.2.1 *Существуют радоновские вероятностные меры μ и ν на компактном пространстве $X = [0,1]^{\aleph_0} \cup [0,1]^{\aleph_1}$ и непрерывная функция h on $X \times X$ такие, что меру μ можно перевести в ν непрерывным отображением, но $M_h(\mu, \nu) > K_h(\mu, \nu)$, причем оба инфимума являются минимумами.*

Приведены три вспомогательные леммы и полное доказательство теоремы и всех вспомогательных утверждений. В третьем параграфе напоминается пример, показывающий, что условие непрерывности является существенным для данного вопроса.

Во **второй главе** исследуются достаточные условия для равенства значений в решениях задач Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости. Основной результат второй главы заключается в следующей теореме.

Теорема 2.1.1 *Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, h — непрерывная функция на $X \times Y$, μ и ν — вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно, причем μ не имеет атомов. Предположим, что всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть меры ν той же самой полной массы. Тогда*

$$\inf_{\sigma \in \Pi(\mu,\nu)} K_h(\mu,\nu,\sigma) = \inf_{T \in T(\mu,\nu)} M_h(\mu,\nu,T).$$

Приведено полное доказательство теоремы этой с использованием одной вспомогательной леммы. Также описан ряд важных следствий из этой теоремы, которые показывают, что полученный результат применим для некоторых известных классов мер, в частности для сепарабельных мер.

Следствие 2.1.3 *Условие безатомичности меры ν можно опустить, если меру μ можно преобразовать в меру ν, а всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть этой же меры μ той же полной массы, либо если всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть меры $\nu \otimes \lambda$, где λ — мера Лебега на $[0,1]$.*

Следствие 2.1.4 *Если функция $h \geqslant 0$ непрерывна, радоновские вероятностные меры μ и ν сепарабельны, причем μ не имеет атомов и $K_h(\mu,\nu) < \infty$, то инфимум в задаче Монжа равен минимуму в задаче Канторовича.* При доказательстве основного результата, фактически, вместо непрервыности функции h было использовано более слабое условие: для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие компакты $K_1 \subset X$ и $K_2 \subset Y$, что $\mu(X \backslash K_1) < \varepsilon$ и $\nu(Y \backslash K_2) < \varepsilon$, причем на $K_1 \times K_2$ функция h непрерывна. Такое свойство называется в работе [12] виртуальной непрерывностью. Поэтому справедливо такое утверждение.

Следствие 2.1.5 *Условие непрерывности функции стоимости h в* *основной теореме и ее следствиях можно ослабить до виртуальной непрерывности.*

Полученные в первых двух главах результаты и их следствия показывают, что описанные достаточные условия являются точной границей.

В **третьей главе** рассматриваются крайние точки семейств α-вогнутых мер и алгоритмы локализации. Результаты получены для вероятностных радоновских мер на локально выпуклых пространствах. Часть результатов получена для пространств Фреше. Глава разделена на два параграфа. В первом параграфе приведены необходимые определения и известные результаты по теме главы. Во втором параграфе представлены два основных результата. Первый касается описания крайних точек в терминах плотности.

Напомним, что неотрицательная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве E называется α-вогнутой ($-\infty \leqslant \alpha \leqslant +\infty$), если для всех непустых борелевских множеств A и B и всех $t \in (0,1)$ верно неравенство

$$\mu_*((1-t)A + tB) \geqslant \Big[(1-t)\mu(A)^\alpha + t\mu(B)^\alpha\Big]^{1/\alpha},$$

где μ_* — внутренняя мера. Для множеств в пространствах Фреше суммы $(1-t)A + tB$ автоматически измеримы, поэтому можно писать μ вместо μ_*. В случае $\alpha = -\infty$ неравенство имеет вид

$$\mu_*((1-t)A + tB) \geqslant \min\{\mu(A), \mu(B)\},$$

а соответствующая мера будет называться выпуклой или гиперболической. В случае $\alpha = 0$ имеем

$$\mu_*((1-t)A + tB) \geqslant \mu(A)^{1-t}\mu(B)^t,$$

а мера μ называется логарифмически вогнутой. Важнейший пример логарифмически вогнутой меры — гауссовская мера.

Обозначим через $\mathcal{M}_\alpha(K)$, где $-\infty \leqslant \alpha \leqslant 1$, семейство всех α-вогнутых вероятностных мер с носителем в выпуклом компакте K в локально выпуклом пространстве E. Для заданных непрерывных функций $f_1, \ldots, f_n$

рассмотрим подмножество

$$\mathcal{P}(f_1,\ldots,f_n)=\Big\{\mu\in\mathcal{M}_\alpha(K)\colon\ \int_K f_i\,d\mu\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant n\Big\}$$

и его замкнутую выпуклую оболочку $\overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1,\ldots,f_n)$.

Теорема 3.2.1 (i) *Размерность носителя всякой крайней точки μ из $\overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1,\ldots,f_n)$ не больше n.* (ii) *Если $\alpha\leqslant\frac{1}{n+1}$, то либо крайняя мера μ сосредоточена в одной точке $x\in K$ и $f_i(x)\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$, либо ее носитель — выпуклый компакт в K, причем если $\dim H_\mu=n$, то*

$$\int f_i\,d\mu=0\quad\forall\, i\leqslant n$$

и для каждой относительно внутренней точки x_0 носителя меры μ (т. е. внутренней в его аффинной оболочке) и каждого ненулевого функционала $l\in E'$ с условием $\mu(\{l=c\})=0$ при всех $c\in\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\int_{x\colon\, l(x-x_0)\geqslant 0} f_i\,d\mu\neq 0\quad\forall\, i\leqslant n.$$

Кроме того, в этом случае мера μ имеет плотность вида

$$g(x)=(V(x))^\gamma,\ \gamma=\frac{1}{\alpha}-n$$

с некоторой функцией $V\colon K\to(0,\infty)$, вогнутой при $\alpha>0$ и выпуклой при $\alpha<0$.

Второй результат касается метода нахождения локализующей меры и верен не только для гиперболических мер.

Определение 3.2.2 *Пусть дана конечная неотрицательная борелевская мера μ на локально выпуклом пространстве E. Назовем борелевскую вероятностную меру ν иглой меры μ, если она сосредоточена на отрезке $[a,b]\in E$ и получена как слабый предел вероятностных мер*

$$\mu_l(A)=\frac{1}{\mu(K_l)}\mu(A\cap K_l),$$

где A — борелевское множество, $\{K_l\}$ — сужающаяся последовательность выпуклых компактов в E положительной μ-меры с $\cap_l K_l=[a,b]$.

Будем говорить, что для борелевской вероятностной меры μ на пространстве E выполнен закон $0-1$, если всякое μ-измеримое аффинное подпространство E имеет меру 0 или 1. Например, согласно сказанному выше, таким свойством обладают меры, абсолютно непрерывные относительно гиперболических мер.

Теорема 3.2.5 *Предположим, что для борелевской вероятностной меры μ на сепарабельном пространстве Фреше E выполнен закон $0-1$. Пусть даны две такие полунепрерывные снизу μ-интегрируемые функции $u, v\colon E \to \mathbb{R}$, что*

$$\int_E u\,d\mu > 0, \quad \int_E v\,d\mu > 0.$$

Тогда эти неравенства сохранятся для некоторой иглы ν для меры μ. Более того, если μ сосредоточена на замкнутом выпуклом множестве F, то ν также можно выбрать с носителем в F.

Глава 1

Пример несовпадения значений

1.1 История вопроса

Напомним, что для заданных вероятностных мер $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и неотрицательной измеримой функции h на произведении $X \times Y$, называемой функцией стоимости, задача Монжа заключается в нахождении величины

$$M_h(\mu, \nu) = \inf_T M_h(\mu, \nu, T), \quad M_h(\mu, \nu, T) := \int_X h(x, T(x))\, \mu(dx),$$

где inf берется по всем измеримым отображениям $T\colon X \to Y$, переводящим меру μ в меру ν, т.е. $\mu \circ T^{-1} = \nu$, где образ меры μ при отображении T задается формулой

$$(\mu \circ T^{-1})(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

Условие измеримости T, т.е. включение $T^{-1} \in \mathcal{A}$ при всех $B \in \mathcal{B}$, обеспечивает корректность этого определения. Разумеется, эту проблему разумно ставить в случае, когда существует хоть одно преобразование первой меры во вторую. При этом инфимум может не достигаться, но если минимум существует, то доставляющее его отображение T называется оптимальным.

Класс всех измеримых отображений, переводящих μ в ν, обозначим через $T(\mu, \nu)$.

Сам Г. Монж [66] рассматривал эту проблему в специальном случае, когда меры μ и ν были ограничениями обычного объемы на два ограниченных множества в трехмерном пространстве, а функция стоимости была обычным расстоянием (интеграл от функции стоимости выражал собой стоимость переноса грунта из некоторых насыпей в ямы такого же суммарного объема). Поставленные им вопросы касались некоторых геометрических свойств оптимального отображения, а вопрос о его существовании не поднимался (например, Аппель [27], получивший награду Академии наук за решение проблемы Монжа, установил ряд свойств решений в предположении их существования).

Через полтора столетия после работы Монжа Л.В. Канторович [16] предложил свою задачу, состоявшую в минимизации величины

$$K_h(\mu,\nu,\sigma)=\int_{X\times Y} h(x,y)\,\sigma(dx\,dy)$$

по мерам σ из множества $\Pi(\mu,\nu)$ вероятностных мер, для которых проекция на X есть μ, а проекция на Y есть ν. Таким образом, рассматривается величина

$$K_h(\mu,\nu)=\inf\{K_h(\mu,\nu,\sigma)\colon\ \sigma\in\Pi(\mu,\nu)\}.$$

При отсутствии мер в $\Pi(\mu,\nu)$, по которым интеграл от h конечен, полагаем $K_h(\mu,\nu)=+\infty$. Если h — метрика на метрическом пространстве с метрикой d (или липшицева функция), то величина $K_h(\mu,\nu)$ конечна для мер μ и ν с конечным первым моментом, т.е. интегрирующих функцию $d(x_0,x)$ для какой-либо фиксированной точки.

В отличие от задачи Монжа, для ограниченной функции стоимости в задаче Канторовича инфимум существует всегда, ибо множество $\Pi(\mu,\nu)$ непусто: нем есть хотя бы произведение $\mu\otimes\nu$ данных мер (это верно и для неограниченных функций h при наличии мер в $\Pi(\mu,\nu)$, относительно которых интеграл от h конечен). Если существует мера в $\Pi(\mu,\nu)$, на которой достигается минимум, то она называется оптимальной мерой или оптимальным планом Канторовича. Такая мера существует не всегда, но в случае радоновских мер на вполне регулярных пространствах и ограниченной непрерывной функции стоимости она существует. Это довольно просто можно усмотреть из того, что множество $\Pi(\mu,\nu)$

оказывается компактным в слабой топологии, а интеграл от функции стоимости представляет собой непрерывную линейную функцию. Таким образом, вместо трудной нелинейной задачи Монжа возникает задача минимизации линейной функции на компакте. О старинной задаче Монжа Л.В. Канторович узнал уже после выхода его первых работ по этой теме (в том числе [15]), позже принесших ему мировую славу. Первоначально он даже сделал не вполне точное замечание (см. [17]), что его более общая задача позволяет что-то получить и для задачи Монжа. Однако затем было понято, что ситуация не столь проста. С одной стороны, для всякого отображения T, переводящего меру μ в ν, мы получаем меру из $\Pi(\mu,\nu)$, взяв образ меры μ при отображении

$$G\colon\ x \mapsto (x, T(x)).$$

Мера $\mu\circ G^{-1}$ сосредоточена на графике T и очевидным образом имеет проекции μ и ν на сомножителе. При этом

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\,\mu\circ G^{-1}(dx,dy) = \int_X h(x,T(x))\,\mu(dx)$$

по формуле замены переменных для индуцированных мер. Поэтому всегда

$$K_h(\mu,\nu) \leqslant M_h(\mu,\nu).$$

С другой стороны, имеются простые примеры, показывающие, что для разрывных ограниченных функций стоимости на квадрате неравенство может быть строгим (такой пример приведен ниже). Правда, в первые годы исследования задачи Канторовича было принято рассматривать непрерывные функции стоимости и даже такие весьма специальные, как метрики на метрических пространствах (см. [19], [18]). Уже в этом случае (остающемся весьма актуальным и в современных исследованиях), причем даже в случае $\mathbb{R}^n$ с мерами абсолютно непрерывными относительно лебеговской, были осознаны весьма значительные трудности, возникающие при решении задачи Монжа: стало понятно, что в высшей степени неочевидно существование оптимальных отображений (ранее предполагавшееся само собой разумеющимся). Вопрос об этом ставился А.М. Вершиком [11], а первое доказательство было предложено В.Н. Судаковым 1976 году в его ставшей классической работе [22] в случае абсолютно непрерывных мер на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$ и функции стоимости, равной некоторой норме (необязательно евклидовой). Доказательство, основанное на тонких свойствах условных мер, было трудным и довольно длинным. Видимо, поэтому лишь через двадцать с лишним лет (а именно в 2000 году) обнаружился пробел в рассуждениях. Более того, был построен контрпример к одному промежуточному утверждению из доказательства Судакова, связанному с сингулярностью условных мер (см. [25], [26]). Незадолго до обнаружения этого пробела в работе [49] с помощью методов нелинейных уравнений было установлено существование решения задачи Монжа в случае стандартной нормы $\mathbb{R}^n$ (и некоторых других норм) и липшицевости плотностей обеих мер. Естественно, после обнаружения упомянутого пробела интерес к нахождению полного обоснования возрос. В работах Трудингера и Ванга [70] и Каффарелли, Фельдмана, Маккэна [42] существование оптимальной транспортировки Монжа было установлено любых абсолютно непрерывных мер μ и ν и по-прежнему стандартной евклидовой нормы. Амброзио [23] снял условие абсолютной непрерывности второй меры. В этих работах были развиты новые подходы, хотя идеи В.Н. Судакова продолжали играть существенную роль. Тем не менее проблема полной реабилитации утверждения Судакова (для всех норм) оставалась открытой, что отмечали Амброзио, Кирхайм и Прателли [25], распространившие положительный результат на новый класс норм (в случае $\mathbb{R}^2$ для всех норм) и давшие контрпримеры, показывающие характер возникающих трудностей при осуществлении программы Судакова. Преодолеть эти трудности для строго выпуклых норм удалось в работе [44]. Новый подход был развит Шампьоном и Де Паскалем [46], в этом подходе не использовалась редукция к одномерному случаю, но сначала был охвачен тоже только случай строго выпуклых норм. Лишь в следующей их работе [47], вышедшей в 2011 году (см. также их обзор [48]), т.е. спустя 35 лет после публикации работы Судакова [22] и более 10 лет после обнаружения в ней пробела, удалось полностью реабилитировать утверждение Судакова для произвольных норм. Позже Л. Каравенна [43] предложила новое обоснование общего случае, использующее подход из [25] и [26] с приближениями произвольной нормы $\|\cdot\|$ малыми добавками стандартной нормы вида $\|\cdot\|_\varepsilon = \|\cdot\| + \varepsilon|\cdot|$ и контроль сходимости соответствующих оптимальных отображений. Наконец, в недавней работе Бьянкини и Данери [29] дано подробное обоснование метода В.Н. Судакова для произвольных норм, так что не только верен сам результат Судакова, но и полностью реабилитирован его подход. В беседах с первым автором в конце 2015 года В.Н. Судаков выражал большое удовлетвороение тем, что целый ряд крупных специалистов (Л. Амброзио, Ш. Ванг, В. Гангбо, Л. Каффарелли, Б. Кирхайм, Р. Маккэн, Л. Де Паскаль, А. Прателли, Н. Трудингер, Т. Шампьон, Л. Эванс) привлекли внимание к этой задаче, тщательно проверили имевшееся обоснование, устранили в нем пробелы и предложили новые подходы, что значительно обогатило всю эту область и способствовало постановкам новых интересных задач. В случае многообразий близкие результаты получены в [28], [45] и [50]. Тем не менее признанные специалистами упомянутые новые обоснования остаются весьма сложными технически. Мало того, что они несравнимо сложнее совершенно тривиального доказательства существования оптимальных мер Канторовича, так еще и требуются гораздо более специальные условия (вместо общих радоновских мер на произвольных пространствах речь идет о мерах на $\mathbb{R}^n$, немногим более общих, чем абсолютно непрерывные, допустимые функции стоимости тоже весьма специальны), причем все эти дополнительные ограничения весьма существенны для справедливости результата. Поэтому весьма неожиданным был установленный в работе [68] факт (обобщавший ранее полученный в [23] результат для мер на выпуклых компактах в $\mathbb{R}^n$), что для непрерывных функций стоимости на полных сепарабельных метрических пространствах с мерами без атомов имеет место равенство

$$M_h(\mu,\nu) = K_h(\mu,\nu).$$

Позже в работе [20] был доказан еще более общий факт, что это же верно в случае пространств, в которых метризуемы компакты (например суслинских). В заключение этого введения отметим, что задачам Монжа и Канторовича посвящена обширная литература, в том числе целый ряд монографий и обзоров, см. [5], [24], [69], [71], а также [7], [10].

1.2 Пример несовпадения значений

В данном параграфе пострен пример, показывающий, что для безатомических мер Радона на произвольных (неметризуемых) компактах равенство может нарушаться, даже если дополнительно потребовать существование отображений первой меры во вторую (без этого требования пример строится тривиально, достаточно взять меру Лебега на $[0,1]$ и ее континуальную степень).

Напомним (см. [34, гл. 7]), что неотрицательная мера μ на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ борелевских множеств топологического пространства X (т.е. наименьшей σ-алгебре, содержащей все открытые множества) называется радоновской, если для всякого борелевского множества $B \subset X$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B \backslash K) < \varepsilon$.

Напомним также, что сепарабельной называется мера μ на σ-алгебре $\mathcal{B}$, для которой сепарабельно $L^2(\mu)$; это равносильно тому, что имеется такое счетное семейство множеств в $\mathcal{B}$, что всякое множество из $\mathcal{B}$ совпадает с каким-то из этих множеств с точностью до множества меры нуль.

Пример 1.2.1. *Существуют радоновские вероятностные меры μ и ν на компактном пространстве $X = [0,1]^{\aleph_0} \cup [0,1]^{\aleph_1}$ и непрерывная функция h on $X \times X$ такие, что меру μ можно перевести в ν непрерывным отображением, но $M_h(\mu,\nu) > K_h(\mu,\nu)$, причем оба инфимума являются минимумами.*

Непрерывность функции стоимости в данном случае существенна и не может быть заменена даже на полунепрерывность снизу. Для полноты картины приведём пример, заимствованный из [7], [68]

Пример 1.2.2. *Пусть* $X = Y = [0,1] \times [-1,1]$, μ *– линейная мера Лебега на отрезке* $I_0 = [0,1] \times \{0\}$, ν *– умноженная на 1/2 линейная мера Лебега на объединении отрезков* $I_1 = [0,1]\times\{1\}$ *и* $I_2 = [0,1]\times\{-1\}$, $h(x,y) = 0$, *если* $\|x-y\| = 1$, $h(x,y) = 1$ *в остальных случаях, т.е* h *– индикатор открытого множества* $U = \{(x,y) \in X\times Y : \|x-y\| \neq 1\}$ *– дополнения замкнутого множества* $Z = \{(x,y) \in X\times Y : \|x-y\| = 1\}$. *Тогда задача Канторовича и задача Монжа имеют решения, но они различны и* $K(\mu,\nu) = 0$, $M(\mu,\nu) = 1$. *При этом задача Каторовича имеет единственное решение.*

Через $\aleph_0$ и $\aleph_1$ обозначим счетную и первую несчетную мощности соответственно; далее вместо $\aleph_1$ можно брать любую несчетную мощность. Ниже под объединением $X_0 \cup X_1$ топологических пространств X_0 и X_1 понимается дизъюнктное объединение их копий (даже если одно пространство является частью другого) с естественной топологией, так что X_0 и X_1 оказываются открытыми и замкнутыми частями нового пространства.

Теорема 1.2.3. *Существуют радоновские вероятностные меры* μ *и* ν *на компактном пространстве* $X = [0,1]^{\aleph_0} \cup [0,1]^{\aleph_1}$ *и непрерывная функция* h *on* $X\times X$ *такие, что меру* μ *можно перевести в* ν *непрерывным отображением, но* $M_h(\mu,\nu) > K_h(\mu,\nu)$, *причем оба инфимума являются минимумами.*

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд вспомогательных результатов, которые касаются свойств сепарабельных мер. Две первые леммы содержат утверждения, предложенные в качестве задач в гл. 7 в [34], но мы приведем полные доказательства.

В следующей лемме речь идет о мерах на бэровской σ-алгебре $\mathcal{B}a(X)$, порожденной непрерывными функциями на X, причем в рассматриваемом случае степени отрезка всякая измеримая относительно этой σ-алгебры функция зависит на самом деле лишь от счетного числа переменных (см. лемму 6.3.3 в [34]). Кроме того, из-за компактности пространства X всякая мера на $\mathcal{B}a(X)$ единственным образом продолжается до радоновской меры (см. теорему 7.3.2 в [34]), причем относительно продолжения всякое борелевское множество с точностью до множества меры нуль совпадает с бэровским множеством.

Лемма 1.2.4. *Пусть S — несчетное множество, $X = [0,1]^S$ и μ — сепарабельная вероятностная мера на $\mathcal{B}a(X)$. Тогда существуют счетное множество $\{s_n\} \subset S$ и борелевская вероятностная мера ν на $[0,1]^\infty$ такие, что $\mu = \nu \circ \pi^{-1}$, где*

$$\pi = (\pi_s)_{s\in S}\colon\ [0,1]^\infty \to X,$$

$\pi_s\colon\ [0,1]^\infty \to [0,1]$ — некоторые измеримые функции, $\pi_{s_n}(x) = x_n$ при всех n и функция x_s является μ-п.в. пределом некоторой подпоследовательности в $\{x_{s_n}\}$ для каждого $s \notin \{s_n\}$. Аналогичное утверждение верно и для радоновской меры μ.

Доказательство. При условиях леммы все координатные функции x_t лежат в $L^2(\mu)$. Поскольку $L^2(\mu)$ сепарабельно по условию, то найдется такая счетная часть $S_0 = \{s_n\} \subset S$, что множество функций x_{s_n} всюду плотно в $\{x_s\}$ по норме из $L^2(\mu)$. Значит, можно приблизить каждую координатную функцию x_s последовательностью $\{x_{n_i}\}$ по норме из $L^2(\mu)$. По теореме Рисса можно найти дальнейшую подпоследовательность, которая сходится μ-п.в. к тому же пределу. Пусть π_s — этот предел п.в. для каждого s, не входящего в S_0, и $\pi_{s_n}(x) = x_n$ для всех n. Тем самым просто выбраны версии координатных функций x_s.

Наконец, пусть ν — образ меры μ при естественной проекции

$$(x_t)_{t\in S} \mapsto (x_{s_n})_{n=1}^\infty.$$

Заметим, что $\mu = \nu \circ \pi^{-1}$. В самом деле, достаточно показать, что меры μ и $\nu\circ\pi^{-1}$ приписывают равные интегралы каждой ограниченной непрерывной функции от конечного числа координат $x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}$. Это верно, если $t_i \in S_0$, и остается верным в пределе для всякого иного t_i в силу нашего выбора функций π_{t_i}.

Случай радоновской меры в силу сказанного выше сводится к сужению этой меры на бэровскую σ-алгебру. $\square$

Лемма 1.2.5. *Пусть S — несчетное множество, $X = [0,1]^S$, $\nu = \bigotimes_{s\in S}\nu_s$, где все меры ν_s совпадают с одной и той же борелевской вероятностной мерой σ на отрезке $[0,1]$, не имеющей атомов. Тогда ограничение ν на всякое множество положительной меры несепарабельно.*

Доказательство. Пусть E — множество положительной ν-меры. Пусть $\nu|_E$ — ограничение ν на E. Тогда $\nu|_E$ является положительной мерой. Если $\nu|_E$ сепарабельна, то по предыдущей лемме можно найти такое счетное подмножество индексов $\{s_n\}$, что для каждого $t \notin \{s_n\}$ функция x_t является пределом $\nu|_E$-п.в. некоторой подпоследовательности в $\{x_{s_n}\}$. Зафиксируем какое-либо t с таким свойством (оно найдется из-за несчетности S). Пусть

$$\Omega := \Big\{(u_0, u_1, \ldots) \in [0,1]^\infty\colon\ u_0 = \lim_{k\to\infty} u_k\Big\}.$$

Для всякой фиксированной последовательности $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ множество

$$\{u \in [0,1]\colon\ (u, u_1, u_2, \ldots) \in \Omega\}$$

содержит не более одного элемента (который может быть лишь пределом $\{u_k\}$, если таковой существует), поэтому оно оказывается множеством σ-меры нуль. По теореме Фубини множество Ω имеет меру нуль относительно счетной степени меры σ. Следовательно, мера ν равна нулю на множестве таких точек x, что $x_t = \lim\limits_{n\to\infty} x_{s_n}$. Значит, мера $\nu|_E$ равна нулю, что дает противоречие. Лемма доказана. $\square$

В этой лемме весьма важна специфика меры: заключение леммы верно отнюдь не для всякой несепарабельной меры на X.

Лемма 1.2.6. *Пусть пространство $X = [0,1]^{\aleph_0}$ наделено счетной степенью μ мер Лебега на отрезке $[0,1]$. Пусть T — измеримое отображение из X в пространство $Y = [0,1]^{\aleph_1}$, также наделенное произведением $\aleph_1$ копий меры Лебега на $[0,1]$, обозначаемым через ν, причем T переводит некоторую часть меры μ, т.е. ограничение μ на измеримое множество, в часть меры ν. Тогда эти части нулевые.*

Доказательство. Предположим, что $B \subset X$ — такое μ-измеримое множество положительной меры, что образ $\mu|_B$ при T совпадает с ограничением ν на ν-измеримое множество E. Мы имеем два пространства $L^2(\mu|_B)$ и $L^2(\nu|_E)$, причем первое сепарабельно, а второе несепарабельно по предыдущей лемме. Пусть

$$A\colon\ L^2(\nu|_E) \to L^2(\mu|_B), \quad g \mapsto g \circ T.$$

Мы имеем

$$\|g \circ T\|_{L^2(\mu|_B)} = \|g\|_{L^2(\nu|_E)},$$

так как для всякой ν-интегрируемой функции f верно равенство

$$\int_E f(y)\nu(dy) = \int_E f(y)\mu|_B \circ T^{-1}(dy) = \int_B f(T(x))\mu(dx),$$

вытекающее из определения образа меры. Следовательно, оператор A является изометрией из несепарабельного пространства в сепарабельное, что невозможно. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Сначала построим нашу меру μ: возьмем в качестве X пространство $X = X_0 \cup X_1$, где $X_0 = [0,1]^{\aleph_0}$ и $X_1 = [0,1]^{\aleph_1}$, и наделим его мерой $\mu = (\mu_0 + \mu_1)/2$, где μ_0 на X_0 есть счетная степень меры Лебега на отрезке $[0,1]$, μ_1 — степень мощности $\aleph_1$ меры Лебега на $[0,1]$.

Меру ν определим на дизъюнктном объединении $Y = Y_0 \cup Y_1$ тех же пространств, взятых в другом порядке: $Y_0 = X_1$ и $Y_1 = X_0$, причем снова как полусумму мер μ_1 и μ_0. Ясно, что есть много непрерывных преобразований меры μ в ν: например, можно взять тождественные отображения на $X_0 = Y_1$ и $X_1 = Y_0$. Однако мы увидим, что имеется непрерывная функция стоимости, для которой таких преобразований недостаточно для приближения к $K_h(\mu, \nu)$ в задаче Монжа.

В качестве функции стоимости h возьмем теперь индикатор множества $(X_0 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_0)$, который очевидным образом непрерывен. Заметим также, что h равняется нулю на диагонали.

По предыдущей лемме получаем, что всякое отображение T, преобразующее меру μ в ν, должно переводить X_0 в Y_1 с точностью до множества ν-меры нуль, поскольку никакая ненулевая часть μ_0 не может перейти в часть меры $\nu|_{Y_0}$. Следовательно, такое отображение T переводит X_1 в Y_0 также с точностью до множества ν-меры нуль. Это означает, что

$$\mu(T^{-1}(Y_0) \cap X_0) = \mu(T^{-1}(Y_1) \cap X_1) = 0.$$

В частности, для μ-п.в. $x \in X_0$ имеем $T(x) \in Y_1$ и для μ-п.в. $x \in X_1$ имеем $T(x) \in Y_0$.

Тогда $(x, T(x)) \in X_0 \times Y_1$ для μ-п.в. $x \in X_0$ и $(x, T(x)) \in X_1 \times Y_0$ для μ-п.в. $x \in X_1$, откуда $h(x, T(x)) = 1$ μ-п.в., так что

$$M_h(\mu, \nu) = M_h(\mu, \nu, T) = \int_X h(x, T(x))\, \mu(dx) = 1.$$

В то же время для меры $\sigma = \mu \otimes \nu$ имеем

$$\int_{X \times Y} h(x, y) \sigma(dxdy) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Значит, $K_h(\mu, \nu) \leqslant 1/2 < 1 = M_h(\mu, \nu)$. На самом деле верно равенство $K_h(\mu, \nu) = 0$, поскольку мера $\pi = (\mu_0 \otimes \mu_1 + \mu_1 \otimes \mu_0)/2$ с проекциями μ и ν сосредоточена на множестве $\{h = 0\}$. □

Таким образом мы построили точную границу для условий равенства значений в случае непрерывной функции стоимости.

1.3 Доказательсво примера 1.2.2

Для полноты картины приведём доказательсво того, что непрерывность функции стоимости существенна и не может быть заменена даже на полунепрерывность снизу. Пример и доказательство заимствованны из [7], [68].

Пример 1.3.1. *Пусть* $X = Y = [0,1] \times [-1,1]$, μ *— линейная мера Лебега на отрезке* $I_0 = [0,1] \times \{0\}$, ν *— умноженная на* $1/2$ *линейная мера Лебега на объединении отрезков* $I_1 = [0,1]\times\{1\}$ *и* $I_2 = [0,1]\times\{-1\}$, $h(x,y) = 0$, *если* $\|x-y\| = 1$, $h(x,y) = 1$ *в остальных случаях, т.е.* h *— индикатор открытого множества* $U = \{(x,y) \in X\times Y\colon\ \|x-y\| \neq 1\}$ *— дополнения замкнутого множества* $Z = \{(x,y) \in X\times Y\colon\ \|x-y\| = 1\}$. *Тогда задача Канторовича и задача Монжа имеют решения, но они различны и* $K(\mu,\nu) = 0$, $M(\mu,\nu) = 1$.

Доказательство. Решением задачи Канторовича является мера $\widehat{\sigma}$, равная умноженной на $1/2$ линейной мере Лебега на объединении диагональных отрезков

$$D_1 = \{(x_1,0,x_1,1)\colon\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\},\ D_2 = \{(x_1,0,x_1,-1)\colon\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\}.$$

Ее проекции есть μ и ν, $K(\mu,\nu,\sigma) = 0$, так как D_1, D_2 лежат в Z. Других мер σ в $\Pi(\mu,\nu)$ с таким же значением нет, ибо должно выполняться равенство $\sigma(Z) = 1$, а также равенства $\sigma\bigl(X\times(I_1\cup I_2)\bigr) = 1$, $\sigma(I_0\times Y) = 1$. Иначе говоря, мера σ должна быть сосредоточена на множестве точек вида $(x_1,0,y_1,y_2)$, где $|y_2| = 1$ и $(x_1-y_1)^2 + y_2^2 = 1$, т.е. $x_1 = y_1$. Тем самым σ сосредоточена на $D_1\cup D_2$, что с учетом совпадения проекции σ на первый сомножитель с мерой μ делает неизбежным равенство $\sigma = \widehat{\sigma}$.

Обратимся к задаче Монжа. Одним из ее решений (но не единственным) оказывается отображение T, заданное следующим образом: $T(x_1,x_2) = (2x_1,1)$ при $0 \leqslant x_1 \leqslant 1/2$, $T(x_1,x_2) = (2x_1-1,-1)$ при $1/2 < x_1 \leqslant 1$. Для него $M(\mu,\nu,T) = 1$, ибо ни для какой транспортировки S меры μ в ν нельзя получить меньшего значения. Чтобы это увидеть, заметим, что если $\mu\circ S^{-1} = \nu$, то $\|x - S(x)\| \neq 1$ при μ-почти всех x. В самом деле, если $x = (x_1,0) \in I_0$ таково, что $S(x) \in I_1\cup I_2$ (таковы μ-почти все x), то равенство $\|x - S(x)\| = 1$ возможно лишь при $S(x) = (x_1,y_2)$, где $|y_2| = 1$. Таким образом, если множество $E = \{x\colon\ \|x-S(x)\| = 1\}$ имеет положительную меру, то μ-почти каждая его точка имеет вид $(x_1, 0)$ и сдвигается либо на 1 вверх, либо на 1 вниз. Поэтому можно считать, что $E \subset I_0$ и каждая точка E сдвигается под действием S на 1 вверх или вниз. Это ведет к противоречию с тем, что ν — образ μ: скажем, если положительную меру имеет множество E_1 точек из E, сдвигающихся вверх, то $\nu(E_1 \times \{1\}) = \mu(E_1)/2$, хотя $\nu(E_1) = \mu\bigl(S^{-1}(E_1 \times \{1\})\bigr) \geqslant \mu(E_1)$. $\square$

Глава 2

Достаточные условия для равенства значений

2.1 Достаточные условия для равенства значений

В данной главе исследованы достаточные условия для равенства значений в решениях задач Монжа и Канторовича.

Известно (см. [54] или [55, теорема 9.12.24]), что всякую безатомическую вероятностную радоновскую меру μ можно с помощью измеримого отображения преобразовать во всякую сепарабельную вероятностную радоновскую меру. Для этого достаточно уметь преобразовывать меру Лебега на $[0,1]$ во всевозможные сепарабельные вероятностные радоновские меры, поскольку в меру Лебега нетрудно перевести какую угодно безатомическую вероятностную меру (см. [34, предложение 9.1.11]).

Теорема 2.1.1. *Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, h — непрерывная функция на $X \times Y$, μ и ν — вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно, причем μ не имеет атомов. Предположим, что всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть меры ν той же самой полной массы. Тогда*

$$\inf_{\sigma \in \Pi(\mu,\nu)} K_h(\mu,\nu,\sigma) = \inf_{T \in T(\mu,\nu)} M_h(\mu,\nu,T).$$

Если существует мера $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$, относительно которой функция h интегрируема, то в левой части инфимум превращается в минимум. В частности, так будет, если $h \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Если же таких мер нет, то обе части равенства равны бесконечности.

В случае непрерывной функции стоимости эти условия являются достаточными. Второй основной результат заключается в построении примера, который показывает, что эти условия нельзя улучшить.

Для доказательства этой теоремы используется деление пространства $X \times Y$ на части с малым колебанием функции стоимости, аналогично алгоритмам в работах [68] и [20], однако реализация этой идеи несколько отлична от цитированных работ, что приводит к некоторым упрощениям при большей общности утверждения. Этот результат опубликован в [73]

Лемма 2.1.2. *Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, h — непрерывная функция на $X \times Y$, μ и ν — вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно. Пусть $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$. Если μ и ν не имеют атомов, то для всякого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности борелевских множеств $A_n \subset X$, $B_n \subset Y$ и $X_n \subset A_n$, $Y_n \subset B_n$ со следующими свойствами:*

1) $\sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A_n \times B_n} |h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)| < \varepsilon$,
2) $(A_n \times B_n) \cap (A_k \times B_k) = \varnothing$ *при* $n \neq k$,
3) $\gamma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)\Big) = 1$,
4) $\mu(X_n \cap X_k) = 0$, $\nu(Y_n \cap Y_k) = 0$ *при* $n \neq k$,
5) $\mu(X_n) = \nu(Y_n) = \gamma(A_n \times B_n)$.

Доказательство. Так как μ и ν — радоновские меры, то существуют такие компакты $K_n^1 \subset X$, $K_n^2 \subset Y$, что $\mu(X \setminus K_n^1) < n^{-1}$, $\nu(Y \setminus K_n^2) < n^{-1}$. Можно считать, что $K_n^1 \subset K_{n+1}^1$, $K_n^2 \subset K_{n+1}^2$. Для каждой точки компакта $K_n^1 \times K_n^2$ найдем ее окрестность вида $U \times V$, в которой разброс значений h меньше ε. Выберем конечное подпокрытие $K_n^1 \times K_n^2$ такими окрестностями вида $U_k^n \times V_k^n$, затем заменим U_k^n и V_k^n на $U_k^n \cap K_n^1$ и $V_k^n \cap K_n^2$ соответственно. Переходя к конечным пересечениям, получим (при фиксированном n) непересекающиеся измеримые множества $A_k^n \times B_k^n$, покрывающие $K_n^1 \times K_n^2$. Переходя к измельчению, можно считать, что если $A_k^n \cap A_l^{n-1} \neq \varnothing$, то $A_k^n \subset A_l^{n-1}$, а если $A_k^n \cap A_l^n \neq \varnothing$, то $A_k^n = A_l^n$ (и то же самое для B_k^n). При этом разброс значений h на каждом из множеств $A_k^n \times B_k^n$ меньше ε. Тогда прямоугольники

$$(A_k^n \setminus K_{n-1}^1) \times B_k^n, \quad (A_k^n \cap K_{n-1}^1) \times (B_k^n \setminus K_{n-1}^2)$$

попарно не пересекаются и покрывают объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty}(K_n^1 \times K_n^2)$. Полученный счетный набор прямоугольников занумеруем по порядку (нумеруя покрывающие множества для $K_1^1 \times K_1^2$, $K_2^1 \times K_2^2$ и т.д.) и обозначим через $A_n \times B_n$. Эти прямоугольники обладают свойствами 1), 2) и 3). При этом

$$\text{либо } A_n \cap A_k = \varnothing, \quad \text{либо } A_n \subset A_k \text{ и } k \leqslant n$$

(и то же самое для B_n).

Построим множества $X_n \subset A_n$ со свойствами 4) и 5). Возьмем множество $X_1^1 \subset A_1$ с $\mu(X_1^1) = \gamma(A_1 \times B_1)$. Такое множество найдется, так как для всякого измеримого множества $A \subset X$ меру $\mu|_A$ (ограничение μ на A) можно преобразовать в меру Лебега на отрезке $[0, \mu(A)]$. Поэтому для каждого числа $t \leqslant \mu(A)$ множество B, равное прообразу $[0, t]$ при таком преобразовании, будет обладать свойством $\mu(B) = t$. Будем брать множества

$$X_i^1 \subset A_i \ \text{ с } \ \mu(X_i^1) = \gamma(A_i \times B_i)$$

до тех пор, пока они попарно не пересекаются. Пусть $k_1 - 1$ — последний номер, для которого это еще возможно. Возьмем какое-либо множество $X_{k_1}^2 \subset A_{k_1}$ меры $\gamma(A_{k_1} \times B_{k_1})$, которое уже пересекается с каким-то из предыдущих. Для $j = k_1 - 1, \ldots, 1$ последовательно введем множества

$$C_j^1 = X_j^1 \cap \Biggl(\bigcup_{j < l \leqslant k_1 \colon A_l \subset A_j} X_l^2 \Biggr),$$

$$R_j^1 := A_j \setminus \Biggl(X_j^1 \cup \bigcup_{j < l \leqslant k_1 \colon A_l \subset A_j} X_l^2 \Biggr),$$

$$D_j^1 \subset R_j^1, \quad \mu(D_j^1) = \mu(C_j^1), \quad X_j^2 := (X_j^1 \setminus C_j^1) \cup D_j^1,$$

где при каждом j мы определяем сначала C_j^1 и R_j^1, затем находим D_j^1 и последним задаем X_j^2, причем к этому моменту множества X_l^2 при $l > j$ уже определены.

Проверим, что наше построение корректно, т.е. возможен последовательный выбор множеств D_j^1 с убывающим j. Для этого нужно доказать, что для каждого j верна оценка $\mu(R_j^1) \geqslant \mu(C_j^1)$, поэтому можно выбрать множество D_j^1 с нужным свойством. Предположим, что при всех $l \in \{j+1, \ldots, k_1 - 1\}$ множества D_l^1 и X_l^2 уже определены. Тогда при всех $l \in \{j+1, \ldots, k_1 - 1\}$ имеем $\mu(X_l^2) = \mu(X_l^1) = \gamma(A_l \times B_l)$, так как

$$X_l^2 = (X_l^1 \setminus C_l^1) \cup D_l^1, \quad C_l^1 \subset X_l^1, \quad D_l^1 \cap X_l^1 = \emptyset$$

и $\mu(C_l^1) = \mu(D_l^1)$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\mu(R_j^1) = \mu(A_j) - \mu\Biggl(X_j^1 \cup \bigcup_{j<l\leqslant k_1\colon A_l\subset A_j} X_l^2\Biggr) = \\ = \mu(A_j) - \mu(X_j^1) - \mu\Biggl(\bigcup_{j<l\leqslant k_1\colon A_l\subset A_j} X_l^2\Biggr) + \mu(C_j^1) = \\ = \gamma(A_j \times Y) - \gamma(A_j \times B_j) - \sum_{j<l\leqslant k_1\colon A_l\subset A_j} \gamma(A_l \times B_l) + \mu(C_j^1).\end{aligned}$$

Напомним, что по построению множества $A_n \times B_n$ с $n \in \mathbb{N}$ попарно не пересекаются. Поэтому для всех $l = j, \ldots, k_1$ таких, что $A_l \subset A_j$, множества $A_l \times B_l$ являются попарно непересекающимися подмножествами множеств $A_j \times Y$, откуда

$$\gamma(A_j \times Y) - \gamma(A_j \times B_j) - \sum_{j<l\leqslant k_1\colon A_l\subset A_j} \gamma(A_l \times B_l) \geqslant 0,$$

поэтому $\mu(R_j^1) \geqslant \mu(C_j^1)$. Мы доказали, что наше построение корректно, т.е. мы можем найти очередные множества D_j^1 и X_j^2, что в итоге позволяет дойти до $j = 1$.

Покажем, что множества $X_1^2, \ldots, X_{k_1}^2$ попарно не пересекаются. Заметим, что $R_j^1 \cap X_l^2 = \emptyset$ и $(X_j^1 \setminus C_j^1) \cap X_l^2 = \emptyset$ при $l > j$ (множество X_l^2 удалено из R_j^1, а множество C_j^1 содержит $X_j^1 \cap X_l^2$, если $A_j \cap A_l \neq \emptyset$).

Поэтому $X_j^2 \subset (X_j^1 \setminus C_j^1) \cup R_j^1$ имеет пустое пересечение с X_l^2 при $l > j$. Следовательно, мы получили набор множеств $X_1^2, \ldots, X_{k_1}^2$, которые попарно не пересекаются. Для $i > k_1$ будем брать множества $X_i^2 \subset A_i$ с $\mu(X_i^2) = \gamma(A_i \times B_i)$, пока множества $X_1^2, \ldots, X_i^2$ попарно не пересекаются. Получаем набор попарно непересекающихся множеств $X_1^2, \ldots, X_{k_2-1}^2$. Возьмем множество $X_{k_2}^3 \subset A_{k_2}$ с $\mu(X_{k_2}^3) = \gamma(A_{k_2} \times B_{k_2})$.

Построим множества C_j^2, R_j^2, D_j^2 и X_j^3 при $j = k_2-1, \ldots, 1$ по аналогии с предыдущим. Будем продолжать построение и для каждого $i \geqslant 3$ получим множества X_j^i, $j \in \{k_{i-1}+1, \ldots, k_i-1\}$, множество $X_{k_i}^{i+1}$ и множества C_j^i, R_j^i, D_j^i, X_j^{i+1} при $j = k_i - 1, \ldots, 1$, причем множества $X_1^{i+1}, \ldots, X_{k_i}^{i+1}$ попарно не пересекаются.

Покажем, что $R_j^k \subset R_j^l$ при $k > l$. Достаточно доказать, что $R_j^{l+1} \subset R_j^l$. Заметим, что

$$X_j^{l+1} \cup \bigcup_{j<i\leqslant k_l\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+1} \supset X_j^{l+1} \cup C_j^l \supset X_j^l.$$

Значит,

$$X_j^{l+1} \cup \bigcup_{j<i\leqslant k_{l+1}\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+2} \supset X_j^{l+1} \cup \bigcup_{j<i\leqslant k_l\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+1} \supset$$
$$\supset X_j^l \cup \bigcup_{j<i\leqslant k_l\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+1}.$$

Следовательно, $R_j^{l+1} \subset R_j^l$.

Покажем, что множества D_j^k попарно не пересекаются при фиксированном j. Заметим, что $D_j^l \cap R_j^{l+1} = \emptyset$, так как $R_j^{l+1} \subset A_j \setminus X_j^{l+1}$ и $D_j^l \subset X_j^{l+1}$. Отсюда следует, что при $k > l$ выполнено равенство $D_j^k \cap D_j^l = \emptyset$, ибо $D_j^k \subset R_j^k \subset R_j^{l+1}$ и $D_j^l \cap R_j^{l+1} = \emptyset$.

Заметим, что $D_j^k \cap X_j^l = \emptyset$ при $k \geqslant l$, так как $D_j^k \subset R_j^k \subset R_j^l$ и $X_j^l \cap R_j^l = \emptyset$. Отсюда следует, что $D_j^k \cap C_j^l = \emptyset$ при $k \geqslant l$, ибо $C_j^l \subset X_j^l$.

Покажем, что множества C_j^k попарно не пересекаются при фиксированном j. Заметим, что при $k > l$ имеют место включения

$$C_j^k \subset X_j^k \subset X_j^{l+1} \cup \bigcup_{l+1\leqslant i<k} D_j^i.$$

Поскольку $X_j^{l+1} \cap C_j^l = \emptyset$ и $D_j^i \cap C_j^l = \emptyset$ при $i > l$, получаем, что $C_j^k \cap C_j^l = \emptyset$ при $k > l$.

Покажем с помощью индукции по k, что при всех n и m, для которых $n < k_m$, и при всех k верно равенство

$$X_n^{m+k} = \left(X_n^m \cup \bigcup_{m \leqslant l < m+k} D_n^l \right) \setminus \bigcup_{m \leqslant l < m+k} C_n^l.$$

При $k = 0$ это верно. Предположим, что равенство верно для некоторого $k \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned} X_n^{m+k+1} &= (X_n^{m+k} \setminus C_n^{m+k}) \cup D_n^{m+k} = \\ &= \left(\left(X_n^m \cup \bigcup_{m \leqslant l < m+k} D_n^l \right) \setminus \bigcup_{m \leqslant l < m+k+1} C_n^l \right) \cup D_n^{m+k} = \\ &\qquad = \left(X_n^m \cup \bigcup_{m \leqslant l < m+k+1} D_n^l \right) \setminus \bigcup_{m \leqslant l < m+k+1} C_n^l, \end{aligned}$$

так как $D_n^{m+k} \cap C_n^l = \emptyset$ при $l \leqslant m + k$.

Для каждого n найдем наименьшее число m, для которого $n < k_m$, и обозначим его через $m(n)$. Положим

$$X_n = \left(X_n^{m(n)} \cup \bigcup_{l \geqslant m(n)} D_n^l \right) \setminus \bigcup_{l \geqslant m(n)} C_n^l.$$

Докажем, что для различных k и n множества X_k и X_n не пересекаются. Предположим, что существует $x \in X_k \cap X_n$. Заметим, что $x \in X_n$ тогда и только тогда, когда существует такое m_0, что $x \in X_n^m$ при всех $m \geqslant m_0$. Тогда получим, что существует такое m, что $x \in X_k^m \cap X_n^m$, что противоречит тому, что множества $X_1^m, \dots, X_{k_m-1}^m$ попарно не пересекаются.

Легко видеть, что свойство 5) также имеет место. В самом деле, из свойств множеств D_j^i и C_j^i и включения $\bigcup_{l \leqslant m(n)} C_n^l \subset X_n^{m(n)} \cup \bigcup_{l \geqslant m(n)} D_n^l$ следует равенство

$$\mu(X_n) = \mu(X_n^{m(n)}) + \sum_{l \geqslant m(n)} \mu(D_k^l) - \sum_{l \leqslant m(n)} \mu(C_k^l) = \mu(X_n^{m(n)}) = \gamma(A_n \times B_n),$$

так как по построению $\mu(D_k^l) = \mu(C_k^l)$.

Аналогичным образом построим множества $Y_n \subset B_n$ со свойствами 4) и 5). $\square$

Доказательство теоремы. Будем считать, что имеется мера из $\Pi(\mu,\nu)$, относительно которой функция h интегрируема (иначе оба инфимума бесконечны и равны). Тогда в задаче Канторовича инфимум оказывается минимумом. Пусть γ — мера из $\Pi(\mu,\nu)$, на которой достигается этот минимум. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем множества A_n, B_n и X_n, Y_n, существующие по лемме. По свойству 3) прямоугольники $A_n \times B_n$ покрывают γ-почти все $X \times Y$. На каждом из них разброс значений h меньше ε по свойству 1). По свойству 5) имеем $\mu(X_n) = \nu(Y_n) = \gamma(A_n \times B_n)$. По условию теоремы существует измеримое отображение $T_n\colon X_n \to Y_n$, для которого $\mu|_{X_n} \circ T_n^{-1} = \nu|_{Y_n}$. Положим

$$M_n = \sup_{(x,y)\in A_n\times B_n} h(x,y), \quad m_n = \inf_{(x,y)\in A_n\times B_n} h(x,y).$$

Тогда

$$M(T_n) := \int_{X_n} h(x, T_n(x))\,\mu(dx) \leqslant M_n\mu(X_n) = M_n\gamma(A_n \times B_n),$$

$$K(\gamma_n) := \int_{A_n\times B_n} h(x,y)\,\gamma(dxdy) \geqslant m_n\gamma(A_n \times B_n).$$

По свойству 1) имеем $M_n - m_n \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$M(T_n) \leqslant K(\gamma_n) + \varepsilon\gamma(A_n \times B_n).$$

Положим теперь $T(x) := T_n(x)$ при $x \in X_n$. Тогда отображение T переводит меру μ в меру $\sum_n \nu|_{Y_n} = \nu$, причем

$$M_h(\mu,T) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(t_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (K(\gamma_n) + \varepsilon\gamma(A_n \times B_n)) = K_h(\gamma) + \varepsilon.$$

Последнее равенство следует из свойств 3) и 4). В силу произвольности выбора ε получаем доказываемое утверждение. $\square$

Следствие 2.1.3. *Условие безатомичности меры ν можно опустить, если меру μ можно преобразовать в меру ν, а всякую часть меры μ*

можно преобразовать во всякую часть этой же меры μ *той же полной массы, либо если всякую часть меры* μ *можно преобразовать во всякую часть меры* $\nu \otimes \lambda$*, где* λ *— мера Лебега на* $[0,1]$.

Доказательство. Если выполнено последнее условие, то теорема применима к безатомической мере $\nu \otimes \lambda$ и функции стоимости $h_0(x,y,t) = h(x,y)$. Пусть σ_0 — оптимальный план на $X \times Y \times [0,1]$ с проекциями μ и $\nu \otimes \lambda$ на сомножители X и $Y \times [0,1]$. Пусть σ_1 — проекция σ_0 на $X \times Y$. Проекции σ_1 на X и Y есть μ и ν соответственно, а интеграл от h по σ_1 равен интегралу от h_1 по мере σ_1. Поэтому $K_h(\mu,\nu) \leqslant K_{h_0}(\mu, \nu \otimes \lambda)$. С другой стороны, из всякой меры $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$ мы получаем меру $\sigma \otimes \lambda \in \Pi(\mu, \nu \otimes \lambda)$, для которой $K_h(\sigma) = K_{h_0}(\sigma \otimes \lambda)$. Следовательно,

$$K_h(\mu,\nu) = K_{h_0}(\mu, \nu \otimes \lambda).$$

По основной теореме для каждого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое отображение $S\colon X \to Y \times [0,1]$, для которого $\mu \circ S^{-1} = \nu \otimes \lambda$ и $M_{h_0}(\mu, S) < K_h(\sigma) + \varepsilon$. Пусть T — композиция S с проекцией на Y. Отображение T измеримо и переводит μ в ν. Кроме того,

$$\int_X h(x, T(x))\, \mu(dx) = \int_X h_0(x, S(x))\, \mu(dx),$$

откуда $M_h(\mu, T) < K_h(\mu,\nu) + \varepsilon$.

Наконец, заметим, что если имеется какое-то измеримое преобразование T_0 всей меры μ в меру ν, а части меры μ равной массы можно переводить друг в друга, то во всякую часть ν_1 меры $\nu \otimes \lambda$ можно преобразовать всякую часть μ_1 меры μ той же массы. В самом деле, сделанное предположение означает, что соответствующая мере μ алгебра с мерой однородна (все пространства $L^2(\mu|_A)$ для множеств A положительной меры имеют равномощные ортонормированные базисы) и по теореме Магарам изоморфна алгебре с мерой для некоторой степени λ^κ меры Лебега λ на $[0,1]$ (см. [55, теорема 331I] или [34, теорема 9.3.5]). Кроме того, в силу радоновости обеих мер и изморфности алгебр с мерами, меры μ и λ^κ можно переводить друг в друга (см. [55, теорема 343B]). Это позволяет найти измеримое отображение T_1, которое переводит меру μ в

$\nu \otimes \lambda$. Значит, некоторая часть μ_2 меры μ переходит при T_1 в меру ν_1. Остается найти измеримое отображение F, переводящее μ_1 в μ_2, и взять отображение $T_1 \circ F$. □

Отметим, что для сепарабельной безатомической радоновской меры μ всякую ее часть можно перевести в любую другую часть той же массы. Для несепарабельных мер это неверно. Например, можно взять меру $3\lambda/4 + \lambda^\kappa/4$, где λ — мера Лебега на $[0,1]$ и κ — несчетная мощность (эта сумма определена на $[0,1] \cup [0,1]^\kappa$). Тогда никакую часть меры Лебега на $[0,1]$ нельзя перевести в меру $\lambda^\kappa/4$ (см. доказательство леммы 1.2.6 ниже).

Следствие 2.1.4. *Если функция $h \geqslant 0$ непрерывна, радоновские вероятностные меры μ и ν сепарабельны, причем μ не имеет атомов и $K_h(\mu,\nu) < \infty$, то инфимум в задаче Монжа равен минимуму в задаче Канторовича.*

Из доказательства теоремы очевидно, что фактически вместо непрерывности функции h было использовано более слабое условие: для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие компакты $K_1 \subset X$ и $K_2 \subset Y$, что $\mu(X\backslash K_1) < \varepsilon$ и $\nu(Y\backslash K_2) < \varepsilon$, причем на $K_1 \times K_2$ функция h непрерывна. Такое свойство называется в работе [12] виртуальной непрерывностью. Вопреки первому впечатлению, оно не вытекает из теоремы Лузина, которая дает компакт в $X \times Y$ с $\mu \otimes \nu$-мерой не менее $1 - \varepsilon$, на котором функция h непрерывна. Дело в том, что в таком компакте может не содержаться произведений компактов нужной меры.

Следствие 2.1.5. *Условие непрерывности функции стоимости h в лемме, основной теореме и ее следствиях можно ослабить до виртуальной непрерывности.*

2.2 Направления для дальнейших изучений

Учитывая результаты главы 1 и следствия теоремы 2.1.1, можно утверждать, что построена точная граница условий для равенства значений в задачах Монжа и Канторовича для непрерывных функций стоимости. Дальнейший путь развития этого вопроса заключаются в поиске ответа на вопрос о том, сохранится ли эта точная граница для задач Монжа и Канторовича с дополнительными ограничениями на исходные меры или на функцию стоимости. Задачи Монжа и Канторовича с дополнительными ограничениями получили широкое распространение за последние десять лет. Задачи на $\mathbb{R}^n$ с дополнительными ограничениями на функцию стоимости были рассмотрены в работах Korman J., McCann R. J. [61],[60],[63], [62]. Позднее эти результаты были распространены на бесконечномерные пространства (см. работы [13],[6],[14]). С другой стороны можно ввести ограничение на меры исходных пространств, потребовав, чтобы все меры, испольуемые в задаче находились в каком-то специальном классе мер. Подобные задачи уже будут находиться на стыке теории оптимального планирования и теории локализации на локально выпуклых пространствах.

Глава 3

Теорема о локализации

3.1 Введение и известные результаты

Следующие результаты не относятся напрямую к задачам Монжа и Канторовича, но связаны с важным классом задач теории оптимизации, а именно задач локализации мер. Решение задач теории локализаци имеет много общего с решением задачами оптимально планирования. поскольку также сводится к поиску точек экстремума функционалов на пространствах мер.

Результаты этой главы обобщают методы локализации для гиперболических мер на бесконечномерных локально выпуклых пространствах. Более того, один из двух основных новых результатов относится даже к более широкому классу мер, для которых выполнен закон $0-1$.

Исходным пунктом развития локализационной теории была следующая так называемая локализационная лемма из работы [64]. Близкие идеи ранее были предложены в работах [67] и [56].

Теорема 3.1.1. *(Локализационная лемма) Пусть $u, v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — две такие полунепрерывные снизу интегрируемые функции, что*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} v(x)dx > 0.$$

Тогда для некоторых точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ и положительной аффинной функ-

ции l на интервале $(0,1)$ выполнены неравенства

$$\int_0^1 u((1-t)a+tb)l(t)^{n-1}dt > 0, \quad \int_0^1 v((1-t)a+tb)l(t)^{n-1}dt > 0.$$

В оригинальной формулировке требовалось найти лишь некоторую аффинную функцию, которая позволяет сводить условие интегрируемости на $\mathbb{R}^n$ к интегралу на отрезке. Позже появилось много модификаций и обобщений этой теоремы, которые способствовали развитию локализационной теории для более широкого класса объектов. В работах [59], [53] и [52] дана геометрическая интерпретация этой теоремы и описано применение к исследованию выпуклых тел. Локализационная теория имеет множество приложений в геометрии и геометрических задачах теории меры, см. работы [59], [57], [31], [3], [2], [30], [21], [33], [55], [37], [4], [32], [1]. В большинстве таких приложений вопрос сводится к поиску специальной меры, сосредоточенной на компакте малой размерности, а не аффинной функции. В статье [64] описан некоторый алгоритм для поиска локализующей функции — метод бисекций. Есть много работ, посвященных распространению этого метода на более общие пространства с мерами, включая пространства бесконечной размерности, см., например, [53], [4], [32].

Важным случаем являются пространства с α-вогнутыми мерами. Напомним (см. [35]), что конечная неотрицательная мера μ на борелевской σ-алгебре в топологическом пространстве E называется радоновской, если для всяких борелевского множества B и числа $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B \backslash K) < \varepsilon$. Носителем $H_\mu = supp(\mu)$ радоновской меры μ на E называется наименьшее замкнутое подмножество полной меры, т.е. с дополнением нулевой меры. Напомним также, что линейная комбинация непустых множеств A и B задается равенством

$$(1-t)A + tB = \{(1-t)x + ty \colon x \in A\,, y \in B\}.$$

Определение 3.1.2. *Неотрицательная радоновская мера μ на действительном локально выпуклом пространстве E называется α-вогнутой*

$(-\infty \leqslant \alpha \leqslant +\infty)$, если для всех непустых борелевских множеств A и B и всех $t \in (0,1)$ верно неравенство

$$\mu_*((1-t)A + tB) \geqslant \Big[(1-t)\mu(A)^\alpha + t\mu(B)^\alpha\Big]^{1/\alpha},$$

где $\mu_*(U) = \sup\{\mu(V)\colon V$ — компактное подмножество $U\}$.
В случае $\alpha = -\infty$ неравенство имеет вид

$$\mu_*((1-t)A + tB) \geqslant \min\{\mu(A), \mu(B)\},$$

а соответствующая мера будет называться выпуклой или гиперболической. В случае $\alpha = 0$ имеем

$$\mu_*((1-t)A + tB) \geqslant \mu(A)^{1-t}\mu(B)^t,$$

а мера μ называется логарифмически вогнутой.

Случай $\alpha = -\infty$ дает наиболее широкий класс мер, а с увеличением α эти классы уменьшаются. Вероятностная мера, сосредоточенная в одной точке, является ∞-вогнутой. Во всех остальных случаях имеем $\alpha \leqslant 1$. Классический пример логарифмически вогнутой меры — гауссовская мера. Эти меры обладают рядом важных свойств, которые доказаны в [38].

Теорема 3.1.3. *(Закон $0-1$ для гиперболических мер.) Пусть μ — гиперболическая вероятностная мера на локально выпуклом пространстве E. Тогда для всякой аддитивной подгруппы H в E имеем либо $\mu_*(H) = 0$, либо $\mu_*(H) = 1$.*

В [38], [39] дано также полное описание α-вогнутых мер в терминах плотностей. Аналогично приведенному определению назовем β-вогнутой неотрицательную функцию f, определенную на выпуклом множестве H в E, если верно неравенство

$$f((1-t)x + ty) \geqslant \Big[(1-t)f(x)^\beta + tf(y)^\beta\Big]^{1/\beta}$$

для всех $t \in (0,1)$ и $x, y \in H$ таких, что $f(x) > 0$ и $f(y) > 0$. Верны следующие теоремы.

Теорема 3.1.4. *Пусть μ — α-вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$ с носителем H_μ размерности k. Тогда $\alpha \leqslant 1/k$. Более того, μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега соответствующей размерности на носителе H_μ и обладает положительной, конечной, β-вогнутой плотностью на H_μ, где*

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha k}.$$

Обратно, если конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ сосредоточена на выпуклом множестве H размерности k и имеет положительную, конечную, β-вогную плотность f относительно k-мерной меры Лебега на этом подмножестве с $\beta \geqslant -1/k$, то она α-вогнута.

Теорема 3.1.5. *Вероятностная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве E является α-вогнутой тогда и только тогда, когда для каждого непрерывного линейного отображения $T\colon E \to \mathbb{R}^n$ образ меры μ есть α-вогнутая мера на $\mathbb{R}^n$.*

Следующее свойство, описанное в [4], является обобщением результатов из [40].

Теорема 3.1.6. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда каждая α-вогнутая мера на локально выпуклом пространстве E имеет компактный носитель конечной размерности.*

Соответствующая формулировка локализационной леммы для вогнутых мер выглядит следующим образом.

Теорема 3.1.7. *Пусть μ – α-вогнутая мера на пространстве E и $u, v\colon E \to \mathbb{R}$ — две такие полунепрерывные снизу μ-интегрируемые функции, что*

$$\int_E u d\mu > 0, \quad \int_E v d\mu > 0.$$

Тогда для некоторых точек $a, b \in E$ и некоторой α-вогнутой меры ν, сосредоточенной на отрезке $\Delta = [a, b]$, выполнены неравенства

$$\int_\Delta u d\nu > 0, \quad \int_\Delta v d\nu > 0.$$

В работах [53] и [4], [32] рассмотрены два различных подхода к обобщению локализационной леммы в этой формулировке. В статье [53] приведено утверждение для произвольного конечного набора полунепрерывных функций, определенных на пространстве конечной размерности с α-вогнутой мерой. Кроме того, там дана геометрическая интерпретация локализационной теории, где искомая мера выступает как крайняя точка множества всех α-вогнутых мер, для которых интегралы по заданным полунепрерывным функциям положительны. В [4], [32], напротив, основной модификацией является отказ от конечной размерности исходного векторного пространства. Ниже построена модификация локализационной леммы в случае локально выпуклого пространства бесконечной размерности и рассмотрены свойства крайних точек множества α-вогнутых мер. Основной целью является обобщение этой теоремы с использованием обеих методик одновременно. Доказательство из [4], [32] нельзя без изменений перенести на случай произвольного конечного числа полунепрерывных функций, поскольку для двух полунепрерывных функций используется теорема о промежуточном значении на окружности, которая в случае большего числа функций становится сферой. Однако, используя метод доказательства из [53], можно обойти это ограничение с помощью теоремы Борсука – Улама о диаметральных точках при непрерывном отображении сферы (см. [41] или [65]).

Теорема 3.1.8. *Пусть задана непрерывная функция $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{S}^n$ — сфера в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве. Тогда существуют такие две диаметрально противоположные точки сферы $a, b \in \mathbb{S}^n$, что $f(a) = f(b)$. Если дополнительно известно, что f является нечетной функцией, то $f(a) = f(b) = 0$.*

3.2 Основные результаты

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов. Начнем с утверждения о крайних точках. Для удобства приведем некоторые определения и обозначения из [4], [32]. Пусть K — выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве E. Обозначим через $\mathcal{M}_\alpha(K)$, где $-\infty \leqslant \alpha \leqslant 1$, семейство всех α-вогнутых вероятностных мер с носителем в K.

Для заданных непрерывных функций $f_1, \ldots, f_n$ рассмотрим подмножество

$$\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n) = \Big\{\mu \in \mathcal{M}_\alpha(K)\colon \int_K f_i d\mu \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\Big\}$$

и его замкнутую выпуклую оболочку $\overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$. Сформулируем теорему о крайней точке. Сразу напомним, что по теореме Д.П. Мильмана (см. [37, теорема 1.12.6]) крайние точки $\overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$ лежат в исходном множестве $\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$ ввиду его слабой компактности.

Теорема 3.2.1. (i) *Размерность носителя всякой крайней точки* $\mu \in \overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$ *не больше* n. (ii) *Если* $\alpha \leqslant \frac{1}{n+1}$, *то либо крайняя мера* μ *сосредоточена в одной точке* $x \in K$ *и* $f_i(x) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, *либо ее носитель — выпуклый компакт в* K, *причем если* $\dim H_\mu = n$, *то*

$$\int f_i d\mu = 0 \quad \forall\, i \leqslant n$$

и для каждой относительно внутренней точки x_0 *носителя меры* μ (*т.е. внутренней в его аффинной оболочке*) *и каждого ненулевого функционала* $l \in E'$ *с условием* $\mu(\{l = c\}) = 0$ *при всех* $c \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство*

$$\int_{x\colon\, l(x-x_0)\geqslant 0} f_i d\mu \neq 0 \quad \forall\, i \leqslant n.$$

Кроме того, в этом случае мера μ *имеет плотность вида*

$$g(x) = (V(x))^\gamma,\ \gamma = \frac{1}{\alpha} - n$$

с некоторой функцией $V\colon K \to (0, \infty)$, *вогнутой при* $\alpha > 0$ *и выпуклой при* $\alpha < 0$.

Доказательство. Предположим, что мера $\mu \in \overline{\mathrm{conv}}\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$ имеет носитель H_μ размерности $\dim(H_\mu) \geqslant n+1$. Для простоты предположим, что начало координат лежит в H_μ. Найдем систему линейно независимых векторов $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. На линейной оболочке $L(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ (как $n+1$-мерном подпространстве в E) определим линейные функционалы λ_i так, что $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$. По теореме Хана – Банаха можно продолжить эти функционалы с $L(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ на все пространство E с сохранением непрерывности и линейности.

С этими расширенными функционалами свяжем функционал

$$\Lambda_\theta = \theta_1\lambda_1 + \dots + \theta_{n+1}\lambda_{n+1},$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ (вектор на единичной сфере в $\mathbb{R}^{n+1}$). Эти функционалы равномерно ограничены:

$$\sup_\theta \sup_{z \in K} |\Lambda_\theta(z)| \leqslant \sup_{z \in K} |\lambda_1(z)| + \dots + \sup_{z \in K} |\lambda_{n+1}(z)| < \infty.$$

Определим отображение $\Phi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\Phi_i(\theta) = \int_{\{\Lambda_\theta \geqslant 0\}} f_i d\mu - \frac{1}{2}\int_E f_i d\mu,\ i \leqslant n.$$

По построению множество $\{\Lambda_\theta = 0\} \cap H_\mu$ является собственным замкнутым подпространством в H_μ. Следовательно, $\mu(\{\Lambda_\theta = 0\}) = 0$ по закону $0-1$ для гиперболических мер. Покажем, что $\theta \mapsto \Phi_i(\theta)$ является непрерывной функцией. В силу теоремы Лебега достаточно заметить, что при $\theta_j \to \theta$ для μ-почти всех x имеет место соотношение $I_{\{\Lambda_{\theta_j} \geqslant 0\}}(x) \to I_{\{\Lambda_\theta \geqslant 0\}}(x)$. В самом деле, при $\Lambda_\theta(x) > 0$ или $\Lambda_\theta(x) < 0$ это верно, ибо $\Lambda_{\theta_j}(x) \to \Lambda_\theta(x)$. Оставшиеся точки множества $\{\Lambda_\theta = 0\}$ имеют меру нуль.

Учитывая сказанное выше, получаем, что $\theta \mapsto \Phi(\theta)$ — нечетная непрерывная функция на единичной сфере.

По теореме Борсука – Улама существует точка θ_0 такая, что $\Phi(\theta_0) = 0$, поэтому для $H^+_{\theta_0} = \{\Lambda_{\theta_0} \geqslant 0\}$ и $H^-_{\theta_0} = \{\Lambda_{\theta_0} \leqslant 0\}$ имеем

$$\int_{H^+_{\theta_0}} f_i d\mu = \int_{H^-_{\theta_0}} f_i d\mu = \frac{1}{2}\int_E f_i d\mu\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Для $t = \mu(H^+_{\theta_0}) > 0$ и $H^-_{\theta_0} > 0$ введем α-вогнутые вероятностные меры

$$\mu_0(A) = \frac{\mu(A \cap H^+_{\theta_0})}{\mu(H^+_{\theta_0})}, \quad \mu_1(A) = \frac{\mu(A \cap H^-_{\theta_0})}{\mu(H^-_{\theta_0})}.$$

С помощью этих мер мы получаем $\mu = (1-t)\mu_0 + t\mu_1$, поэтому μ не крайняя. Противоречие. Второе утверждение доказывается аналогично рассуждению из [53], где вместо скалярного произведения с вектором единичной сферы берем значение линейного функционала на соответствующей точке. В силу сказанного выше носитель меры ν имеет конечную размерность, и все условия для применения теоремы Борсука – Улама выполнены. Общий вид плотности меры следует из свойств α-вогнутых мер, описанных выше, и утверждения о конечной размерности носителя меры μ. Теорема доказана. □

Неясно, является ли оценка n для размерности носителей всех крайних точек оптимальной.

Второй результат касается метода нахождения локализующей меры и верен не только для гиперболических мер. В работах [4], [32] представлен метод бисекций для локально выпуклого пространства Фреше (т.е. полного метризуемого локально выпуклого пространства) с борелевской вероятностной мерой μ, с помощью которого по заданным полунепрерывным снизу функциям u и v строится локализующая мера на отрезке, называемая иглой. Приведем соответствующие определения и формулировку из [4], [32]. Под слабым пределом мер понимается предел в слабой топологии на пространстве всех конечных борелевских мер на E (см. [35] или [36]): $\mu_l \to \mu$ слабо тогда и только тогда, когда для всякой ограниченной непрерывной функции u на E выполнено равенство

$$\lim_{l\to\infty} \int_E u d\mu_l = \int_E u d\mu.$$

Определение 3.2.2. *Пусть дана конечная неотрицательная борелевская мера μ на локально выпуклом пространстве E. Назовем борелевскую вероятностную меру ν иглой меры μ, если она сосредоточена на* *отрезке* $[a,b] \in E$ *и получена как слабый предел вероятностных мер*

$$\mu_l(A) = \frac{1}{\mu(K_l)}\mu(A \cap K_l),$$

где A *— борелевское множество,* $\{K_l\}$ *— сужающаяся последовательность выпуклых компактов в* E *положительной* μ*-меры с* $\cap_l K_l = [a,b]$.

Будем говорить, что для борелевской вероятностной меры μ на пространстве E выполнен закон $0-1$, если всякое μ-измеримое аффинное подпространство E имеет меру 0 или 1. Например, согласно сказанному выше, таким свойством обладают меры, абсолютно непрерывные относительно гиперболических мер.

Теорема 3.2.3. *Предположим, что для борелевской вероятностной меры* μ *на сепарабельном пространстве Фреше* E *выполнен закон* $0-1$. *Пусть даны две полунепрерывные снизу* μ*-интегрируемые функции* $u, v\colon E \to \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\int_E u d\mu > 0, \quad \int_E v d\mu > 0.$$

Тогда эти неравенства сохранятся для некоторой иглы ν *для меры* μ. *Более того, если* μ *сосредоточена на замкнутом выпуклом множестве* F, *то* ν *также можно выбрать с носителем в* F.

Эта теорема из [4], [32] является обобщением исходной локализационной леммы. Понятие иглы было введено Ловачем и Шимоновицем для доказательства теоремы, однако подобный подход, как метод, рассматривается как развитие классического подхода Хадвигера к неравенству Брунна – Минковского, основанного на сужении евклидова пространства посредством пересечения полупространств (см. [58], [9], [38], [39]). Для удобства читателя повторим основные этапы алгоритма обобщения, описанного в [64]. Сначала строится последовательность выпуклых компактов K_l, стягивающихся к отрезку $\Delta = [a,b]$, таких, что для каждого l выполнены неравенства

$$\int_{K_l} u dx > 0, \quad \int_{K_l} v dx > 0.$$

Далее, используя неравенство Брунна – Минковского и (если потребуется) переходя к подпоследовательности, получим, что выполнены равенства

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{|K_l|}\int_{K_l}u(x)dx=\int_{\Delta}\psi^{n-1}(x)u(x)dx,$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{|K_l|}\int_{K_l}u(x)dx=\int_{\Delta}\psi^{n-1}(x)u(x)dx$$

для некоторой неотрицательной вогнутой функции ψ, определенной на отрезке Δ. Затем показывается, что функцию ψ можно превратить в аффинную, а компакты K_l сделать малыми цилиндрами с осью симметрии, содержащей Δ. Таким образом, можно заключить, что полученная мера $\psi^{n-1}(x)dx$ будет иглой.

Перейдем к обобщению этого результата на случай произвольного конечного числа полунепрерывных снизу функций.

Введем определения и формулировки, аналогичные [4], [32]. Пусть дано сепарабельное пространство Фреше E с борелевской вероятностной мерой μ. Мера μ автоматически оказывается мерой Радона (см. [35, теорема 7.1.7]).

Определение 3.2.4. *Пусть дана конечная борелевская мера μ на пространстве E. Назовем борелевскую вероятностную меру ν n-иглой меры μ, если она сосредоточена на выпуклом множестве $F\subset E$ таком, что $\dim(F)\leqslant n$, и получена как слабый предел вероятностных мер*

$$\mu_l(A)=\frac{1}{\mu(K_l)}\mu(A\cap K_l),$$

где A — борелевское множество, $\{K_l\}$ — последовательность выпуклых компактов в E положительной μ-меры такая, что выполнено равенство $\cap_l K_l=F$, μ_l — нормированное ограничение меры μ на компакт K_l.

Заметим, что если исходная мера была α-вогнутой, то и соответствующую иглу можно выбрать α-вогнутой.

Второй наш новый результат состоит в следующем.

Теорема 3.2.5. *Предположим, что для борелевской вероятностной меры μ на сепарабельном пространстве Фреше E выполнен закон $0-1$. Пусть даны $n+1$ полунепрерывная снизу функция $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\colon E \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$\int f_i d\mu > 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Тогда эти неравенства сохранятся для некоторой n-иглы ν меры μ. Более того, если μ сосредоточена на замкнутом выпуклом множестве F, то ν также можно выбрать с носителем в F.

Далее число n фиксировано, поэтому для краткости будем опускать приставку n для меры ν.

Для случая, когда мера μ является α вогнутой, существует связь этой теоремы с теоремой о крайних точках. С помощью метода бисекций можно определить, какие точки семейства $\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$ являются крайними. Используя теорему Крейна – Мильмана (см. [37], с. 84), мы можем показать, что для любого выпуклого функционала на $\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$ супремум достигается в крайних точках. В качестве такого функционала возьмем $\mu \mapsto \displaystyle\int f_{n+1} d\mu$. В этом случаем мы придем к тому результату, который получен в теореме о локализации. В случае $n = 1$ мы получим результат из [4], [32].

Доказательство теоремы проводится схожим с [4], [32] образом, но требуется выполнить больше построений, поэтому приведем полное описание всех шагов. Доказательство проведем в несколько этапов. Предположим, что E является сепарабельным банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через E' его сопряженное пространство (пространство всех линейных непрерывных функционалов на E) с нормой $\|\cdot\|_*$. Зафиксируем произвольный набор аффинно независимых точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, z$ из E и построим линейные функционалы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ на линейной оболочке L_z векторов $x_1 - z, x_2 - z, \ldots, x_{n+1} - z$ такие, что $\lambda_i(x_j - z) = \delta_{ij}$. По теореме Хана – Банаха эти функционалы можно продолжить с сохранением нормы на все E.

Введем дополнительно гиперпространства

$$L_z(x_i) = \Big\{ z + \sum_{j \neq i} r_j (x_j - z), \quad r_j \in \mathbb{R} \Big\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Тогда при $w \in L_z$, $\|w\| \leqslant 1$ имеем

$$|\lambda_i(w)| \leqslant dist^{-1}(x_i, L_z(x_i)), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Функционалы на E были построены с сохранением нормы, поэтому аналогичные неравенства верны для всех $w \in E$ таких, что $\|w\| \leqslant 1$. Следовательно,

$$\|\lambda_i\|_* \leqslant dist^{-1}(x_i, L_z(x_i)), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Таким образом, мы построили алгоритм, с помощью которого по произвольному набору аффинно независимых точек можно получить набор линейных функционалов на E, обладающих следующим важным свойством.

Лемма 3.2.6. *Пусть* $\{x_{1,m}, x_{2,m}, \ldots, x_{n+1,m}, z_m\}_{m=1}^{\infty}$ *— множество наборов аффинно независимых точек в банаховом пространстве* E *таких, что* $x_{i,m} \to x_i, z_m \to z$ *при* $m \to \infty$, *где* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, z$ *также аффинно независимы. По точкам* $x_{i,m}, z_m$ *построим функционалы* $\lambda_{i,m}$ *на* E *согласно алгоритму, описанному выше. Тогда эти функционалы равномерно ограничены по* m *для каждого* i, *т.е.*

$$\sup_{m \geqslant 1} \|\lambda_{i,m}\|_* < \infty, \ \ i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $z = 0$. В этом случае $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ линейно независимы и $\|x_i\| > 0$ при $i = 1, \ldots, n+1$. Учитывая рассуждения, приведенные перед леммой, нам достаточно показать, что

$$dist(x_{i,m}, L_{z_m}(x_{i,m})) \geqslant c, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1; m \geqslant m_0$$

для некоторых m_0 и $c > 0$.

Зафиксируем $i \in 1, 2, \ldots, n+1$. Рассмотрим произвольную точку $w \in L_{z_m}(x_{i,m})$ вида

$$w = z_m + \sum_{j \neq i} r_j (x_{j,m} - z_m), \quad r_j \in \mathbb{R}.$$

По неравенству треугольника получаем

$$\|x_{i,m} - w\| \geqslant \sum_{j \neq i} |r_j| \, \|x_{j,m} - z_m\| - \|x_{i,m} - z_m\| \geqslant 2\|x_{i,m} - z_m\|,$$

если для какого-то j_0 выполнено неравенство $|r_{j_0}| \geqslant 3\frac{\|x_{i,m}-z_m\|}{\|x_{j_0,m}-z_m\|}$. Тогда в силу сходимости получаем

$$\|x_{i,m} - w\| \geqslant \|x_i\| \text{ при } |r_{j_0}| > |r^0| = 4\frac{\|x_i\|}{\|x_{j_0}\|}, \; m > m_0.$$

Если такое неравенство выполнено для нескольких индексов j_0, то от этого оценка становится лучше. Рассмотрим случай, когда для всех выполнено обратное неравенство $|r_j| \leqslant |r_j^0| = 4\frac{\|x_i\|}{\|x_j\|}$. При этом условии получаем

$$\begin{aligned}
&\|x_{i,m} - w\| \\
&= \Big\| x_{i,m} - x_i + x_i - \sum_{j \neq i} r_j (z + x_j) + \sum_{j \neq i} r_j (x_j - x_{j,m}) + \Big(\sum_{j \neq i} r_j + 1\Big) z_m \Big\| \\
&\geqslant \Big\| x_i - \sum_{j \neq i} r_j (z + x_j) \Big\| - \|x_{i,m} - x_i\| - \Big\| \sum_{j \neq i} r_j (x_j - x_{j,m}) \Big\| - \|z_m\| \Big| \sum_{j \neq i} r_j - 1 \Big| \\
&\geqslant dist(x_i, L_z(x_i)) - \|x_{i,m} - x_i\| - \Big\| \max_j |r_j^0| \sum_{j \neq i} (x_j - x_{j,m}) \Big\| - \|z_m\| \Big| \sum_{j \neq i} r_j^0 + 1 \Big|.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое отлично от нуля, так как точки аффинно независимы, а оставшиеся слагаемые в силу сходимости можно сделать сколь угодно малыми. Следовательно, выбором m_0 можно добиться того, чтобы правая часть была отделена от нуля при $m > m_0$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы. Проведем серию редукций.

1) Всякое пространство Фреше с радоновской вероятностной мерой μ имеет подпространство E_0, для которого $\mu(E_0) = 1$ (см. [35, теорема

7.12.4]), причем существует норма $\|\cdot\|$ на E_0 такая, что E_0 является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством, в котором все замкнутые шары компактны в исходном пространстве E. Хорошо известно, что тогда все борелевские подмножества E_0 будут борелевскими и в E. Переходя при необходимости к меньшему пространству, можем считать, согласно закону $0-1$, что всякое собственное аффинное подпространство в E_0, замкнутое относительно топологии в E_0, имеет μ-меру нуль. Поэтому для всякого ненулевого функционала $l \in E_0'$ верно равенство $\mu(\{l = c\}) = 0$ при всех $c \in \mathbb{R}$.

2) Можно считать, что мера μ сосредоточена на выпуклом компакте. Действительно, так как μ радонова, то в E существует расширяющаяся последовательность компактов $K_m \subset E_0$ такая, что $\mu(\cup_m K_m) = 1$. В силу компактности замкнутой выпуклой оболочки компакта в банаховом пространстве можно считать, что K_m — выпуклые компакты. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_{K_m} f_i d\mu = \int_E f_i d\mu, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Поэтому для всех $m \geqslant m_0$ при некотором m_0 имеем

$$\int_{K_m} f_i d\mu > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Применяя утверждение теоремы к нормированному ограничению меры μ на K_m, получим меру ν, которая будет иглой для μ_m, а следовательно и для μ тоже.

Учитывая рассуждения 1) и 2), можно считать, что E — сепарабельное банахово пространство с неотрицательной борелевской вероятностной мерой μ, сосредоточенной на выпуклом компакте $K \subset E$, причем для каждого нетривиального функционала $l \in E'$ выполнены равенства

$$\mu(\{l = c\}) = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3) Достаточно показать существование иглы ν, когда выполнены неравенства

$$\int_E f_i d\nu \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

В этом случае мы можем доказать более слабый вариант теоремы для функций $f_1 - \varepsilon, f_2 - \varepsilon, \dots, f_{n+1} - \varepsilon$, выбирая ε таким образом, чтобы выполнялись все условия.

4) Можно считать, что функции $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ непрерывны. Действительно, для всякой полунепрерывной снизу функции можно подобрать возрастающую последовательность непрерывных функций, ограничивающих ее снизу, которая сходится к данной полунепрерывной функции. Пусть $\{f_{j,m}\}$ — такая последовательность функций для f_j. Тогда, учитывая монотонность, по теореме о мажорируемой сходимости получим

$$\lim_{m\to\infty} \int f_{j,m} d\mu = \int f_j d\mu > 0.$$

Поэтому можем считать, что для приближающих функций также выполнено условие

$$\int f_{j,m} d\mu > 0, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Применив утверждение теоремы для приближающих функций, мы построим иглы ν_m для μ, сосредоточенные на F и такие, что

$$\int f_{i,m} d\nu_m > 0, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Каждая мера ν_m будет также иглой для исходной системы функций в силу того, что $f_j \geqslant f_{j,m}$ по построению. Осуществив все описанные выше редукции, мы можем приступить к процедуре построения иглы.

Возьмем $n+2$ аффинно независимые точки $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, z$ в E. Построим для них набор линейных функционалов $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, используя алгоритм, описанный перед формулировкой леммы. Для каждой точки $\theta \in \mathbb{S}^n = \{(\theta_1, \dots, \theta_{n+1}) : \theta_1^2 + \dots + \theta_{n+1}^2 = 1\}$ определим линейный функционал

$$\Lambda_\theta = \theta_1 \lambda_1 + \dots + \theta_{n+1} \lambda_{n+1}$$

и зададим отображение $\Phi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\Phi_i(\theta) = \int_{\xi:\, \Lambda_\theta(\xi - z) \geqslant 0} f_i(\xi) \mu(d\xi) - \frac{1}{2} \int_E f_i d\mu, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

По условию $\mu(\{\Lambda_\theta = 0\}) = 0$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.2.1, мы получаем непрерывность отображения $\Phi(\theta)$ на сфере $\mathbb{S}^n$. Покажем, что $\Phi(\theta)$ — нечетная функция на сфере. Действительно,

$$\Phi_i(\theta) + \Phi_i(-\theta) =$$

$$= \int_{\xi\colon \Lambda_\theta(\xi-z)\geqslant 0} f_i(\xi)\mu(d\xi) - \frac{1}{2}\int_E f_i d\mu + \int_{\xi\colon \Lambda_{-\theta}(\xi-z)\geqslant 0} f_i(\xi)\mu(d\xi) - \frac{1}{2}\int_E f_i d\mu =$$

$$= \int_{\xi\colon \Lambda_\theta(\xi-z)\geqslant 0} f_i(\xi)\mu(d\xi) + \int_{\xi\colon \Lambda_\theta(\xi-z)\leqslant 0} f_i(\xi)\mu(d\xi) - \int_E f_i d\mu = 0.$$

По теореме Борсука – Улама существует такая точка θ_0, что $\Phi(\theta_0) = 0$. Из этого следует, что для гиперпространств $H^+_{\theta_0} = \{\xi\colon \Lambda_\theta(\xi - z) \geqslant 0\}$ и $H^-_{\theta_0} = \{\xi\colon \Lambda_\theta(\xi - z) \leqslant 0\}$ справедливы равенства

$$\int_{H^+_{\theta_0}} f_i d\mu = \int_{H^-_{\theta_0}} f_i d\mu = \frac{1}{2}\int_E f_i d\mu > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для функции f_{n+1} получаем

$$\int_E f_{n+1} d\mu = \int_{H^+_{\theta_0}} f_{n+1} d\mu + \int_{H^-_{\theta_0}} f_{n+1} d\mu > 0.$$

В качестве H^+ выберем то гиперпространство $H^+_{\theta_0}$ или $H^-_{\theta_0}$, на котором выполнено неравенство

$$\int_{H^+} f_{n+1} d\mu > 0.$$

По закону $0 - 1$ для меры μ получаем, что $\mu(H^+) > 0$. Положим μ^+ равной нормированному ограничению меры μ на H^+. Таким образом, мы построили подпространство H^+ и вероятностную меру μ^+ на нем такие, что

$$\int_{H^+} f_j d\mu^+ > 0, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

В силу сепарабельности пространства E можно выбрать всюду плотную последовательность $\{x_{1,m}, x_{2,m}, \ldots, x_{n+1,m}, z_m\}_{m\geqslant 1}$ точек из K^{n+2} так, что точки

$$\{x_{1,m}, x_{2,m}, \ldots, x_{n+1,m}, z_m\}$$

аффинно независимы при фиксированном m. Применяя описанную выше процедуру для набора точек $\{x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{n+1,1}, z_1\}$ и меры $\nu_1 = \mu$, получим меру $\nu_2 = \nu_1^+$, точку $\theta^1 \in \mathbb{S}^n$ и линейный функционал Λ_{θ^1}. Повторив процедуру для набора $\{x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{n+1,2}, z_2\}$ и меры ν_2, построим меру $\nu_3 = \nu_2^+$, точку $\theta^2 \in \mathbb{S}^n$ и линейный функционал Λ_{θ^2}. Последовательно повторяя алгоритм для каждого $m \geqslant 2$, по мере ν_m и набору точек $\{x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n+1,m}, z_m\}$, получаем соответственно меру $\nu_{m+1} = \nu_m^+$, точку $\theta^m \in \mathbb{S}^n$ и линейный функционал

$$\Lambda_{\theta^m} = \Lambda_{(\theta_1^m, \dots, \theta_n^m)} = \theta_1^m \lambda_{1,m} + \dots + \theta_{n+1}^m \lambda_{n+1,m}.$$

Пространство борелевских вероятностных мер на K компактно и метризуемо в слабой топологии (см. [35] или [36]), поэтому для последовательности ν_m существует подпоследовательность, слабо сходящаяся к некоторой мере ν.

По свойствам слабой сходимости получаем, что для ν выполнено нужное неравенство

$$\int_E f_j d\nu > 0, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Осталось показать, что получившаяся мера будет иглой, а именно, что $dim(H_\nu) \leqslant n$. Предположим, что это не так. Тогда в H_ν найдутся аффинно независимые точки $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, z$ такие, что $2z - x_1$, $2z - x_2, \dots, 2z - x_{n+1}$ также лежат в H_ν. Без ограничения общности можем считать, что $z = 0$ и в H_ν содержатся точки $\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_{n+1}$. Из исходной плотной последовательности можно выделить подпоследовательность $\{x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n+1,k}, z_k\}$ такую, что $x_{i,k} \to x_i$ при $k \to \infty, i = 1, 2, \dots, n+1.$ Согласно алгоритму построения, мера ν_k^+ сосредоточена на подпространстве H_k^+, которое совпадает с одним из гиперпространств $\{\xi \colon \Lambda_{\theta^k}(\xi - z_k) \geqslant 0\}$ или $\{\xi \colon \Lambda_{\theta^k}(\xi - z_k) \geqslant 0\}$. Для определенности будем считать, что это первое из них. По построению H_k^+ содержит точки x_i и $-x_i$, где $i = 1, 2, \dots, n+1$, причем справедливы неравенства

$$\Lambda_{\theta^k}(x_i - z_k) \geqslant 0, \quad \Lambda_{\theta^k}(-x_i - z_k) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

По лемме 3.2.6 мы можем подобрать константу M, равномерно ограничивающую по k нормы функционалов $\lambda_{i,k}$, поэтому верна оценка

$$\|\Lambda_{\theta^k}\|_* \leqslant \|\lambda_{1,k}\|_* + \|\lambda_{2,k}\|_* + \dots + \|\lambda_{n+1,k}\|_* \leqslant M.$$

По построению $\Lambda_{\theta^k}(z_k) \to 0$ и $\Lambda_{\theta^k}(x_{i,k} - x_i) \to 0$ при $k \to \infty$ для $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Покажем, что в этом случае $\Lambda_{\theta^k}(x_{i,k}) \to 0$. Предположим противное: $\Lambda_{\theta^k}(x_{i,k}) \to a > 0$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Тогда

$$\Lambda_{\theta^k}(-x_{i,k} - z_k) + \Lambda_{\theta^k}(x_{i,k}) = \Lambda_{\theta^k}(x_i - x_{i,k}) - \Lambda_{\theta^k}(z_k) \to 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \Lambda_{\theta^k}(-x_{i,k} - z_k) \to -a < 0.$$

Из полученного противоречия следует, что $a \leqslant 0$. Если $a < 0$, то аналогичными рассуждениями получаем

$$\Lambda_{\theta^k}(x_{i,k} - z_k) - \Lambda_{\theta^k}(x_{i,k}) = \Lambda_{\theta^k}(x_i - x_{i,k}) - \Lambda_{\theta^k}(z_k) \to 0,$$

$$0 \leqslant \Lambda_{\theta^k}(x_{i,k} - z_k) \to a < 0.$$

Учитывая оценки выше, получаем, что $a = 0$. Значит, $\Lambda_{\theta^k}(x_{i,k}) \to 0$ при $k \to \infty$. Так как это верно для всякого индекса i, можно заключить, что $\Lambda_{\theta^k}(x_{i,k}) \to 0$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

С другой стороны, из явного вида Λ_{θ^k} вытекают равенства

$$\Lambda_{\theta^k}(x_{i,k} - z_k) = \theta_i^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

и, как следствие предыдущих рассуждений, равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_i^k = 0$, что невозможно в силу словия $(\theta_1^k)^2 + (\theta_2^k)^2 + \cdots + (\theta_{n+1}^k)^2 = 1$. Получено противоречие. Таким образом мы доказали, что $dim(H_\nu) \leqslant n$. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследована связь значений в задачах Монжа и Канторовича. Для вполне регулярных топологических пространств с вероятностными мерами, не имеющими атомов, получены достаточные условия на равенство значений в задачах Монжа и Канторовича для непрерывной функции стоимости. Описаны три важных следствия, которые показывают, что для одной из мер можно отказаться от отсутствия атомов. Условие на непрерывность функции стоимости можно ослабить до виртуальной непрерывности. Построен пример, который показывает, что полученный результат дает точную границу справедливости утверждения о равенстве значений в указанных двух задачах.

В последней главе рассмотрена задача теории локализации. Описаны свойства крайних точек для семейств вогнутых мер на бесконечномерном локально выпуклом пространстве. Получено обобщение теоремы о локализации для гиперболических мер на бесконечномерных пространствах Фреше на случай произвольного конечного числа ограничивающих функций.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в следующих направлениях:

1. Исследование связи задач Монжа и Канторовича с непрерывной функцией стоимости при дополнительных ограничениях на меры или пространство.

2. Постановка задач Монжа и Канторовича для гиперболических мер и нахождение достаточных условий на равенство значений.

3. Обобщение теоремы о локализации на случай счетного числа ограничивающих функций.

Литература

[1] Арутюнян Л.М., Косов Е.Д. О многочленах на пространствах с выпуклыми мерами// Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 460. – № 5. – С. 503–506.

[2] Бобков С.Г. Локализационное доказательство изоперемитреческого неравенства Бакри–Леду и некоторые приложения// Теория вероятности и ее применения. – Т. 47. – № 2. – С. 340–346.

[3] Бобков С.Г. Некоторые обобщения результатов Ю.В. Прохорова о неравенствах типа Хинчина для полиномов// Теория вероятности и ее применения. – 2000. – Т. 45. – № 4. – С. 745–748.

[4] Бобков С.Г., Мельбурн Дж. Локализация для бесконечномерных гиперболических мер// Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 462. – № 3. – С. 261–263.

[5] Богачев В.И. Слабая сходимость мер.// Институт компьютерных исследований, М. – Ижевск. – 2016.

[6] Богачев В.И., Доледенок А.Н., Малофеев И.И. Задача Канторовича с параметром и ограничениями на плотность// Математические заметки, издательство МИАН(Москва). – 2021. – Т.110. – № 6. – С. 922-926.

[7] Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы// Успехи мат. наук. –2012. – Т. 67. – № 5. – С. 3–110.

[8] Богачев В.И., Колесников А.В., Медведев К.В. Треугольные преобразования мер// Матем. сб. – 2005. – Т. 196. – № 3. – С. 3–30.

[9] Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства// “Наука” Ленинград. отд. Ленинград. – 1980. – P. 288.

[10] Вершик А.М. Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения// Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2004. – Т. 312. – С. 69–85.

[11] Вершик А.М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования// Успехи матем. наук. – 1970. – Т. 25. – № 5. – С. 117–124.

[12] Вершик А.М., Затицкий П.Б., Петров Ф.В. Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и ее приложения// Успехи мат. наук. – 2014 – Т. 69. – № 6. – С. 81–114.

[13] Доледенок А.Н. О задаче Канторовича с ограничениями на плотность// Математические заметки, издательство МИАН(Москва). – 2018. – Т. 104. – №1. – С. 45–55.

[14] Заев Д.А. О задаче Монжа–Канторовича с дополнительными линейными ограничениями// Математические заметки. – 2015. – Т. 98. – №5. – С. 664–683.

[15] Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства// Изд-во ЛГУ, Л. 1939; репринтное изд.: Изд. дом СПбГУ, СПб. – 2012.

[16] Канторович Л.В. О перемещении масс// Докл. АН СССР. – 1942. – Т. 37. – С. 227–229.

[17] Канторович Л.В. Об одной проблеме Монжа// Успехи матем. наук. – 1948. – Т. 3. №2. – С. 225–226.

[18] Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества// Вестн. ЛГУ. – 1958. – Т. 7. № 2. – С. 52–59.

[19] Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах// Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 115. – № 6. – С. 1058–1061.

[20] Липчюс А.А. Замечание о равенстве в задачах Монжа и Канторовича// Теория вероятн. и ее примен. – 2005. – Т.50. – № 4. – С. 779–782.

[21] Назаров Ф., Содин М., Вольберг А. Геометрическая лемма Каннана–Ловаса–Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций// Алгебра и Анализ. – 2002. – V.14. – №2. – P. 214–234.

[22] Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений// Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – Т. 140. – С. 1–190.

[23] Ambrosio L. Lecture notes on optimal transport problems// Lecture Notes in Math. – 2003. – V. 1812. – P. 1–52.

[24] Ambrosio L., Gigli N. A user's guide to optimal transport// Lecture Notes in Math. – 2013. – V. 2062. – P. 1–155.

[25] Ambrosio L., Kirchheim B., Pratelli A. Existence of optimal transport maps for chrystalline norms// Duke Math. J. – 2004. – V. 25. – № 2. – P. 207–241.

[26] Ambrosio L., Pratelli A. Existence and stability results in the L^1 theory of optimal transportation// Lecture Notes in Math. In: Optimal transportation and applications (Martina Franca, 2001). Springer, Berlin. – 2003. – V.1813. – P. 123–160.

[27] Appel P. Mémoire sur les déblais et les remblais des systèmes continus ou discontinus// Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, Paris. – 1887. – V. 29. P. 1–208.

[28] Bianchini S., Cavalletti F. The Monge problem for distance cost in geodesic spaces// Comm. Math. Phys. – 2013. – V. 318. – P. 615–673.

[29] Bianchini S., Daneri S. On Sudakov's type decomposition of transference plans with norm costs// Mem. Amer. Math. Soc. (in print); ArXiv 1311.1918v2.

[30] Bobkov S.G. On isoperimetric constants for log-concave probability distributions// Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math. Springer. Berlin. – 2007. – V. 1910. – P. 81–88.

[31] Bobkov S.G. Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials// Geometric aspects of functional analysis. – 2000. – Lecture Notes in Math. Springer. Berlin. – V. 1745. – P. 27 –35.

[32] Bobkov S.G., Melbourne J. Hyperbolic measures on infinite dimensional spaces// Probab. Surv. – 2016. – V. 13. – P. 57–88.

[33] Bobkov S.G., Nazarov F.L. Sharp dilation-type inequalities with fixed parameter of convexity// Записки научных семинаров ПОМИ. Вероятность и статистика. – 2007. – Т. 351. – № 12. – С. 54–78.

[34] Bogachev V.I. Measure theory// Springer, Berlin. – 2007. – V. 2.

[35] Bogachev V.I. Measure theory// Springer. New York. – 2007. – V. 1, 2.

[36] Bogachev V.I. Weak convergence of measures// Amer. Math. Soc. Rhode Island, Providence. – 2018.

[37] Bogachev V.I., Smolyanov O.G. Topological vector spaces and their applications// Springer. Cham. – 2017.

[38] Borell C. Convex measures on locally convex spaces// Ark. Math. – 1974. – V.12. – P. 239–252.

[39] Borell C. Convex set functions in d-space// Period. Math. Hungar. – 1975. – V.6. – № 2. – P.111–136.

[40] Borell, Christer. Convexity of measures in certain convex cones in vector space σ-algebras// Math. Scand. – 1983. – V.53. – № 1. – P. 125–144.

[41] Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre// Fund. Math. – 1933. – V.20. – P. 177–190.

[42] Caffarelli L.A., Feldman M., McCann R.J. Constructing optimal maps for Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs// J. Amer. Math. Soc. – 2002. – V.15. – № 1. – P. 1–26.

[43] Caravenna L. A proof of Monge problem in $\mathbb{R}^n$ by stability// Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. –2011. – V. 43. – P. 31–51.

[44] Caravenna L. A proof of Sudakov theorem with strictly convex norms// Math. Z. – 2011. – V. 268. – № 1-2. – P. 371–407.

[45] Cavalletti F. Monge problem in metric measure spaces with Riemannian curvature-dimension condition// Nonlinear Anal. – 2014. – V. 99. – P. 136–151.

[46] Champion T., De Pascale L. The Monge problem for strictly convex norms in $\mathbb{R}^d$// J. Eur. Math. Soc. – 2010. – V. 12. – № 6. – P. 1355–1369.

[47] Champion T.,De Pascale L. The Monge problem in $\mathbb{R}^d$// Duke Math. J. – 2011. – V. 157. – № 3. – P. 551–572.

[48] Champion T., De Pascale L. The Monge problem in $\mathbb{R}^d$: variations on a theme// Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI). – 2011. V. 390. – P. 182–200; English transl.: J. Math. Sci. (New York). – 2012. – V. 181. – № 6. – P. 856–866.

[49] Evans L.C., Gangbo W. Differential equations methods for the Monge–Kantorovich mass transfer problem// Mem. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 137. –№ 653. – P. viii+66.

[50] Feldman M. , McCann R. Monge's transport problem on a Riemannian manifold// Trans. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 354. – P.1667–1697.

[51] Fradelizi M. Concentration inequalities for s-concave measures of dilations of Borel sets and applications// Electron. J. Probab. – 2009. – V.14. – № 71. – 2068–2090.

[52] Fradelizi M., Guédon O. A generalized localization theorem and geometric inequalities for convex bodies// Adv. Math. – 2006. – V.204. – № 2. – P. 509–529.

[53] Fradelizi M., Guédon O. The extreme points of subsets of s-concave probabilities and a geometric localization theorem// Discrete Comput. Geom. – 2004. – V. 31. – №2 – P. 327–335.

[54] Fremlin D.H. Measurable functions and almost continuous functions// Manuscr. Math. – 1981. – V. 33. – № 3-4ю – З. P. 387–405.

[55] Fremlin D.H. Measure theory// University of Essex, Colchester. – V. 1–5. – P. 2000–2003.

[56] Gromov, M.; Milman, V. D. Generalization of the spherical isoperimetric inequality to uniformly convex Banach spaces// Compositio Math. – 1987. – V. 62. – № 3. – P.263–282.

[57] Guédon O. Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent// Mathematika. – 1999. – V. 46. – № 1. – P.165–173.

[58] Hadwiger, H., Ohmann, D. Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie// Math. Z. – 1956. – V.66. – P. 1–8.

[59] Kannan R., Lovász L. Simonovits M. Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma// Discrete Comput. Geom. – 1995. – V. 13. – №3-4 – P. 541-559.

[60] Korman J., McCann R. J. Insights into capacity constrained optimal transport//Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2013. – V.110. – P. 10064–10067.

[61] Korman J., McCann R. J. Optimal transportation with capacity constraints//Trans. Amer. Math. Soc. – 2015. – vol. 367. – P. 1501–1521.

[62] Korman J., McCann R. J., Seis C. An elementary approach to linear programming duality with application to capacity constrained transport// Convex Anal. – 2015. – V. 22. – P.797-808.

[63] Korman J., McCann R. J., Seis C. Dual potentials for capacity constrained optimal transport// Seis. Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2015. – V.54. – P.573–584.

[64] Lovász L., Simonovits M. Random walks in a convex body and an improved volume algorithm// Random Structures Algor. – 1993. – V.4. – №4. – P. 359–412.

[65] Matoušek J.Using the Borsuk–Ulam theorem Lectures on topological methods in combinatorics and geometry// Springer-Verlag. Berlin. – 2003.

[66] Monge G. Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais// Histoire de l'Académie Royale des sciences de Paris. – 1781. – P. 666–704.

[67] Payne, L. E.; Weinberger, H. F. An optimal Poincaré inequality for convex domains// Arch. Rational Mech. Anal. – 1960. – № 5. – P. 286–292.

[68] Pratelli A. On the equality between Monge's infimum and Kantorovich's minimum in optimal mass transportation. // Ann. Inst. H. Poincaré (B) Probab. Statist. – 2007. – V. 43. – № 1. – P. 1–13.

[69] Rachev S.T., Rüschendorf L. Mass transportation problems// Springer, New York. – 1998. – . V. I, II.

[70] Trudinger N.S., Wang X.J. On the Monge mass transfer problem// Calc. Var. Partial Differ. Equ. – 2001. – V. 13. – № 1. – P. 19–31.

[71] Villani C. Topics in optimal transportation// Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island. – 2003.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[72] Богачев В.И., Калинин А.Н. Непрерывная функция стоимости, для которой минимумы в задачах Монжа и Канторовича не равны.// Докл. РАН. – 2015. – Т. 463. – № 4. – С. 383–386.

[73] Bogachev V. I., Kalinin A. N., Popova S. N. *On the Equality of Values in the Monge and Kantorovich Problems*// Journal of Mathematical Sciences – 2019. – V. 238. – P 377-389.

[74] Калинин А.Н. Локализация для гиперболических мер на бесконечномерных пространствах// Функциональный анализ и его приложения. – 2021. – Т. 55. – № 4. – С. 40–54.

Тезисы докладов на научных конференциях

[75] Калинин А.Н. Достаточные условия совпадения минимумов в решениях задач Монжа и Канторовича// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018». М.: МГУ. 2018. – 1 с.

[76] Калинин А.Н. Предельные точки семейств вогнутых мер Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019». М.: МГУ. 2019. – 1 с.

[77] Калинин А.Н. Достаточные условия совпадения минимумов в решениях задач Монжа и Канторовича// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции «RECENT ADVANCES IN MASS TRANSPORTATION». НИУ ВШЭ. 2019. – с. 6–7.