

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Иванов Александр Сергеевич

**Развитие методов вычисления функциональных интегралов
в моделях квантовой теории поля**

Специальность 1.3.3. Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Белокуров

Москва — 2024

Оглавление

1	Введение	3
1.1	Актуальность темы исследования	14
1.2	Цели и задачи исследования	17
1.3	Научная новизна	18
1.4	Теоретическая и практическая значимость исследования	19
1.5	Положения, выносимые на защиту	19
1.6	Степень достоверности и апробация результатов	20
1.7	Личный вклад автора	22
2	Интеграл по траекториям в моделях релятивистской квантовой динамики	23
2.1	Матрица плотности	24
2.2	Алгоритм Метрополиса для вычисления функционального интеграла методом Монте-Карло	27
2.3	Релятивистский квантовый осциллятор	30
2.3.1	Нерелятивистский предел	30
2.3.2	Ультрарелятивистский предел	31
2.4	Результаты численного моделирования	33
2.4.1	Нерелятивистский предел	33
2.4.2	Ультрарелятивистский предел	34
2.4.3	Вычисления в общем случае	35
2.5	Заключительные замечания к главе 2	36

3	Сходящиеся ряды для моделей с полиномиальным взаимодействием, определенных на конечной решетке	42
3.1	Построение сходящегося ряда	45
3.2	Вариационный ряд	49
3.3	Сходимость вариационного ряда	51
3.3.1	Сходимость вариационного ряда в зависимости от η и τ	51
3.3.2	γ -Регуляризация	53
3.3.3	Непертурбативная независимость от τ и непрерывность γ -регуляризации	56
3.3.4	Вычисление связных функций Грина	57
3.4	Результаты численного моделирования	58
3.5	Заключительные замечания к главе 3	73
4	Метод сходящихся рядов для моделей с полиномиальным взаимодействием, определенных на бесконечной решетке	75
4.1	Метод сходящихся рядов и размерная регуляризация	76
4.2	Метод сходящихся рядов для модели ϕ^4 , определенной на бесконечной решетке	82
4.3	Результаты численного моделирования	83
4.4	Связь с суммируемостью по Борелю	89
4.5	Заключительные замечания к главе 4	91
5	Заключение	94

Глава 1

Введение

В современной теоретической физике для описания моделей квантовой теории поля, квантовой механики и статистической физики используется несколько различных формализмов обладающих рядом преимуществ и недостатков. Широкое применение получил метод описания, основанный на интегралах по траекториям, предложенный Ричардом Фейнманом [1]. Из постулатов квантовой механики следует, что, вообще говоря, нельзя точно предсказать результат эксперимента, однако можно вычислить вероятность того или иного результата. Суть метода интеграла по траекториям заключается в том, что для расчета амплитуды вероятности перехода системы из одного состояния в другое необходимо учесть все возможные пути перехода. Например, для перехода частицы из одной точки в другую, необходимо учесть все возможные траектории, причем вклады от каждой траектории различаются значением фазы, где фаза вклада каждой траектории является комплексной величиной, пропорциональной действию, вычисленному для этой траектории. Математические конструкции этого подхода представляют собой формализм функциональных интегралов [2], [3].

С помощью функционального интеграла получается достаточно просто записать формальное выражение для требуемой величины. Однако произвести полное вычисление удастся только в исключительных случаях, когда известны решения уравнений движения. В моделях со взаимодействием применяются методы, основанные на приближенном вычислении, например, теория возмущений. Теория воз-

мущений позволила получить одно из наиболее точных совпадений теоретических расчетов и эксперимента. Совпадение результатов вычисления радиационных поправок к аномальному магнитному моменту электрона с экспериментальными данными имеет точность порядка 10^{-10} [4]. Этот результат оказался возможным благодаря малости константы взаимодействия в квантовой электродинамике (КЭД). Если же константа взаимодействия не является малой величиной, как, например, в квантовой хромодинамике (КХД) [5], то метод теории возмущения уже не имеет обоснования для применения, кроме того теряется возможность контролировать точность результатов. Получающиеся в рамках теории возмущений ряды в квантовой механике и квантовой теории поля являются асимптотическими рядами в смысле Пуанкере [6], [7]. Отметим, что при вычислениях в рамках принятого формализма, каждый отдельный член ряда может быть расходящимся, расходимости необходимо устранить в соответствии с известными правилами [8]. После применения процедуры устранения расходимостей сумма ряда является расходящейся в обычном смысле.

Изложенную выше проблему наглядно демонстрирует пример применения теории возмущения для одномерного интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4\right]. \quad (1.1)$$

Интеграл (1.1) может быть вычислен точно:

$$I(\lambda) = 2\sqrt{\frac{3}{4\lambda}} e^{\frac{3}{4\lambda}} K_{1/4}\left(\frac{3}{4\lambda}\right), \quad (1.2)$$

где $K_{1/4}(x)$ – функция Макдональда. Заметим, что значение при $\lambda \rightarrow 0$ имеет конечный предел и равен $\sqrt{2\pi}$.

Для построения ряда теории возмущений необходимо разложить экспоненту с

константой λ в ряд Тейлора в исходном интеграле (1.1)

$$\exp\left[-\frac{\lambda}{4!}x^4\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{4!}x^4\right)^n}{n!}. \quad (1.3)$$

Следующим шагом поменяем местами операции суммирования и интегрирования

$$J(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\left(-\frac{\lambda}{4!}x^4\right)^n}{n!} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n, \quad (1.4)$$

где коэффициенты f_n имеют вид

$$f_n = (-1)^n \frac{\sqrt{2}\Gamma(2n + 1/2)}{6^n n!} \quad (1.5)$$

Именно здесь заключена причина расходимости ряда теории возмущений. Перестановки операций суммирования и интегрирования в данном случае не является корректной в силу теоремы Фубини.

Теорема 1 (Фубини) *Рассмотрим выражение*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \right).$$

Пусть $F_n(x)$ - последовательность действительных или комплексных, непрерывных в $(-\infty, \infty)$ функций, удовлетворяющих условиям:

1. *Последовательность $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ сходится равномерно на любом компактном интервале в $(-\infty, \infty)$*
2. *Конечна хотя бы одна из величин*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(x)| \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx |F_n(x)| \right)$$

Тогда ответ не изменится при перестановке операций суммирования и интегрирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(x)| \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx |F_n(x)| \right).$$

Величина $J(\lambda)$ из выражения (1.4) не удовлетворяет теореме Фубини в силу отсутствия абсолютной сходимости. Естественным образом возникает вопрос о целесообразности дальнейших вычислений. Оказывается, что полученный ряд (1.4) может быть использован для приближенного вычисления исходного интеграла (1.1) в случае малых значений константы λ . Для демонстрации этого факта приведем результаты вычисления исходного выражения и частичных сумм полученного ряда при различных значениях константы λ (см. Рис. 1.1)

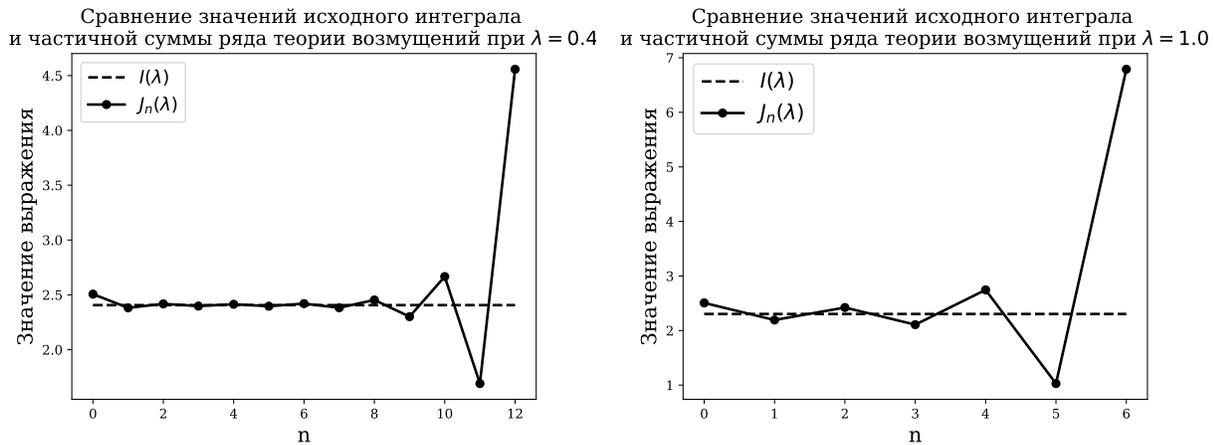


Рис. 1.1: Вычисления точного значения интеграла (1.1) и частичной суммы ряда теории возмущений (1.4) при различных значениях константы λ .

Согласно представленным графикам, при малом значении константы λ , первые несколько членов ряда достаточно хорошо приближают исходное выражение, а при относительно небольшом значении константы ряд расходится практически сразу. Подробное доказательство данного факта можно найти в [7]. Причина такого поведения ряда теории возмущений заключается в асимптотике значений коэффициентов f_n при больших значениях n [9]:

$$f_n \sim (-1)^n a^n n^{b_0} n!, \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

где $a < 1$, но сумма ряда расходится из-за наличия факториала в асимптотике.

Необходимо уметь работать с асимптотическими рядами теории возмущений. Одним из способов выполнить суммирование асимптотического ряда является метод суммирования по Борелю [10], [11], [12], [13], [14]. Идея метода состоит в повторной перестановке операций суммирования и интегрирования, причем второй раз условия теоремы Фубини тоже не выполнены. Если выполнить корректную операцию перестановки, то мы не можем надеяться получить верный результат для суммы ряда. Применим метод суммирования по Борелю к рассматриваемому одномерному интегралу. Асимптотика коэффициентов f_n содержит $n!$ при $n \rightarrow \infty$. Выполним подстановку

$$f_n = g_n \cdot \Gamma(n + b + 1). \quad (1.7)$$

Новые коэффициенты ряда уже лишены факториала в асимптотике при больших значениях номера члена ряда. Тогда выражение (1.4) принимает вид

$$J(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n + b + 1) g_n \lambda^n. \quad (1.8)$$

Воспользуемся интегральным представлением для Γ - функции

$$\Gamma(n + b + 1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{n+b}. \quad (1.9)$$

Подстановка интегрального выражения для Γ - функции дает следующий результат

$$J(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^b (\lambda t)^n. \quad (1.10)$$

Выполним повторную перестановку операций интегрирования и суммирования. Обозначим сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} g_n (\lambda t)^n$ величиной $\bar{J}(\lambda t)$, а выражение, полученное в результате перестановки как $\bar{I}(\lambda)$

$$\bar{I}(\lambda) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^b \bar{J}(\lambda t). \quad (1.11)$$

Известно, что ряд $\bar{J}(\lambda t)$ имеет ограниченный круг сходимости, где радиус сходимости определяется простым полюсом в точке $\lambda t = -1/a$. Интегрирование необходимо провести за пределами круга сходимости. Проблема аналитического продолжения $\bar{J}(\lambda t)$ за область сходимости $|\lambda t| < 1/a$ решается методом конформного отображения комплексной плоскости либо методом аппроксимации Паде.

В качестве примера приведем конформное отображение

$$\lambda t(u) = \frac{(1 + a\lambda t)^{1/2} - 1}{(1 + a\lambda t)^{1/2} + 1} \quad (1.12)$$

и, соответственно, обратное отображение

$$\lambda t(u) = \frac{4u}{a(u - 1)^2}. \quad (1.13)$$

При таком отображении радиус круга сходимости становится равным единице, а интегрирование будет по отрезку $[0; 1]$. Подставим выражение для λt в ряд $\bar{J}(\lambda t)$ и выполним разложение по новому параметру u

$$\bar{J}(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\lambda t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n u^n(\lambda t), \quad (1.14)$$

где v_n - новые коэффициенты разложения, зависящие от старых коэффициентов g_n и параметра a . В итоге, для функции $\bar{I}(\lambda)$ получим следующее выражение

$$\bar{I}(\lambda) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^b \sum_{n=0}^{\infty} v_n u^n(\lambda t). \quad (1.15)$$

Равенство величин $I(\lambda)$ и $\bar{I}(\lambda)$ доказано для ограниченного числа моделей. Известно, что модель ϕ^4 размерности $d < 4$ суммируема по Борелю, в том числе и рассмотренный одномерный интеграл.

Рассмотрим конкретный пример функционального интеграла для теории ска-

лярного поля в d - мерном пространстве-времени. Пусть действие имеет вид

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \lambda V(\phi) \right]. \quad (1.16)$$

Обозначим действие свободной теории следующим образом:

$$S_0[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 \right]. \quad (1.17)$$

Наблюдаемыми величинами являются функции Грина. Например, двухточечная функция Грина в теории со взаимодействием (1.16) с помощью формализма функционального интеграла записывается в виде:

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{\int [d\phi] \phi(x) \phi(y) \exp(iS[\phi])}{\int [d\phi] \exp(iS[\phi])}, \quad (1.18)$$

где в левой части подразумевается T - произведение полей. Формальное выражение для двухточечной функции Грина записано, но провести вычисления напрямую для теории со взаимодействием не удастся. В случае модели без взаимодействия (1.17) удастся получить результат аналитически. Для вычисления (1.18) применяется разложение экспоненты со взаимодействием в ряд, считая, что константа λ - мала

$$\exp \left[-i\lambda \int d^d x V(\phi) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-i\lambda \int d^d x V(\phi) \right)^n}{n!}. \quad (1.19)$$

Выполнив разложение по константе λ , получим ряд теории возмущения

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y) \lambda^n. \quad (1.20)$$

Асимптотика членов ряда после выполнения необходимых процедур перенормировки при $n \rightarrow \infty$ имеет вид

$$f_n(x, y) \rightarrow n^b a^n n!, \quad (1.21)$$

таким образом ряд является асимптотическим. Существует несколько способов суммирования асимптотических рядов [15], [16], [17], [18], [19]. Методы вычисления функциональных интегралов с помощью ряда теории возмущений называются пертурбативными.

Вычисление функционального интеграла в некоторых случаях можно выполнить нептурбативным способом, определив модель на пространственно-временной решетке [20]. Необходимо перейти от пространства -времени Минковского к Евклидову пространству-времени с помощью поворота Вика

$$t \rightarrow -it. \quad (1.22)$$

Поворот Вика позволяет получить аналитическое продолжение для наблюдаемых в мнимом времени. При таком преобразовании экспонента с действием принимает вид

$$e^{iS[\phi]} = e^{-S_E[\phi]}, \quad (1.23)$$

где $S_E[\phi]$ - Евклидово действие теории. Если действие $S_E[\phi]$ оказывается положительно определенным (достаточно ограниченности снизу), то множитель $e^{-S_E[\phi]}$ может рассматриваться как весовой коэффициент для конфигурации полей ϕ . Двухточечная функция Грина принимает вид

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{\int [d\phi] \phi(x)\phi(y) \exp(-S_E[\phi])}{\int [d\phi] \exp(-S_E[\phi])}. \quad (1.24)$$

Применение поворота Вика к действию (1.16) приводит к следующему Евклидову действию

$$iS[\phi] = - \int d^d x_E \left(-\frac{1}{2} \phi \partial_i^2 \phi + \frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \lambda V(\phi) \right) = -S_E[\phi], \quad (1.25)$$

где выполнено интегрирование по частям и опущены граничные условия. Для строгого математического определения функционального интеграла (1.24) с действием (1.25) введем пространственно-временную решетку с шагом a . Каждая точка

на решетке будет соответствовать d целым числам, которые обозначим набором $n \equiv (n_1, n_2, \dots, n_d)$. Переход от непрерывного предела к решетке осуществим заменой

$$x_i \rightarrow n_i a, \quad (1.26)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(n) = \frac{1}{a} \hat{\phi}_n, \quad (1.27)$$

$$\int d^d x_E \rightarrow a^d \sum_n, \quad (1.28)$$

$$M \rightarrow \frac{1}{a} \hat{M}, \quad (1.29)$$

$$\partial_i^2 \phi_n = \frac{1}{a^2} \sum_i (\phi(na + \hat{i}a) + \phi(na - \hat{i}a) - 2\phi(na)), \quad (1.30)$$

где \hat{i} - указывает ось, по которой берется производная. Замена для константы взаимодействия λ подбирается таким образом, чтобы действие на решетке получилось независимым от шага решетки a . Евклидово действие (1.16) на решетке примет вид

$$S_E[\hat{\phi}] = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m + \sum_n \hat{\lambda} V(\hat{\phi}_n), \quad (1.31)$$

а действие свободной теории (1.17) запишется в виде

$$S_{0E}[\hat{\phi}] = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m, \quad (1.32)$$

где введено обозначение с помощью δ - символа Кронекера

$$K_{nm} = - \sum_i (\delta_{n+\hat{i},m} + \delta_{n-\hat{i},m} - 2\delta_{n,m}) + \hat{M}^2 \delta_{nm}. \quad (1.33)$$

Двухточечная функция Грина для свободной теории на бесконечной решетке мо-

жет быть вычислена явно

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle_0 = \frac{\int \prod_j d\hat{\phi}_j \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \exp[-S_{0E}[\hat{\phi}]]}{\int \prod_j d\hat{\phi}_j \exp[-S_{0E}[\hat{\phi}]]} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(n-m)}}{d \sum_j \sin^2 \frac{k_j}{2} + \hat{M}^2}. \quad (1.34)$$

Для получения физической двухточечной функции Грина необходимо выполнить переход к непрерывному пределу $a \rightarrow 0$, при фиксированных значениях величин M , ϕ , x и y . В итоге получается известный результат

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + M^2}. \quad (1.35)$$

Аналитическое решение для теории со взаимодействием (1.31) неизвестно. В этом случае можно произвести численный расчет с помощью стохастического метода Монте-Карло [21]. Для этого вводится конечномерная аппроксимация модели на решетке. Существенным ограничением метода является требование положительной определенности действия $S_E[\hat{\phi}]$ (или, более строго, достаточно, чтобы действие было вещественным и ограниченным снизу).

Суть метода Монте-Карло заключается в нахождении наблюдаемых величин через вычисление среднего значения по большому набору случайных конфигураций с заданным распределением. Например, для нахождения значения двухточечной функции Грина $\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle$ в модели, описываемой действием (1.31), необходимо вычислить среднее значение $\hat{\phi}_n \hat{\phi}_m$ по большому набору случайных конфигураций $[\hat{\phi}]$, имеющих распределение

$$\frac{\exp[-S_E[\hat{\phi}]]}{\int \prod_j d\hat{\phi}_j \exp[-S_E[\hat{\phi}]]}. \quad (1.36)$$

Построение набора случайных конфигураций можно произвести множеством способов.

В главе 2 диссертации выполнено расширение области применения метода Монте-Карло для интегралов по траекториям в моделях релятивистской гамильтоновой

динамики. Гамильтониан таких систем имеет вид

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} + V(q), \quad (1.37)$$

где p - импульс, q - координата, m - масса частицы, $V(q)$ - потенциал. Получен матричный элемент матрицы плотности в координатном представлении. На примере модели с квадратичным потенциалом $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2$ выполнены численные расчеты наблюдаемых величин. В пределе больших масс модель эквивалентна модели нерелятивистского гармонического осциллятора

$$H = m + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2. \quad (1.38)$$

Данная модель хорошо изучена и позволяет удостовериться в корректности результатов работы. В пределе малых масс рассматриваемая модель эквивалентна модели с гамильтонианом

$$H = |p| + \frac{1}{2}m\omega^2q^2, \quad (1.39)$$

решение которой можно произвести в импульсном представлении.

Для модели (1.37) вычислены средние значений кинетической и потенциальной энергий, корреляционная функция и плотность вероятности, а также приведено сравнение полученных результатов с результатами в предельных случаях.

В главе 3 диссертации проведено исследование метода суммирования расходящихся рядов теории возмущений. Построен сходящийся ряд (СР), коэффициенты которого определяются через коэффициенты ряда теории возмущений. Представлено решение проблемы медленной сходимости суммы ряда. Основные идеи продемонстрированы на примере модели ϕ^4 , определенной на решетке. Доказано, что сходящийся ряд может быть построен для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на конечной решетке. Показано, что полученный ряд является пересуммированием ряда теории возмущений. Во всех петлях стандартной теории возмущений построенный СР обладает внутренней симметрией, что позволяет ввести вариационный параметр. Значение вариационного параметра определяет “скорость” сходимости СР. Для исследова-

ния сходимости ряда с вариационным параметром (далее ВР - сходящийся ряд с вариационным параметром) рассматриваются две регуляризации модели ϕ^4 , определенной на конечной решетке. Первая регуляризованная модель, обозначенная как “ η - регуляризация“, является естественным расширением ВР и предоставляет аргументы относительно сходимости этого ряда. Вторая регуляризованная модель обозначенная как “ γ - регуляризация“, построена с помощью математических выражений, используемых при построении ВР. Доказано, что γ - регуляризованная модель аппроксимирует исходную модель ϕ^4 с любой наперед заданной точностью, а также, что функции Грина модели с γ - регуляризацией могут быть вычислены с помощью ВР, который в данном случае является сходящимся. Показана непertурбативная независимость от вариационного параметра ВР при снятии γ - регуляризации. С помощью данного свойства предложен способ вычисления для бесконечной решетки. Выполнено сравнение результатов вычисления двухточечной функции Грина с результатами известных методов суммирования по Борелю и численным методом Монте-Карло.

1.1 Актуальность темы исследования

Для описания релятивистских систем в квантовой механике применяется уравнение Клейна-Гордана и релятивистское уравнение Шредингера, которое обычно называют бесспиновым уравнением Солпитера. Уравнение Солпитера в этом случае рассматривается как "квадратный корень" из уравнения Клейна-Гордона. Релятивистское уравнение Шредингера рассматривается в рамках подхода релятивистской гамильтоновой динамики [22], [23], [24], [25].

Основным недостатком уравнения Солпитера является то, что оно явно нековариантно. Другой проблемой является нелокальность релятивистского гамильтониана, который является псевдодифференциальным оператором [26]. Однако, нелокальность уравнения Солпитера не нарушает структуру светового конуса. Кроме того, пространство L_2 решений уравнения Солпитера инвариантно относительно преобразований группы Лоренца [27].

Существует множество физических проблем, связанных с исследованием релятивистских квантово-механических систем. Релятивистские поправки играют очень важную роль в физике атомных систем с тяжелыми элементами из-за сильных потенциалов взаимодействия [28]. Проблемы с моделированием релятивистских квантовых систем могут возникнуть в ядерной физике, физике адронной структуры и кварк-глюонной плазмы [29], [30]. Недавно возникло еще одно интересное применение релятивистской квантовой механики. Это так называемые (псевдо) релятивистские системы из сжатого вещества, и одним из наиболее известных примеров таких систем является графен [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37].

Замечательным свойством графена является то, что его эффективные зарядовые возбуждения имеют очень малую массу. В случае идеального графена без дефектов и граничных эффектов масса возбуждений равна нулю. С другой стороны, взаимодействие между возбуждениями очень сильное. Это означает, что возбуждения на графеновом листе можно рассматривать как некоторый сильно взаимодействующий двумерный релятивистский газ с мгновенным взаимодействием.

Правильная постановка задачи релятивистской квантовой механики многих тел имеет некоторые хорошо известные трудности. Кинетическая и потенциальная части гамильтониана должны быть инвариантны при преобразовании Лоренца. Кинетическую часть гамильтониана довольно легко сформулировать в лоренц-инвариантной форме, но релятивистская формулировка взаимодействия в общем случае требует подхода квантовой теории поля. Если мы хотим работать в рамках подхода квантовой механики, мы должны использовать некоторые дополнительные допущения. Часть взаимодействия не может быть изучена в общем случае, поскольку в первом приближении рассматриваются релятивистские квантовые системы с мгновенным взаимодействием между частицами. Это приближение очень хорошо работает в случае релятивистской квантовой химии и для исследования свойств (псевдо) релятивистских систем конденсированных сред, таких как графен. В этих системах поправка, обусловленная релятивистской природой взаимодействия, к счастью, очень мала по сравнению с поправкой, обусловленной реля-

тивистской природой частиц. Ядерные и высокоэнергетические системы требуют некоторых особых соображений.

Метод Монте-Карло для интегралов по траекториям [21], [38] является одним из наиболее популярных численных подходов “ab initio” к исследованию квантовых систем. Этот метод становится особенно полезным при исследовании свойств квантовых систем многих тел. Уравнения Шредингера в этом случае становятся трудными для изучения, но число квантовых степеней свободы все еще не настолько велико, чтобы использовать квантовую статистику. Развитие нейронных сетей [39], [40] дает новые возможности для численного расчета функциональных интегралов методом Монте-Карло и является предметом дальнейших исследований.

Релятивистское обобщение интегрального подхода по траекториям для квантовомеханических систем имеет долгую историю [41], [42]. Сегодня этот подход становится все более популярным и находит свое применение в физике высоких энергий [29], [30].

Разработка эффективных вычислительных методов для систем с большим числом степеней свободы является одной из основных открытых проблем в современной теоретической физике. Обычно для решения проблем с вычислительной сложностью, возрастающей с увеличением числа частиц, узлов решетки и т.д., используется моделирование методом Монте-Карло. Однако метод Монте-Карло имеет два важных ограничения. Во-первых, вычисления с бесконечным количеством степеней свободы - что для моделей, определенных на решетке, эквивалентно бесконечному пределу объема - доступны только как результаты процедуры экстраполяции. Во-вторых, моделирование методом Монте-Карло основано на вероятностных интерпретациях веса Больцмана и, следовательно, неприменимо к системам, описываемым сложными действиями (например, комплексными).

Причиной расходимости ряда стандартной теории возмущений является замена операций суммирования и интегрирования при невыполненных условиях теоремы Фубини. Другими словами, при разложении экспоненты с полиномиальным взаимодействием в ряд Тейлора, члены разложения растут слишком быстро для

больших значений полей по сравнению с гауссовым начальным приближением. В рамках метода построения сходящихся рядов проблема решается путем выбора нестандартного начального приближения со взаимодействием, обеспечивающее достаточное убывание членов ряда. Альтернативные методы рассмотрены в работах [15], [16], [17], [18], [19], [43], [44], [45], [46], [47].

Первоначально метод сходящихся рядов был предложен для теорий квантового ангармонического осциллятора и скалярного поля [48], [49], [50], [51]. Позже различные аспекты метода, включая РГ-анализ и разложения в моделях с сильной связью, были разработаны в работах [52], [53], [54], [55]. Во всех более ранних конструкциях предполагалась применимость размерной регуляризации [56] для перехода к пределу бесконечного числа степеней свободы. Однако, как будет показано в настоящей работе, в некоторых случаях размерная регуляризация может повлиять на основные принципы, лежащие в основе метода построения сходящихся рядов, и, таким образом, необходимы дальнейшие математические исследования.

В недавних работах [57], [58], [59] сходящийся ряд для моделей с действительным и мнимым действием, определенных на конечных решетках, был построен строгим образом. Было показано, что применение размерной регуляризации может быть интерпретировано как дополнительная процедура повторного суммирования, ускоряющая сходимость рядов.

1.2 Цели и задачи исследования

Целью диссертационного исследования является развитие некоторых методов вычисления функциональных интегралов в различных моделях квантовой теории поля.

1. Расширение возможностей применения метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской гамильтоновой динамики. В качестве основных задач выделены: построение матричного элемента матрицы плотности в координатном представлении в релятивистском случае, адаптация алгоритма Метрополиса для вычисления функциональных интегралов

в релятивистском случае, анализ результатов численного моделирования для системы релятивистского осциллятора.

2. Построение сходящегося ряда на основе ряда теории возмущений в моделях скалярного поля с полиномиальным взаимодействием, определенных на решетке. Задачами исследования являются: строгое построение сходящегося ряда для моделей, определенных на конечной решетке, определение и обоснование условия для ускорения сходимости построенного ряда, построение сходящегося ряда для моделей, определенных на бесконечной решетке, обоснование существования и конечности суммы построенного ряда, численное моделирование и сравнение результатов с другими известными методами.

1.3 Научная новизна

1. Исследована новая область применения метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской гамильтоновой динамики [60]. Исследована система квантового релятивистского осциллятора. Показано соответствие результатов численного моделирования с аналитическими решениями в предельных случаях.
2. Предложен новый метод построения сходящегося ряда для вычисления наблюдаемых в моделях квантовой теории поля для скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на конечной и бесконечной решетках [61], [58]. Доказаны существование и конечность суммы построенного ряда. Произведено сравнение результатов численного моделирования с результатами, полученными методом суммирования по Борелю и вычислениями методом Монте-Карло для функциональных интегралов для модели ϕ^4 скалярного поля.

1.4 Теоретическая и практическая значимость исследования

Предложенное расширение области применения метода Монте-Карло для интеграла по траекториям в квантовой механике позволяет проводить вычисления в релятивистских теориях, что существенно расширяет круг задач, поддающихся численному анализу, например, модель графена или модель столкновения тяжелых ионов. Полученный метод суммирования расходящихся рядов в квантовой теории поля дает возможность не только получать корректные значения наблюдаемых величин в режиме сильной связи, но и возможность изучения моделей, для которых неприменимы численные методы Монте-Карло. Результаты сравнительного анализа показывают, что предложенный метод суммирования обладает лучшей скоростью сходимости по сравнению со стандартным подходом суммирования по Борелю. А также не возникает необходимость исследовать асимптотическое поведение членов ряда теории возмущений, как в методе суммирования по Борелю, в случае моделей, определенных на конечной решетке.

1.5 Положения, выносимые на защиту

1. Построено обобщение метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской гамильтоновой динамики. Получено выражение среднего значения кинетической энергии для вычисления методом Монте-Карло. Произведены аналитический и численный анализ корреляционной функции и энергии для системы релятивистского осциллятора, который подтверждает корректность построенного обобщения.
2. Предложен метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений для теории скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенной на конечной решетке. Обнаружена внутренняя симметрия, позволяющая существенно увеличить скорость сходимости построенного ряда. На основе обнаруженной симметрии введен вариацион-

ный ряд. Доказаны существование и конечность построенного вариационного ряда в случае конечной решетки. Произведено численное моделирование результатов метода построения сходящихся рядов и построенного вариационного ряда для наблюдаемой $\langle \phi_n^2 \rangle$ модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на конечной решетке, выполнено сравнение с результатами применения метода Монте-Карло для функциональных интегралов и метода суммирования по Борелю, подтверждающее корректность предложенного метода.

3. Предложен метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений для теории скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенной на бесконечной решетке. Получено условие применимости метода построения сходящихся рядов в случае бесконечной решетки. Произведено численное моделирование результатов метода построения сходящихся для наблюдаемой ϕ_n^2 модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на бесконечной решетке, выполнено сравнение с результатами применения метода Монте-Карло для функциональных интегралов и метода суммирования по Борелю, подтверждающее корректность предложенного метода.

1.6 Степень достоверности и апробация результатов

Результаты, полученные автором, являются достоверными и обоснованными, так как являются развитием аппарата квантовой механики и квантовой теории поля, все преобразования являются математически строгими, используются корректные численные методы. Результаты работы опубликованы в ведущих международных рецензируемых журналах, индексируемых в WoS, Scopus, RSCI. Список работ автора приведен в конце автореферата.

Результаты работы докладывались автором на международных школах и конференциях, в том числе в следующих

1. Ivanov A.S., Pavlovsky O.V., Monte-Carlo calculations for Relativistic

Oscillator: Generalization of Path Integral Metropolis Algorithm // The Helmholtz International Summer School "Lattice QCD, Hadron Structure and Hadronic Matter". Dubna, Russia, from August 25 to September 6, 2014.

2. Иванов А.С., Павловский О.В., Вычисление функционального интеграла методом Монте-Карло для релятивистского осциллятора// Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2015», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 13 - 17 апреля 2015
3. Ivanov A.S., Pavlovsky O.V., Path Integral Monte-Carlo Calculations for Relativistic Oscillator // 53th Schladming Winter School of Theoretical Physics, Schladming, Austria, 1 - 6 March 2015
4. Ivanov A.S., Belokurov V.V., Shavgulidze E.T., Sazonov V.K. Convergent perturbation theory for the lattice phi4-model // XV International Baikal Summer School on Physics of Elementary Particles and Astrophysics, Bol'shie Koty, Irkutsk region, Russia 5-12 July 2015
5. Ivanov A.S., Belokurov V.V., Shavgulidze E.T., Sazonov V.K. Convergent Perturbation Theory for the Lattice Phi4-model // The 33rd International Symposium on Lattice Field Theory, Kobe, Japan, 14 -18 July 2015.
6. Иванов А.С., Белокуров В.В., Шавгулидзе Е.Т., Сазонов В.К., Пертурбативные и непертурбативные подходы в одномерных и двумерных моделях квантовой теории поля// Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОССОВ 2016», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 11 - 15 апреля 2016
7. Иванов А.С., Развитие методов суммирования расходящихся рядов в квантовой теории поля (по материалам кандидатской диссертации)// Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2020», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 10 - 27 ноября 2020

Также автор выступал с докладом на научных семинарах кафедры физики

частиц и космологии МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИЯФ МГУ им. М.В. Ломоносова, теоретического отдела института ядерных исследований РАН.

1.7 Личный вклад автора

Все результаты, выносимые на защиту, в работах, написанных в соавторстве, получены автором лично. В работах, выполненных вместе с соавторами, автор участвовал в постановке задачи, лично провел все необходимые аналитические вычисления, написал код программы для численного расчета с использованием техники вычисления на суперкомпьютере, систематизировал полученные данные, сформулировал окончательный результат и обосновал его значимость.

Глава 2

Интеграл по траекториям в моделях релятивистской квантовой динамики

Построим релятивистское обобщение формализма интеграла по траекториям для квантовомеханических систем (модели релятивистской гамильтоновой динамики) при конечной температуре [21], [38]. В данной главе будет получено выражение для матричного элемента матрицы плотности в релятивистском случае, также проведен анализ системы – релятивистского гармонического осциллятора с гамильтонианом [24], [25]

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (2.1)$$

Произведен численный расчет наблюдаемых: двухточечной корреляционной функции и энергии основного состояния. Квантово-механическая система с рассматриваемым гамильтонианом является точно решаемой в двух предельных случаях: в пределе больших и малых масс. Полученные численные значения сравниваются с аналитическими решениями. Полученные результаты согласуются в пределе двух и более стандартных отклонений.

2.1 Матрица плотности

Среднее значение некоторого оператора A может быть найдено с помощью оператора матрицы плотности $\rho = e^{-\beta H}$

$$\langle A \rangle = \frac{\text{tr}(Ae^{-\beta H})}{\text{tr}(e^{-\beta H})}, \quad (2.2)$$

где $\beta = 1/\theta$ - обратная температура рассматриваемой системы. Метод Монте-Карло для функциональных интегралов рассматривается в пределе нулевой температуры. Матричный элемент матрицы плотности в координатном представлении имеет вид

$$\rho(q, q'; \beta) = \langle q | e^{-\beta H} | q' \rangle. \quad (2.3)$$

Тогда среднее значение оператора A может быть записано в виде

$$\langle A \rangle = \frac{\int dq dq' \rho(q, q'; \beta) \langle q | A | q' \rangle}{\int dq \rho(q, q; \beta)} \quad (2.4)$$

Матрица плотности обладает следующим свойством

$$e^{-(\beta_1 + \beta_2)H} = e^{-\beta_1 H} e^{-\beta_2 H}. \quad (2.5)$$

Аналогичное выражение в координатном представлении имеет вид

$$\rho(q_1, q_3; \beta_1 + \beta_2) = \int dq_2 \rho(q_1, q_2; \beta_1) \rho(q_2, q_3; \beta_2). \quad (2.6)$$

Применив свойство матрицы плотности N_t раз, получим

$$e^{-\beta H} = (e^{-\tau H})^{N_t}, \quad (2.7)$$

где введено обозначение $\tau = \beta/N_t$. Аналогичное выражение в координатном представлении

$$\rho(q_0, q_N; \beta) = \int \cdots \int dq_1 \dots dq_{N_t-1} \rho(q_0, q_1; \tau) \dots \rho(q_{N_t-1}, q_{N_t}, \tau). \quad (2.8)$$

Будем рассматривать гамильтонианы вида $H(p, q) = T(p) + V(q)$. Оператор кинетической энергии $T(p)$ диагонален в импульсном представлении, а оператор потенциальной энергии $V(q)$ диагонален в координатном представлении. Операторы кинетической и потенциальной энергий могут быть разделены в случае малости параметра τ , используем известное соотношение

$$e^{-\tau(T+V)+\frac{\tau^2}{2}[T,V]} = e^{-\tau T} e^{\tau V}, \quad (2.9)$$

где $[T, V]$ - коммутатор операторов T и v . В пределе $\tau \rightarrow 0$

$$e^{-\tau(T+V)} \approx e^{-\tau T} e^{-\tau V}, \quad (2.10)$$

$$\rho(q_0, q_2; \tau) \approx \int dq_1 \langle q_0 | e^{-\tau T} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-\tau V} | q_2 \rangle. \quad (2.11)$$

Используя диагональность оператора потенциальной энергии в координатном представлении, можно записать

$$\langle q_1 | e^{\tau V} | q_2 \rangle = e^{-\tau V(q_1)} \delta(q_2 - q_1), \quad (2.12)$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. Используя представление единичного оператора в виде $\int |p\rangle \frac{dp}{2\pi} \langle p| = 1$ запишем матричный элемент оператора $e^{-\tau T}$ в координатном представлении

$$\langle q_0 | e^{-\tau T} | q_1 \rangle = \int dp dp' \delta(p - p') \langle q_0 | p \rangle \langle p' | q_1 \rangle e^{-T(p)\tau}. \quad (2.13)$$

Учтем соотношение $\langle q|p\rangle = e^{-iqp}$

$$\langle q_0|e^{-\tau T}|q_1\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-T(p)\tau - ip(q_0 - q_1)}. \quad (2.14)$$

В диссертации рассматривается модель с релятивистской кинетической энергией

$$T(p) = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (2.15)$$

Выполнив интегрирование по импульсам, получим выражение для матричного элемента в одномерном случае

$$\langle q_0|e^{-\tau T(p)}|q_1\rangle = \frac{m}{\pi \sqrt{1 + \left(\frac{q_1 - q_0}{\tau}\right)^2}} K_1 \left[m\tau \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 - q_1}{\tau}\right)^2} \right], \quad (2.16)$$

где $K_1(x)$ - функция Макдональда. Тогда для матричного элемента матрицы плотности получим

$$\rho(q'', q'; \tau) = \frac{m}{\pi \sqrt{1 + \left(\frac{q'' - q'}{\tau}\right)^2}} K_1 \left[m\tau \sqrt{1 + \left(\frac{q'' - q'}{\tau}\right)^2} \right] e^{-\tau V(q')}. \quad (2.17)$$

Вычисления в многомерном случае дают следующее выражение

$$\rho(q'', q'; \tau) = \left(\frac{m\tau}{\pi \sqrt{\tau^2 + (q'' - q')^2}} \right)^{(d+1)/2} \frac{K_{(d+1)/2}(m\sqrt{\tau^2 + (q'' - q')^2})}{(2\tau)^{(d-1)/2}} e^{-\tau V(q')}, \quad (2.18)$$

где $d = 1, 2, 3$ - размерность пространства.

2.2 Алгоритм Метрополиса для вычисления функционального интеграла методом Монте-Карло

Алгоритм Метрополиса для вычисления функциональных интегралов методом Монте-Карло требует знание части матрицы плотности, соответствующей определенной точке q_i . Обсуждение метода и обоснование применимости приведено в работе [21]. Для гамильтониана (1.37) в одномерном случае соответствующая часть матрицы плотности имеет вид

$$\pi(q_i) = \frac{m^2 K_1 \left[m\tau \sqrt{1 + \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\tau} \right)^2} \right] K_1 \left[m\tau \sqrt{1 + \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\tau} \right)^2} \right]}{\pi^2 \sqrt{1 + \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\tau} \right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\tau} \right)^2}} e^{-\tau V(q_i)}. \quad (2.19)$$

Для вычисления функционального интеграла необходимо построить цепь Маркова для величин q_i с предельным распределением, пропорциональным $\pi(q_i)$. Вероятность перехода к новому состоянию для такой цепи Маркова удовлетворяет уравнению

$$\int dq_i \pi(q_i) P(q_i \rightarrow q'_i) = \pi(q'_i). \quad (2.20)$$

Необходимо построить цепь Маркова с предельным распределением $\pi(q)$, для этого требуется выполнение условия детального баланса

$$\pi(q_i) P(q_i \rightarrow q'_i) = \pi(q'_i) P(q'_i \rightarrow q_i). \quad (2.21)$$

Алгоритм Метрополиса позволяет построить вероятность перехода к новому состоянию следующим образом

$$P(q_i \rightarrow q'_i) = T(q_i \rightarrow q'_i) A(q_i \rightarrow q'_i), \quad (2.22)$$

где $T(q_i \rightarrow q'_i)$ имеет равномерное распределение, $A(q_i \rightarrow q'_i)$ - вероятность принятия нового состояния

$$A(q_i \rightarrow q'_i) = \min \left[1, \frac{T(q'_i \rightarrow q_i)\pi(q'_i)}{T(q_i \rightarrow q'_i)\pi(q_i)} \right]. \quad (2.23)$$

Матрица плотности в координатном представлении позволяет получить выражения средних значений для наблюдаемых величин. Выполним вычисление среднего значения кинетической энергии. Выражение для матричного элемента полной матрицы плотности запишем в виде

$$I(\tau) = \int \frac{dq_n dp_n}{2\pi} \exp \left[-\sqrt{p_n^2 + m^2}\tau - ip_n(q_{n+1} - q_n) \right], \quad (2.24)$$

где интегрирование ведется по всем промежуточным значениям координат и импульсов $n \in [1; N_t - 1]$. Выполним интегрирование по всем импульсам

$$I(\tau) = \int dq_n \frac{m\tau}{\pi\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}} K_1(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}). \quad (2.25)$$

Для вычисления среднего значения потенциальной энергии, воспользуемся следующим приемом: вычислим частную производную по параметру τ

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{p_n^2 + m^2} \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau) = \\ &= -\int \frac{dq_n m}{\pi} \left[\frac{K_1(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2})}{\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}} + \right. \\ &+ \tau K_1(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}) \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2\tau}{\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}^3} + \\ &\left. + \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}} K_1'(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}) m \frac{2\tau}{2\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}} \right] = \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
&= - \int dq_n \frac{m}{\pi} \left[\frac{(q_{n+1} - q_n)^2}{\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}^3} K_1(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\tau^2}{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2} K_1'(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}) \right]. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Для дальнейшего вычисления (2.27) применим свойство функции Макдональда

$$K_\nu'(x) = -K_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} K_\nu(x). \tag{2.28}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\langle \sqrt{p_n^2 + m^2} \rangle &= \int dq_n \frac{m\tau}{\pi\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}} K_1(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{m\tau}{\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2}} \frac{K_0(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2})}{K_1(m\sqrt{\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2})} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(q_{n+1} - q_n)^2 - \tau^2}{\tau(\tau^2 + (q_{n+1} - q_n)^2)} \right) \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Среднее значение кинетической энергии для вычисления методом Монте-Карло для функциональных интегралов имеет вид

$$\langle T(p) \rangle = \left\langle \frac{m\tau}{\sqrt{\tau^2 + (\Delta q)^2}} \frac{K_0(m\sqrt{\tau^2 + (\Delta q)^2})}{K_1(m\sqrt{\tau^2 + (\Delta q)^2})} + \frac{\tau^2 - (\Delta q)^2}{\tau(\tau^2 + (\Delta q)^2)} \right\rangle. \tag{2.30}$$

В диссертации исследуются полная, кинетическая и потенциальная энергии, а также двухточечная корреляционная функция

$$\langle E(p, q) \rangle = \langle T(p) + V(q) \rangle, \tag{2.31}$$

$$\langle q(t)q(t + n\tau) \rangle = \langle q_i q_{i+n} \rangle. \tag{2.32}$$

2.3 Релятивистский квантовый осциллятор

Гамильтониан релятивистского квантового осциллятора имеет вид

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (2.33)$$

Для проверки корректности предложенного подхода необходимо иметь аналитические выражения для наблюдаемых. Рассматриваемая задача имеет аналитические решения в пределе больших ($m^2 \gg \langle p^2 \rangle$) и малых ($m^2 \ll \langle p^2 \rangle$) масс. В задаче присутствуют всего два размерных параметра m и ω , далее будут сформулированы условия предельных переходов в терминах этих параметров.

2.3.1 Нерелятивистский предел

Рассмотрим предел больших масс $m^2 \gg \langle p^2 \rangle$. Разложим оператор кинетической энергии в ряд по малому параметру p/m

$$T(p) = \sqrt{p^2 + m^2} = m\left(1 + \frac{p^2}{2m^2} + O\left(\left(\frac{p}{m}\right)^4\right)\right) \approx m + \frac{p^2}{2m}. \quad (2.34)$$

Полный гамильтониан в пределе больших масс имеет следующий вид

$$H = m + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (2.35)$$

Для системы с гамильтонианом (2.35) известны собственные вектора (волновые функции) и собственные значения. Энергия и плотность вероятности основного состояния

$$E_0 = m + \frac{\omega}{2}, \quad (2.36)$$

$$\rho(q) = |\psi(q)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-m\omega q^2\right), \quad (2.37)$$

где $\psi(q)$ - волновая функция основного состояния. Средние значения кинетической и потенциальной энергии связаны теоремой о вириале

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right\rangle \text{ или } \langle T(p) - m \rangle = \langle V(q) \rangle, \quad (2.38)$$

тогда имеем следующие соотношения между кинетической и потенциальной энергиями

$$\langle T(p) - m \rangle = \frac{1}{2} (E_0 - m) = \langle V(q) \rangle = \frac{\omega}{4}. \quad (2.39)$$

Двухточечная корреляционная функция в нерелятивистском пределе

$$\langle q(t)q(t+s) \rangle = \frac{1}{2m\omega} e^{-\omega|s|}. \quad (2.40)$$

Результаты численного расчета значений энергии и корреляционной функции методом Монте-Карло для функциональных интегралов системы с гамильтонианом (2.33) в пределе больших масс можно сравнить с аналитическими выражениями наблюдаемых (2.36), (2.39) и (2.40). Сформулируем условие перехода к пределу больших масс в терминах m и ω . Согласно (2.39), $\langle p^2 \rangle \sim m\omega$. Тогда условие $m^2 \gg \langle p^2 \rangle$ приводится к виду $m \gg \omega$.

2.3.2 Ультрарелятивистский предел

Рассмотрим предел малых масс $m^2 \ll \langle p^2 \rangle$. Разложим оператор кинетической энергии по новому малому параметру m/p

$$T(p) = \sqrt{p^2 + m^2} = |p| \left(1 + \frac{m^2}{2p^2} + O\left(\left(\frac{m}{p}\right)^4\right) \right) \approx |p|. \quad (2.41)$$

Полный гамильтониан в ультрарелятивистском пределе имеет вид

$$H = |p| + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2. \quad (2.42)$$

Квантово-механическая задача с гамильтонианом (2.42) может быть решена в импульсном представлении. Энергия и плотность вероятности основного состояния имеют вид

$$E_0 = \lambda_0(m\omega^2)^{1/3}, \quad (2.43)$$

$$\rho(q) = \frac{\int \int \frac{dpdk}{(2\pi)^2} \text{Ai}\left(\left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{1/3}(|p| - \lambda_0)\right) \text{Ai}\left(\left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{1/3}(|k| - \lambda_0)\right) e^{-i(p-k)q}}{\int \frac{dp}{2\pi} \text{Ai}^2\left(\left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{1/3}(|p| - \lambda_0)\right)}, \quad (2.44)$$

где Ai - функция Эйри первого порядка, λ_0 - коэффициент пропорциональности, значение которого определяется первым нулем производной функции Эйри $\text{Ai}'(-\alpha) = 0$, $\alpha = 2^{1/3}\lambda_0 \approx 1.018792\dots$

Теорема о вириале для гамильтониана (2.42) дает соотношение между кинетической и потенциальной энергиями

$$\langle T(p) \rangle = 2\langle V(q) \rangle = \frac{2\lambda_0}{3}(m\omega^2)^{1/3}. \quad (2.45)$$

Двухточечная корреляционная функция имеет вид

$$\langle q(t)q(t+s) \rangle = \frac{2\lambda_0}{3(m\omega^2)^{2/3}} e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)(m\omega^2)^{1/3}|s|}. \quad (2.46)$$

Получим условие применимости ультрарелятивистского предела. Для этого сравним среднее значение оператора p^2 и квадрата среднего значения оператора $|p|$

$$\frac{\langle |p| \rangle^2}{\langle p^2 \rangle} = \frac{20\alpha^3}{3(3 + 8\alpha^3)} \approx 0.615175\dots \quad (2.47)$$

Так как величины $\langle |p| \rangle^2$ и $\langle p^2 \rangle$ одного порядка, то получаем соотношение между параметрами m и ω

$$\frac{m^2}{\langle p^2 \rangle} \sim \left(\frac{m}{\omega}\right)^{4/3} \ll 1. \quad (2.48)$$

Окончательным условием применимости ультрарелятивистского предела является условие $m \ll \omega$.

Результаты численного расчета значений энергии и корреляционной функции

методом Монте-Карло для функциональных интегралов системы с гамильтонианом (2.33) в пределе малых масс можно сравнить с аналитическими выражениями наблюдаемых (2.43), (2.45) и (2.46).

2.4 Результаты численного моделирования

Приведем результаты численного моделирования методом Монте-Карло для функциональных интегралов в предельных и общем случаях. Для подтверждения корректности предложенного метода расчета производится аппроксимация полученных результатов аналитическими зависимостями. Погрешность метода Монте-Карло является стохастической погрешностью, таким образом, увеличивая статистику, можно добиться уменьшения погрешности, но вместе с этим потребуется больше времени для вычислений.

2.4.1 Нерелятивистский предел

Необходимым условием переходом к нерелятивистскому пределу является соотношение $m \gg \omega$ между массой частицы и частотой. В вычислениях использовалось соотношение $m/\omega \geq 100$.

Так как нам известно значение корреляционной функции в нерелятивистском пределе, то мы можем аппроксимировать полученные результаты функцией известного вида. Выполнена аппроксимация зависимости $\langle q(t)q(t+s) \rangle$ от s функцией вида

$$\langle q(t)q(t+s) \rangle = ae^{-b|s|}. \quad (2.49)$$

Константы a и b имеют теоретические предсказания из (2.40)

$$a = \frac{1}{2m\omega}, \quad (2.50)$$

$$b = \omega. \quad (2.51)$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 2.1. Результаты ап-

проксимации приведены в таблице 2.1.

Результаты численного моделирования энергии представлены на рис. 2.2. Выполнена аппроксимация значений энергии константами

$$\langle T(p) \rangle = a, \quad (2.52)$$

$$\langle E(p, q) \rangle = b. \quad (2.53)$$

Теоретический предсказания значений параметров a и b

$$\langle T(p) \rangle = \frac{\omega}{4}, \quad (2.54)$$

$$\langle E(p, q) \rangle = \frac{\omega}{2}, \quad (2.55)$$

Результаты аппроксимации представлены в таблице 2.2

2.4.2 Ультрарелятивистский предел

Переход к ультрарелятивистскому пределу происходит при $m \ll \omega$. При численном моделировании рассматривалось соотношение $\omega/m \geq 1000$. Для корреляционной функции известно аналитическое выражение в ультрарелятивистском пределе (2.46). Аппроксимируем результаты численного моделирования экспоненциальной зависимостью

$$\langle q(t)q(t+s) \rangle = ae^{-b|s|}. \quad (2.56)$$

Результаты моделирования представлены на рис. 2.3. Результаты аппроксимации представлены в таблице 2.3

Используя аналитические выражения для значений энергии в ультрарелятивистском пределе, подберем функции для аппроксимации в следующем виде

$$\langle T(p) \rangle = \frac{2}{3}a(m\omega^2)^{1/3}, \quad (2.57)$$

$$\langle V(q) \rangle = \frac{1}{3}b(m\omega^2)^{1/3}, \quad (2.58)$$

$$\langle E(p, q) \rangle = c(m\omega^2)^{1/3}. \quad (2.59)$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 2.4. Результаты аппроксимации представлены в таблице 2.4.

2.4.3 Вычисления в общем случае

Проведем вычисления полной энергии E основного состояния гамильтониана (2.33) в общем случае. Фиксируем значение частоты $\omega = 1$, значение массы будет меняться в диапазоне от $m \in [e^{-6}; e^{10}]$, где e - экспонента. Для наглядности представления результатов удобно перейти к логарифмическому масштабу. Построим зависимость $\ln(E/m - 1)$ от $\ln(\omega/m)$, где $\ln(x)$ - натуральный логарифм. В нерелятивистском пределе зависимость $y = \ln(E/m - 1)$ от $x = \ln(\omega/m)$ имеет вид

$$y = \ln(1/2) + x. \quad (2.60)$$

В ультрарелятивистском случае эта зависимость также линейна

$$y = \ln(\lambda_0) + \frac{2}{3}x. \quad (2.61)$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 2.5.

Приведенные результаты моделирования двухточечной корреляционной функции и энергии для модели релятивистского осциллятора в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах согласуются с теоретическими предсказаниями в рамках двух и более стандартных отклонений. Для наглядности представлены результаты моделирования энергии в общем случае, позволяющие сделать вывод о гладком переходе системы от нерелятивистского к ультрарелятивистскому пределам.

2.5 Заключительные замечания к главе 2

Построенное обобщение метода Монте-Карло для вычисления функциональных интегралов в релятивистской квантовой механике позволяет исследовать свойства релятивистских квантовых систем с мгновенным взаимодействием между частицами. Условие мгновенного взаимодействия дает возможность исключить проблемы вычисления поправок многочастичного квантово-механического взаимодействия. Существует множество приложений в релятивистской квантовой химии и физике конденсированного состояния.

Для доказательства корректности предложенного метода исследована одномерная система с квадратичным потенциалом – релятивистский гармонический осциллятор. Данная система выбрана в силу того, что она является точно решаемой в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах. Сравнение численных результатов моделирования и аппроксимации известными аналитическими зависимостями доказывает корректность предложенного обобщения.

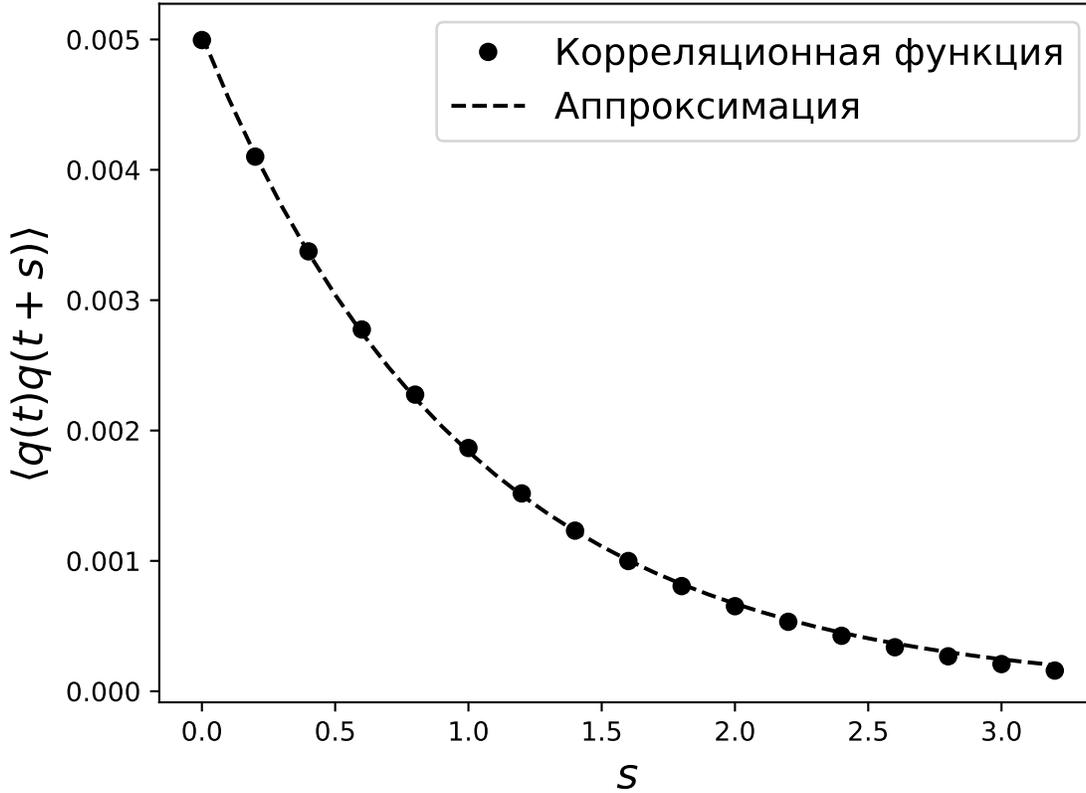


Рис. 2.1: Результаты численного моделирования двухточечной корреляционной функции в нерелятивистском пределе при значении параметров $m = 100$, $\omega = 1$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$.

Аппроксимация корреляционной функции $\langle q(t)q(t+s) \rangle = ae^{-b s }$		
	Теоретическое предсказание	Аппроксимация
a	$500 \cdot 10^{-5}$	$(503.0 \pm 1.4) \cdot 10^{-5}$
b	1	1.006 ± 0.004

Таблица 2.1: Результаты аппроксимации двухточечной корреляционной функции в нерелятивистском пределе при $m = 100$, $\omega = 1$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$

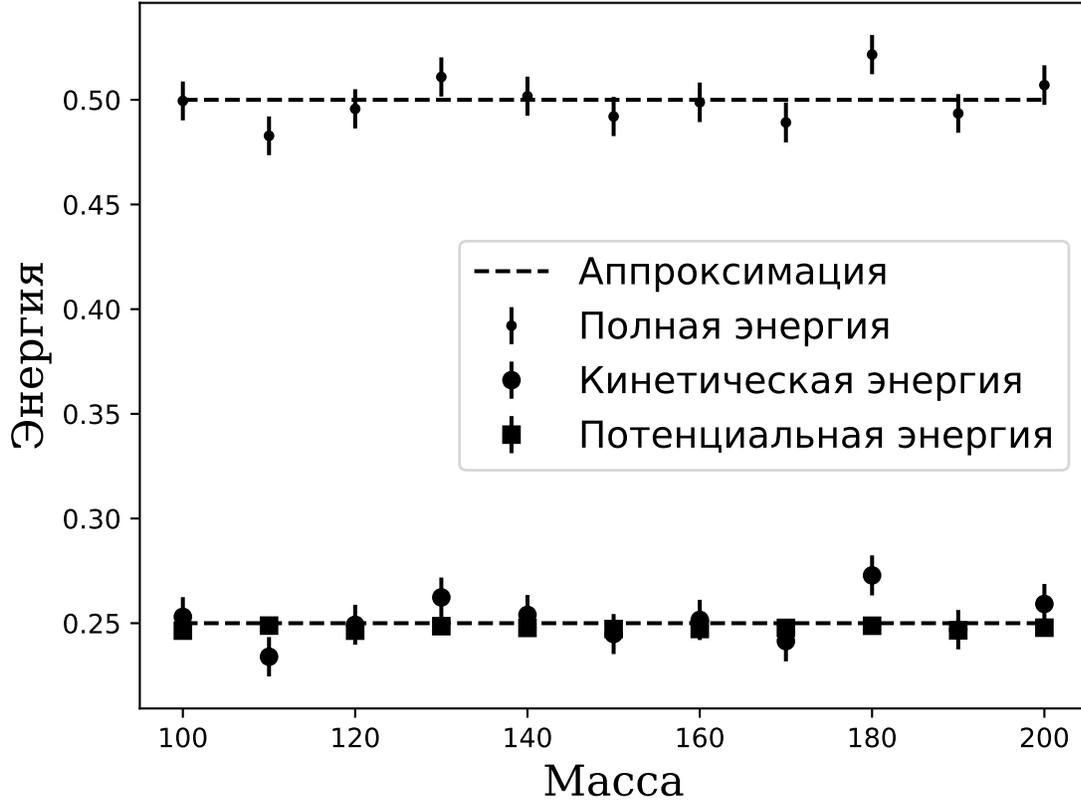


Рис. 2.2: Результаты численного моделирования энергии в нерелятивистском пределе при значении параметров $m \in [100; 200]$, $\omega = 1$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$.

Аппроксимация энергии $\langle V \rangle = a$, $\langle E \rangle = b$		
	Теоретическое предсказание	Аппроксимация
a	0.25	0.251 ± 0.003
b	0.5	0.498 ± 0.004

Таблица 2.2: Результаты аппроксимации энергии в нерелятивистском пределе при $m \in [100; 200]$, $\omega = 1$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$

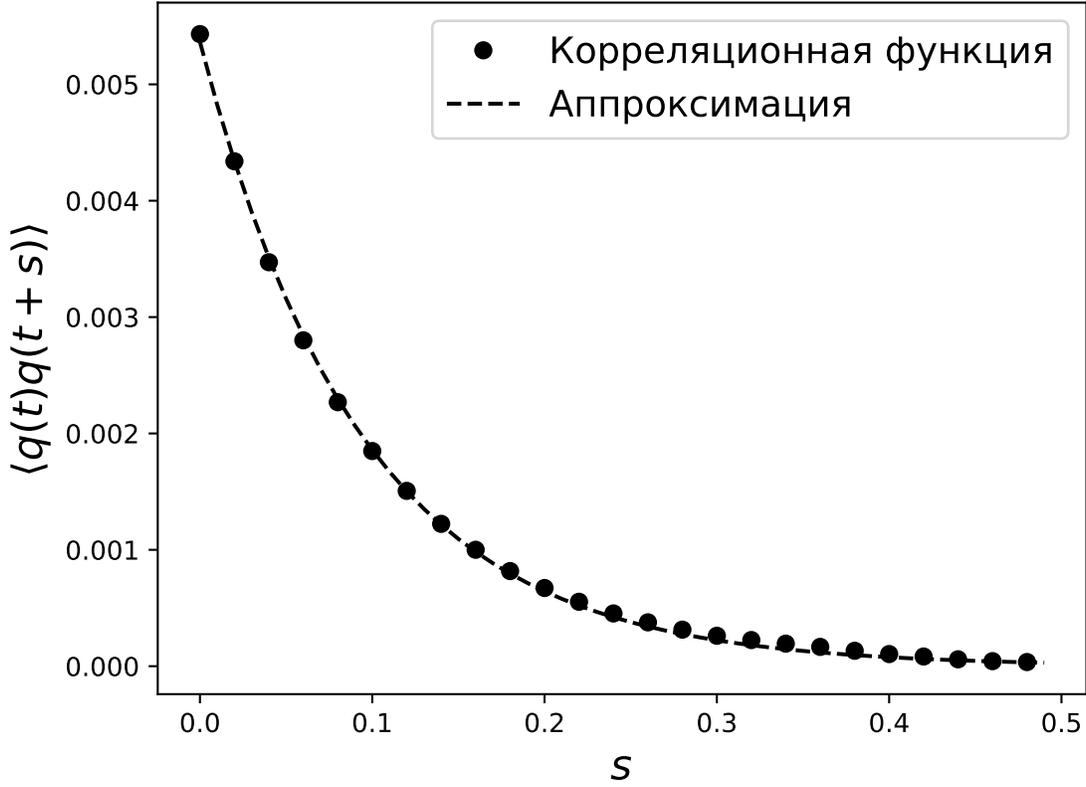


Рис. 2.3: Результаты численного моделирования корреляционной функции в ультрарелятивистском пределе при значении параметров $m = 0.1$, $\omega = 100$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$.

Аппроксимация корреляционной функции $\langle q(t)q(t+s) \rangle = ae^{-b s }$		
	Теоретическое предсказание	Аппроксимация
a	$(539. \dots) \cdot 10^{-5}$	$(536.5 \pm 1.8) \cdot 10^{-5}$
b	$10.47 \dots$	10.60 ± 0.05

Таблица 2.3: Результаты аппроксимации двухточечной корреляционной функции в ультрарелятивистском пределе при $m = 0.1$, $\omega = 100$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$

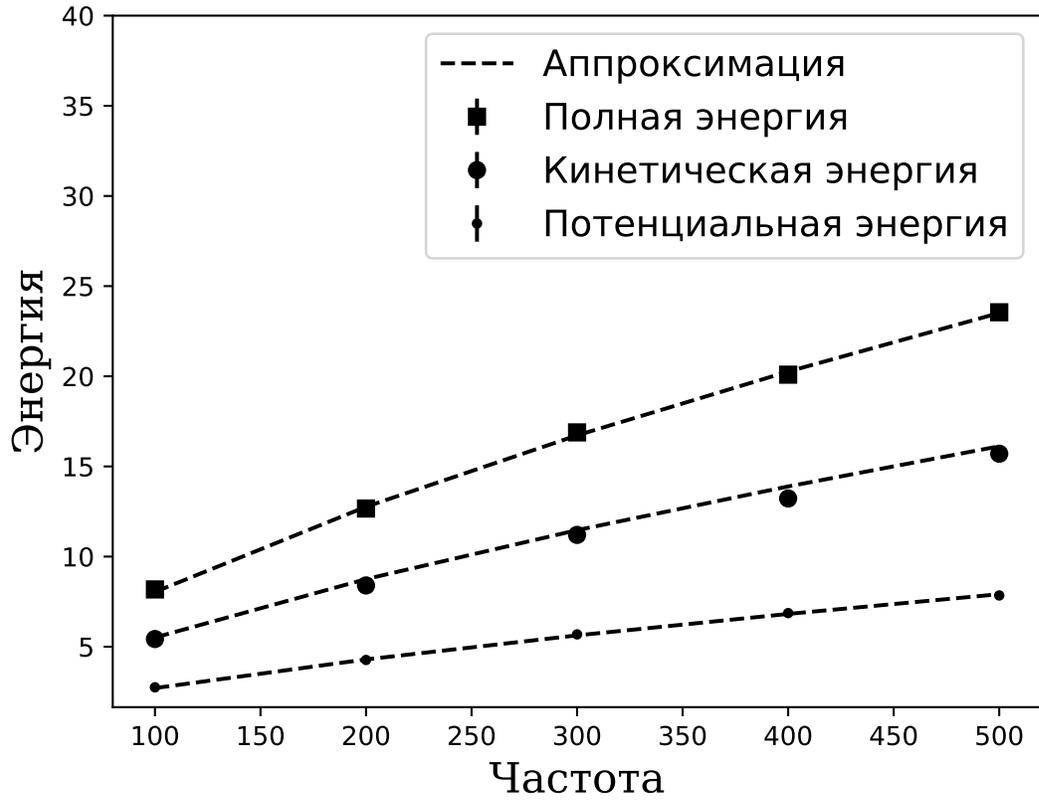


Рис. 2.4: Результаты численного моделирования энергии в ультррелятивистском пределе при значении параметров $m = 0.1$, $\omega \in [100; 500]$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$.

Аппроксимация энергии $\langle V \rangle = \frac{1}{3}a(m\omega^2)^{1/3}$, $\langle E \rangle = b(m\omega^2)^{1/3}$.		
	Теоретическое предсказание	Аппроксимация
a	0.8086 ...	0.812 ± 0.004
b	0.8086 ...	0.804 ± 0.005

Таблица 2.4: Результаты аппроксимации энергии в ультррелятивистском пределе при $m = 0.1$, $\omega = 100$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$

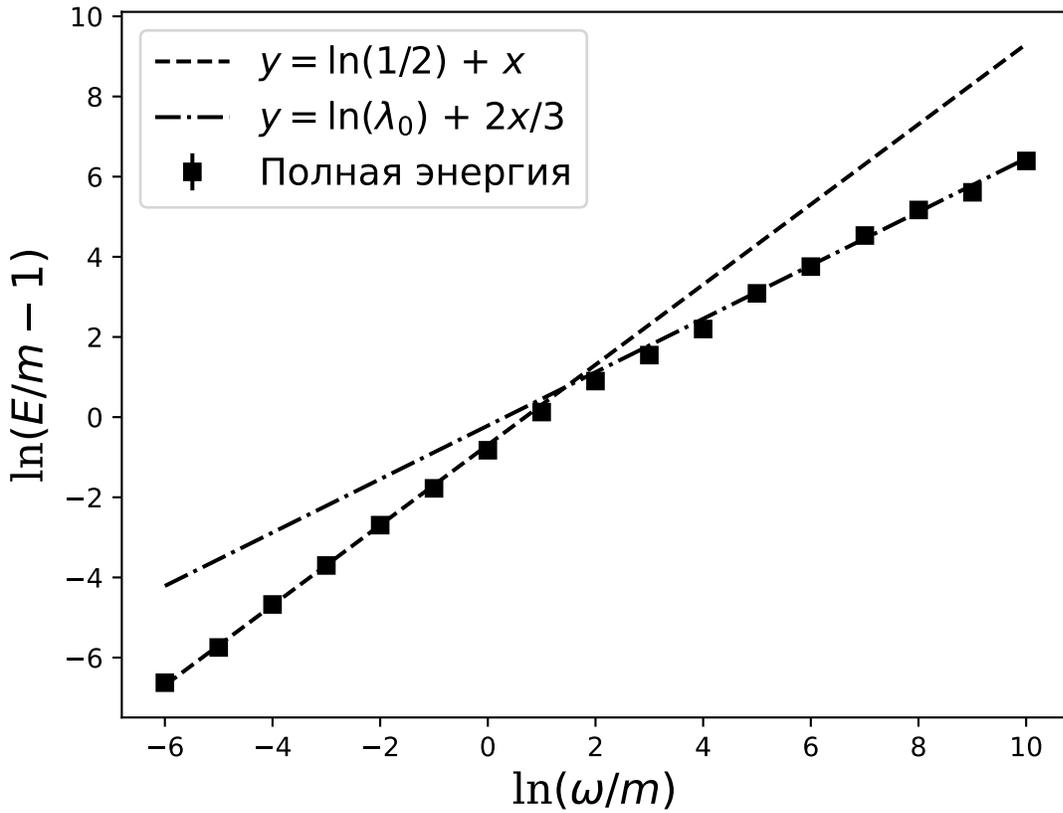


Рис. 2.5: Результаты численного моделирования энергии в общем случае при значении параметров $m \in [e^{-6}; e^{10}]$, $\omega = 1$, $N_t = 100$, $\tau = 0.1$.

Глава 3

Сходящиеся ряды для моделей с полиномиальным взаимодействием, определенных на конечной решетке

Ряды теории возмущений являются асимптотическими из-за изменения порядка суммирования и интегрирования при построении пертурбативного разложения, нарушающего условия теоремы Фубини. Тем не менее, эту проблему можно избежать. Например, это может быть сделано путем соответствующей регуляризации исходного интеграла. Регуляризация путем отсечения больших флуктуаций полей в моделях на решетке была предложена в работах [43], [44], [62], [63]. В работах [15], [16], [17], [18], [19] специальное интегральное преобразование части действия с взаимодействием и последующая регуляризация были применены для построения сходящейся теории возмущений для моделей на решетке и интегралов по траекториям с гауссовой мерой, определяемой следом операторов. Метод, осно-

ванный на модификации силы взаимодействия за счет применения представления промежуточного поля и на последующем использовании лесной/древесной формулы [64], [65], был разработан в работах [66], [67], [68], [69], [70]. Отметим, что вычисления с использованием всех этих методов очень сложны.

Альтернативный подход к построению сходящихся пертурбативных рядов в скалярных теориях поля, основанный на изменении исходного гауссовского приближения на некоторую теорию взаимодействия, был предложен в работах [49], [50], [51]. Позже независимо разработанные и сходные идеи стали основой методов вариационной теории возмущений [53], [54], [71]. В [52] подход [49], [50], [51] был расширен и построено разложение для ангармонического осциллятора с сильной связью. В работе [55] были выведены уравнения ренормгруппы, согласующиеся с методом [49]. Критические показатели φ^4 - модели, полученные в рамках последних ренормгрупповых уравнений, находятся в тесном согласии с численными результатами и соответствующими экспериментальными измерениями для перехода жидкость-газ, He_4 и бинарных систем [55]. Однако строгое математическое доказательство сходимости разложений [49], [50], [51], [55] все еще отсутствует.

Основное предположение в [49], [50], [51], [53], [54], [55], связано с применимостью размерной регуляризации [56], которая дает возможность работать с пределом бесконечного числа степеней свободы при размерных преобразованиях полей. Тем не менее, ограничение конечным количеством степеней свободы позволяет математически строго выполнить вывод сходящегося ряда, аналогичного [50], [51]. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [57], где рассматривалась одномерная ϕ^4 -модель на решетке. Численные расчеты в рамках сходящегося ряда в [57] показали идеальное соответствие с результатами, полученными при моделировании методом Монте-Карло для решетки с объемом $V = 2$, и продемонстрировали медленную сходимость к правильным ответам даже для немного больших решеток (с $V = 4$ и $V = 8$ объемами решетки).

В данной главе выполнено исследование метода сходящихся рядов и представлено решение проблемы медленной сходимости. Приведены основные выводы на примере модели ϕ^4 , определенной на решетке, и выполнены обобщения, когда это

необходимо. Доказано, что сходящийся ряд может быть строго построен для любой модели скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенной на конечной решетке, и что ряд выражается как повторное суммирование ряда теории возмущений. Показано, что для всех петель стандартной теории возмущений метод сходящихся рядов обладает внутренней симметрией, обеспечивающей возможность введения вариационного параметра. Свобода в выборе вариационного параметра позволяет получать численные результаты, которые согласуются с данными Монте-Карло. Однако сходимость и непertурбативная корректность построенного сходящегося ряда, модифицированного вариационным параметром, априори не очевидны. Далее обозначим последний ряд как вариационный (ВР). Чтобы исследовать сходимость вариационного ряда, рассмотрены две регуляризации модели ϕ^4 , определенной на конечной решетке. Первая, η -регуляризация, является естественным продолжением построения вариационного ряда и дает наводящие на размышления аргументы о сходимости ВР. Вторая, γ -регуляризация, также основана на математических структурах, используемых в ВР. Доказано, что γ -регуляризованная модель аппроксимирует исходную ϕ^4 -модель с любой произвольной точностью и что функции Грина γ -регуляризованной модели могут быть вычислены с помощью вариационного ряда, который в данном случае сходится. Продемонстрирована непertурбативная независимость от вариационного параметра ВР, когда γ -регуляризация убрана. Используя это свойство независимости, предложен способ вычислений в пределе бесконечного объема (данная проблема подробно рассмотрена в главе 4). Подытоживая свойства метода построения сходящихся рядов и ВР с регуляризацией, утверждается сходимость вариационного ряда. Изучена применимость метода сходящихся рядов и ВР для различных объемов решетки и исследована зависимость от вариационных параметров и параметров регуляризации, вычислен оператор $\langle \phi_n^2 \rangle$ модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на конечной решетке. Результаты сравниваются с моделированием методом Монте-Карло и суммированием по Борелю.

Глава организована следующим образом. В разделе 3.1 строится сходящийся

ряд для моделей скалярного поля, определенных на конечной решетке, с полиномиальными взаимодействиями. Вводится вариационный ряд и обсуждаются его пертурбативные свойства в разделе 3.2. Чтобы исследовать нептурбативные аспекты ВР, изучены регуляризованные модели, определенные на решетке, в разделе 3.3. Результаты численных вычислений представлены в разделе 3.4.

3.1 Построение сходящегося ряда

Начнем с построения сходящегося ряда для модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на конечной решетке. Модель определяется действием:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{V-1} \phi_m K_{mn} \phi_n + \frac{\lambda}{4!} \sum_{n=0}^{V-1} \phi_n^4, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{V-1} \phi_m K_{mn} \phi_n = \sum_{n=0}^{V-1} \left[\frac{1}{2} M^2 \phi_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d (\phi_{n+\hat{\mu}} + \phi_{n-\hat{\mu}} - 2\phi_n) \phi_n \right] \quad (3.2)$$

где M - параметр массы, λ - константа связи, V - объем решетки, индексы m и n обозначают узлы решетки, $d = 1, 2$ - размерность решетки, индекс μ пробегает по всем пространственным координатам, а $\hat{\mu}$ обозначает единичный вектор в соответствующем направлении. Предполагаются периодические граничные условия во всех возможных направлениях.

Без потери общности, в качестве примера произвольной функции Грина, рассмотрим двухточечную функцию Грина (пропагатор). Пропагатор, нормированный на статистическую функцию свободной теории, определяется следующим выражением

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \int [d\phi] \phi_i \phi_j \exp\{-S[\phi]\}, \quad (3.3)$$

где $\int [d\phi] = \frac{1}{Z_0} \prod_n \int d\phi_n$ и

$$Z_0 = \prod_n \int d\phi_n e^{-\frac{1}{2} \sum_{l,m} \phi_l K_{lm} \phi_m} \quad (3.4)$$

является статистической функцией свободной теории. Следуя [49], [51], разделим действие на новую невозмущенную часть $N[\phi]$ и возмущение: $S[\phi] = N[\phi] + (S[\phi] - N[\phi])$. Для дальнейших вычислений удобно переписать последнее выражение следующим образом:

$$S_\eta[\phi] = N[\phi] + \eta(S[\phi] - N[\phi]) \quad (3.5)$$

где $\eta \leq 1$ – параметр, обозначающий порядок нового пертурбативного разложения. Параметр η также будет использоваться в разделе 3.3.1 для регуляризации. В текущем разделе получим формулы, содержащие η , имея в виду, что исходная модель соответствует $\eta = 1$. Тогда пропагатор (3.5) можно записать в виде

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \int [d\phi] \phi_i \phi_j e^{-N[\phi]} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\eta^l (N[\phi] - S[\phi])^l}{l!} \quad (3.6)$$

Если

$$N[\phi] \geq S[\phi], \quad (3.7)$$

то изменение порядка суммирования и интегрирования в (3.6) приводит к абсолютно сходящемуся ряду

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \langle \phi_i \phi_j \rangle_l \quad (3.8)$$

со слагаемыми, заданными в виде:

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_l = \frac{\eta^l}{l!} \int [d\phi] \phi_i \phi_j (N[\phi] - S[\phi])^l e^{-N[\phi]}. \quad (3.9)$$

Действительно, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \langle \phi_i \phi_j \rangle_l \right| &\leq \sum_{l=0}^{\infty} |\langle \phi_i \phi_j \rangle_l| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\eta^l}{l!} \int [d\phi] |\phi_i \phi_j| (N[\phi] - S[\phi])^l e^{-N[\phi]} \\ &= \int [d\phi] |\phi_i \phi_j| e^{-S_\eta[\phi]} < \infty, \quad \text{для } \eta \leq 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Существует множество способов выбрать новое начальное приближение $N[\phi]$, удо-

влетворяющее неравенству (3.7), однако необходимо выбрать такое, чтобы модель была решаемой. Выберем

$$N[\phi] = \sum_{n,m} \frac{1}{2} \phi_n K_{nm} \phi_m + \sigma \left(\sum_{n,m} \frac{1}{2} \phi_n K_{nm} \phi_m \right)^2 \quad (3.11)$$

где σ - неизвестный положительный параметр, который получается путем подстановки (3.11) в (3.7):

$$\sigma \geq \frac{\lambda}{6M^4} \quad (3.12)$$

Функции (3.9) могут быть вычислены следующим образом. Введем вспомогательное интегрирование и выполним замену $\|\phi\| \equiv \left(\frac{1}{2} \phi_n K_{nm} \phi_m \right)^{\frac{1}{2}}$ на одномерную переменную t

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_l = \frac{\eta^l}{l!} \int [d\phi] \phi_i \phi_j \int_0^\infty dt e^{-t^2 - \sigma t^4} \delta(t - \|\phi\|) \left(\sigma t^4 - \frac{\lambda}{4!} \sum_n \phi_n^4 \right)^l. \quad (3.13)$$

Переопределяя полевые переменные $\phi_n^{old} = t\phi_n$, мы получим

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_l = J_\eta(V, l) \int [d\phi] \phi_i \phi_j \delta(1 - \|\phi\|) \left(\sigma - \frac{\lambda}{4!} \sum_n \phi_n^4 \right)^l \quad (3.14)$$

где

$$J_\eta(V, l) = \frac{\eta^l}{l!} \int_0^\infty dt e^{-t^2 - \sigma t^4} t^{V+4l+1} \quad (3.15)$$

Коэффициент t^{V+4l-1} в подынтегральном выражении в $J_\eta(V, l)$ получается после переопределения меры интегрирования полей и дельта-функции. Теперь многомерная часть интеграла факторизована вспомогательным интегрированием. Применяя биномиальное разложение к скобкам $(\dots)^l$, запишем (3.14) как

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_l = J_\eta(V, l) \int [d\phi] \phi_i \phi_j \delta(1 - \|\phi\|) \sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \left(-\frac{\lambda}{4!} \sum_n \phi_n^4 \right)^k. \quad (3.16)$$

Для вычисления (3.16) мы используем следующее равенство¹

$$\int [d\phi] \phi_{n_1} \dots \phi_{n_Q} e^{-\|\phi\|^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{V+Q}{2}\right) \int [d\phi] \phi_{n_1} \dots \phi_{n_Q} \delta(1 - \|\phi\|). \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16), мы получаем

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_l = J_\eta(V, l) \sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{V+4k+2}{2}\right)} \int [d\phi] \phi_i \phi_j e^{-\|\phi\|^2} \left(-\frac{\lambda}{4!} \sum_n \phi_n^4\right)^k. \quad (3.18)$$

Обозначив k -й член ряда теории возмущений как f_k , мы перепишем (3.18) как

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_l = J_\eta(V, l) \left[\sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! f_k}{\Gamma\left(\frac{V+4k+2}{2}\right)} \right]. \quad (3.19)$$

Следовательно, каждая l -ая частичная сумма сходящегося ряда выражается как линейная комбинация первых l членов ряда теории возмущений с коэффициентами, заданными одномерными аналитически вычисляемыми интегралами, зависящими от t . Однако последний факт не означает, что сходящийся ряд теряет непертурбативные вклады от неаналитических функций, таких как $e^{-\frac{1}{\lambda}}$. Будучи разложением с негауссовым начальным приближением, оно автоматически учитывает непертурбативные вклады аналогично тому, как функция $e^{-\frac{1}{\lambda}}$ для положительной λ может быть воспроизведена из ее ряда Тейлора в окрестности точки $\lambda = 1$.

Модель ϕ^4 , определенная на конечной решетке, является суммируемой по Борелю моделью, однако результаты текущего раздела можно обобщить и на более широкий класс моделей, которые включают несуммируемые по Борелю случаи.

Утверждение Рассмотрим модель на конечной решетке, определяемую полиномиальным действием $S[\phi] = P[\phi]$ с четной старшей степенью взаимодействия $\deg(P)$. Тогда всегда возможно построить сходящийся ряд для этой модели с членами, которые могут быть выражены в виде линейных комбинаций слагаемых стандартной теории возмущений.

¹Правая часть тождества (3.17) получается из левого путем преобразований, аналогичных (3.13), (3.14).

Доказательство следует из представленной выше конструкции и из того факта, что каждый многочлен может быть ограничен как

$$|P[\phi]| \leq \text{const} \left(1 + \|\phi\|^{deg(P)}\right). \quad (3.20)$$

Более того, можно показать, что сходящийся ряд является пересуммированием ряда теории возмущений, подробнее в разделе 3.2.

Последнее утверждение демонстрирует, что вся непертурбативная физика моделей, определенных на решетке, с полиномиальными действиями может быть описана с помощью коэффициентов стандартной теории возмущений. Однако важно отметить, что это не означает, что непертурбативная информация может быть получена только из стандартного пертурбативного разложения. Дополнительные входные данные, необходимые для построения сходящегося ряда, получены из самой модели. В некотором смысле это похоже на метод возрождения (resurgent) [72], где для восстановления непертурбативных вкладов из пертурбативного ряда предполагается, что решение является функцией возрождения (resurgent function).

3.2 Вариационный ряд

Предыдущие исследования применения метода сходящихся рядов к модели ϕ^4 , определенной на конечной решетке, [57] продемонстрировали критическое замедление скорости сходимости с увеличением объема решетки V . Однако эта проблема может быть решена с помощью следующего наблюдения. Когда $\eta = 1$, явная зависимость от объема решетки V в сумме (3.8) функций (3.19) может быть заменена на $\tau = V + \alpha$, т.е.,

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} J_{\eta=1}(\tau, l) \left[\sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! f_k}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \right], \quad (3.21)$$

где $\tau > -2$, чтобы не возникало особенностей в интегралах $J_{\eta}(\tau, l)$. Это условие получено именно для пропагатора, для произвольной функции Грина n -полей оно

должно быть заменено на $\tau > -n$.

Рассмотрим доказательство (3.21) в рамках теории возмущений (непертурбативные аспекты рассматриваются в разделе 3.3). Его можно получить, изменив порядок суммирования в (3.21)

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle \approx \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} J_{\eta=1}(\tau, l) C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! f_k}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \quad (3.22)$$

где знак ' \approx ' означает только пертурбативную эквивалентность между левой и правой частями выражения. Слагаемые в последнем выражении равны нулю, когда $l < k$. Изменяя индекс суммирования на $y = l - k$, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \phi_i \phi_j \rangle &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_k \int_0^{\infty} dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2-\sigma t^4} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{C_{(y+k)}^k k! \sigma^y t^{4y}}{(y+k)!}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_k \int_0^{\infty} dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2-\sigma t^4} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\sigma^y t^{4y}}{y!}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2f_k \int_0^{\infty} dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В итоге мы получаем ряд теории возмущений. Из этого факта вытекают два важных следствия (непертурбативные аналоги этих утверждений выводятся в следующих разделах):

1) Вся сумма ряда по l в (3.21) не зависит от τ . Следовательно, τ является вариационным параметром и его значение может быть выбрано произвольно для оптимизации сходимости ряда.

2) Согласно (3.23), метод построения сходящегося ряда это метод пересуммирования. Таким образом, для вычисления связанных функций Грина (включая нормированные к полной статистической сумме, который является предметом дальнейших численных исследований) можно использовать тот факт, что в теории возмущений связанные функции получаются из полных функций Грина путем отбрасывания несвязных диаграмм Фейнмана из разложения.

3.3 Сходимость вариационного ряда

В предыдущем разделе был введен вариационный параметр τ , чтобы улучшить скорость сходимости построенного сходящегося ряда. Однако выводы из раздела 3.1 неприменимы, когда $\tau \neq V$. Доказательство сходимости ряда (3.8) основано на положительности скобок $(N[\phi] - S[\phi])^l$. Когда $\tau \neq V$, каждое слагаемое биномиального разложения $(N[\phi] - S[\phi])^l$ преобразуется по-разному при изменении τ , и положительность скобок $(N[\phi] - S[\phi])^l$ может быть потеряна.

Например, это имеет место для модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на решетке из одного узла, при $\tau = 0$. В разделе 3.2 доказана пертурбативную независимость от τ общей суммы ряда (3.21). Нельзя априори исключать возможность того, что в (3.21) все еще сохраняется некоторая неаналитическая зависимость от τ при $\eta = 1$, которая дает нулевой вклад в ряд теории возмущений. Метод для оценки связанных функций Грина, предложенный в предыдущем разделе, также основан только на аргументах стандартной теории возмущений.

В этом разделе изучается предложенный метод построения сходящихся рядов с пертурбативной точки зрения. Для этого исследуются свойства сходимости вариационных разложений, построенных для модели ϕ^4 , определенной на конечной решетке, с двумя различными регуляризациями. Первая – это η -регуляризация, и она достигается путем рассмотрения (3.5) при $0 < \eta < 1$. Вторая, γ -регуляризация, достигается путем введения дополнительного члена, пропорционального $\|\phi\|^6$, в действие (3.1).

3.3.1 Сходимость вариационного ряда в зависимости от η и

τ

Изучим сходимость ряда для полного пропагатора, полученного из (3.21), рассмотрев его при $\eta \leq 1$

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} J_{\eta}(\tau, l) \left[\sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! f_k}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \right]. \quad (3.24)$$

Асимптотика членов ряда теории возмущений в квантовых теориях поля и моделях, определенных на решетке, для связанных и полных корреляционных функций имеет схожий вид [10], [73], [74]

$$f_k \sim (-1)^k \sqrt{2\pi} e \left(\frac{a}{e}\right)^k k^{k+b_0+1/2} \quad (3.25)$$

где $a, b_0 \in \mathbb{R}$ – некоторые константы. Верхняя граница для ряда (3.24) может быть получена как

$$\begin{aligned} |\langle \phi_i \phi_j \rangle| &\leq \sum_{l=0}^{\infty} |J_\eta(\tau, l)| \left[\sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! |f_k|}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \int_0^\infty dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2 - \sigma(1-|\eta|)t^4}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} |f_k| |\eta|^k. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Коэффициенты перед $|f_k|$ в (3.26) при больших k ведут себя следующим образом

$$2^{1/2-2\beta} \sigma_\eta^{-\beta} k^{-k} \left(\frac{e|\eta|}{4\sigma_\eta}\right)^k, \quad (3.27)$$

где $\beta = (\tau + 2)/4$ и $\sigma_\eta = \sigma(1 - |\eta|)$. Следовательно, граница (3.26) является сходящейся, при $|\eta| < \eta_* = \frac{4\sigma}{|a|+4\sigma}$, независимо от значения τ . При $\tau = V$, ряд (3.24) сходится для $\eta \leq 1$ согласно оценке (3.10). Граница (3.26) имеет конечный радиус сходимости в терминах η для любого $\tau > -2$, включая, например, $\tau = 0$. На Рис. 3.1 показана область параметров τ и η , для которых сходимость ряда (3.24) гарантируется соотношениями (3.26) и (3.10).

Сходимость ряда (3.24) лучше, чем сходимость (3.26), из-за сокращений слагаемых в внутренних суммах по индексу k в (3.24). Следовательно, может оказаться, что ряд (3.24) сходится для $\tau > -2$ и $\eta = 1$. Чтобы подтвердить такую возможность, давайте рассмотрим пример ряда с асимптотикой вида (3.25)

$$h_k = (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)}{2\Gamma(k+1)} u^k, \quad u > 0. \quad (3.28)$$

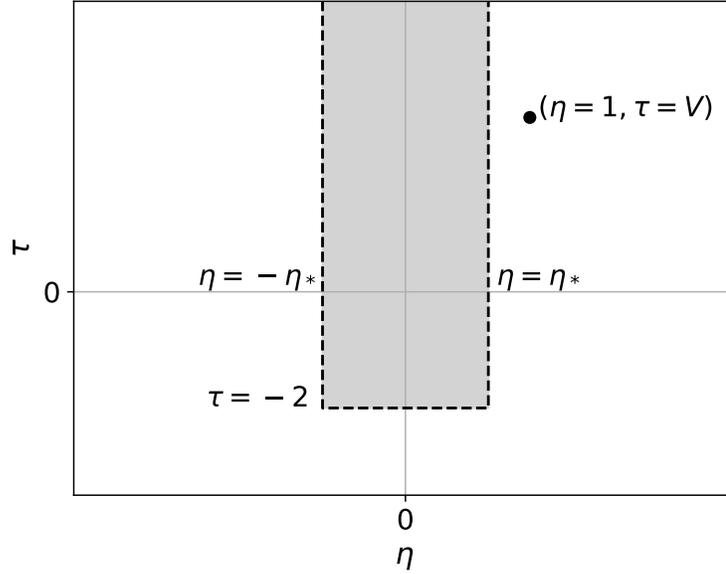


Рис. 3.1: Сходимость ряда (3.24) в полуполосе $-\eta_* < \eta < \eta_*$, $\tau > -2$ обеспечивается оценкой (3.26). Сходимость при $\tau = V$ и $\eta \leq 1$ следует из оценки (3.10).

При $\eta = 1$ подстановка этих коэффициентов в разложение (3.26) получается расходящийся ряд. Напротив, сумма ряда в (3.24) в этом случае может быть ограничена

$$\int_0^\infty dt t^{\tau+1} e^{-t^2 - \sigma t^4 + |\sigma - u| t^4} < \infty \quad (3.29)$$

Следовательно, ряд (3.28), пересуммированный в соответствии с (3.24), является сходящимся при $|\sigma - u| < \sigma$.

3.3.2 γ -Регуляризация

Введение η -регуляризации приводит к дополнительному уменьшению веса Больцмана на решетке при больших флуктуациях полей ϕ_n . Это приводит к уменьшению коэффициентов ряда теории возмущений и последующей сходимости ряда (3.24) при $|\eta| < \eta_*$. Однако дополнительное затухание недостаточно сильное, чтобы обеспечить сходимость для $\eta_* \leq \eta < 1$, что требуется, поскольку $\eta = 1$ соответствует исходной модели. Введем альтернативную регуляризацию, дающую более сильное исчезновение больших флуктуаций полей. Рассмотрим регуляризованную модель

ϕ^4 , определяемую действием на конечной решетке

$$S_\gamma[\phi] = S[\phi] + \gamma\|\phi\|^6. \quad (3.30)$$

Когда $\gamma = 0$, действие S_γ совпадает с действием модели ϕ^4 (3.1). Для модели, определенной (3.30), можно построить два связанных разложения. Рассмотрим их на примере пропагатора. Первое разложение аналогично ряду теории возмущений и получается путем разложения части взаимодействия исходной модели ϕ^4 в ряд Тейлора

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_\gamma = \sum_k \int [d\phi] \phi_i \phi_j e^{-\|\phi\|^2 - \gamma\|\phi\|^6} \frac{\left(-\frac{\lambda}{4!} \sum_n \phi_n^4\right)^k}{k!}. \quad (3.31)$$

Переписав (3.31) в терминах гауссовых интегралов аналогично разделу 3.1 и введя зависимость от τ , мы получим

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \int_0^{\infty} dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2 - \gamma t^6}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} f_k \quad (3.32)$$

Второе разложение представляет собой вариационный ряд, аналогичный (3.24). Чтобы получить его, мы разделим действие следующим образом

$$S_\gamma[\phi] = (N[\phi] + \gamma\|\phi\|^6) + (S[\phi] - N[\phi]) \quad (3.33)$$

где $(N[\phi] + \gamma\|\phi\|^6)$ рассматривается как начальное приближение. Тогда, аналогично предыдущим выводам, мы имеем

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_\gamma = \sum_{l=0}^{\infty} J_\gamma(\tau, l) \left[\sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! f_k}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \right] \quad (3.34)$$

где

$$J_\gamma(\tau, l) = \frac{1}{l!} \int_0^{\infty} dt e^{-t^2 - \sigma t^4 - \gamma t^6} t^{\tau+4l-1} \quad (3.35)$$

Ряд (3.32) может быть получен из ряда (3.34) путем изменения порядка суммирования. Следовательно, если оба этих ряда сходятся абсолютно, они сходятся к

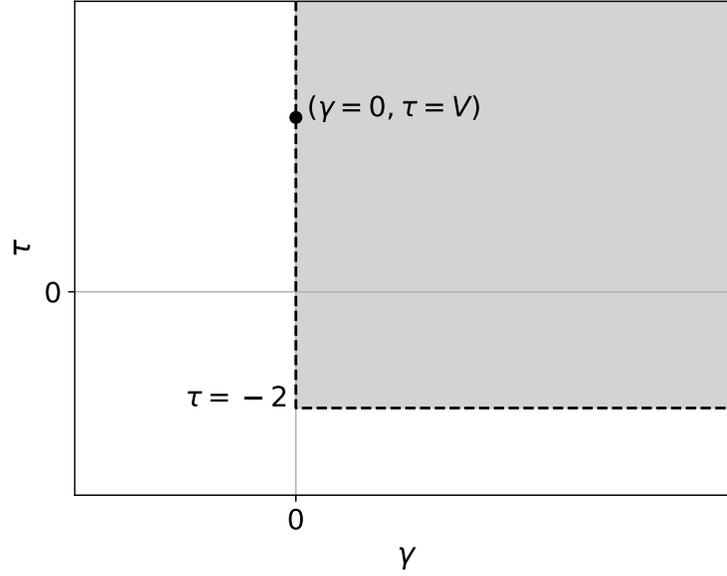


Рис. 3.2: В отмеченной области сходимость обоих рядов (3.32) и (3.34) получается благодаря ненулевому значению γ . При $\gamma = 0$ и $\tau = V$, как следует из оценки (3.10), сходящимся является только ряд (3.34).

одной и той же сумме. Ряды (3.32) и (3.34) могут быть ограничены формулой

$$\begin{aligned}
 \left| \langle \phi_i \phi_j \rangle_\gamma \right| &\leq \sum_{l=0}^{\infty} |J_\gamma(\tau, l)| \left[\sum_{k=0}^l C_l^k \sigma^{l-k} \frac{2k! |f_k|}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \int_0^\infty dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2-\gamma t^6}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} |f_k|.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

При больших k коэффициенты при $|f_k|$ в ведущем порядке имеют вид

$$3(2\sqrt{3})^{-1-4\beta/3} \gamma^{-2\beta/3} k^{-4\beta/3} (12e^2\gamma)^{-2k/3} k^{-4k/3} \tag{3.37}$$

с $\beta = (\tau + 2)/4$. Граница (3.36) сходится для любого $\tau > -2$, когда $\gamma > 0$. На Рис. 3.2 изображена область параметров γ и τ , для которых ряды (3.32) и (3.34) сходятся.

Аналогично случаю η -регуляризации, сходимость (3.34) лучше, чем у ряда (3.32) и границы (3.36).

3.3.3 Непертурбативная независимость от τ и непрерывность γ -регуляризации

Покажем, что для любого $\tau > -2$ существуют такие $\gamma_* \in \mathbb{R}_+$ и $K(\gamma_*) \in \mathbb{N}$, что можно построить сходящийся ряд (3.32), который аппроксимирует пропагатор решеточной ϕ^4 -модели с произвольной точностью $\delta > 0$:

$$\left| \sum_{k=0}^{K(\gamma_*)} \frac{2 \int_0^\infty dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2-\gamma_* t^6}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)} f_k - \langle \phi_i \phi_j \rangle \right| < \delta. \quad (3.38)$$

Доказательство неравенства (3.38) также демонстрирует, что в пределе $\gamma \rightarrow 0$ сумма ряда (3.32) не зависит от τ непертурбативно, т.е. включает все возможные неаналитические вклады.

Поскольку при $\gamma > 0$ ряд (3.32) сходится абсолютно, в нем можно изменить порядок суммирование и интегрирование (коэффициенты f_k ряда теории возмущений выражаются в виде интегралов), это дает

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle_\gamma = \int [d\phi] \phi_i \phi_j e^{-\|\phi\|^2} \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\phi_n, \gamma, \tau) \quad (3.39)$$

где

$$h_k(\phi_n, \gamma, \tau) = \frac{\left(-\frac{\lambda}{4!} \sum_n \phi_n^4\right)^k}{k!} \frac{2 \int_0^\infty dt t^{\tau+4k+1} e^{-t^2-\gamma t^6}}{\Gamma\left(\frac{\tau+4k+2}{2}\right)}. \quad (3.40)$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\phi_n, \gamma, \tau)$ сходится быстрее, чем ряд экспоненты, и, следовательно, равномерно сходится для каждого компактного подмножества области параметров $\bar{\mathcal{A}} = \{\phi_n \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0, \tau > -2\}$. В области $\bar{\mathcal{A}}$ функции $h_k(\phi_n, \gamma, \tau)$ непрерывны по всем параметрам, следовательно, их сумма также непрерывна. При $\gamma = 0$ каждая функция $h_k(\phi_n, \gamma, \tau)$ не зависит от τ , а пропагатор (3.39) совпадает с $\langle \phi_i \phi_j \rangle$, определяемый (3.3). Следовательно, (3.39) конечно при $\gamma = 0$. Конечность (3.39) при $\gamma > 0, \tau > -2$ следует из сходимости ряда (3.32). Тогда, поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\phi_n, \gamma, \tau)$ непрерывна в $\bar{\mathcal{A}}$ и (3.39) конечна для $\gamma \geq 0, \tau > -2$, то следует,

что для любого $\tilde{\delta} > 0$ существует такая $\tilde{\gamma}$, что

$$\left| \langle \phi_i \phi_j \rangle_{\tilde{\gamma}} - \langle \phi_i \phi_j \rangle \right| < \tilde{\delta} \quad (3.41)$$

Из последнего неравенства и из сходимости ряда (3.39) получаем (3.38).

Как обсуждалось выше, ряды (3.32) и (3.34) сходятся к одним и тем же величинам, следовательно, все изложенное здесь справедливо и для (3.34).

Таким образом, непрерывность γ -регуляризации при $\gamma \rightarrow 0$, а также существование и конечность вариационного ряда с введенной γ -регуляризацией доказывают существование и конечность вариационного ряда, а также независимость суммы вариационного ряда от параметра τ .

3.3.4 Вычисление связных функций Грина

В предыдущих разделах диссертации преимущественно обсуждали построения сходящихся рядов для полных функций Грина на примере пропагатора. Производящим функционалом полных функций Грина является статистическая сумма $Z[A]$, которая является функционалом внешнего поля A . Однако термодинамические величины естественным образом выражаются в терминах связных функций Грина, заданных производными от $\log(Z[A])$ по отношению к внешнему полю A . В рамках теории возмущений показано, что связные функции Грина получаются из полных функций путем отбрасывания всех несвязных диаграмм пертурбативного разложения. Как известно из теории комбинаторных видов [75], это соотношение является гораздо более общим. Если веса производящей функции для комбинаторно взвешенного вида разложены на множители связанных компонентов вида, то логарифм этой функции задается суммой по связанным ассоциированным видам. В ряде (3.32), как и в ряде теории возмущения, несвязные диаграммы являются произведением связных, следовательно, для вычисления связных функций Грина с использованием сходящегося ряда необходимо заменить вклады f_k всех диаграмм в каждом порядке теории возмущений вкладом только из связных диаграмм \tilde{f}_k . Полученный ряд является сходящимся, поскольку асимптотика высших порядков

теории возмущений имеет сходный вид (3.25) как для полных, так и для связных функций Грина.

Заменим f_k на \tilde{f}_k в (3.34). Аналогично соотношению между (3.32) и (3.34), замена суммирования в (3.34) на сумму по \tilde{f}_k дает ряд (3.32) с f_k , измененными на \tilde{f}_k . Следовательно, ряд (3.34) с заменой f_k на \tilde{f}_k также сходится.

3.4 Результаты численного моделирования

В этом разделе представлены результаты вычислений оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$ методами сходящихся рядов и вариационного ряда, и сравнение с результатами суммирования по Борелю и численным моделированием методом Монте-Карло для функциональных интегралов. Вычисляется пропагатор $\langle \phi_i \phi_j \rangle$, но для наглядности здесь представлены только результаты вычислений для $\langle \phi_n^2 \rangle$. Показаны численные зависимости от вариационного параметра τ и параметра регуляризации γ . Все вычисления выполняются при единичной массе $M = 1$ и для констант связи $\lambda \in [0; 10]$.

Вычисления в рамках методов сходящихся/вариационных рядов содержат два основных этапа. Первый – это вычисление коэффициентов ряда теории возмущений для пропагатора $\langle \phi_i \phi_j \rangle$. Для этого связанные диаграммы модели ϕ^4 генерируются с использованием системы «GRACE» [76]. Пропагатор теории без взаимодействия получен обращением матрицы K_{mn} (3.2). Наилучшие текущие результаты в рамках ϵ -разложения в непрерывной (не на решетке) теории ϕ^4 получены в приближении с 6 петлями [77]. В диссертации также вычисляются 6 порядков ряда теории возмущений на решетке [78], поскольку разумно проверить эффективность сходящегося ряда в пределах того же порядка теории возмущений. Вторым этапом расчетов с использованием методов сходящихся рядов и вариационного ряда является пересуммирование пертурбативных результатов в соответствии с формулами (3.8), (3.19), (3.24), (3.34).

Чтобы выполнить процедуру суммирования по Борелю, используется конформное отображение для аналитического продолжения в борелевской плоскости. Конформное отображение может быть выполнено, если известен параметр a из асимп-

тотики высших порядков теории возмущений (3.25). Для оценки значений a , используются значения, представленные в [14] для непрерывной одномерной и двумерной модели ϕ^4

$$d = 1, \quad a = 1/8 \quad (3.42)$$

$$d = 2, \quad a = 1/35.102 \dots \quad (3.43)$$

Результаты, полученные на решетке объема $V = 4$ следующие. На Рис. 3.3 и 3.5 представлены результаты вычисления оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$, вычисленный с помощью метода сходящихся рядов и других методов в зависимости от числа использованных членов ряда теории возмущений (от 0 до 6 петель) при константах связи $\lambda = 0.1$ и $\lambda = 10$ соответственно. При малом значении константы связи $\lambda = 0.1$ наблюдается соответствие между всеми методами, включая теорию возмущений. Когда $\lambda = 10$, результат качественно отличается. Результат метода сходящихся рядов выходит за пределы диапазона погрешности метода Монте-Карло, но метод суммирования по Борелю согласуется с данными Монте-Карло. Значения рядов стандартной теории возмущений не представлены из-за сильного расхождения.

На рис. 3.4 и 3.6 показаны результаты, полученные с помощью вариационного ряда и других методов при константах связи $\lambda = 0,1$ и $\lambda = 10$ соответственно. Вариационный ряд демонстрирует замечательное соответствие с данными метода Монте-Карло и сходится даже быстрее, чем при суммировании по Борелю.

На рис. 3.7 и 3.8 продемонстрирована зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи λ для различных методов с $V = 4$. Вычисления, полученные с помощью вариационного ряда согласуются с результатами метода Монте-Карло с точностью до одного стандартного отклонения.

Результаты, полученные на одномерной решетке с $V = 64$, качественно аналогичны. На рис. 3.9 показаны вычисления, выполненные методом сходящихся рядов, в сравнении с другими методами. Даже при малых константах связи результаты вычисления методом сходящихся рядов не согласуются с результатами Монте-Карло. Суммирование по Борелю согласуется с данными Монте-Карло во всей области $\lambda \in [0, 10]$. Однако, результаты, полученные с помощью вариационного ряда, существенно отличаются от результатов метода сходящихся рядов. Со-

ответствующие вычисления представлены на рис. 3.10. Вариационный ряд снова соответствует данным Монте-Карло с точностью до одного стандартного отклонения!

На рис. 3.11 показана зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от λ для двумерной решетки с $V = 8 \times 8$. Результаты, полученные с помощью вариационного ряда, близки к результатам моделирования методом Монте-Карло. Сильное отклонение суммирования по Борелю может быть вызвано неточной оценкой параметра a в асимптотике высших порядков теории возмущений (3.43).

В разделе 3.3.3 доказана непрерывность ряда (3.34) относительно параметра $\gamma \geq 0$, на рис. 3.12 это продемонстрировано для $\lambda = 1$.

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ зависимость суммы (3.34) от τ должна исчезнуть. В реальных вычислениях всегда имеется только конечное количество членов ряда (3.34). На рис. 3.13 и 3.14 представлена зависимость от τ частичной суммы 6-го порядка вариационного ряда (3.24) для констант связи $\lambda = 1$ и $\lambda = 5$ соответственно. Оптимальными значениями параметра τ , соответствующее среднему значению, полученному по методу Монте-Карло, являются $\tau_{\lambda=1} \simeq -0,1$, $\tau_{\lambda=5} \simeq \{-1,62; -0,38\}$. Без сравнения с моделированием по методу Монте-Карло можно применить принцип наименьшего вклада последнего члена ряда, это дает равномерный оптимальный $\tau_\lambda \simeq -0,086$. В основной части наших вычислений мы используем $\tau = 0$, что соответствует в непрерывном пределе использованию размерной регуляризации [56].

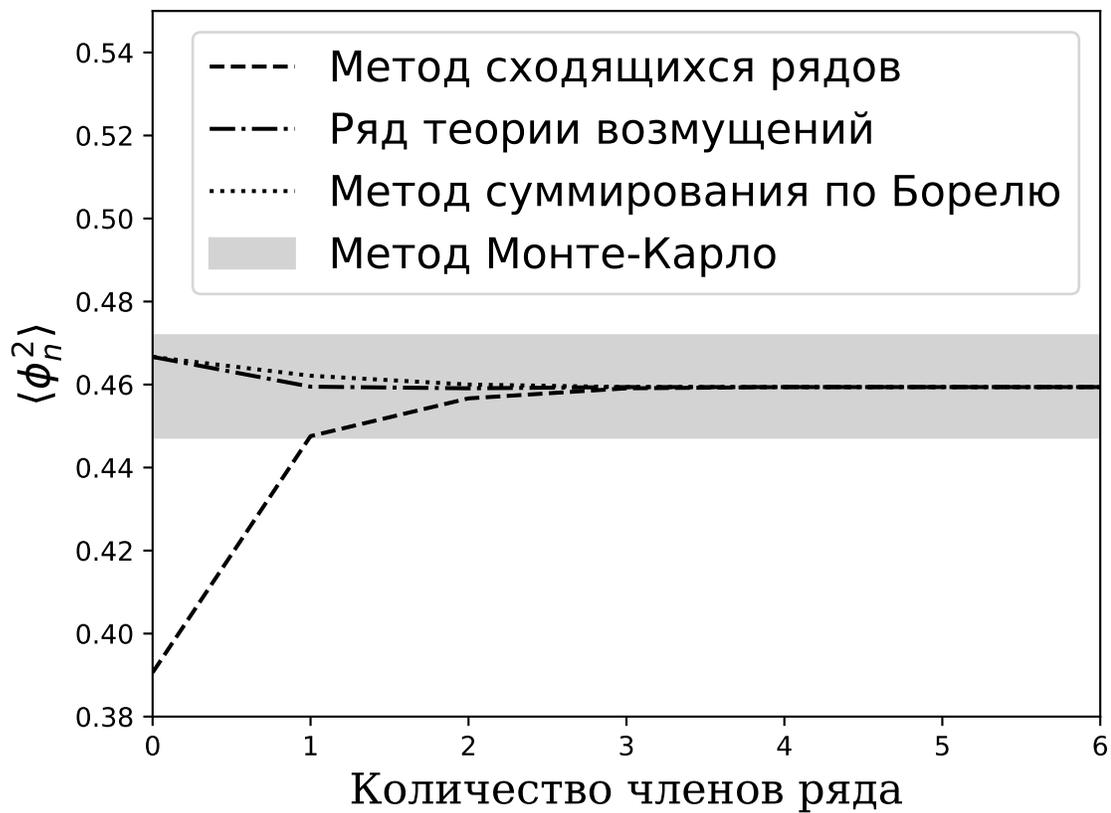


Рис. 3.3: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от количества использованных членов ряда теории возмущений для вычислений на решетке размера $V = 4$ при $\lambda = 0.1$.

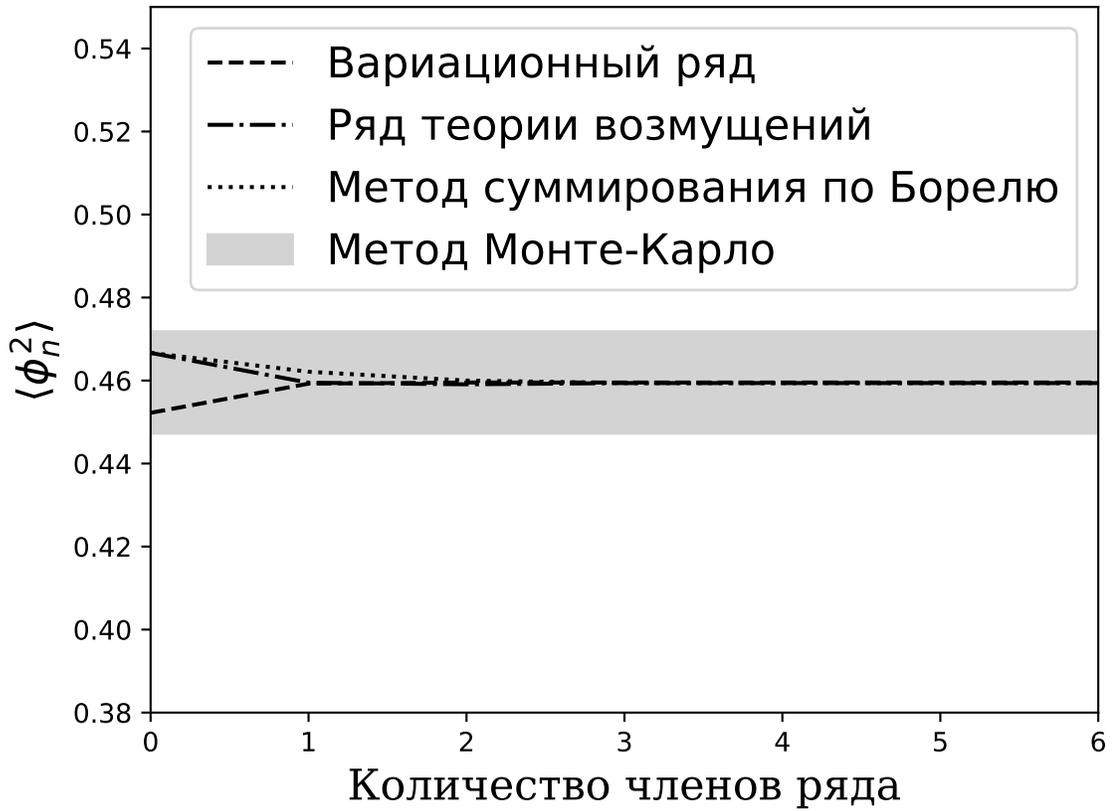


Рис. 3.4: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от количества использованных членов ряда теории возмущений для вычислений на решетке размера $V = 4$ при $\tau = 0$, $\lambda = 0.1$.

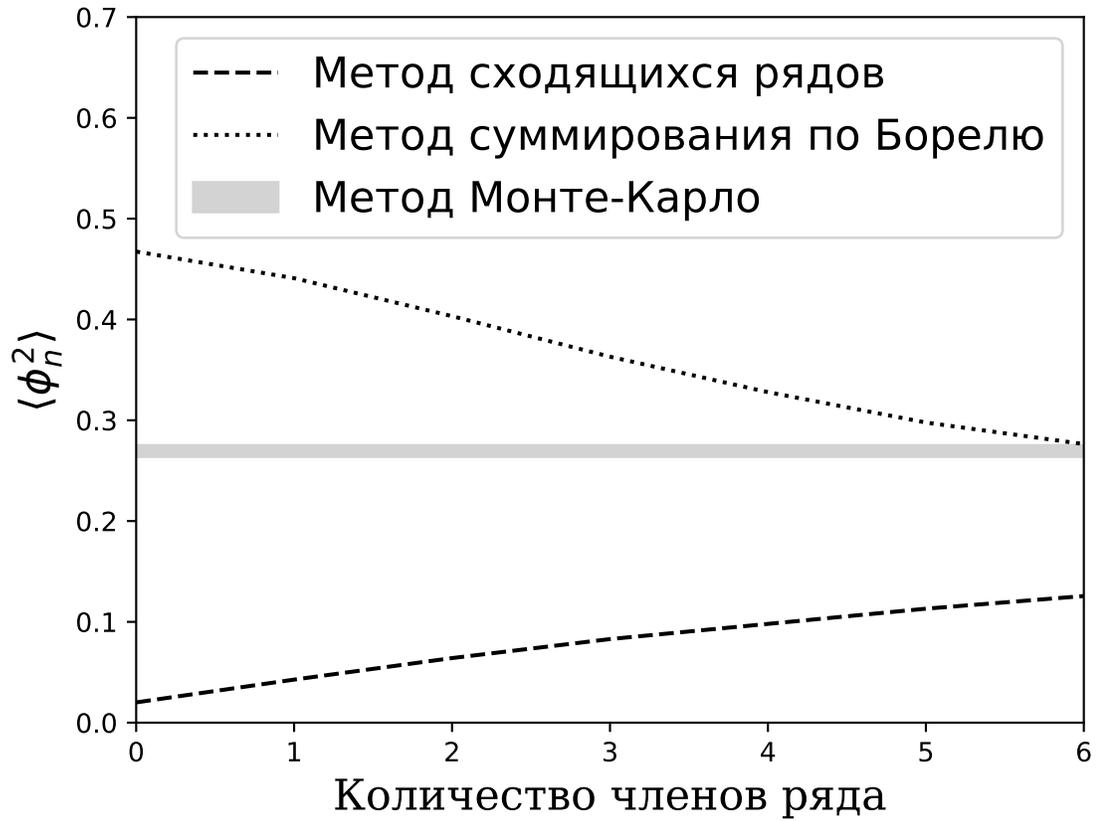


Рис. 3.5: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от количества использованных членов ряда теории возмущений для вычислений на решетке размера $V = 4$ при $\lambda = 10$.

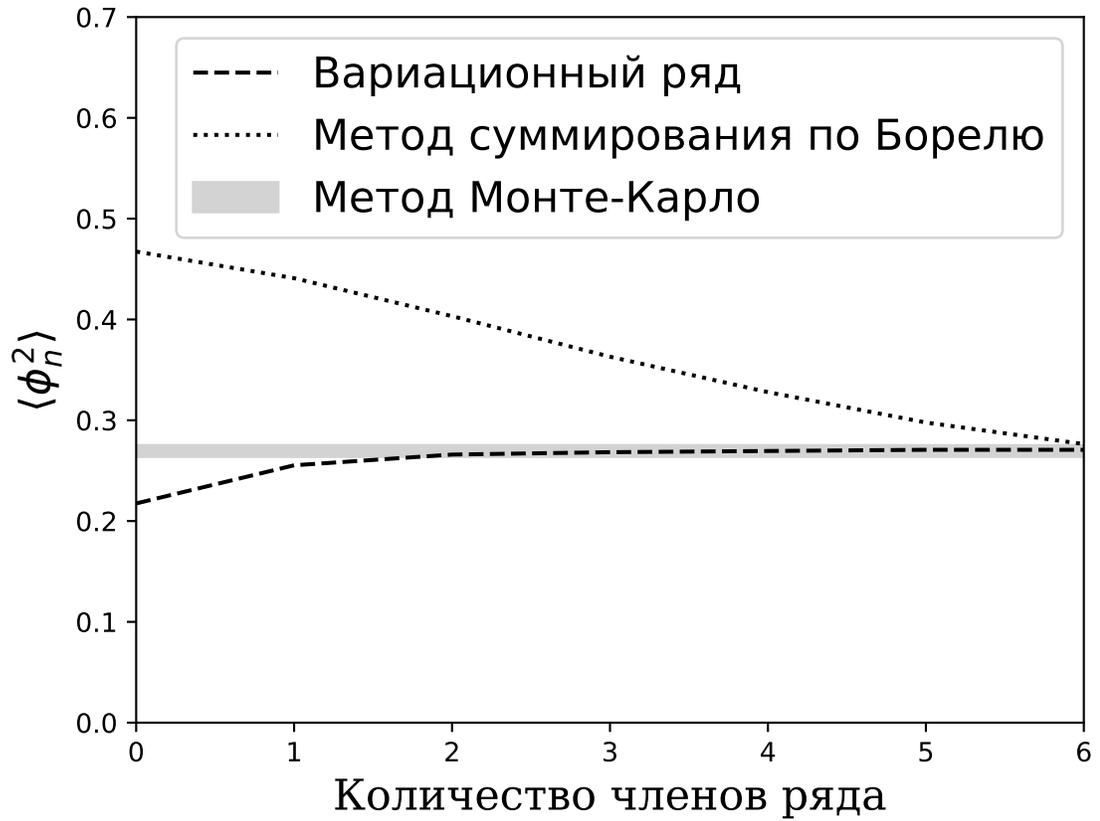


Рис. 3.6: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от количества использованных членов ряда теории возмущений для вычислений на решетке размера $V = 4$ при $\tau = 0$, $\lambda = 10$.

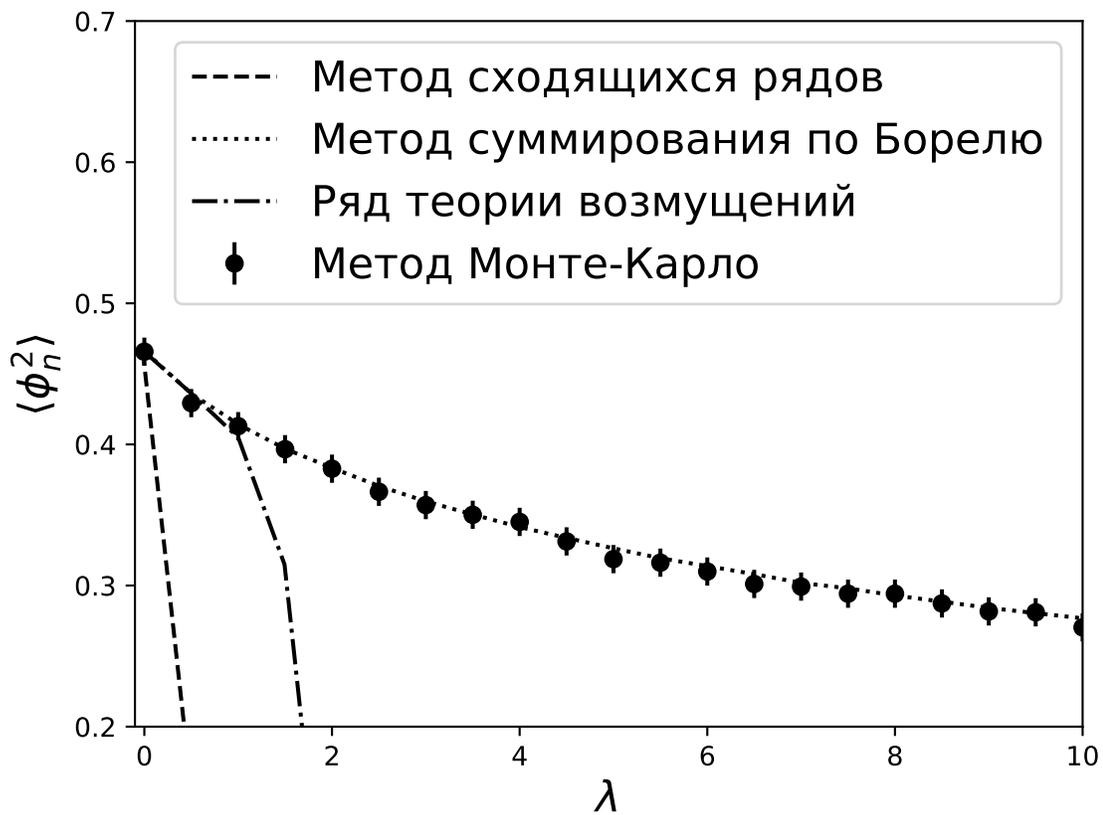


Рис. 3.7: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи для вычислений на решетке размера $V = 4$.

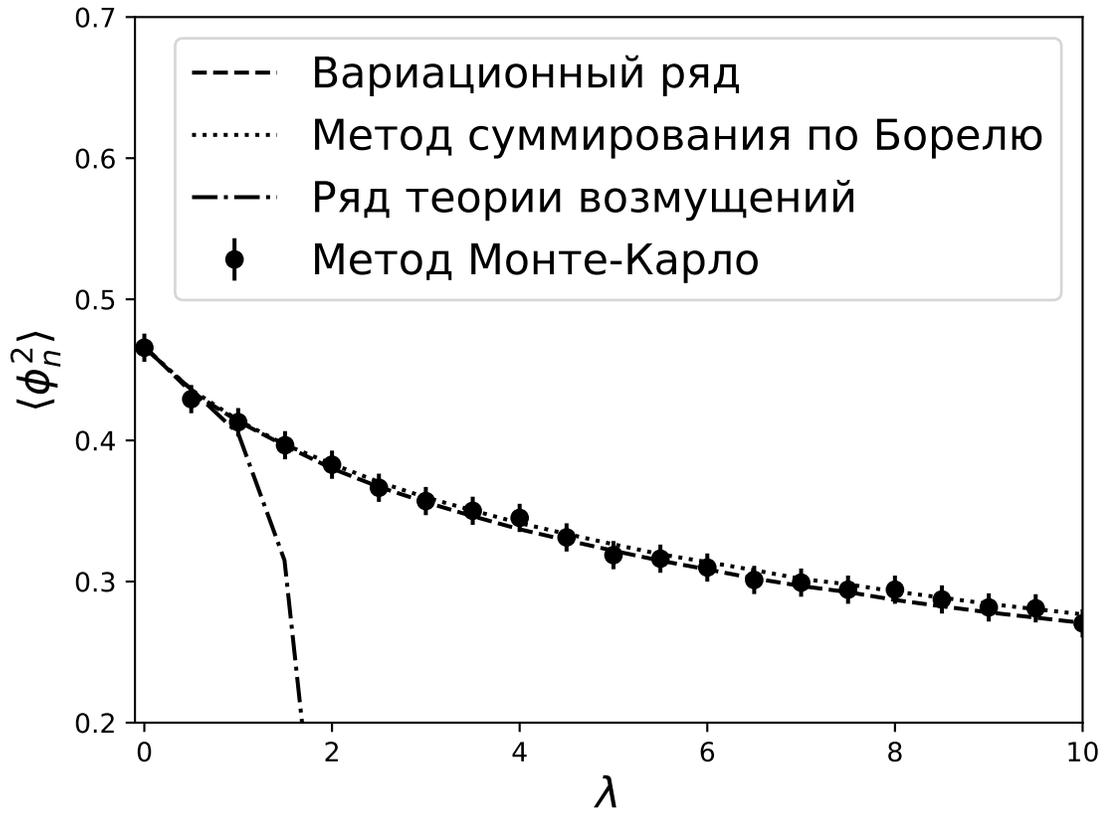


Рис. 3.8: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи для вычислений на решетке размера $V = 4$ при $\tau = 0$.

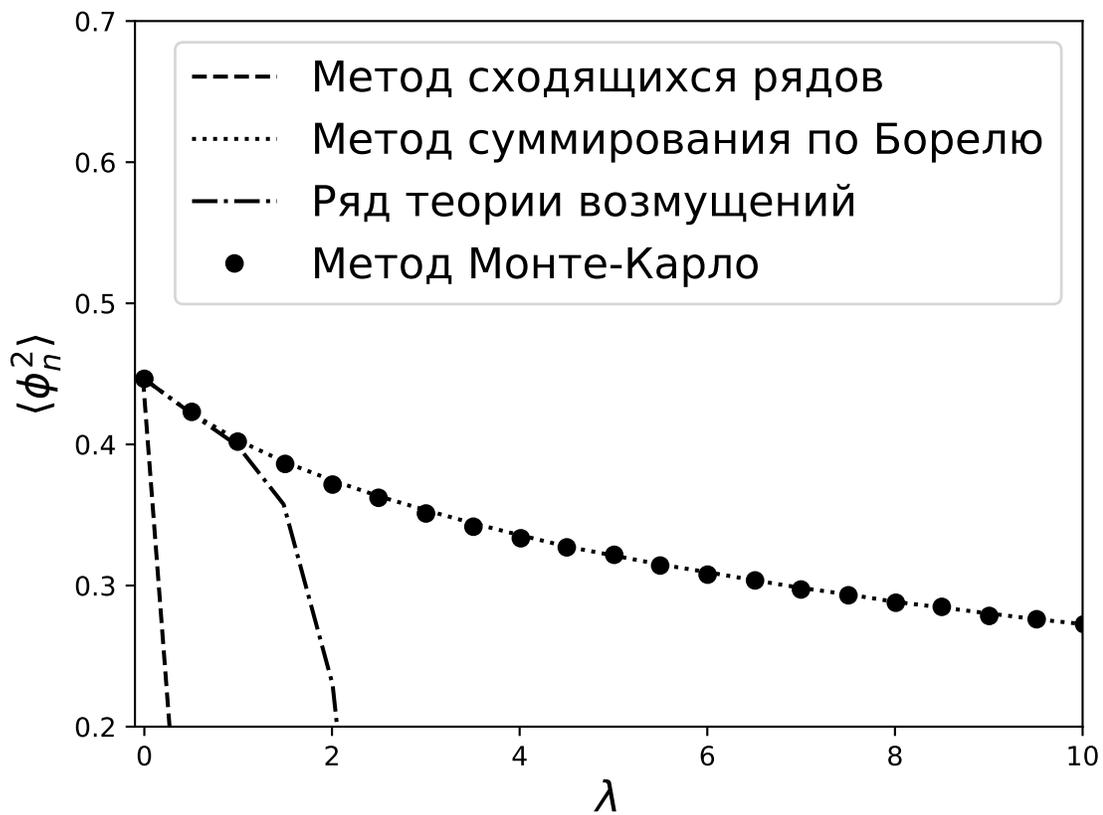


Рис. 3.9: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи для вычислений на решетке размера $V = 64$.

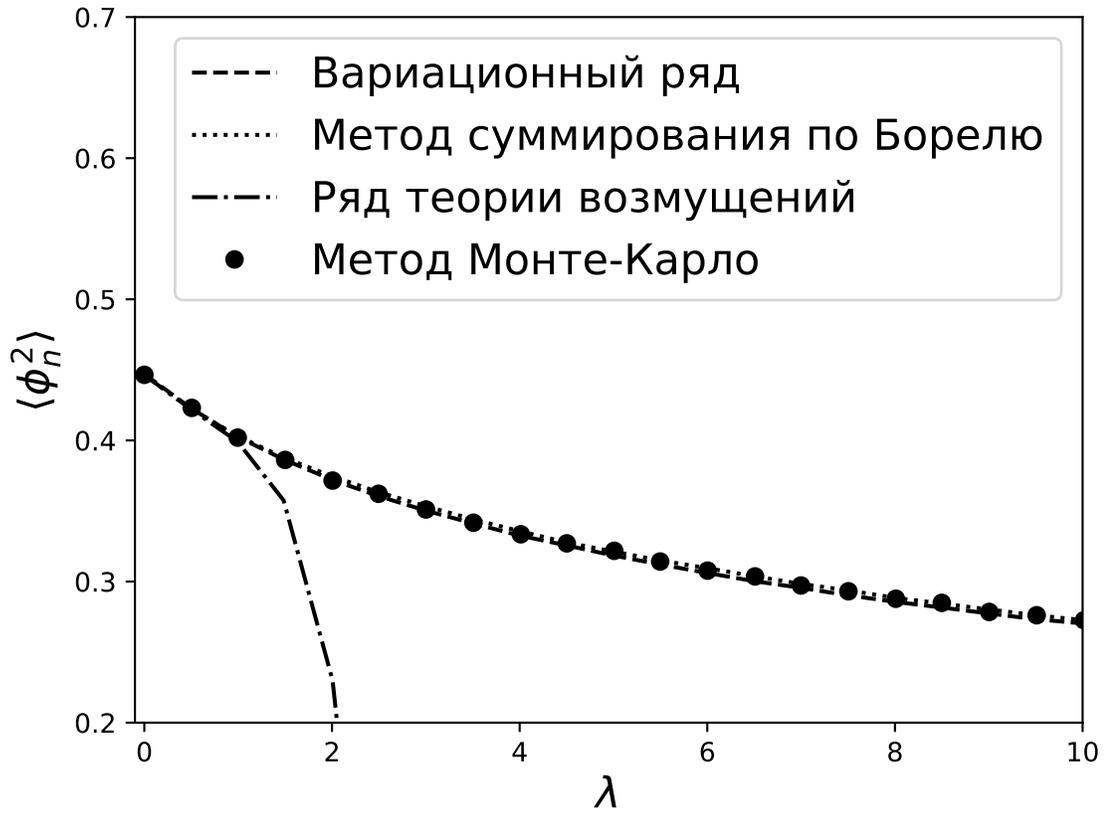


Рис. 3.10: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи для вычислений на решетке размера $V = 64$ при $\tau = 0$.

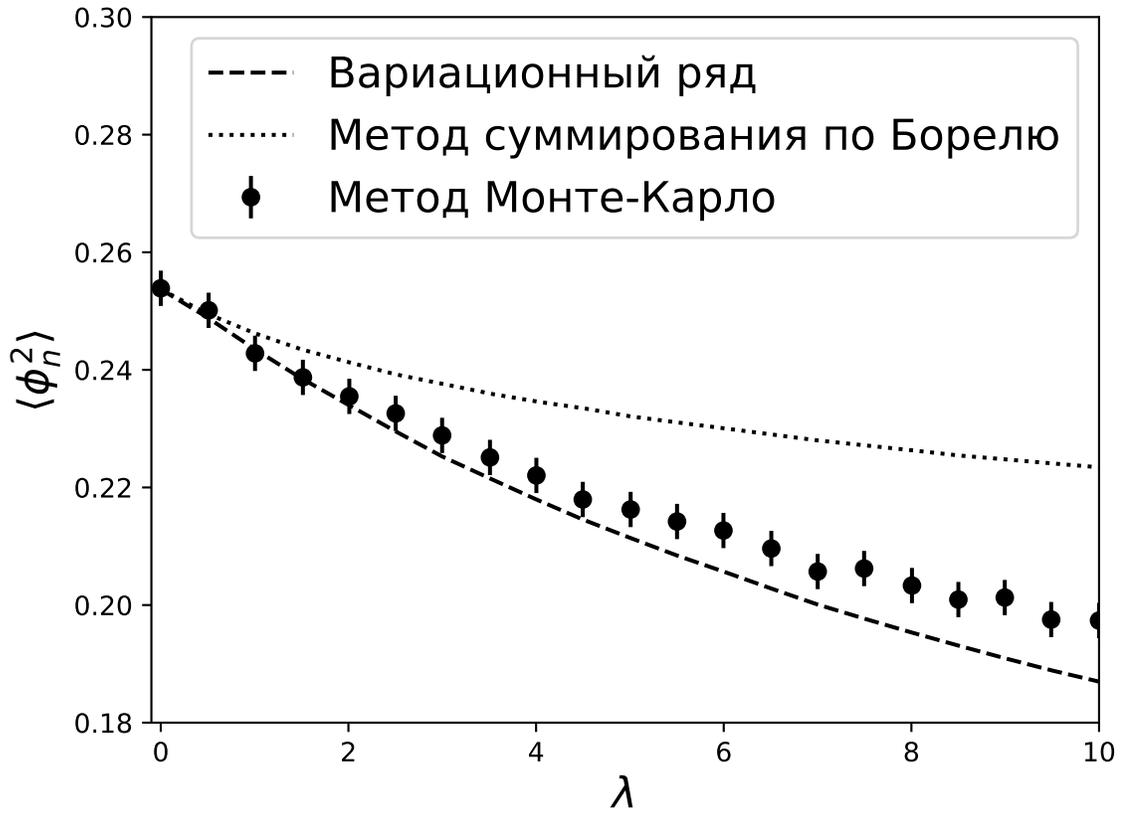


Рис. 3.11: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи для вычислений на двумерной решетке размера $V = 8 \times 8$ при $\tau = 0$.

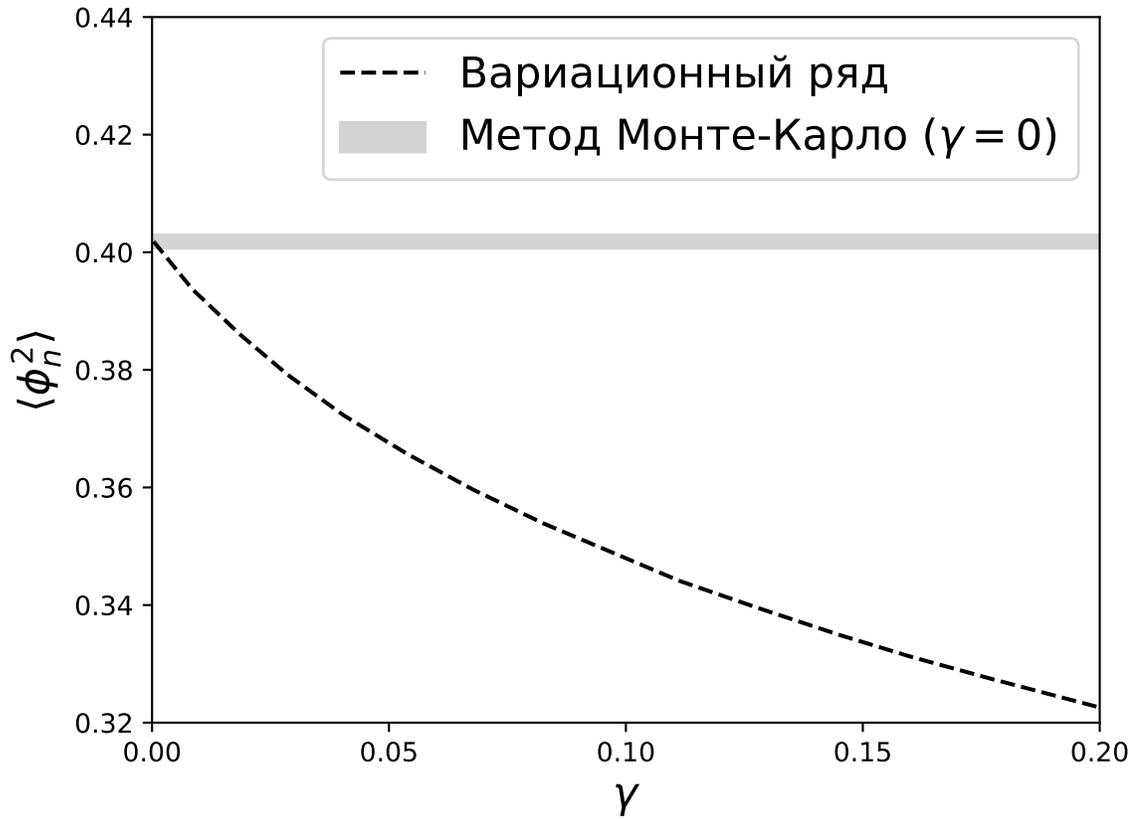


Рис. 3.12: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$, вычисленного с помощью вариационного ряда, от вариационного параметра γ , при $\lambda = 1$, $V = 64$, $\tau = 0$.

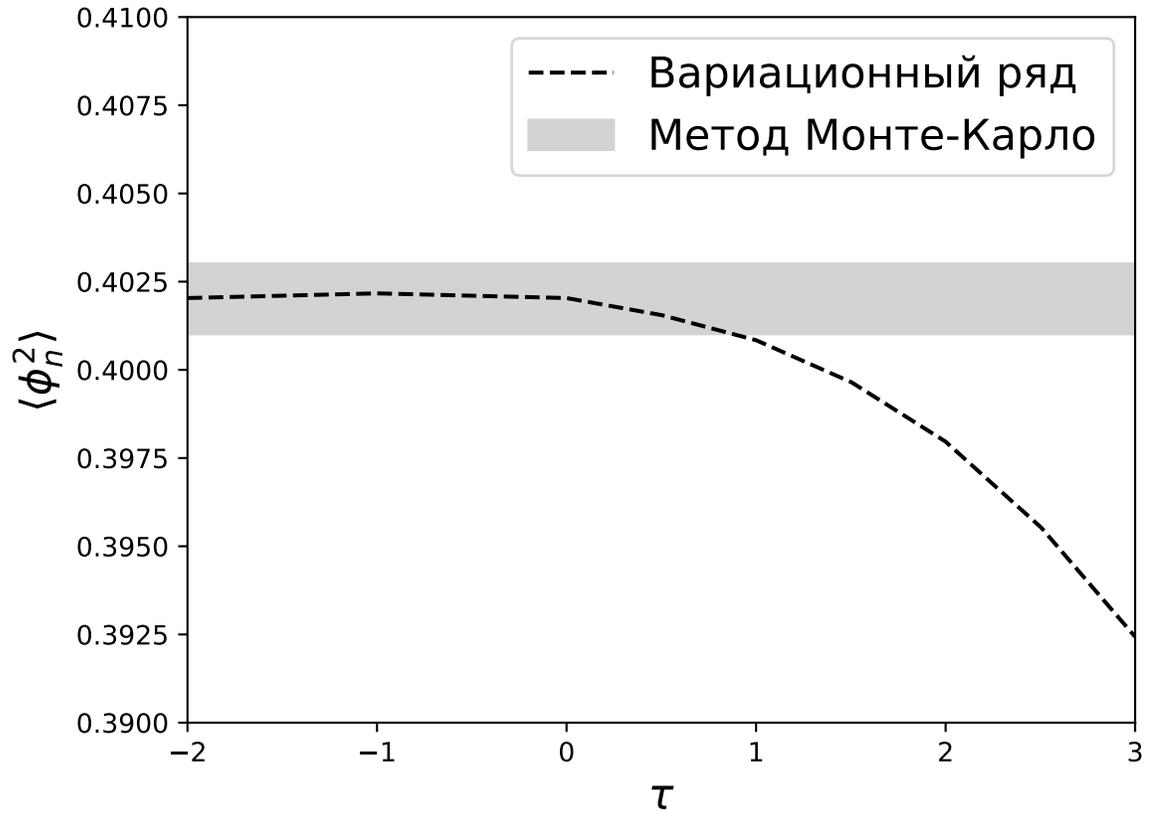


Рис. 3.13: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$, вычисленного с помощью вариационного ряда, от параметра регуляризации τ , при $\lambda = 1$, $V = 64$.

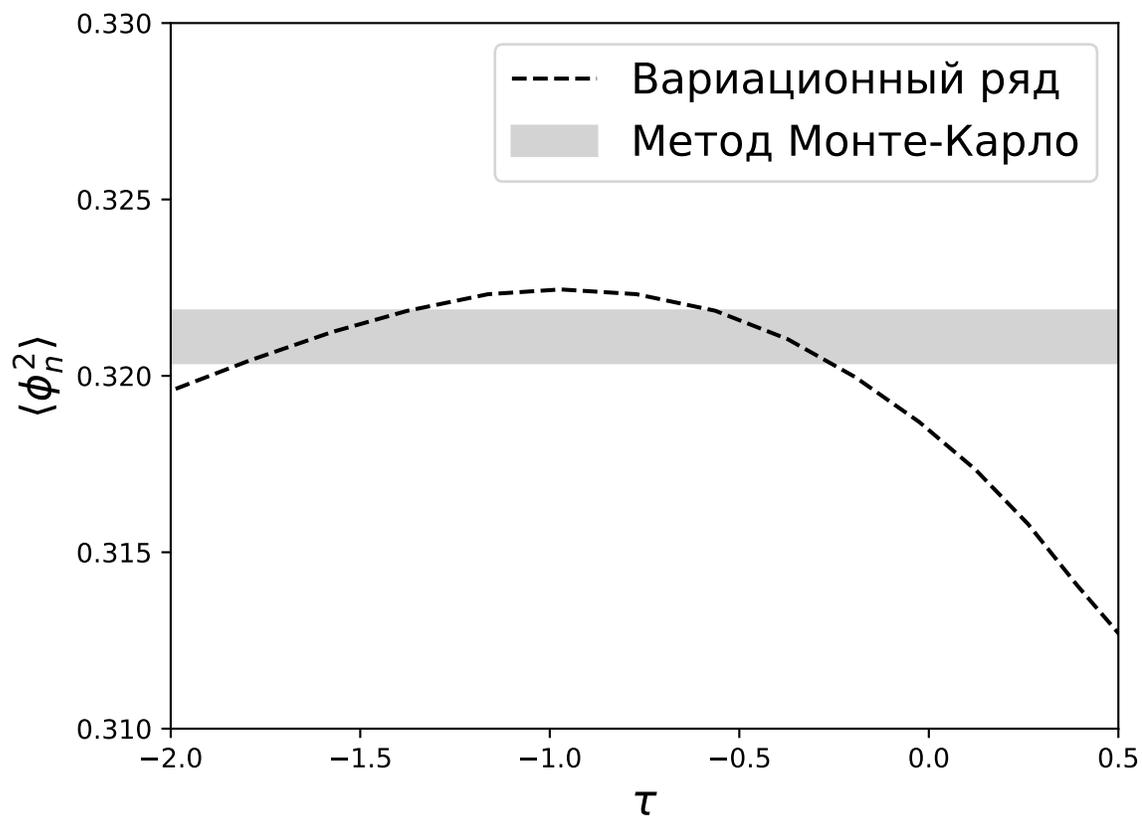


Рис. 3.14: Зависимость $\langle \phi_n^2 \rangle$, вычисленного с помощью вариационного ряда, от параметра регуляризации τ , при $\lambda = 5$, $V = 64$.

3.5 Заключительные замечания к главе 3

В главе 3 представлено построение сходящегося ряда для моделей, определенных на решетке, с полиномиальным взаимодействием четной степени и подробно исследован этот сходящийся ряд на примере модели ϕ^4 . Показано, что метод сходящихся рядов является методом повторного суммирования. Последний факт подтверждает идею resurgence о том, что непертурбативная физика может быть выражена через коэффициенты ряда теории возмущений. Начальным приближением сходящегося ряда является негауссова нелокальная взаимодействующая модель, следовательно, метод сходящихся рядов автоматически учитывает такие неаналитические вклады, как $e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

Исследована внутренняя симметрия метода сходящихся рядов и, используя ее, разработан вариационный ряд. Численные значения оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$, вычисленные с использованием методов сходящихся рядов и вариационного ряда с 6 порядками ряда теории возмущений, были сопоставлены с методом суммирования по Борелю и методом Монте-Карло для функциональных интегралов. Сравнение показало, что для малых решеток и для малых констант связи метод сходящихся рядов демонстрирует соответствие с результатами, полученными методом Монте-Карло и методом суммирования по Борелю, но отклоняется от них для больших объемов решетки и/или для больших констант связи. Метод вариационного ряда, применяемый к одномерному и двумерному случаям, согласуется с другими методами для широкого диапазона объемов решетки и констант связи и даже быстрее сходится к результатам Монте-Карло, чем метод суммирования по Борелю.

Чтобы изучить сходимостъ и корректность вариационного ряда с аналитической точки зрения, рассмотрены две регуляризации модели ϕ^4 на решетке. В обоих случаях для вариационного ряда построены верхние границы с конечными радиусами сходимости в терминах параметров регуляризации. Для γ -регуляризации граница области сходимости приближается к $\gamma = 0$, что соответствует нерегуляризованной модели. Показано, что исходная модель может быть аппроксимирована γ -регуляризацией с любой произвольной точностью, и всегда возможно построить два связанных сходящихся разложения для этой регуляризации. Следовательно,

ряд с γ -регуляризацией сам по себе может использоваться для непертурбативных вычислений без использования вариационного ряда (3.21). Свойства сходимости вариационного ряда, зависящие от параметров регуляризации, обобщены на рис. 3.1 и 3.2. Ряды (3.34) и (3.24) являются регуляризациями (3.21). Используя эту информацию и тот факт, что сходимость рядов (3.34) и (3.24) должна быть лучше, чем сходимость их границ, делается вывод, что ряд (3.21) сходится для любого $\tau > -2$.

Сходимость (3.21) независимо от значений τ и независимость от τ его суммы при $\gamma \rightarrow 0$ позволяет рассматривать любые конечные $\tau > -2$ даже для очень больших (бесконечных) объемов V . Диаграммы стандартной теории возмущений могут быть легко вычислены в бесконечном объеме. Это обеспечивает способ взятия предела бесконечного объема в методах сходящихся рядов и вариационного ряда. Вычисления при $\tau = 0$ одинаково хорошо работают для объемов решетки, отличающихся более чем в 10 раз, см. рис. 3.8 и 3.10, это подтверждает приведенное выше утверждение и дает численное доказательство возможности вычисления в пределе бесконечного объема.

Важно отметить, что применимость сходящегося/вариационного ряда не основана на каких-либо критериях типа суммируемости по Борелю исходной теории возмущений. Представленная конструкция может быть обобщена на модели фермионных решеток путем использования бозонизации [79], [80], [81]. Например, применение метода [17], [15], [16], [18], [19] к бозонизированной фермионной модели, модели КЭД на решетке, было предложено в [46]. Бозонизация сложных действий была недавно предложена в [82]. Следовательно, сходящийся ряд, основанный только на пертурбативных вычислениях, может обеспечить способ обхода проблемы знака в бозонных и фермионных моделях [83], [84], [85], [86], [87].

Глава 4

Метод сходящихся рядов для моделей с полиномиальным взаимодействием, определенных на бесконечной решетке

В главе 3 был построен сходящийся ряд, использующий негауссово начальное приближение, и показано, что он является эффективным вычислительным инструментом для моделей, определенных на решетке конечного размера с полиномиальным взаимодействием. В этой главе будет показано, что суммируемость по Борелю является достаточным условием корректности построенных сходящихся рядов, применяемых к моделям, определенным на бесконечной решетке. Для проверки корректности метода сходящихся рядов, проведено исследование одномерной и двумерной модели ϕ^4 , определенных на бесконечной решетке. Сравнение результатов вычисления методом сходящихся рядов и экстраполяции на бесконечную решетку в ходе моделирования методом Монте-Карло показывают соответствие между

двумя подходами.

4.1 Метод сходящихся рядов и размерная регуляризация

Опишем еще раз основные этапы построения сходящихся рядов и определим проблему, связанную с размерной регуляризацией. Рассмотрим статистическую сумму одномерной модели ϕ^4 ,

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int [d\phi] e^{-S[\phi]}, \quad (4.1)$$

где Z_0 статистическая сумма свободной теории, а действие дается выражением

$$S[\phi] = \int dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right), \quad (4.2)$$

где m - масса, λ - константа связи.

Основная идея метода сходящихся рядов состоит в том, чтобы сгенерировать абсолютно сходящийся ряд путем разложения подынтегрального выражения в ряд только с положительными членами. Тогда замена операций суммирования и интегрирования не может повлиять на абсолютную сходимость, и если исходная величина была конечной, ряд должен сходиться. Чтобы реализовать эту стратегию в рамках предложенного метода, выбирается нестандартное начальное приближение $N[\phi]$, заданное нелокальным действием вида

$$N[\phi] = S_2[\phi] + \sigma S_2[\phi]^2, \quad (4.3)$$

$$S_2[\phi] = \int dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (4.4)$$

квадратичная часть действия (4.2). Тогда неравенства Соболева [88], [89], [90] гарантируют существование параметра σ при котором

$$\sigma S_2[\phi]^2 \geq S_I[\phi] \iff N[\phi] \geq S[\phi], \quad (4.5)$$

где новая часть действия со взаимодействием определяется выражением $S_I[\phi] = S[\phi] - N[\phi]$.

После разделения действия $S[\phi] = N[\phi] + (S[\phi] - N[\phi])$ получим

$$Z = \frac{1}{Z_0} \int [d\phi] e^{-N[\phi]} \sum_k \frac{(N[\phi] - S[\phi])^k}{k!}. \quad (4.6)$$

При выполнении условий (4.5) выполнены условия теоремы Фубини (Теорема 1), выражение $e^{-N[\phi]}(N[\phi] - S[\phi])^k \geq 0$, что позволяет поменять порядок операций суммирования и интегрирования

$$Z = \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int [d\phi] e^{-N[\phi]} (N[\phi] - S[\phi])^k. \quad (4.7)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |Z| &\leq \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int [d\phi] e^{-N[\phi]} |(N[\phi] - S[\phi])^k| = \\ &= \frac{1}{Z_0} \int [d\phi] e^{-N[\phi]} \sum_k \frac{1}{k!} (N[\phi] - S[\phi])^k = Z, \end{aligned} \quad (4.8)$$

таким образом сходимость ряда гарантируется предположением $Z < \infty$.

Вычисление членов ряда в (4.7) может быть выполнено несколькими эквивалентными способами [50,51,53], сталкиваясь с аналогичными трудностями, требующими использования размерной регуляризации. Для демонстрации основных идей предположим, что рассматриваемая модель имеет только конечное число степеней свободы V – это может соответствовать дискретизированной модели, определенной на решетке конечного размера. Тогда символ $[d\phi]$ означает просто $\prod_{i=1}^V d\phi_i$.

Уравнение (4.7) может быть записано следующим образом

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int [d\phi] e^{-S_2[\phi] - \sigma S_2^2[\phi]} (\sigma S_2^2[\phi] - S_I[\phi])^k \\
&= \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int [d\phi] \int_0^\infty dt \delta(t - \sqrt{S_2[\phi]}) e^{-t^2 - \sigma t^4} (\sigma t^4 - S_I[\phi])^k. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Согласно теореме Фубини и тому факту, что

$$\begin{aligned}
&\int [d\phi] \int_0^\infty dt \left| \delta(t - \sqrt{S_2[\phi]}) e^{-t^2 - \sigma t^4} (\sigma t^4 - S_I[\phi])^k \right| \\
&= \int [d\phi] \int_0^\infty dt \delta(t - \sqrt{S_2[\phi]}) e^{-t^2 - \sigma t^4} (\sigma t^4 - S_I[\phi])^k < \infty \quad (4.10)
\end{aligned}$$

можно поменять местами порядок интегрирования по $[d\phi]$ и dt . Таким образом,

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int_0^\infty dt \int [d\phi] t^V \delta(t - t\sqrt{S_2[\phi]}) e^{-t^2 - \sigma t^4} (\sigma t^4 - t^4 S_I[\phi])^k \\
&= \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int_0^\infty dt t^{V+4k-1} e^{-t^2 - \sigma t^4} \int [d\phi] \delta(1 - \sqrt{S_2[\phi]}) (\sigma - S_I[\phi])^k \\
&= \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int_0^\infty dt t^{V+4k-1} e^{-t^2 - \sigma t^4} \cdot \\
&\quad \cdot \int [d\phi] \delta(1 - \sqrt{S_2[\phi]}) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \sigma^{k-l} (-S_I[\phi])^l, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

где факторизация интегралов по $[d\phi]$ и dt была достигнута с помощью масштабирования переменной $\phi \rightarrow t\phi$.

В случае модели (4.1) бесконечное число степеней свободы выражается как $V = \int dx$. Размерная регуляризация подразумевает подстановку $V = 0$. На первый взгляд его применение кажется разумным, поскольку размерная регуляризация является распространенным инструментом в квантовой теории поля. Кроме того, на этом этапе размерная регуляризация сохраняет положительность членов ряда – основной принцип метода построения сходящихся рядов. Однако уравнение (4.11)

не является окончательным результатом, и основные трудности проявятся позже. В дальнейшем не применяется размерная регуляризация. Вместо этого сохраним “ V ” в формулах явно для прояснения возникающих проблем.

Все шаги, выполненные для модели ϕ^4 и приводящие к (4.11), могут быть повторены для любой корреляционной функции теории без взаимодействия с гауссовым действием $S_2[\phi]$

$$\begin{aligned} & \int [d\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_Q) e^{-S_2[\phi]} \\ &= \int_0^\infty dt t^{V+Q-1} e^{-t^2} \int [d\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_Q) \delta(1 - \sqrt{S_2[\phi]}) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{V+Q}{2}\right) \int [d\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_Q) \delta(1 - \sqrt{S_2[\phi]}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Затем, используя (4.12), каждый член в двойной сумме (4.11) можно переписать как момент гауссова распределения, т.е. сходящийся ряд выражается как повторное суммирование стандартной теории возмущений

$$Z = \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int_0^\infty dt t^{V+4k-1} e^{-t^2 - \sigma t^4} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{\sigma^{k-l}}{\Gamma\left(\frac{V+4l}{2}\right)} f_l, \quad (4.13)$$

где

$$f_l := \int [d\phi] e^{-S_2[\phi]} (-S_I[\phi])^l. \quad (4.14)$$

Единственной проблемой (4.13) является явная зависимость от V . Даже для рассматриваемой одномерной системы, где ультрафиолетовая перенормировка не требуется, формулировка (4.13) требует регуляризации. В главе 3 [58] доказано существование внутренней пертурбативной симметрии метода сходящихся рядов, позволяющей изменить V на $V + \tau$ в формуле (4.13) для произвольного τ . А именно, пертурбативные разложения (4.13) с V и (4.13) с $V + \tau$ совпадают. Следовательно, использование размерной регуляризации корректно, по крайней мере, пертурбативно во всех петлях. В то же время любая модификация истинного бесконечного

значения V изменяет соответствующие веса различных членов в сумме по “ l ” в (4.13), что может привести к потере положительности членов ряда.

Аналитическое исследование проблемы сохранения положительности членов ряда при такой замене в квантовой теории поля представляет собой задачу для будущих исследований. Однако, применимость данного подхода можно продемонстрировать на примере конечномерных систем. Рассмотрим одномерный интеграл

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{1}{2}m^2x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4}, \quad (4.15)$$

самая быстрая сходимость ряда метода построения сходящихся рядов, соответствующего этому интегралу, может быть достигнута путем выбора $\sigma = \frac{\lambda}{6m^4}$. Тогда полное значение интеграла I задается нулевым приближением метода сходящихся рядов, а все остальные поправки равны нулю. Однако интеграл I все еще может быть формально записан в виде (4.13)

$$I = \sum_k \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} dt t^{V+\tau+4k+1} e^{-t^2-\sigma t^4} \cdot \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{V+\tau+4l}{2}\right)} \int dx x^2 e^{-\frac{1}{2}m^2x^2} \sigma^{k-l} \left(-\frac{\lambda}{4!}x^4\right)^l. \quad (4.16)$$

При $\tau = 0$ нулевой член совпадает со значением интеграла I и все поправки равны нулю, последнее происходит из-за того, что все подынтегральные выражения в этом случае пропорциональны $\left(\sigma\left(\frac{1}{2}m^2x^2\right)^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4\right)^k = 0$ при $k \neq 0$. При $\tau \neq 0$, соотношение между членами ряда в сумме по l в (4.16) нарушается, и они могут стать отрицательными. Это действительно происходит в интеграле (4.16). Зависимость суммы ряда I от параметра τ и количества членов ряда, используемых для вычисления суммы, представлена на рис. 4.1. Убывание при $\tau < 0$ указывает на наличие отрицательных членов ряда в методе сходящихся рядов.

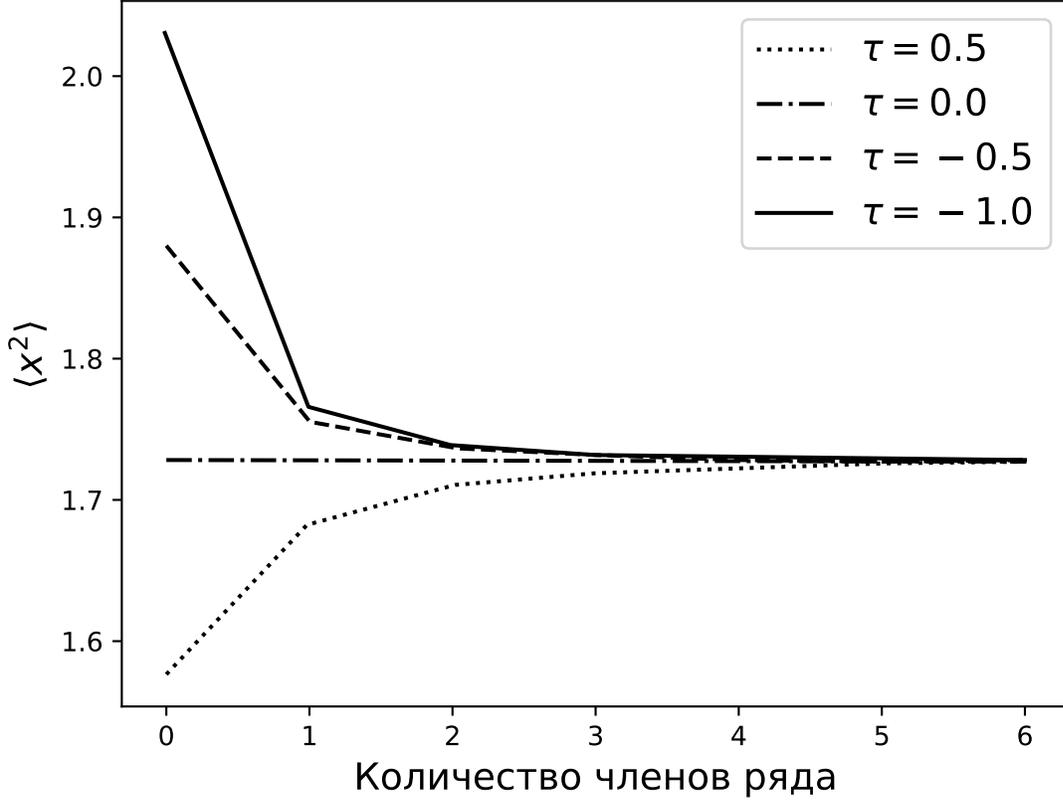


Рис. 4.1: Зависимость суммы ряда I от параметра τ и количества членов ряда.

Несмотря на то, что в рассматриваемом примере члены ряда перестают быть положительными при замене $\tau = 0$, $\tau = -1/2$ или $\tau = -1$, можно отметить, что ряд, тем не менее, сходится к правильному ответу. В главе 3 это объясняется использованием дополнительной регуляризации вида

$$I = \lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\gamma), \quad (4.17)$$

$$I(\gamma) := \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-S[x]} e^{-\gamma S_2^3[x]}, \quad (4.18)$$

где обозначения $S[x] = \frac{1}{2}m^2x^2 + \frac{\lambda}{4!}x^4$ и $S_2[x] = \frac{1}{2}m^2x^2$ используются, чтобы подчеркнуть аналогию с моделями, определенными на решетке. Представление (4.17) всегда верно для конечномерных интегралов, т.е. всегда существует такое γ_* , что

$I(\gamma_*)$ аппроксимирует $I(\gamma)$ с произвольной точностью. При $\gamma > 0$ применение метода сходящихся рядов для вычисления $I(\gamma > 0)$ дает сходящийся ряд даже при $\tau \neq 0$. Последнее можно доказать, рассмотрев асимптотику членов ряда пертурбативного повторного разложения представления метода сходящихся рядов для $I(\gamma > 0)$.

В случае бесконечномерных интегралов γ - регуляризация (4.17), (4.18) недействительна. Это происходит потому, что члены, аналогичные $\gamma S_2^3[x]$, нелокальны, а модели с локальными и нелокальными действиями имеют разное поведение при $V \rightarrow \infty$. Тем не менее, отметим, что невозможность применения регуляризации (4.17), (4.18) запрещает доказательство согласно главе 3 для бесконечного объема, но это не обязательно означает неприменимость метода сходящихся рядов. Исследуем численно применимость метода сходящихся рядов для модели ϕ^4 , определенной на одномерных и двумерных бесконечных решетках. Затем докажем корректность результатов, показывая, что суммируемость по Борелю является достаточным условием применимости метода сходящихся рядов.

4.2 Метод сходящихся рядов для модели ϕ^4 , определенной на бесконечной решетке

Дискретизированная версия действия (4.2) (теперь в произвольном измерении D) задается формулой

$$S_E = S_2[\varphi] + S_4[\varphi], \quad (4.19)$$

$$S_2[\varphi] = -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \varphi_n \varphi_{n+\mu} + \frac{1}{2} (2D + M^2) \sum_n \varphi_n^2, \quad (4.20)$$

$$S_4[\varphi] = \frac{\lambda}{4!} \sum_n \varphi_n^4, \quad (4.21)$$

где $\varphi = a\phi$, $M = at$, $x = na$, $\int d^D x \rightarrow a^D \sum_n$, $(\partial_\mu \phi)^2 \rightarrow \frac{1}{a^2} \sum_\mu (2\phi(na) - \phi(na + \mu a) - \phi(na - \mu a))$, n является D -мерным вектором с целыми значениями, μ - еди-

ничный вектор, направленный вдоль оси μ , a - шаг решетки. Это действие приводит к стандартной теории возмущений с четырехвалентными вершинами и пропагатором теории без взаимодействия, заданным формулой

$$\langle \varphi_n \varphi_m \rangle_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik(n-m)}}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{k_{\mu}}{2} + M^2}. \quad (4.22)$$

Выражение для ряда, построенного методом сходящихся рядов, двухточечной корреляционной функции модели ϕ^4 на решетке размера V получено по полной аналогии с (4.13)

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n \varphi_m \rangle_{\lambda} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} dt t^{V+\tau+4k+1} \exp(-t^2 - \sigma t^4) \\ &\cdot \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \sigma^{k-l} \frac{2f_l(n, m)\lambda^l}{\Gamma\left(\frac{V+\tau+4l+2}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $f_l(n, m)/(l!)$ коэффициенты ряда теории возмущений, т. е. $\langle \varphi_n \varphi_m \rangle_{\lambda} \sim \sum_{l=0}^{\infty} f_l(n, m)/l!$ и σ - параметр нового начального приближения. В дальнейшем используется минимальное значение σ , удовлетворяющее (4.5),

$$\sigma = \frac{\lambda}{6M^4}. \quad (4.24)$$

Применим (4.23) в предельном случае $V + \tau = 0$, $V \rightarrow \infty$ и сравним результаты вычисления с соответствующими значениями, полученными методами Монте-Карло для функциональных интегралов и методом суммирования по Борелю ряда теории возмущения.

4.3 Результаты численного моделирования

Основными величинами метода сходящихся рядов являются члены ряда стандартной теории возмущений. Их вычисления в пределе бесконечного объема намного

проще, чем для конечных решеток. При конечных объемах решетки вычисления каждой диаграммы модели ϕ^4 включает в себя умножение 4 матриц пропагатора размера $V \times V$ теории без взаимодействия в каждой вершине, что приводит к чрезвычайно длительным вычислениям. Однако, в случае вычисления в пределе бесконечного объема, можно заменить длительное умножение матриц численным интегрированием, которое может быть выполнено с помощью метода Монте-Карло для кратных интегралов.

В данном разделе представлены результаты вычислений методом сходящихся рядов, суммированием по Борелю и моделирования методом Монте-Карло на решетке. Вычисления методом суммирования по Борелю основаны на суммировании в 6 и 7 порядках стандартной теории возмущений в измерениях $D = 1$ и $D = 2$ соответственно. Моделирование методом Монте-Карло для функциональных интегралов было выполнено на решетках с 10 , 10^2 , 10^3 и 10^4 узлами в одномерном случае и с 4×4 , 16×16 и 64×64 узлами в двумерном случае. Для каждого случая данные получены путем усреднения по $N_p = 100$ траекториям Монте-Карло и термализацией, достигнутой после $N_s = 100$ циклов (свипов).

На рис. 4.2 представлены результаты вычисления оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$ одномерной модели ϕ^4 , определенной на решетке, в зависимости от количества использованных членов ряда теории возмущений при двух значениях константы связи: $\lambda = 1$, $\lambda = 10$. Результаты показывают, что сумма ряда, вычисленная по методу сходящихся рядов, сходится к экстраполированному результату, полученному методом Монте-Карло, быстрее, чем сумма ряда, полученная по Борелю. На рис. 4.3 представлена зависимость значения оператора ϕ_n^2 от константы связи, вычисленная тремя независимыми способами. В качестве опорного значения (правильного по умолчанию) будем считать результат метода Монте-Карло. Отметим, что метод сходящихся рядов демонстрирует лучшую точность при больших значениях константы связи, чем суммирование по Борелю.

На рис. 4.4 представлены результаты вычисления оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$ в зависимости от числа использованных членов ряда стандартной теории возмущений при $\lambda = 1$ и $\lambda = 10$ в двумерном случае. На рис. 4.5 приведена зависимость значения

оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи, где показано изменение значения, достигнутое при переходе от использования 6 членов ряда теории возмущения к 7.

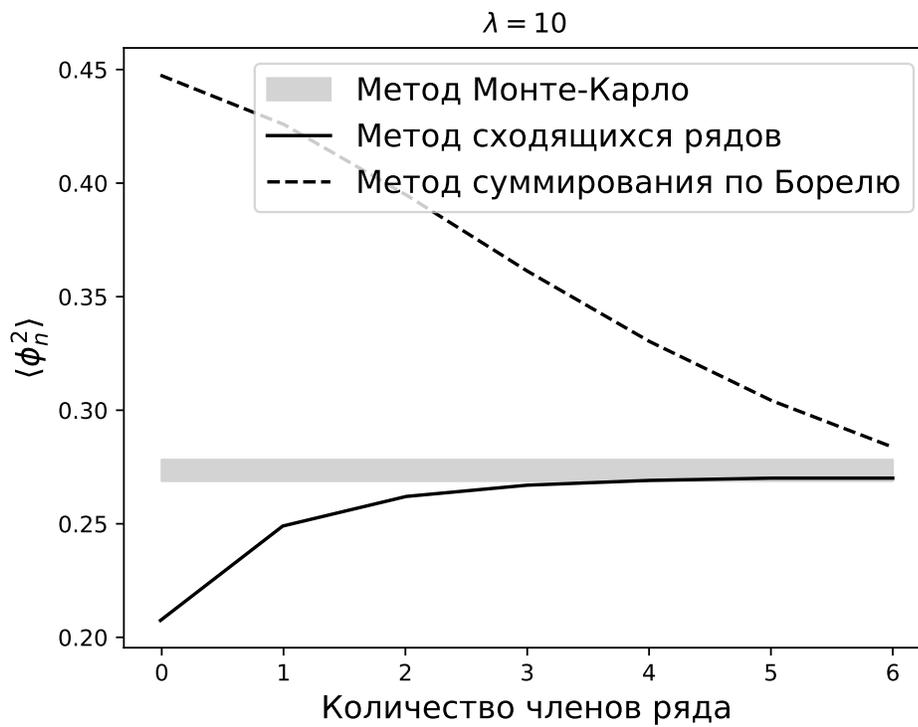
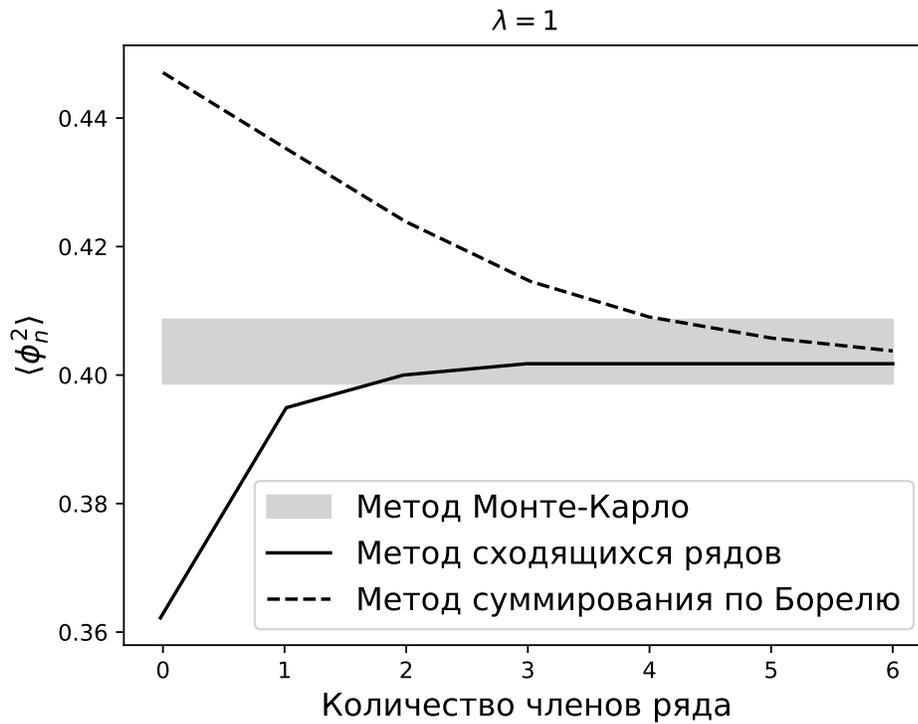


Рис. 4.2: Зависимость оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$, вычисленного с помощью метода сходящихся рядов и метода суммирования по Борелю, от количества членов ряда и сравнение с экстраполированными данными метода Монте-Карло для функциональных интегралов, $D = 1$, при $\lambda = 1$ и $\lambda = 10$.

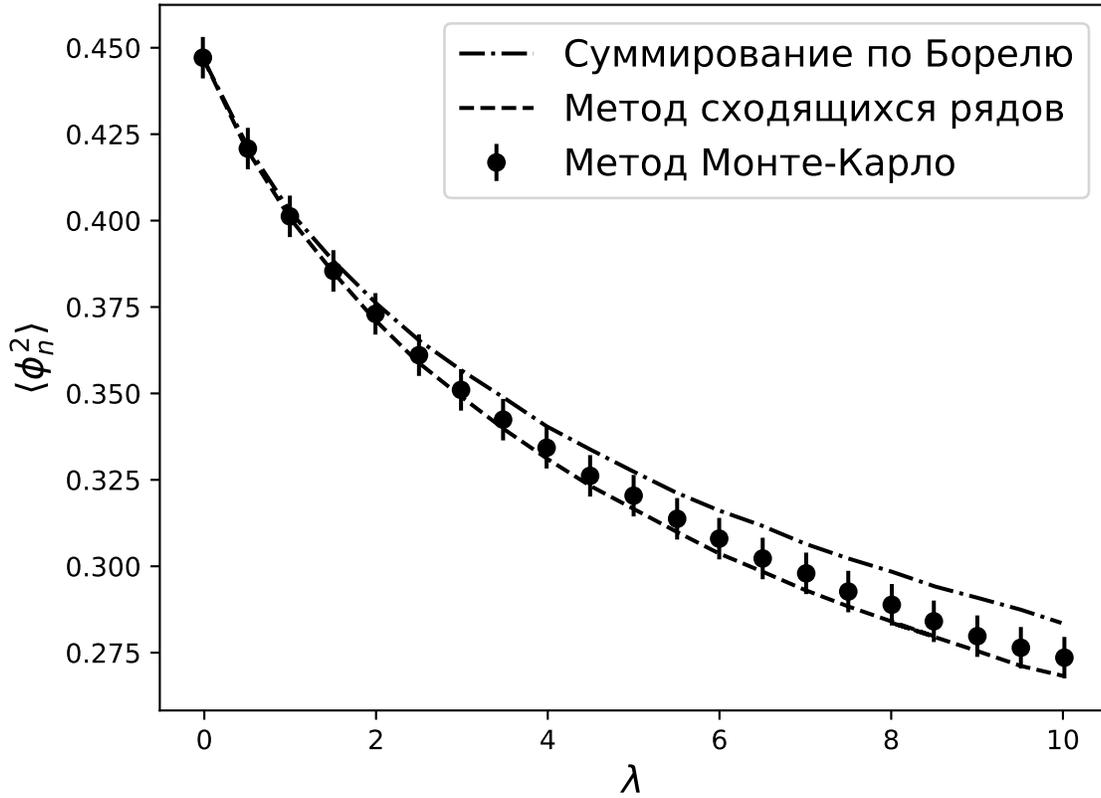


Рис. 4.3: Зависимость оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи λ , вычисленного с использованием шести членов ряда метода сходящихся рядов и метода суммирования по Бореля, а также результат экстраполяции метода Монте-Карло для функциональных интегралов, $D = 1$.

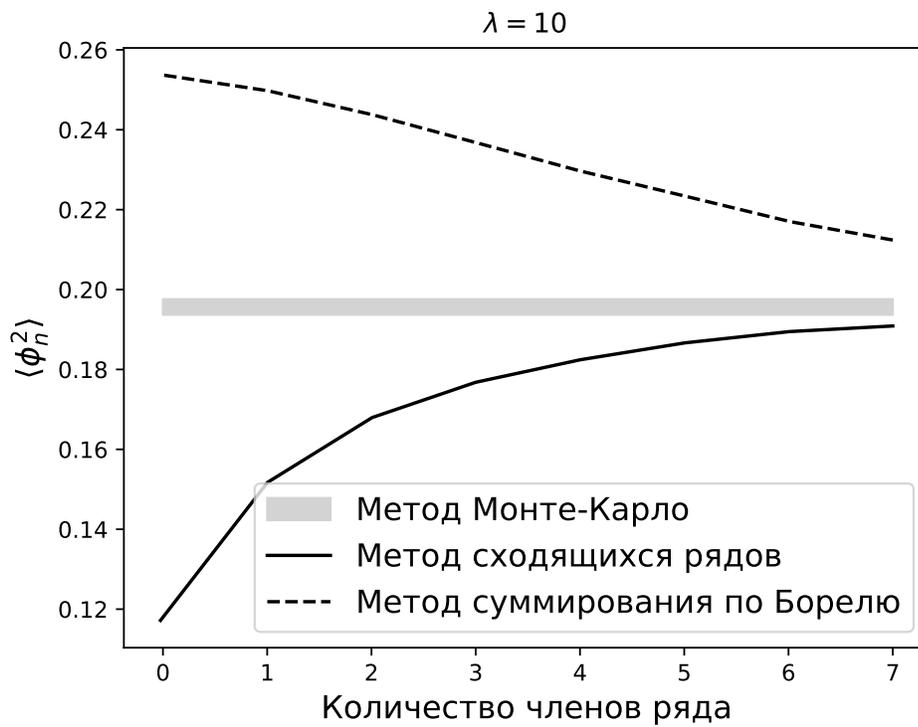
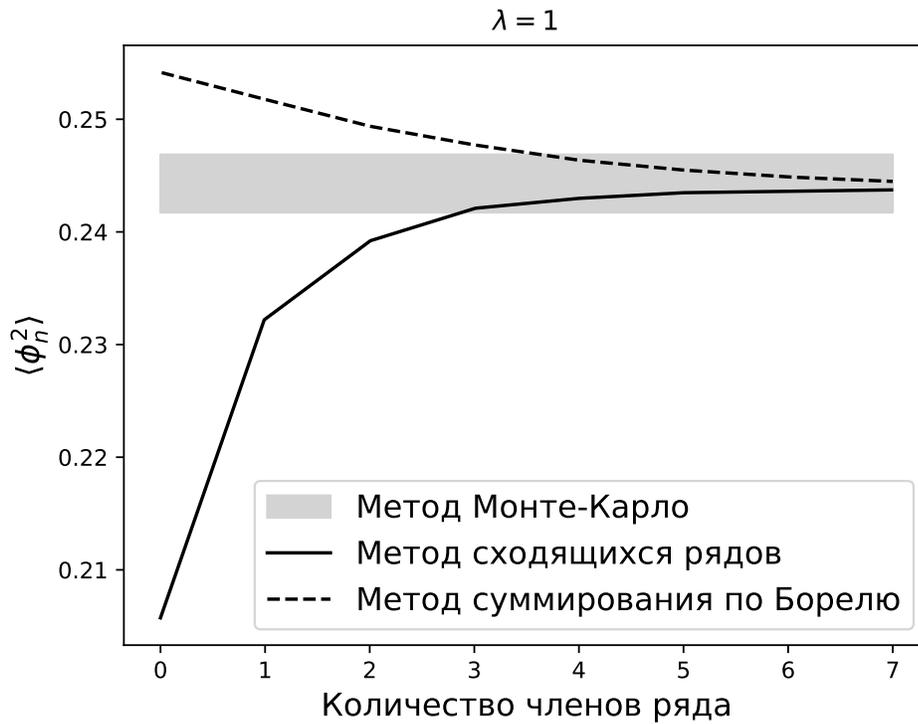


Рис. 4.4: Зависимость оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$, вычисленного с помощью метода сходящихся рядов и метода суммирования по Борелю, от количества членов ряда и сравнение с экстраполированными данными метода Монте-Карло для функциональных интегралов, $D = 2$, при $\lambda = 1$ и $\lambda = 10$.

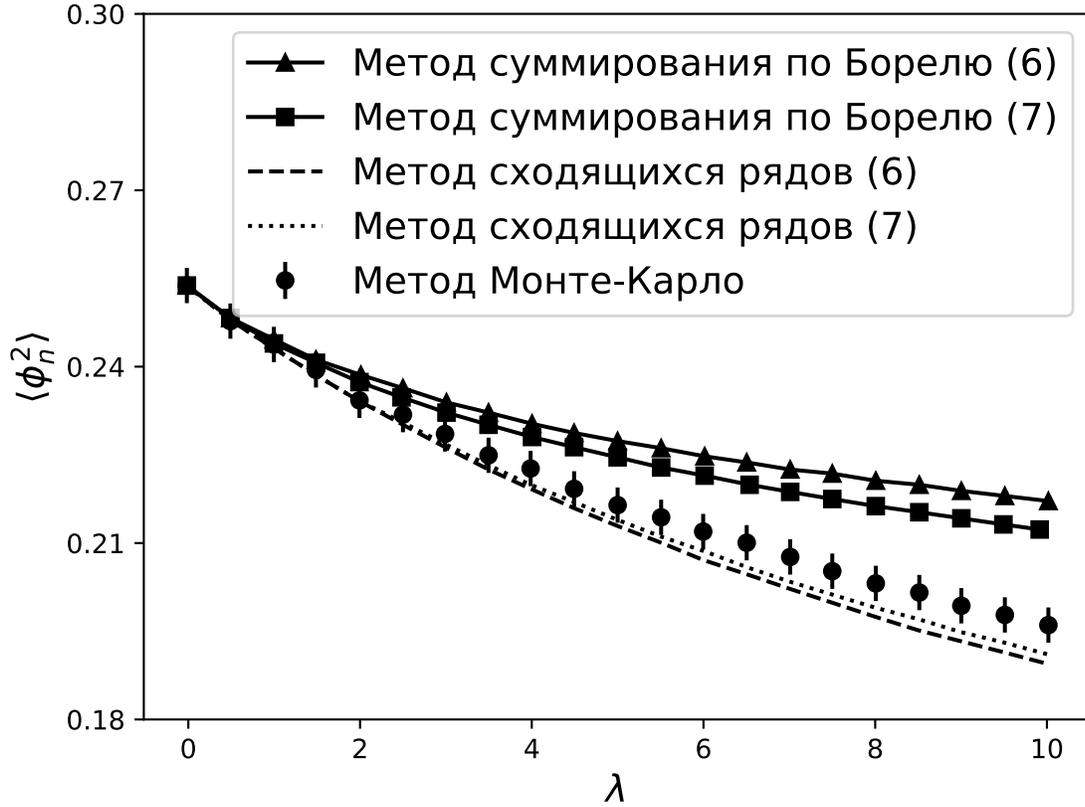


Рис. 4.5: Зависимость оператора $\langle \phi_n^2 \rangle$ от константы связи λ , вычисленного с использованием шести и семи членов ряда метода сходящихся рядов и метода суммирования по Борелю, а также результат экстраполяции метода Монте-Карло для функциональных интегралов, $D = 2$.

4.4 Связь с суммируемостью по Борелю

Применимость метода сходящихся рядов для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием, определенных на конечных решетках, была доказана в главе 3. Доказательство приведено для теории ϕ^4 , регуляризованной дополнительным нелокальным взаимодействием с исчезающей связью. Как упоминалось в разделе 4.1, такой подход неприменим к моделям, определенным на бесконечных решетках, поскольку регуляризация, используемая в главе 3, добавляет нелокальный член к действию. Модели с нелокальными и с локальными взаимодействием

ями масштабируются по-разному относительно объема решетки. Следовательно, в пределе бесконечного числа степеней свободы соответствующая аппроксимация локальных моделей нелокальными не гарантируется. Тем не менее, используется регуляризацию модели ϕ^4 моделью с нелокальным взаимодействием как мотивация для другого построения, обеспечивающего связь между применимостью метода сходящихся рядов для моделей, определенных на бесконечных решетках и суммируемостью по Борелю.

Рассмотрим модель, определяемую на бесконечной решетке действием

$$S_\gamma = S_2[\varphi] + S_4[\varphi] + \gamma(S_2[\varphi])^3, \quad (4.25)$$

где $S_2[\varphi]$ и $S_4[\varphi]$ определены согласно (4.20) и (4.21) соответственно и $\gamma \geq 0$ параметр модели. Для данной модели можно формально записать выражение для статсуммы аналогично (4.13)

$$Z_\gamma = \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int_0^\infty dt t^{V+4k-1} e^{-t^2 - \sigma t^4 - \gamma t^6} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{\sigma^{k-l} f_l}{\Gamma\left(\frac{V+4l}{2}\right)}. \quad (4.26)$$

Выражение (4.26) не имеет строго определения при $V \rightarrow \infty$. Однако, как было показано в главе 3, при $\gamma = 0$ для любого V существует, по крайней мере, пертурбативная инвариантность, позволяющая заменить V на $V + \tau = w$, где w конечно. В случае конечных решеток непрерывность Z_γ при $\gamma \rightarrow 0$ использовалась для обоснования замены V на $V + \tau = w$ в пертурбативном смысле. Поскольку пределы $V \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 0$ в общем случае не коммутируют, нет возможности провести доказательство тем же способом. Вместо того, чтобы пытаться регуляризовать модель, рассмотрим ряд (4.26). Переход к пределу $V \rightarrow \infty$ не осуществляется. Вместо этого выполним формальную подстановку $V \rightarrow w$ – как это делается в методе построения сходящихся рядов – и докажем, что это приводит к правильному ответу независимо от V , если Z_γ суммируема по Борелю. Действительно, рассматривая

асимптотику членов ряда, можно показать, что при $\gamma > 0$ ряд

$$Z_\gamma^w := \frac{1}{Z_0} \sum_k \frac{1}{k!} \int_0^\infty dt t^{w+4k-1} e^{-t^2 - \sigma t^4 - \gamma t^6} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{\sigma^{k-l} f_l}{\Gamma\left(\frac{w+4l}{2}\right)}. \quad (4.27)$$

имеет абсолютную сходимость. Повторное построение ряда для статсуммы модели (4.25) по константе связи λ дает другой абсолютно сходящийся ряд

$$Z_\gamma^w = \frac{1}{Z_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_0^\infty dt t^{w+4l-1} e^{-t^2 - \gamma t^6} \frac{f_l}{\Gamma\left(\frac{w+4l}{2}\right)}. \quad (4.28)$$

Равносильность (4.27) и (4.28) гарантируется их абсолютной сходимостью. Также абсолютная сходимость позволяет изменить порядок операций суммирования и интегрирования в (4.28)

$$Z_\gamma^w = \frac{1}{Z_0} \int_0^\infty dt t^{w-1} e^{-t^2 - \gamma t^6} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{4l} f_l / (l!)}{\Gamma\left(\frac{w+4l}{2}\right)}, \quad (4.29)$$

где $f_l / (l!)$ коэффициенты ряда теории возмущений. При $\gamma = 0$ выражение (4.29) дает ни что иное, как ряд, полученный методом суммирования по Борель-Лерою. Таким образом, возможность перехода к пределу $\gamma \rightarrow 0$ (или применение метода сходящихся рядов) следует из суммируемости ряда теории возмущений по Борелю.

4.5 Заключительные замечания к главе 4

В данной главе изучена применимость метода сходящихся рядов к системам с бесконечным количеством степеней свободы. Для модели ϕ^4 , определенной на одномерных и двумерных бесконечных решетках, представлены численные доказательства надежности метода сходящихся рядов. Вычисления показывают, что сходящийся ряд приближается к эталонным экстраполяциям Монте-Карло быстрее, чем соответствующее суммирование по Борелю.

Начиная с первых работ 1980-х годов [49], [50], [51], доказательство метода вычисления, основанного на использовании размерной регуляризации и метода сходящихся рядов для систем с бесконечным числом степеней, не было проведено строго. В диссертации показано, что применение размерной регуляризации эквивалентно дополнительной процедуре суммирования. Доказано, что это дополнительное суммирование сохраняет сходимость метода построения сходящихся рядов, если модель является суммируемой по Борелю. Следовательно, суммируемость по Борелю является достаточным условием корректности метода сходящихся рядов в пределе бесконечного количества степеней свободы.

Однако даже для моделей не суммируемых по Борелю (например, потенциал двойной ямы) можно записать соответствующее не гауссово начальное приближение, удовлетворяющее неравенству, аналогичному (4.5). Согласно результатам главы 3, последнее должно позволять строить сходящиеся ряды для моделей, не суммируемых по Борелю, определенных на конечных решетках. Результаты текущей главы предполагают, что аналогичная конструкция должна быть применима к моделям, не суммируемым по Борелю, определенных на бесконечных решетках.

В моделях квантовой теории поля важно всесторонне исследовать применимость метода сходящихся рядов. Теория ϕ^4 скалярного поля является суммируемой по Борелю в $D = 2, 3$ измерениях [91], [92]. Даже в этих случаях, требующих перенормировку конечного количества членов ряда теории возмущений, общее описание моделей должно быть аналогично рассмотренному в данной главе. Статус модели ϕ^4 при $D = 4$ до конца не определен: модель ϕ^4 может быть тривиальной при данной размерности пространства [93]. Вычисления бета-функции, основанные на прямом применении метода сходящихся рядов, вместе с размерной регуляризацией в противоположность [93] дают нетривиальную фиксированную точку, стабильную в разных порядках теории возмущений [50]. Вычисления, сочетающие ϵ -разложение со сходящимися рядами [55], не обоснованы строго, главным образом из-за отсутствия неравенств Соболева, необходимых для определения констант в негауссовом начальном приближении, в пространствах с дробными размерностями.

Применение метода, аналогичного сходящимся рядам, к калибровочным теориям поля было предложено в работе [5]. Феноменологические результаты дают мотивацию для продолжения исследований сходящихся рядов в применении к этому чрезвычайно сложному классу задач. Однако существует несколько дополнительных трудностей, не встречающихся в теориях скалярного поля, таких как непертурбативная фиксация калибровки или фермионные поля материи и/или призраков [94].

Глава 5

Заключение

Основные результаты, представленные в диссертации:

1. Произведено обобщение метода Монте-Карло для функциональных интегралов в моделях релятивистской квантовой динамики. Получено выражение для матрицы плотности системы, а также среднее значение кинетической энергии для вычислений на решетке. Выполнено сравнение результатов численного моделирования методом Монте-Карло для системы релятивистского осциллятора с аналитическими предсказаниями в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях. Полученные численные результаты демонстрируют справедливость применения построенного обобщения для релятивистских систем квантовой механики.
2. Исследован метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории возмущений для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на конечной решетке. Показано, что построенный ряд является пересуммированием ряда теории возмущений. Обнаружена внутренняя симметрия построенного сходящегося ряда, позволяющая значительно увеличить скорость сходимости. Рассмотрены две регуляризации построенного сходящегося ряда. С помощью введенных регуляризаций доказаны существование и конечность построенного вариационного ряда.
3. Исследован метод построения сходящихся рядов на основе ряда теории воз-

мущений для моделей скалярного поля с полиномиальным взаимодействием четной степени, определенных на бесконечной решетке. Показано, что условие применимости метода сходящихся рядов для моделей, определенных на бесконечной решетке, является условие суммируемости ряда теории возмущений по Борелю.

4. Численно исследовано применение метода построения сходящихся рядов к модели ϕ^4 скалярного поля, определенной на конечной и бесконечной решетках, выполнено сравнение результатов вычисления пропагатора с результатами применения метода суммирования по Борелю и метода Монте-Карло для функциональных интегралов. Полученные численные результаты демонстрируют корректность применения предложенного метода построения сходящихся рядов.

Список литературы

- [1] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. / Под ред. В. С. Барашенкова. Мир, 1968.
- [2] Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T. Path integrals. Moscow State University, 1990.
- [3] Rudin W. Functional analysis. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [4] Tiesinga E., Mohr P.J., Newell D.B., Taylor B.N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018 // Rev. Mod. Phys. 2021. 93. 025010.
- [5] Solovtsov I.L. New expansion in QCD // Phys. Lett. B. 1994. 327. 335 – 340.
- [6] Dyson F.J. Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1952. 85. 631 – 632.
- [7] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [8] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд. М.: Наука, 1984.
- [9] Guillou J.C.L., Zinn-Justin J. Large-order behaviour of perturbation theory. Current physics—sources and comments. North-Holland, 1990.
- [10] Lipatov L. N. Divergence of the perturbation theory series and the quasi-classical theory // Sov. Phys. JETP. 1977. 45. 216.

- [11] Казаков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В. Аналитическое продолжение результатов теории возмущений модели $g\varphi^4$ в область $g \geq 1$ // Теоретическая и математическая физика. 1979. 38, № 1. 15 – 25.
- [12] Kazakov D.I., Shirkov D.V. Asymptotic series in quantum field theory and their summation // Fortsch.der Phys. 1980. 28. 465.
- [13] Казаков Д. И. Об одном методе суммирования знакопостоянных асимптотических рядов // Теоретическая и математическая физика. 1981. 46, № 3. 348 – 360.
- [14] Zinn-Justin J., Jentschura U.D. Order-dependent mappings: Strong-coupling behavior from weak-coupling expansions in non-Hermitian theories // Journal of Mathematical Physics. 2010. 51, № 7. 072106.
- [15] Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. Вычисление функциональных интегралов с помощью сходящихся рядов // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. 3. 693 – 713.
- [16] Белокуров В.В., Соловьев Ю.П., Шавгулидзе Е.Т. Общий подход к вычислению функциональных интегралов и суммированию расходящихся рядов // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. 5. 363 – 383.
- [17] Belokurov V.V., Solov'ev Yu.P., Shavgulidze E.T. Method of approximate evaluation of path integrals using perturbation theory with convergent series. I // Theoretical and Mathematical Physics. 1996. 109, № 1. 1287 – 1293.
- [18] Belokurov, V.V., Solov'ev Yu.P., Shavgulidze E.T. Method for approximate evaluation of path integrals using perturbation theory with convergent series. II. Euclidean quantum field theory // Theoretical and Mathematical Physics. 1996. 109, № 1. 1294 – 1301.
- [19] Belokurov, V.V., Solov'ev, Yu.P., Shavgulidze, E.T. Perturbation theory with convergent series for functional integrals with respect to the Feynman measure // Russian Mathematical Surveys. 1997. 52. 392.

- [20] Rothe H.J. Lattice Gauge Theories: An Introduction. Singapore: World Scientific, 2005.
- [21] Creutz M., Freedman B.A. A statistical approach to quantum mechanics* // Ann. Phys. 1981. 132. 427.
- [22] Salpeter E.E. Mass Corrections to the Fine Structure of Hydrogen-Like Atoms // Phys. Rev. 1952. 87. 328.
- [23] Hall R.L., Lucha W. Schrödinger upper bounds to semirelativistic eigenvalues // J. Phys. A. 2005. 38. 7997.
- [24] Kowalski K., Rembielinski J. Relativistic massless harmonic oscillator // Phys.Rev. A. 2010. 81. 012118.
- [25] Kowalski K., Rembielinski J. Salpeter equation and probability current in the relativistic Hamiltonian quantum mechanics // Phys.Rev. A. 2011. 84. 012108.
- [26] Lammerzahl C. The pseudodifferential operator square root of the Klein–Gordon equation // J. Math. Phys. 1993. 34. 3918.
- [27] Foldy L.L. Synthesis of Covariant Particle Equations // Phys. Rev. 1956. 102. 568.
- [28] Kaldor U., Wilson S. Theoretical Chemistry and Physics of Heavy and Superheavy Elements. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [29] Filinov V.S., Ivanov Yu.B. Fortov V.E., Bonitz M., Levashov P.R. Color path-integral Monte-Carlo simulations of quark-gluon plasma: Thermodynamic and transport properties // Phys. Rev. C. 2013. 87. 035207.
- [30] Filinov V.S., Bonitz M., Ivanov Y.B., Ilgenfritz M., Fortov V.E. Thermodynamics of the quark-gluon plasma at finite chemical potential: color path integral Monte Carlo results // Contrib. Plasm Phys. 2015. 55. 203.

- [31] Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A.,. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films // *Science*. 2004. 306. 666.
- [32] Braguta V.V, Valgushev S., Polikarpov M., Ulybyshev M.V. Numerical simulation of graphene in an external magnetic field // *Physical Review B*. 2014. 89, № 24. 245404.
- [33] Braguta V. V., Goy V.A., Ilgenfritz E.M., Kotov A.Y., Molochkov A.V., Muller-Preussker M., Petersson B. Two-color QCD with non-zero chiral chemical potential // *Journal of High Energy Physics*. 2015. 6. 94.
- [34] Astrakhantsev N. Yu., Braguta V. V., Katsnelson M. I., Nikolaev A. A., Ulybyshev M. V. Quantum Monte Carlo study of electrostatic potential in graphene // *Phys. Rev. B*. 2018. 97. 035102.
- [35] Borneyakov V.G., Braguta V.V., Nikolaev A.A., Rogalyov R.N. Effects of dense quark matter on gluon propagators in lattice QCD // *Physical Review D*. 2020. 102, № 11. 114511.
- [36] Braguta V.V., Kotov A.Yu, Kuznedev D.D., Roenko A.A. Influence of relativistic rotation on the confinement-deconfinement transition in gluodynamics // *Physical Review D*. 2021. 103, № 9. 094515.
- [37] Astrakhantsev N.Yu, Braguta V.V., Kolomojets N.V., Kotov A.Yu, Kuznedev D.D., Nikolaev A.A., Roenko A. Lattice Study of QCD Properties under Extreme Conditions: Temperature, Density, Rotation, and Magnetic Field // *Physics of Particles and Nuclei*. 2021. 52, № 4. 536 – 541.
- [38] Ceperley D.M. Path integrals in the theory of condensed helium // *Rev. Mod. Phys.* 1995. 67. 279.
- [39] Albergo M. S., Kanwar G., Shanahan P. E. Flow-based generative models for Markov chain Monte Carlo in lattice field theory // *Phys. Rev. D*. 2019. 100. 034515.

- [40] Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Rudamenko R.A., Tarelkin A.A., Sysoev P.N., Polyakova R.V., Sadovnikova M.B. From Spin Glasses to Learning of Neural Networks // *Physics of Particles and Nuclei Letters*. 2022. 53. 834 – 847.
- [41] Fiziev, P.P. Relativistic Hamiltonian with square root in the path integral formalism // *Theor. Math. Phys.* 1985. 62. 186.
- [42] Redmount I.H., Suen W.M. Quantum dynamics of Lorentzian space-time foam // *Int. J. Mod. Phys. A*. 1993. 08. 1629.
- [43] Meurice Y. Simple Method to Make Asymptotic Series of Feynman Diagrams Converge // *Phys. Rev. Lett.* 2002. 88. 141601.
- [44] Kessler B., Li L., Meurice, Y. New optimization methods for converging perturbative series with a field cutoff // *Phys. Rev. D*. 2004. 69. 045014.
- [45] Krajewski T., Rivasseau V., Sazonov V. Constructive Matrix Theory for Higher Order Interaction // *arXiv:1712.05670*. 2017.
- [46] Sazonov V.K. Convergent perturbation theory for lattice models with fermions // *International Journal of Modern Physics A*. 2016. 31, № 13. 1650072.
- [47] Rivasseau V., Wang Z. How to resum Feynman graphs // *Annales Henri Poincare*. 2014. 15, № 11. 2069 – 2083.
- [48] Halliday I.G., Suranyi P. Anharmonic oscillator: A new approach // *Phys. Rev. D*. 1980. 21. 1529 – 1537.
- [49] Ushveridze A.G. Converging perturbational scheme for the field theory. (in Russian) // *Yad. Fiz.* 1983. 38. 798 – 809.
- [50] Shaverdyan B.S., Ushveridze A.G. Convergent perturbation theory for the scalar ϕ^{2p} field theories; The Gell-Mann-Low function // *Physics Letters B*. 1983. 123. 316 – 318.

- [51] Ushveridze A.G. Superconvergent perturbation theory for euclidean scalar field theories // *Physics Letters B*. 1984. 142, № 5-6. 403 – 406.
- [52] Turbiner A.V., Ushveridze A.G. Anharmonic oscillator: Constructing the strong coupling expansions // *Journal of Mathematical Physics*. 1988. 29, № 9. 2053 – 2063.
- [53] Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Y. Convergent series in variational perturbation theory // *Physics Letters B*. 1992. 297. 305 – 308.
- [54] Sisakian A.N., Solovtsov I.L. Variational perturbation theory: Anharmonic oscillator // *Z. Phys. C*. 1992. 54. 263 – 271.
- [55] Honkonen J., Nalimov M. Convergent expansion for critical exponents in the $O(n)$ -symmetric φ^4 model for large ε // *Physics Letters B*. 1999. 459, № 4. 582 – 588.
- [56] Leibbrandt G. Introduction to the technique of dimensional regularization // *Rev. Mod. Phys.* 1975. 47. 849 – 876.
- [57] Belokurov V.V., Ivanov A.S., Sazonov V.K., Shavgulidze E.T. Convergent Perturbation Theory for the lattice ϕ^4 -model // arXiv:1511.05959. 2015.
- [58] Ivanov A.S., Sazonov V.K. Convergent series for lattice models with polynomial interactions // *Nuclear Physics B*. 2017. 914. 43 – 61.
- [59] Sazonov V. Convergent series for polynomial lattice models with complex actions // arXiv:1706.03957. 2017.
- [60] Ivanov A. S., Novoselov A. A., Pavlovsky O. V. Relativistic path integral monte carlo: Relativistic oscillator problem // *International Journal of Modern Physics C*. 2016. 27, № 11. 1650133–1–1650133–14.
- [61] Ivanov A. S., Sazonov V. K. Infinite lattice models by an expansion with a non-gaussian initial approximation // *Physics Letters B*. 2019. 796. 52 – 58.

- [62] Li L., Meurice Y. Example of optimal field cut in lattice gauge perturbation theory // Phys. Rev. D. 2005. 71. 054509.
- [63] Li L., Meurice Y. A Tractable Example of Perturbation Theory with a Field Cutoff: the Anharmonic Oscillator // J. Phys. A. 2005. 38. 8139 – 8154.
- [64] Brydges D.C., Kennedy T. Mayer expansions and the Hamilton–Jacobi equation // J. Stat. Phys. 1995. 48. 19 – 49.
- [65] Abdesselam A., Rivasseau V. Trees, forests and jungles: a botanical garden for cluster expansions // Lect. Notes Phys. 1995. 446. 7.
- [66] Magnen J., Rivasseau V. Constructive ϕ^4 field theory without tears // Ann. Henri Poincaré. 2008. 9. 403 – 424.
- [67] Rivasseau V. Constructive field theory in zero dimension // Adv. Math. Phys. 2010. 2010. 180159.
- [68] Rivasseau V., Wang Z. Loop vertex expansion for ϕ^{2K} theory in zero dimension // J. Math. Phys. 2010. 51. 092304.
- [69] Rivasseau V., Wang Z. How to resum Feynman graphs // Ann. Henri Poincaré. 2014. 15. 2069 – 2083.
- [70] Rivasseau V., Wang Z. Corrected loop vertex expansion for ϕ_2^4 theory // J. Math. Phys. 2015. 56. 062301.
- [71] Feynman R.P., Kleinert H. Effective classical partition functions // Phys. Rev. A. 1986. 34. 5080 – 5084.
- [72] Dorigoni D. An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus // arXiv:1411.3585.
- [73] Spencer T. The Lipatov argument // Commun. Math. Phys. 1980. 74. 273 – 280.

- [74] Itzykson C., Parisi G., Zuber J.B. Asymptotic estimates in scalar electrodynamics // Phys. Rev. Lett. 1977. 38. 306 – 310.
- [75] Leroux P., Bergeron F., Labelle G. Combinatorial Species and Tree-like Structures. University Press, Cambridge, 1998.
- [76] Yuasa F., et al. Automatic computation of cross-sections in HEP: Status of GRACE system // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2000. 138. 18 – 23.
- [77] Batkovich D., Chetyrkin K., Kompaniets M. Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $o(n)$ -symmetric ϕ^4 model // Nucl. Phys. B. 2016. 906. 147 – 167.
- [78] Capitani S. Lattice Perturbation Theory // Phys. Rept. 2003. 382. 113 – 302.
- [79] Slavnov A.A. Fermi-Bose duality via extra dimension // Phys. Lett. B. 1996. 388. 147 – 153.
- [80] Slavnov A.A. Bosonization of Fermion Determinants // Phys. Lett. B. 1996. 366. 253 – 260.
- [81] Bakeyev T.D., Veselov A.I., Polikarpov M.I., Slavnov A.A. Test of a new bosonization algorithm for a simple one-dimensional model // Theoretical and Mathematical Physics. 1997. 113, № 1. 1255 – 1262.
- [82] Sazonov V.K. Non-hermitian bosonization // arXiv:1411.5046. 2014.
- [83] de Forcrand P. Simulating QCD at finite density // PoS. 2009. LAT2009. 010.
- [84] Gatttringer C., Langfeld K. Approaches to the sign problem in lattice field theory // International Journal of Modern Physics A. 2016. 31, № 22. 1643007.
- [85] Gavai R., Gupta S., Roy R. Taylor Expansions in Chemical Potential // Progress of Theoretical Physics Supplement. 2004. 153. 270.

- [86] Gattringer C., Kloiber T., Sazonov V.K. Solving the sign problems of the massless lattice Schwinger model with a dual formulation // Nuclear Physics B. 2015. 897. 732 – 748.
- [87] Aarts G. Complex Langevin dynamics and other approaches at finite chemical potential // Proceedings, 30th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2012): Cairns, Australia, June 24-29, 2012. 2012. 017.
- [88] Talenti G. Best constant in Sobolev inequality // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1976. 110, № 1. 353 – 372.
- [89] Aubin T. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev // Journal of Differential Geometry. 1976. 11, № 4. 573 – 598.
- [90] Cotsiolis A., Labropoulos N. Best constants in Sobolev inequalities on manifolds with boundary in the presence of symmetries and applications // Bulletin des Sciences Mathématiques. 2008. 132, № 7. 562 – 574.
- [91] Eckmann J.P., Magnen J., Seneor R. Phase space cell expansion and Borel summability for the Euclidean ϕ_3^4 theory // Commun. Math. Phys. 1974. 4. 251 – 271.
- [92] Magnen J., Seneor R. Phase space cell expansion and Borel summability for the Euclidean ϕ_3^4 theory // Commun. Math. Phys. 1977. 3. 237 – 276.
- [93] Frohlich J. On the triviality of $\lambda\phi^{**4}$ theories and the approach to the critical point in $d \rightarrow 4$ dimensions // Nucl. Phys. B. 1982. 200. 281 – 296.
- [94] Slavnov A.A. Covariant formulation of non-Abelian gauge theories without anticommuting variables // Physics Letters B. 1999. 469, № 1–4. 155 – 160.