МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Иванов Александр Сергеевич

Развитие методов вычисления функциональных интегралов в моделях квантовой теории поля

Специальность 1.3.3. Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на кафедре физики частиц и космологии физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель	**Белокуров Владимир Викторович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты	**Брагута Виктор Валерьевич** доктор физико-математических наук, доцент, начальник сектора физики адронной материи лаборатории теоретической физики ММО «Объединённый институт ядерных исследований»
	Перепёлкин Евгений Евгеньевич доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова»
	Рубцов Григорий Игоревич доктор физико-математических наук, профессор РАН, заместитель директора по научной работе ФГБУН «Институт ядерных исследований Российской академии наук»

Защита диссертации состоится «29» февраля 2024 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.2-1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, аудитория 4-46.

E-mail: ff.dissovet@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/011.2-1/2857

Автореферат разослан « » января 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор **П.А. Поляков**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

В современной теоретической физике для описания моделей квантовой теории поля, квантовой механики и статистической физики используется несколько различных формализмов обладающих рядом преимуществ и недостатков. Широкое применение получил метод описания, основанный на интегралах по траекториям, предложенный Ричардом Фейнманом [1]. Из постулатов квантовой механики следует, что, вообще говоря, нельзя точно предсказать результат эксперимента, однако можно вычислить вероятность того или иного результата. Суть метода интеграла по траекториям заключается в том, что для расчета амплитуды вероятности перехода системы из одного состояния в другое необходимо учесть все возможные пути перехода. Например, для перехода частицы из одной точки в другую, необходимо учесть все возможные траектории, причем вклады от каждой траектории различаются значением фазы, где фаза вклада каждой траектории является комплексной величиной, пропорциональной действию, вычисленному для этой траектории. Математические конструкции этого подхода представляют собой формализм функциональных интегралов [2].

С помощью функционального интеграла получается достаточно просто записать формальное выражение для требуемой величины. Однако произвести полное вычисление удается только в исключительных случаях, когда известны решения уравнений движения. В моделях со взаимодействием применяются методы, основанные на приближенном вычислении, например, теория возмущений. Теория возмущений позволила получить одно из наиболее точных совпадений теоретических расчетов и эксперимента. Совпадение результатов вычисления радиационных поправок к аномальному магнитному моменту электрона с экспериментальными данными имеет точность порядка 10^{-10}. Этот результат оказался возможным благодаря малости константы взаимодействия в квантовой электродинамике (КЭД). Если же константа взаимодействия не является малой величиной, как, например, в квантовой хромодинамике (КХД), то метод теории возмущения уже не имеет обоснования для применения, кроме того теряется возможность контролировать точность результатов. Получающиеся в рамках теории возмущений ряды в квантовой механике и квантовой теории поля являются асимптотическими рядами в смысле Пуанкере [3], [4]. Отметим, что при вычислениях в рамках принятого формализма, каждый отдельный член ряда может быть расходящимся, расходимости необходимо устранить в соответствии с известными правилами [5]. После применения процедуры устранения расходимостей сумма ряда является расходящейся в обычном смысле.

Суммирование расходящегося ряда теории возмущений можно провести с помощью метода суммирования по Борелю [6], [7], [8], [9], [10]. Однако, для вычисления методом суммирования по Борелю необходимо находить асимптотики разложения членов ряда, что представляет собой трудоемкую задачу.

Существуют методы, позволяющие аппроксимировать исходный функциональный интеграл сходящимися рядами. В работах [11], [12], [13] специальное интегральное преобразование части действия с взаимодействием и последующая регуляризация были применены для построения сходящейся теории возмущений для моделей на решетке и интегралов по траекториям с гауссовой мерой, определяемой следом операторов. Регуляризация путем отсечения больших флуктуаций полей в моделях на решетке была предложена в работах [14], [15]. Метод, основанный на модификации силы взаимодействия за счет применения представления промежуточного поля и на последующем использовании лесной/древесной формулы [16], [17], был разработан в работах [18], [19], [20], [21], [22]. Отметим, что вычисления с использованием всех этих методов очень сложны.

Альтернативный подход к построению сходящихся пертурбативных рядов в скалярных теориях поля, основанный на изменении исходного гауссовского приближения на некоторую теорию взаимодействия, был предложен в работах [23], [24], [25]. Позже независимо разработанные и сходные идеи стали основой методов вариационной теории возмущений [26], [27], [28]. В [29] подход [23], [24], [25] был расширен и построено разложение для ангармонического осциллятора с сильной связью. В работе [30] были выведены уравнения ренормгруппы, согласующиеся с методом [23]. Критические показатели φ^4 - модели, полученные в рамках последних ренормгрупповых уравнений, находятся в тесном согласии с численными результатами и соответствующими экспериментальными измерениями для перехода жидкость-газ, He_4 и бинарных систем [30]. Однако строгое математическое доказательство сходимости разложений [23], [24], [25], [30] все еще отсутствует.

Разработка эффективных вычислительных методов для систем с большим числом степеней свободы является одной из основных открытых проблем в современной теоретической физике. Обычно для решения проблем с вычислительной сложностью, возрастающей с увеличением числа степеней свободы, используется численное моделирование методом Монте-Карло [31], [32]. Однако метод Монте-Карло имеет два важных ограничения. Во–первых, вычисления с бесконечным количеством степеней свободы - что для моделей, определенных на решетке, эквивалентно бесконечному пределу объема – доступны только как результаты процедуры экстраполяции. Во-вторых, моделирование методом Монте-Карло основано на вероятностных интерпретациях веса Больцмана и, следовательно, неприменимо к системам, описываемым сложными действиями (например, комплексными).

Метод Монте-Карло для функциональных интегралов является одним из наиболее популярных численных подходов к исследованию квантовых систем. Этот метод становится особенно полезным при исследовании свойств квантовых систем многих тел. Уравнения Шредингера в этом случае становятся трудными для изучения, но число квантовых степеней свободы все еще не настолько велико, чтобы использовать квантовую статистику. Развитие нейронных сетей [33], [34] дает новые возможности для численного расчета функциональных интегралов методом Монте-Карло и является предметом дальнейших исследований.

Существует множество физических проблем, связанных с исследованием релятивистских квантово-механических систем (подход релятивистской гамильтоновой динамики). Релятивистские поправки играют очень важную роль в физике атомных систем с тяжелыми элементами из-за сильных потенциалов взаимодействия. Проблемы с моделированием релятивистских квантовых систем могут возникнуть в ядерной физике, физике адронной структуры и кварк–глюонной плазмы [35], [36]. Недавно возникло еще одно интересное применение релятивистской квантовой механики. Это так называемые псевдорелятивистские системы из сжатого вещества, и одним из наиболее известных примеров таких систем является графен [37], [38].

Цели и задачи исследования

Целью диссертационного исследования является развитие методов вычисления функциональных интегралов в моделях релятивистской квантовой динамики и квантовой теории поля.

Целью первой части работы было расширение возможностей применения численного метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской гамильтоновой динамики, построение матричного элемента матрицы плотности в координатном представлении, адаптация алгоритма Метрополиса для вычисления функциональных интегралов в релятивистском случае, исследование модели релятивистского осциллятора.

Вторая и третья часть работы посвящены построению сходящегося ряда на основе ряда теории возмущений в моделях скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на конечной и бесконечной решетках, доказательству существования и конечности суммы построенного сходящегося ряда, применению метода к модели ϕ^4, определенной на решетке, сравнению с другими методами вычисления наблюдаемых.

Научная новизна

Исследована новая область приенения метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской гамильтоновой динамики [39]. Исследована система квантового релятивистского осциллятора. Показано соответствие результатов численного моделирования с аналитическими решениями в предельных случаях.

Предложен новый метод построения сходящегося ряда для вычисления наблюдаемых в моделях квантовой теории поля для скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на конечной и бесконечной решетках [40], [41]. Доказаны существование и конечность суммы построенного ряда. Произведено сравнение результатов численного моделирования с результатами, полученными методом сумирования по Борелю и вычислениями методом Монте-Карло для функциональных интегралов для модели ϕ^4 скалярного поля.

Теоретическая и практическая значимость

Предложенное обобщение метода Монте-Карло для интеграла по траекториям в квантовой механике позволяет проводить вычисления в релятивистских теориях, что существенно расширяет круг задач, поддающихся численному анализу, например, модель графена или модель столкновения тяжелых ионов. Полученный метод суммирования расходящихся рядов в квантовой теории поля дает возможность не только получать корректные значения наблюдаемых величин в режиме сильной связи, но и возможность изучения моделей, для которых неприменимы численные методы Монте-Карло. Результаты сравнительного анализа показывают, что предложенный метод суммирования обладает лучшей скоростью сходимости по сравнению со стандартным подходом суммирования по Борелю. А также в случае моделей, определенных на конечной решетке, не возникает необходимость исследовать асимптотическое поведение членов ряда теории возмущений, как в методе суммирования по Борелю.

Методология и методы исследования

В **главе 2** аналитически строится решеточная аппроксимация релятивистской квантово-механической модели, реализуется алгоритм Метрополиса метода Монте-Карло для вычисления функционального интеграла. С помощью данного метода числено моделируются наблюдаемые значения (корреляционная функция и энергия) для модели квантового релятивистского осциллятора. Полученные выражения сравниваются с аналитическими предсказаниями модели в предельных случаях.

В **главах 3 и 4** аналитически строится решеточная аппроксимация модели скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени на примере модели ϕ^4. Для полученной модели строится сходящийся ряд по константе связи на основе ряда теории возмущений с помощью специального выбора начального приближения. Аналитически исследуются свойства сходимости с помощью введения дополнительных регуляризаций ряда.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Построено обобщение метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской гамильтоновой динамики. Получено выражение среднего значения кинетической энергии для вычисления методом Монте-Карло. Произведены аналитический и численный анализ корреляционной функции и энергии для системы релятивистского осциллятора, который подтверждает корректность построенного обобщения.

2. Предложен метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений для теории скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенной на конечной решетке. Обнаружена внутренняя симметрия, позволяющая существенно увеличить скорость сходимости построенного ряда. На основе обнаруженной симметрии введен вариационный ряд. Доказаны существование и конечность построенного вариационного ряда в случае конечной решетки. Произведено численное моделирование результатов метода построения сходящихся рядов и построенного вариационного ряда для наблюдаемой $\langle \phi_n^2 \rangle$ модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на конечной решетке, выполнено сравнение с результатами применения метода Монте-Карло для функциональных интегралов и метода суммирования по Борелю, подтверждающее корректность предложенного метода.

3. Предложен метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений для теории скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенной на бесконечной решетке. Получено условие применимости метода построения сходящихся рядов в случае бесконечной решетки. Произведено численное моделирование результатов метода построения сходящихся для наблюдаемой ϕ_n^2 модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на бесконечной решетке, выполнено сравнение с результатами применения метода Монте-Карло для функциональных интегралов и метода суммирования по Борелю, подтверждающее корректность предложенного метода.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты, полученные автором, являются достоверными и обоснованными, так как являются развитием аппарата квантовой механики и квантовой теории поля, все преобразования являются математически строгими, используются корректные численные методы, а также показано соответствие с результатами в предельных случаях, имеющих точные аналитические решения. Результаты работы опубликованы в ведущих международных рецензируемых журналах, индексируемых в WoS, Scopus, RSCI. Список работ приведен в конце автореферата.

Результаты работы докладывались автором на международных школах и конференциях, в том числе в следующих

1. Ivanov A.S., Pavlovsky O.V., Monte-Carlo calculations for Relativistic Oscillator: Generalization of Path Integral Metropolis Algorithm // The Helmholtz International Summer School "Lattice QCD, Hadron Structure and Hadronic Matter". Dubna, Russia, from August 25 to September 6, 2014.

2. Иванов А.С., Павловский О.В., Вычисление функционального интеграла методом Монте-Карло для релятивистского осциллятора// Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2015», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 13 - 17 апреля 2015

3. Ivanov A.S., Pavlovsky O.V., Path Integral Monte-Carlo Calculations for Relativistic Oscillator // 53th Schladming Winter School of Theoretical Physics, Schladming, Austria, 1 - 6 March 2015

4. Ivanov A.S., Belokurov V.V., Shavgulidze E.T., Sazonov V.K. Convergent perturbation theory for the lattice phi4-model // XV International Baikal Summer School on Physics of Elementary Particles and Astrophysics, Bol'shie Koty, Irkutsk region, Russia 5-12 July 2015

5. Ivanov A.S., Belokurov V.V., Shavgulidze E.T., Sazonov V.K. Convergent Perturbation Theory for the Lattice Phi4-model // The 33rd International Symposium on Lattice Field Theory, Kobe, Japan, 14 -18 July 2015.

6. Иванов А.С., Белокуров В.В., Шавгулидзе Е.Т., Сазонов В.К., Пертурбативные и непертурбативные подходы в одномерных и двумерных моделях квантовой теории поля// Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2016», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 11 - 15 апреля 2016

7. Иванов А.С., Развитие методов суммирования расходящихся рядов в квантовой теории поля (по материалам кандидатской диссертации)// Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2020», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 10 - 27 ноября 2020

Препринты статей в международной системе arXiv.org

1. Belokurov V. V., Ivanov A. S., Sazonov V. K., Shavgulidze E. T. Convergent Perturbation Theory for the lattice ϕ^4-model // arXiv: 1511.05959 2015

2. Ivanov A. S., Pavlovsky O. V. The Relativistic one dimensional Coulomb problem and Relativistic PIMC method// arXiv: 2008.12980 2020

Также автор выступал с докладом на научный семинарах кафедры физики частиц и космологии МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИЯФ МГУ им. М.В. Ломоносова, теоретического отдела института ядерных исследований РАН.

Личный вклад автора

Все результаты, выносимые на защиту, в работах, написанных в соавторстве, получены автором лично. В работах, выполненных вместе с соавторами, автор участвовал в постановке задачи, лично провел все необходимые аналитические вычисления, написал код программы для численного расчета с использованием техники вычисления на суперкомпьютере, систематизировал полученные данные, сформулировал окончательный результат и обосновал его значимость.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на 15 разделов, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации — 104 страницы, диссертация содержит 25 рисунков, 4 таблицы, список литературы включает в себя 94 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертации посвящена введению в проблемы вычисления наблюдаемых величин в моделях квантовой механики и квантовой теории поля.

Во второй главе диссертации построено обобщение метода Монте-Карло для интегралов по траекториям квантово-механических моделей в релятивистском случае. Получен матричный элемент матрицы плотности в координатном представлении. На примере модели с квадратичным потенциалом $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ выполнены численные расчеты наблюдаемых величин. Для модели релятивистского осциллятора вычислены средние значений кинетической и потенциальной энергий, корреляционная функция и плотность вероятности, а также приведено сравнение полученных результатов с результатами в предельных случаях.

В третьей и четвертой главах диссертации проведено исследование метода суммирования расходящихся рядов теории возмущений. Построен сходящийся ряд (СР), коэффициенты которого определяются через коэффициенты ряда теории возмущений. Представлено решение проблемы медленной сходимости суммы ряда. Основные идеи продемонстрированы на примере модели

ϕ^4, определенной на решетке. Доказано, что сходящийся ряд может быть построен для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на конечной решетке. Показано, что полученный ряд является пересуммированием ряда теории возмущений. Во всех петлях стандартной теории возмущений построенный СР обладает внутренней симметрией, что позволяет ввести вариационный параметр. Значение вариационного параметра определяет "скорость" сходимости СР. Для исследования сходимости ряда с вариационным параметром (далее ВР - сходящийся ряд с вариационным параметром) рассматриваются две регуляризации модели ϕ^4, определенной на конечной решетке. Первая регуляризованная модель, обозначенная как "η - регуляризация", является естественным расширением ВР и предоставляет аргументы относительно сходимости этого ряда. Вторая регуляризованная модель, обозначенная как "γ - регуляризация", построена с помощью математических выражений, используемых при построении ВР. Доказано, что γ - регуляризованная модель аппроксимирует исходную модель ϕ^4 с любой наперед заданной точностью, а также, что функции Грина модели с γ - регуляризацией могут быть вычислены с помощью ВР, который в данном случае является сходящимся. Показана непертурбативная независимость от вариационного параметра ВР при снятии γ - регуляризации. С помощью данного свойства предложен способ вычисления для бесконечной решетки и проведено исследование для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на бесконечной решетке. Выполнено сравнение результатов вычисления двухточечной функции Грина с результатами известных методов суммирования по Борелю и численным методом Монте-Карло.

Рассмотрим содержание диссертационной работы подробнее.

Глава 2 диссертационной работы посвящена построению релятивистского обобщения формализма интеграла по траекториям для квантовомеханических систем при конечной температуре [31]. Получено выражение для матричного элемента матрицы плотности в релятивистском случае, также проведен анализ системы – релятивистского гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2. \tag{1}$$

Произведен численный расчет наблюдаемых: двухточечной корреляционной функции и энергии основного состояния. Квантово-механическая система с рассматриваемым гамильтонианом является точно решаемой в двух предельных случаях: в пределе больших и малых масс. Полученные численные значения сравниваются с аналитическими решениями. Полученные результаты согласуются в пределе двух и более стандартных отклонений.

Раздел 2.1 посвящен вычислению матрицы плотности релятивистского гармонического осциллятора. Среднее значение некоторого оператора A может быть найдено с помощью оператора матрицы плотности $\rho = e^{-\beta H}$

$$\langle A \rangle = \frac{\mathrm{tr}(Ae^{-\beta H})}{\mathrm{tr}(e^{\beta H})}, \tag{2}$$

где $\beta = 1/\theta$ - обратная температура рассматриваемой системы. Среднее значение оператора A с помощью матрицы плотности может быть записано в виде

$$\langle A \rangle = \frac{\int dq dq' \rho(q, q'; \beta) \langle q|A|q' \rangle}{\int dq \rho(q, q; \beta)}. \tag{3}$$

Матрица плотности в координатном представлении дается следующим выражением

$$\rho(q_0, q_N; \beta) = \int \cdots \int dq_1 \ldots dq_{N_t-1} \rho(q_0, q_1; \tau) \ldots \rho(q_{N_t-1}, q_{N_t}, \tau), \tag{4}$$

где введено обозначение $\tau = \beta/N_t$.

Рассмотрен гамильтониан вида $H(p,q) = T(p) + V(q)$, где $T(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$. Получен матричный элемент матрицы плотности

$$\rho(q'', q'; \tau) = \frac{m}{\pi\sqrt{1 + \left(\frac{q''-q'}{\tau}\right)^2}} K_1\left[m\tau\sqrt{1 + \left(\frac{q''-q'}{\tau}\right)^2}\right] e^{-\tau V(q')}. \tag{5}$$

Вычисления в многомерном случае дают следующее выражение

$$\rho(q'', q'; \tau) = \left(\frac{m\tau}{\pi\sqrt{\tau^2 + (q''-q')^2}}\right)^{(d+1)/2} \cdot$$
$$\cdot \frac{K_{(d+1)/2}(m\sqrt{\tau^2 + (q''-q')^2})}{(2\tau)^{(d-1)/2}} e^{-\tau V(q')}, \tag{6}$$

где $d = 1, 2, 3$ - размерность пространства.

Раздел 2.2 диссертации посвящен описанию алгоритма Метрополиса для вычисления функционального интеграла методом Монте-Карло [32]. Алгоритм Метрополиса для вычисления функциональных интегралов методом Монте-Карло требует знание части матрицы плотности, соответствующей определенной точке q_i. В одномерном случае соответствующая часть матрицы плотности имеет вид

$$\pi(q_i) = \frac{m^2 K_1\left[m\tau\sqrt{1 + \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\tau}\right)^2}\right] K_1\left[m\tau\sqrt{1 + \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\tau}\right)^2}\right]}{\pi^2\sqrt{1 + \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\tau}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\tau}\right)^2}} e^{-\tau V(q_i)}. \tag{7}$$

Для вычисления функционального интеграла необходимо построить цепь Маркова для величин q_i с предельным распределением, пропорциональным $\pi(q_i)$.

Получено выражение среднего значения кинетической энергии для вычисления методом Монте-Карло для функциональных интегралов

$$\langle T(p)\rangle = \Big\langle \frac{m\tau}{\sqrt{\tau^2+(\Delta q)^2}} \frac{K_0(m\sqrt{\tau^2+(\Delta q)^2})}{K_1(m\sqrt{\tau^2+(\Delta q)^2})} + \frac{\tau^2-(\Delta q)^2}{\tau(\tau^2+(\Delta q)^2)}\Big\rangle. \tag{8}$$

В диссертации исследуются полная, кинетическая и потенциальная энергии, а также двухточечная корреляционная функция

$$\langle E(p,q)\rangle = \langle T(p) + V(q)\rangle, \tag{9}$$

$$\langle q(t)q(t+n\tau)\rangle = \langle q_i q_{i+n}\rangle. \tag{10}$$

В **разделе 2.3** диисертации исследуется модель релятивистского квантового осциллятора. Гамильтониан релятивистского квантового осциллятора имеет вид

$$H = \sqrt{p^2+m^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{11}$$

Для проверки корректности предложенного подхода необходимо иметь аналитические выражения для наблюдаемых. Рассматриваемая задача имеет аналитические решения в пределе больших ($m^2 \gg \langle p^2\rangle$) и малых ($m^2 \ll \langle p^2\rangle$) масс. В модели присутствуют всего два размерных параметра m и ω, в диссертации сформулированы условия предельных переходов в терминах этих параметров. Полученные значения для наблюдаемых используются в дальнейшем для сравнения с результатами численного моделирования.

В **разделе 2.4** приведены результаты численного моделирования методом Монте-Карло для функциональных интегралов в предельных и общем случаях. Для подтверждения корректности предложенного метода расчета производится аппроксимация полученных результатов аналитическими зависимостями. Погрешность метода Монте-Карло является стохастической погрешностью, таким образом, увеличивая статистику, можно добиться уменьшения погрешности, но вместе с этим потребуется больше времени для вычислений. Приведенные результаты численного моделирования двухточечной корреляционной функции и энергии для модели релятивистского осциллятора в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах согласуются с теоретическими предсказаниями в рамках двух и более стандартных отклонений. Для наглядности представлены результаты моделирования энергии в общем случае, позволяющие сделать вывод о гладком переходе системы от нерелятивистского к ультрарелятивистскому пределам.

В **Главе 3** выполнено исследование метода сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений и представлено решение проблемы медленной сходимости. Приведены основные выводы на примере модели ϕ^4, определенной на решетке, и выполнены обобщения, когда это необходимо. Доказано, что сходящийся ряд может быть строго построен для любой модели скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенной на конечной решетке, и что ряд представляется как пересуммирование ряда теории возмущений.

В **разделе 3.1** в качестве примера рассматривается модель ϕ^4 скалярного поля, определенная на конечной решетке

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{V-1} \phi_m K_{mn} \phi_n + \frac{\lambda}{4!} \sum_{n=0}^{V-1} \phi_n^4, \tag{12}$$

где M - параметр массы, λ - константа связи, V - объем решетки, индексы m и n обозначают узлы решетки, $d = 1, 2$ – размерность решетки, индекс μ пробегает по всем пространственным координатам, а $\hat{\mu}$ обозначает единичный вектор в соответствующем направлении. Предполагаются периодические граничные условия во всех возможных направлениях.

Без потери общности, в качестве примера произвольной функции Грина, рассматривается двухточечная функция Грина (пропагатор). Следуя [23], [25], разделим действие на новую невозмущенную часть $N[\phi]$ и возмущение: $S[\phi] = N[\phi] + (S[\phi] - N[\phi])$. Для дальнейших вычислений удобно переписать последнее выражение следующим образом:

$$S_\eta[\phi] = N[\phi] + \eta(S[\phi] - N[\phi]) \tag{13}$$

где $\eta \leq 1$ – параметр, обозначающий порядок нового пертурбативного разложения. В текущем разделе получены выражения, содержащие η, имея в виду, что исходная модель соответствует $\eta = 1$. Если

$$N[\phi] \geq S[\phi], \tag{14}$$

то изменение порядка суммирования и интегрирования при построении ряда по константе связи приводит к абсолютно сходящемуся ряду. Существует множество способов выбрать новое начальное приближение $N[\phi]$, удовлетворяющее неравенству, однако необходимо выбрать такое, чтобы модель была решаемой. Выберем

$$N[\phi] = \sum_{n,m} \frac{1}{2} \phi_n K_{nm} \phi_m + \sigma \left(\sum_{n,m} \frac{1}{2} \phi_n K_{nm} \phi_m \right)^2 \tag{15}$$

где σ - параметр, обеспечивающий абсолютную сходимость ряда

$$\sigma \geq \frac{\lambda}{6M^4}. \tag{16}$$

В итоге построен сходящийся ряд для пропагатора

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} J_\eta(V,l) \left[\sum_{k=0}^{l} C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! f_k}{\Gamma\left(\frac{V+4k+2}{2}\right)} \right], \tag{17}$$

где

$$J_\eta(V,l) = \frac{\eta^l}{l!} \int_0^\infty dt e^{-t^2 - \sigma t^4} t^{V+4l+1}, \tag{18}$$

f_k - коэффициенты ряда теории возмущений.

Основным результатом является сформулированное утверждение:

Утверждение Рассмотрим модель на конечной решетке, определяемую полиномиальным действием $S[\phi] = P[\phi]$ с четной старшей степенью взаимодействия $\deg(P)$. Тогда всегда возможно построить сходящийся ряд для этой модели с членами, которые могут быть выражены в виде линейных комбинаций слагаемых стандартной теории возмущений.

В **разделе 3.2** вводится вариационный ряд, полученный из сходящегося ряда с помощью замены $\tau = V + \alpha$. Показано, что при перестановке порядка суммирования, вариационный ряд пертурбативно эквивалентен ряду теории возмущений. Из этого факта вытекают два важных следствия (непертурбативные аналоги этих утверждений выводятся в следующих разделах):

1) Вся сумма ряда по l не зависит от τ. Следовательно, τ является вариационным параметром, и его значение может быть выбрано произвольно для оптимизации сходимости ряда.

2) Метод построения сходящегося ряда это метод пересуммирования. Таким образом, для вычисления связанных функций Грина (включая нормированные к полной статистической сумме, который является предметом дальнейших численных исследований) можно использовать тот факт, что в теории возмущений связанные функции получаются из полных функций Грина путем отбрасывания несвязных диаграмм Фейнмана из разложения.

Раздел 3.3 посвящен исследованию сходимости вариационного ряда. Чтобы изучить сходимость и корректность вариационного ряда с аналитической точки зрения, рассмотрены две регуляризации модели ϕ^4 на решетке: η - регуляризация и γ - регуляризация. В обоих случаях для вариационного ряда построены верхние границы с конечными радиусами сходимости в терминах параметров регуляризации. Для γ-регуляризации граница области сходимости приближается к $\gamma = 0$, что соответствует нерегуляризованной модели. Показано, что исходная модель может быть аппроксимирована γ-регуляризацией с любой произвольной точностью, и всегда возможно построить два связанных сходящихся разложения для этой регуляризации. Следовательно, ряд с γ-регуляризацией сам по себе может использоваться для непертурбативных вычислений без использования вариационного ряда. Используя эту информацию и тот факт, что сходимость рядов с регуляризацией должна быть лучше, чем сходимость их границ, делается вывод, что ряд вариационный ряд для пропагатора сходится для любого $\tau > -2$.

В **разделе 3.4** приведены результаты численного моделирования. В этом разделе представлены результаты вычислений оператора $\left\langle \phi_n^2 \right\rangle$ методами сходящихся рядов и вариационного ряда, и сравнение с результатами суммирования по Борелю и численным моделированием методом Монте-Карло для функциональных интегралов. Вычисляется пропагатор $\langle \phi_i \phi_j \rangle$, но для наглядности здесь представлены только результаты вычислений для $\left\langle \phi_n^2 \right\rangle$. Показаны численные зависимости от вариационного параметра τ и параметра регуляризации γ. Все вычисления выполняются при единичной массе $M = 1$ и для констант связи $\lambda \in [0; 10]$.

В **главе 4** произведено обобщение метода построения сходящихся рядов для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на бесконечной решетке. Показано, что суммируемость по Борелю является достаточным условием корректности построенных сходящихся рядов, применяемых к моделям, определенным на бесконечной решетке. Для проверки корректности метода сходящихся рядов, проведено исследование одномерной и двумерной модели ϕ^4, определенных на бесконечной решетке. Сравнение результатов вычисления методом сходящихся рядов, методом суммирования по Борелю и экстраполяции на бесконечную решетку в ходе моделирования методом Монте-Карло показывают соответствие между подходами.

Раздел 4.1 посвящен определению проблемы, связанной с размерной регуляризацей при применении метода сходящихся рядов. В случае бесконечномерных интегралов γ - регуляризация недействительна. Это происходит потому, что члены, аналогичные $\gamma S_2^3[x]$, нелокальны, а модели с локальными и нелокальными действиями имеют разное поведение при $V \to \infty$. Тем не менее, отметим, что невозможность применения регуляризации запрещающает доказательство согласно результатам предыдущей главы для бесконечного объема, но это не обязательно означает неприменимость метода сходящихся рядов.

В **разделе 4.2** в качестве примера рассматривается модель ϕ^4 скалярного поля, определенная на бесконечной решетке. Применяется метод построения сходящихся рядов для пропагатора данной модели.

В **разделе 4.3** представлены результаты вычислений методом сходящихся рядов, суммированием по Борелю и моделирования методом Монте-Карло на решетке. Вычисления методом сумиирования по Борелю основаны на суммировании в 6 и 7 порядках стандартной теории возмущений в измерениях $D = 1$ и $D = 2$ соответственно.

Раздел 4.4 посвящен исследованию применимости метода построения сходящихся рядов к моделям скалярного поля с полиномиальным взаимодействием, определенным на бесконечной решетке. Показано, что условие применимости метода построения сходящихся рядов следуют из суммируемости по Борелю ряда теории возмущений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты, представленные в диссертации:

1. Произведено обобщение метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской квантовой динамики. Получено выражение для матрицы плотности системы, а также среднее значение кинетической энергии для вычислений на решетке. Выполнено сравнение результатов численного моделирования методом Монте-Карло для системы релятивистского осциллятора с аналитическими предсказаниями в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях. Полученные численные результаты демонстрируют справедливость применения построенного обобщения для релятивистских систем квантовой механики.

2. Исследован метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на конечной решетке. Показано, что построенный ряд является пересуммированием ряда теории возмущений. Обнаружена внутренняя симметрия построенного сходящегося ряда, позволяющая значительно увеличить скорость сходимости. Рассмотрены две регуляризации построенного сходящегося ряда. С помощью введенных регуляризаций доказаны существование и конечность построенного вариационного ряда.

3. Исследован метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на бесконечной решетке. Показано, что условием применимости метода сходящихся рядов для моделей, определенных на бесконечной решетке, является условие суммируемости ряда теории возмущений по Борелю.

4. Числено исследовано применение метода построения сходящихся рядов к модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на конечной и бесконечной решетках, выполнено сравнение результатов вычисления пропагатора с результатами применения метода суммирования по Борелю и метода Монте-Карло для функциональных интегралов. Полученные численные результаты демонстрируют корректность применения предложенного метода построения сходящихся рядов.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI

1. Ivanov A. S., Novoselov A. A., Pavlovsky O. V. Relativistic path integral monte carlo: Relativistic oscillator problem // International Journal of Modern Physics C. — 2016. — Vol. 27, no. 11. — P. 1650133–1–1650133–14.
(импакт-фактор WOS: 1.171) DOI:10.1142/S0129183116501333

2. Ivanov A. S., Sazonov V. K. Convergent series for lattice models with polynomial interactions // Nuclear Physics B. — 2017. — Vol. 914. — P. 43–61.
(импакт-фактор WOS: 3.285) DOI:10.1016/j.nuclphysb.2016.11.002

3. Ivanov A. S., Sazonov V. K. Infinite lattice models by an expansion with a non-gaussian initial approximation // Physics Letters B. — 2019. — Vol. 796. — P. 52–58.
(импакт-фактор WOS: 4.306) DOI: 10.1016/j.physletb.2019.07.001

Список цитированной литературы

[1] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. / Под ред. В . С Барашенкова. Мир, 1968.

[2] Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T. Path integrals. Moscow State Universuty, 1990.

[3] Dyson F.J. Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1952. 85. 631 – 632.

[4] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

[5] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд. М.: Наука, 1984.

[6] Lipatov L. N. Divergence of the perturbation theory series and the quasi-classical theory // Sov. Phys. JETP. 1977. 45. 216.

[7] Казаков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В. Аналитическое продолжение результатов теории возмущений модели $g\varphi^4$ в область $g \geq 1$ // Теоретическая и математическая физика. 1979. 38, № 1. 15 – 25.

[8] Kazakov D.I., Shirkov D.V. Asymptotic series in quantum field theory and their summation // Fortsch.der Phys. 1980. 28. 465.

[9] Казаков Д. И. Об одном методе суммирования знакопостоянных асимптотических рядов // Теоретическая и математическая физика. 1981. 46, № 3. 348 – 360.

[10] Zinn-Justin J., Jentschura U.D. Order-dependent mappings: Strong-coupling behavior from weak-coupling expansions in non-Hermitian theories // Journal of Mathematical Physics. 2010. 51, № 7. 072106.

[11] Belokurov V.V., Solov'ev Yu.P., Shavgulidze E.T. Method of approximate evaluation of path integrals using perturbation theory with convergent series. I // Theoretical and Mathematical Physics. 1996. 109, № 1. 1287 – 1293.

[12] Belokurov, V.V., Solov'ev Yu.P., Shavgulidze E.T. Method for approximate evaluation of path integrals using perturbation theory with convergent series. II. Euclidean quantum field theory // Theoretical and Mathematical Physics. 1996. 109, № 1. 1294 – 1301.

[13] Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. Вычисление функциональных интегралов с помощью сходящихся рядов // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. 3. 693 – 713.

[14] Meurice Y. Simple Method to Make Asymptotic Series of Feynman Diagrams Converge // Phys. Rev. Lett. 2002. 88. 141601.

[15] Kessler B., Li L., Meurice, Y. New optimization methods for converging perturbative series with a field cutoff // Phys. Rev. D. 2004. 69. 045014.

[16] Brydges D.C., Kennedy T. Mayer expansions and the Hamilton–Jacobi equation // J. Stat. Phys. 1995. 48. 19 – 49.

[17] Abdesselam A., Rivasseau V. Trees, forests and jungles: a botanical garden for cluster expansions // Lect. Notes Phys. 1995. 446. 7.

[18] Magnen J., Rivasseau V. Constructive ϕ^4 field theory without tears // Ann. Henri Poincaré. 208. 9. 403 – 424.

[19] Rivasseau V. Constructive field theory in zero dimension // Adv. Math. Phys. 2010. 2010. 180159.

[20] Rivasseau V., Wang Z. Loop vertex expansion for ϕ^{2K} theory in zero dimension // J. Math. Phys. 2010. 51. 092304.

[21] Rivasseau V., Wang Z. How to resum Feynman graphs // Ann. Henri Poincaré. 2014. 15. 2069 – 2083.

[22] Rivasseau V., Wang Z. Corrected loop vertex expansion for ϕ_2^4 theory // J. Math. Phys. 2015. 56. 062301.

[23] Ushveridze A.G. Converging perturbational scheme for the field theory. (in Russian) // Yad. Fiz. 1983. 38. 798 – 809.

[24] Shaverdyan B.S., Ushveridze A.G. Convergent perturbation theory for the scalar ϕ^{2p} field theories; The Gell-Mann-Low function // Physics Letters B. 1983. 123. 316 – 318.

[25] Ushveridze A.G. Superconvergent perturbation theory for euclidean scalar field theories // Physics Letters B. 1984. 142, № 5-6. 403 – 406.

[26] Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Y. Convergent series in variational perturbation theory // Physics Letters B. 1992. 297. 305 – 308.

[27] Sisakian A.N., Solovtsov I.L. Variational perturbation theory: Anharmonic oscillator // Z. Phys. C. 1992. 54. 263 – 271.

[28] Feynman R.P., Kleinert H. Effective classical partition functions // Phys. Rev. A. 1986. 34. 5080 – 5084.

[29] Turbiner A.V., Ushveridze A.G. Anharmonic oscillator: Constructing the strong coupling expansions // Journal of Mathematical Physics. 1988. 29, № 9. 2053 – 2063.

[30] Honkonen J., Nalimov M. Convergent expansion for critical exponents in the $O(n)$-symmetric φ^4 model for large ε // Physics Letters B. 1999. 459, № 4. 582 – 588.

[31] Creutz M., Freedman B.A. A statistical approach to quantum mechanics* // Ann. Phys. 1981. 132. 427.

[32] Ceperley D.M. Path integrals in the theory of condensed helium // Rev. Mod. Phys. 1995. 67. 279.

[33] Albergo M. S., Kanwar G., Shanahan P. E. Flow-based generative models for Markov chain Monte Carlo in lattice field theory // Phys. Rev. D. 2019. 100. 034515.

[34] Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Rudamenko R.A., Tarelkin A.A., Sysoev P.N., Polyakova R.V., Sadovnikova M.B. From Spin Glasses to Learning of Neural Networks // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2022. 53. 834 – 847.

[35] Filinov V.S., Ivanov Yu.B. Fortov V.E., Bonitz M., Levashov P.R. Color path-integral Monte-Carlo simulations of quark-gluon plasma: Thermodynamic and transport properties // Phys. Rev. C. 2013. 87. 035207.

[36] Filinov V.S., Bonitz M., Ivanov Y.B., Ilgenfritz M., Fortov V.E. Thermodynamics of the quark-gluon plasma at finite chemical potential: color path integral Monte Carlo results // Contrib. Plasm Phys. 2015. 55. 203.

[37] Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films // Science. 2004. 306. 666.

[38] Astrakhantsev N. Yu., Braguta V. V., Katsnelson M. I., Nikolaev A. A., Ulybyshev M. V. Quantum Monte Carlo study of electrostatic potential in graphene // Phys. Rev. B. 2018. 97. 035102.

[39] Ivanov A. S., Novoselov A. A., Pavlovsky O. V. Relativistic path integral monte carlo: Relativistic oscillator problem // International Journal of Modern Physics C. 2016. 27, № 11. 1650133–1–1650133–14.

[40] Ivanov A. S., Sazonov V. K. Infinite lattice models by an expansion with a non-gaussian initial approximation // Physics Letters B. 2019. 796. 52 – 58.

[41] Ivanov A.S., Sazonov V.K. Convergent series for lattice models with polynomial interactions // Nuclear Physics B. 2017. 914. 43 – 61.