ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
доктора физико-математических наук, профессора Богатого Семеона Антоновича на диссертационную работу Чикина Владимира Максимовича «Деформации метрик, локальные и глобальные аспекты», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 (01.01.04) — геометрия и топология

Диссертация В. М. Чикина посвящена исследованию деформаций метрик и функционалов длины. В работе рассматриваются некоторые виды деформаций функционалов длины и метрик, и изучается взаимосвязь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний при таких деформациях, а также изучаются свойства отображений пространства Громова—Хаусдорфа в себя, индуцированных деформациями метрик, заданными функциями, сохраняющими метрики.

Как известно, функционал длины задается классом допустимых кривых, длины которых можно измерять, и длиной, которая приписывает неотрицательное число каждой кривой из этого класса. Имея функционал длины, можно определить внутреннюю метрику, индуцированную этой структурой. В этом случае расстояние между любыми двумя точками будет равно точной нижней грани длин допустимых кривых, соединяющих эти точки. В свою очередь, каждая метрика индуцирует функционал длины, классом допустимых кривых которого являются непрерывные относительно этой метрики кривые, а длина каждой кривой определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую. Внутренние метрики, функционалы длины и их взаимосвязь достаточно хорошо изучены. Тем не менее, существует много открытых вопросов как о влиянии деформации функционала длины на соответствующую внутреннюю метрику, так и о влиянии деформации метрики на индуцированный ею функционал длины. К примеру, для многих типов пространств и типов деформаций метрики на сегодняшний день неизвестно, следует ли непрерывность расстояний из непрерывности длин кривых, а также следует ли непрерывность длин кривых из непрерывности расстояний. В настоящей диссертации разрабатывается специальная теория деформаций внутренних метрик, которая имеет нетривиальные приложения в различных областях, таких как геометрия финслеровых и римановых многообразий, теория минимальных сетей и геометрия пространства Громова—Хаусдорфа.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и списка публикаций по теме диссертации. Объем диссертации составляет 89 страниц, список литературы содержит 47 наименований.

Во **введении** приведена история рассматриваемых вопросов, обоснована актуальность темы, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, а также перечислены основные результаты и положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** даются предварительные сведения из теории функционалов длины и внутренних метрик, теории минимальных сетей и теории функций, сохраняющих метрики, а также приводятся необходимые определения, связанные с геометрией пространства Громова—Хаусдорфа.

Во **второй главе** работы приводятся примеры пространств и заданных на них функционалов длины, в которых при деформации этих функционалов длины из непрерывности изменения длин любых кривых не следует непрерывность изменения расстояний между точками, причем эти пространства могут быть как компактны, так и не компактны относительно соответствующих внутренних метрик (Утверждения 10 и 14). В утверждении 14, в частности, показано, что метрики при различных значениях параметра эквивалентны, поэтому задают одну топологию. В этом плане в формулировку утверждения 14 обязательно надо было вставить сравнение "первоначальной" и "полученной" топологий. Таким образом, показывается, что непрерывности длин кривых не достаточно для непрерывности расстояний между точками. Доказано более слабая полунепрерывность сверху (теорема 2). В этой главе формулируются специальные условия, которые могут быть наложены на функционалы длины, и доказывается их достаточность для непрерывности расстояний между точками пространства (теорема 1, 3-6). Далее, показывается, что эти достаточные условия выполнены на компактных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра, и, следовательно, расстояния между точками на таких многообразиях непрерывно зависят от этого параметра (параграф 2.6). Последний результат о непрерывности расстояний между точками обобщается на полные финслеровы и римановы многообразия.

В **третьей главе** диссертации демонстрируется приложение разработанных техник к теории минимальных сетей. Показывается, что для каждой точки полного риманова многообразия можно найти столь малую окрестность начала координат касательного пространства в этой точке, что для каждого конечного подмножества M из этой окрестности в касательном пространстве бинарные типы кратчайших деревьев, соединяющих образ M при экспоненциальном отображении на многообразии, содержатся среди бинарных типов кратчайших деревьев, соединяющих M в касательном пространстве(в касательном пространстве рассматривается соответствующая евклидова метрика). В частности, введено понятие малого правильного многоугольника на двумерном римановом многообразии, и полностью описаны кратчайшие сети, соединяющие вершины таких многоугольников. Помимо прочего, в работе получено полное описание типов кратчайших деревьев, лежащих в достаточно малых шаровых окрестностях точек полных римановых многообразий постоянной кривизны.

В **четвертой главе** диссертации изучаются преобразования метрических пространств, индуцированные функциями, сохраняющими метрики. Показывается, что непрерывныеи только непрерывные функции, сохраняющие метрики, корректно определяют отображения пространства Громова—Хаусдорфа в себя. Также показывается,что такие отображения пространства Громова—Хаусдорфа в себя обладают рядом интересных свойств, в частности, они непрерывны и являются липшицевыми отображениями метрических пространств тогда и только тогда, когда липшицевыми являются соответствующие функции, сохраняющие метрики. Далее, в главе описываются образы таких отображений пространства Громова—Хаусдорфа в себя, и показывается, что такие отображения сохраняют топологические свойства пространств, например, связность и линейную связность. Также в этой главе изучаются однопараметрические деформации произвольных метрик, заданные функциями, сохраняющими метрики, и доказывается критерий непрерывности длин кривых при таких деформациях метрик.

В **заключении** дается краткое описание полученных результатов.

Результаты диссертационной работы В. М. Чикина являются новыми, нетривиальными и носят теоретический характер. Результаты докладывались и обсуждались на различных математических конференциях и семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. К недостаткам работы можно отнести отсутствие нумерации результатов в автореферате. Это заставляет делать ссылки на текст диссертации при цитировании результатов (например, в этом отзыве), а не на более широко доступный материал - автореферат. Все результаты диссертации аккуратно и строго доказаны.

Основные полученные в диссертации результаты опубликованы в трех статьях в рецензируемых научных журналах. Диссертационная работа «Деформации метрик, локальные и глобальные аспекты» удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с приложениями № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова, а содержание работы соответствует специальности 01.01.04 — геометрия и топология. Считаю, что соискатель Чикин Владимир

Максимович несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология (физико-математические науки).

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей топологии и геометрии
Механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Семеон Антонович Богатый

04 сентября 2022

Подпись заверяю
нач. отдела кадров: [illegible] Т.А.