

Отзыв официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Гармановой Татьяны Алексеевны
на тему: «Константы вложения в пространствах Соболева»
по специальности 1.1.1 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

В работе Татьяны Алексеевны Гармановой «Константы вложения в пространствах Соболева» рассматриваются вопросы, связанные с неравенствами для производных в пространствах Соболева на конечном отрезке, а также исследуются точные оценки в таких неравенствах и точные константы вложения.

Целью работы является исследование точных констант вложения пространств $\dot{W}_p^n[0, 1]$ в пространства $\dot{W}_\infty^k[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq k < n$.

Актуальность. Несмотря на длительную историю исследований в данной области, многие задачи, связанные с точными оценками производных, остаются нерешенными, что подчеркивает актуальность темы. Основы данной проблематики были заложены еще в начале XX века такими математиками, как В. А. Стеклов (1903), Г. Х. Харди (1934) и Э. Шмидт (1940). Исследования по этой теме активно развиваются и сейчас, в последние 10-15 лет ей посвящены работы Г. А. Калябина (2010), А. И. Назарова (2014), а также ряда зарубежных математиков (К. Ватанабе, С. Цяо, Ж. Чень, Т. Кумагаи и др., 2009–2023).

Таким образом, исследования, представленные в диссертации, имеют важное значение и вписываются в современный контекст развития теории вложений пространств Соболева. Полученные результаты могут быть востребованы в различных областях математики, включая функциональный анализ,

теорию приближений и теорию специальных функций.

Диссертация Т. А. Гармановой состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении представлена постановка задачи, изложена история развития темы и сформулированы основные результаты исследования.

Первая глава диссертации посвящена теории вложения гильбертова пространства $\dot{W}_2^n[0, 1]$ в пространство $\dot{W}_\infty^k[0, 1]$. Основным объектом исследования являются величины $A_{n,k,2}(a)$, которые для каждой точки $a \in [0, 1]$ определяются как наилучшие константы в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,2}(a) \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad f \in \dot{W}_2^n[0, 1].$$

Полученные в этой главе соотношения между $A_{n,k,2}$ и первообразными многочленов Лежандра позволили получить главный результат о глобальном максимуме функций $A_{n,k,2}$, а именно что при четных k

$$\max_{a \in [0,1]} A_{n,k,2}(a) = A_{n,k,2}(1/2),$$

а при нечетных k

$$\max_{a \in [0,1]} A_{n,k,2}(a) = A_{n,k,2}(t_{n,k}),$$

где $t_{n,k}$ — ближайшая к $1/2$ точка локального максимума. Также в первой главе получено явное описание функций $A_{n,k,2}(a)$ через гипергеометрические функции при всех допустимых параметрах n и k и найдены точные значения констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при всех четных k .

Во второй главе изучаются функции $A_{n,k,p}(a)$, являющиеся наилучшими константами в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,p}(a) \left(\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad f \in \dot{W}_p^n[0, 1].$$

Показано, что функции $A_{n,k,p}(a)$ могут быть описаны при помощи теории приближений. Главным результатом этой главы является утверждение, что $A_{n,k,p}(a)$ равны наилучшему приближению сплайна специального вида, параметрически зависящим от a , многочленами степени не выше $n - 1$ по норме пространства $L_{p'}[0, 1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Также в главе 2 найдены константы вложения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Третья глава посвящена дополнительным свойствам первообразных многочленов Лежандра. В частности, вычислены нормы первообразных многочленов Лежандра фиксированного порядка в пространстве $L_2[0, 1]$. Полученные результаты применяются для приближенных вычислений констант вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

В заключении дается обзор проведенной работы и возможные направления дальнейших исследований.

Результаты диссертации являются новыми и представляют интерес для специалистов по теории функций и функционального анализа. Они опубликованы в ведущих рецензируемых математических изданиях России («Математические заметки», «Доклады РАН», «Труды Московского математического общества», «Функциональный анализ и его приложения»), индексируемых Web of Science, SCOPUS и RSCI. Доклады по результатам, изложенным в диссертации, сделаны на нескольких международных конференциях и научно-исследовательских семинарах.

Все положения, выносимые на защиту, получены лично автором, строго обоснованы, подтверждены четко сформулированными и доказанными теоремами и согласуются с результатами, полученными другими авторами. Тема диссертации соответствует специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки), в частности областям исследований: Теория функциональных пространств; исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях; Функ-

циональный анализ, линейные отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы); Специальные функции и интегральные преобразования. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Текст диссертации написан четко и аккуратно, однако все же имеется несколько замечаний.

1. Работа содержит некоторое количество опечаток, например на стр. 28 «доказывается» вместо «доказывается», на стр. 37 «заклучается» вместо «заключается» на стр. 60 «точкми» вместо «точками».
2. В теореме 1.5.3 было бы полезно более подробно объяснить, почему данные оценки являются сходящимися, а также указать по какому параметру.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Диссертация отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к кандидатским диссертациям, а ее содержание соответствует специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, она оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, а ее автор Гарманова Татьяна Алексеевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

профессор, член-корреспондент РАН,
главный научный сотрудник

Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии
наук — обособленного подразделения Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного
отделения Российской академии наук

Степанов Владимир Дмитриевич

10 апреля 2025

Контактные данные:

тел. +79039690768, email: stepanov@mi-ras.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Адрес места работы: 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65,
Вычислительный центр ДВО РАН — обособленное подразделение
Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН,
Тел. +7 (4212) 22-72-67, email: admvc@ccfebras.ru

Подпись Степанова Владимира Дмитриевича заверяю: