ОТЗЫВ официального оппонента

на диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Балашовой Дарьи Михайловны на тему: «Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными источниками» по специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация Д. М. Балашовой посвящена изучению однородных по времени и пространству ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам. Теория ветвящихся случайных блужданий является активно развивающимся в последние годы направлением теории стохастических процессов. Результаты и методы, которые в ней используются, служат инструментом исследования как в различных областях математики, так и во многих разделах других наук, включая статистическую физику, химическую кинетику, биологию и иммунологию.

Диссертация объемом 91 страница включает в себя введение, три главы, заключение и список литературы. Результаты диссертации изложены в 18 публикациях. В научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI опубликованы 6 статей, две из которых без соавторов.

Во Введении дан подробный обзор публикаций о различных моделях ветвящихся случайных блужданий, обосновывающий актуальность работы. Причем, насколько я понял из введения к диссертации, возможность применения ветвящихся случайных блужданий в иммунологии, по-видимому, впервые предложена самим автором диссертации в материалах 63-го Всемирного конгресса по статистике.

Первая глава посвящена ветвящимся случайным блужданиям с конечным числом знакопеременных источников размножения и гибели частиц (называемых источниками или источниками ветвления), расположенных в конечном числе узлов решетки. Предполагается, что каждый из источников относится к одному из трех типов: в источниках первого типа происходит гибель и размножение частиц без нарушения симметрии блуждания, в источниках второго типа ветвление сопровождается нарушением симметрии блуждания, в источниках третьего типа присутствует нарушение симметрии, но не происходит ветвления частиц. В данной классификации автор следует работам своего научного руководителя – профессора Е.Б. Яровой. Под интенсивностью источника понимается значение в единице первой производной инфинитезимальной производящей функции, описывающей воспроизводство частиц в точке решетки (источнике). Автором предполагается, что в одних источниках интенсивность может быть положительной, что соответствует тому, что марковский ветвящийся процесс в точке является надкритическим, т.е. интенсивность рождения превышает интенсивность гибели, а в других – равной нулю (интенсивности рождения и гибели равны) или отрицательной, т.е. ветвящийся процесс докритический (в таком источнике интенсивность гибели превышает интенсивность рождения частиц). Таким образом, в исследуемом процессе допускается наличие знакопеременных источников размножения и гибели частиц. Автором изучены фазовые переходы для надкритического ветвящегося случайного блуждания, которые могут возникать только при наличии двух или более источников ветвления частиц, что достаточно наглядно проиллюстрировано на Рис.1.1 построением критических поверхностей в случае симплициальной конфигурации трех источников различных интенсивностей. Среди результатов первой главы хотелось бы выделить теорему 1.1. о собственных значениях эволюционного оператора для ветвящихся случайных блужданий со знакопеременными источниками ветвления, находящимися в симплициальной конфигурации. Далее доказана основная теорема 1.2 первой главы об экспоненциальном росте числа частиц без предположения о конечности дисперсии скачков случайного блуждания для ветвящихся случайных блужданий со знакопеременными источниками и псевдоисточниками ветвления, находящимися в произвольной конфигурации. Хочу отметить, что последняя теорема является обобщением ранее опубликованных результатов И.И. Христолюбова и Е.Б. Яровой (ТВП, 2019), в которых рассматривалось конечное число источников положительной интенсивности без нарушения в них симметрии блуждания. Здесь Д.М. Балашова продемонстрировала владение не только методами теории вероятностей, но и спектральной теории операторов в банаховых пространствах.

Во второй главе изучается принципиально иная модель ветвящегося случайного блуждания уже с бесконечным количеством начальных частиц (при $t = 0$ в каждой точке находится по одной частице) и источниками ветвления в каждой точке решетки. В разделах 2.1 и 2.2 приводится формальное описание модели, определение субпопуляции частиц и выводятся основные уравнения. В разделе 2.3 при наличии критического марковского ветвящегося процесса в каждой точке решетки найдено асимптотическое поведение условного совместного второго факториального момента субпопуляций, как с суперэкспоненциально легкими хвостами блуждания, так и при условии, приводящем к бесконечной дисперсии скачков случайного блуждания. Кроме того, в случае невозвратного случайного блуждания, лежащего в основе процесса, доказана сходимость распределения поля частиц к предельному стационарному распределению (теорема 2.2). В разделе 3 для надкритического закона ветвления частиц в точках решетки изучаются зоны нерегулярного роста первого и второго моментов при стремлении к бесконечности как пространственной, так и временной переменных. Установлено отсутствие нерегулярного роста моментов для зоны $|x-y| = O(\sqrt{t})$ (раздел 2.4). Подчеркнем, что исследование роста моментов в остальных зонах пока остается открытой и достаточно сложной задачей.

Однако результаты, которые получены Д.М. Балашовой в этом направлении представляют несомненный научных интерес.

Третья глава посвящена изучению симметричного ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке с частицами нескольких типов и марковским процессом ветвления в каждой точке решетки. По аналогии с терминологией ветвящихся процессов они названы многотипными ветвящимися случайными блужданиями. Хотелось бы отметить, что из-за сложности исследования многотипных ветвящихся случайных блужданий публикаций об изучении таких процессов достаточно мало (в отличие от многотипных ветвящихся процессов, которые достаточно хорошо изучены). Работы Д.М. Балашовой с соавторстве с Ю.К. Макаровой, С.А. Молчановым и Е.Б. Яровой (Mathematics, 2022) и без соавторов (ТВП, 2022) являются одними из первых в этом направлении. Для возвратного случайного блуждания и критического процесса ветвления в каждой точке решетки изучен эффект пространственной кластеризации популяции частиц. Он основан на том, что потомки большинства частиц-прародительниц, существовавших при $t = 0$, погибнут, а выжившие субпопуляции образовывают кластеры. Таким образом, поле частиц при больших значениях t становится неоднородным. Полученные результаты проиллюстрированы численным моделированием, с привлечением которого удалось выявить образование кластеров уже при достаточно малых t.

В Заключении кратко перечислены основные результаты работы.

Результаты диссертацию являются новыми, получены Д. М. Балашовой самостоятельно и снабжены строгими математическими доказательствами. Следует отметить высокий научный уровень работы. Повторим, что основное содержание диссертации опубликовано в 18 научных работах, включая 6 публикациях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Все перечисленные публикации соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. Апробация результатов проводилась на многочисленных семинарах, научных конференциях и международных конгрессах. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Текст диссертации написан четко и аккуратно, но все же есть небольшое количество замечаний. В автореферате отсутствует список организаций, где могут быть использованы результаты диссертиции. Во 2-м абзаце на 9-й стр. автореферата и в первых трех строках на стр.11 в диссертации появляются функции $b_n(x_i)$ и f без их определения. В теореме 1.2 не определена величина μ_t и можно только догадываться, что означает выражение «$\beta_i^{(r)} = O(r!r^{r-1})$ при всех $r \in \mathbb{N}$». Также не ясно, как следует понимать запись « $a(z) = a_0(\dot{z})/|z|^{d+\alpha},\ |z| \to \infty$» в формуле (2) в автореферате и в (2.42) в диссертации, при этом величина $a_0(\dot{z})$ не определена. На мой взгляд, было бы уместно привести в автореферате рисунок 3.1 из диссертации. Он хорошо иллюстрирует результат теоремы 3.2. Вместе с тем сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

Результаты диссертации имеют теоретический характер и найдут применения в исследованиях, ведущихся в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН.

Как уже было отмечено, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Таким образом, соискатель Балашова Дарья Михайловна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика».

Официальный оппонент:
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

УЛЬЯНОВ Владимир Васильевич

Контактные данные: тел.: 8(495)939-53-94, e-mail: vulyanov@cs.msu.su
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.05 – «теория вероятностей и математическая статистика»

Адрес места работы:
119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК
Тел.: 8(495)939-53-94; e-mail: vulyanov@cs.msu.su

Подпись сотрудника факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова В. В. Ульянова удостоверяю: