Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Рыжиков Платон Сергеевич

Энергия, импульс и угловой момент электромагнитного поля в средах с нелокальным нелинейным оптическим откликом

1.3.19. Лазерная физика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на кафедре общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	—	**Макаров Владимир Анатольевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты	—	**Розанов Николай Николаевич,** доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, ФГБУН «Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук», лаборатория атомной радиоспектроскопии, главный научный сотрудник
		Манцызов Борис Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», Физический факультет, профессор кафедры общей физики
		Фёдоров Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук» (ИОФ РАН), Отдел ТИАМ ЦЕНИ, главный научный сотрудник

Защита состоится 27 ноября 2024г. в 15:00 на заседании диссертационного совета МГУ.013.4 при МГУ им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы 1, стр. 62, корпус нелинейной оптики, аудитория им. С.А. Ахманова.

E-mail: diss.sov.31@physics.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовкий просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3153

Автореферат разослан «___» октября 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.013.4,
кандидат физико-математических
наук А. А. Коновко

Общая характеристика работы

Законы сохранения энергии, импульса и углового момента (момента импульса) играют ключевую роль при изучении физических систем. Это обусловлено возможностью их использования при получении и проверке решений различных физических задач. Выполнение этих законов сохранения связано с симметриями физических систем относительно смещений во времени и пространстве и вращения относительно некоторой оси. В электродинамике математическая формулировка каждого из этих законов имеет вид балансного уравнения, связывающего плотности энергии, импульса или углового момента с плотностями потоков этих величин, а также, в случае нарушения той или иной симметрии, содержащего в правой части слагаемые, определяющие изменение этих величин по мере распространения электромагнитного поля. Невозможно переоценить важность вида формул для плотностей энергии, импульса и углового момента и плотностей потоков этих величин для различных исследований. Плотность энергии электромагнитного поля определяет вид гамильтониана, используемого при квантовании поля в вакууме или в среде, а связанные с плотностью потока энергии величины используются при детектировании электромагнитного поля. Законы сохранения энергии и импульса накладывают ограничения на компоненты тензоров оптических восприимчивостей и определяют связь между ними. Плотность и плотность потока импульса определяют механическое воздействие электромагнитного излучения, а диагональные компоненты плотности потока импульса могут использоваться в качестве альтернативы плотности энергии при квантовом описании распространения света. Особый интерес представляет угловой момент света, с которым связано множество практических приложений. Среди них следует отметить задачи передачи информации и оптического манипулирования микроскопическими объектами.

Особый интерес представляет исследование преобразований углового момента электромагнитного поля и его отдельных составляющих при распространении лазерных пучков и импульсов в нелинейных средах, демонстрирующих нелокальность оптического отклика вещества. В таких средах происходит зависящее от интенсивности изменение поляризации излучения в процессе его распространения, с которой связана спиновая составляющая углового момента светового поля. При этом распределение поляризации пучка в плоскости его поперечного сечения может иметь достаточно сложный вид и меняться с координатой распространения, что сказывается на величине орбитальной составляющей углового момента. Математическое описание нелокальности нелинейного оптического отклика основано на учёте зависимости поляризации среды не только от напряжённости электрического поля в той же точке пространства, но и от поля в некоторой области вокруг неё. Во многих важных практических приложениях используется материальное уравнение, в котором поляризация среды представляется в виде ряда слагаемых, зависящих не только от компонент напряжённостей электрических полей взаимодействующих волн, но и от их пространственных производных в той же точке пространства. Обычно этот ряд ограничивают слагаемыми первого порядка малости по параметру пространственной дисперсии.

Выражения для плотностей энергии, импульса, углового момента и плотностей их потоков хорошо известны для электромагнитного поля в вакууме и в линейных средах без дисперсии. Учёт частотной дисперсии в линейных средах приводит к изменениям выражений для плотностей энергии, импульса и углового момента, однако не меняет существенным образом плотности потоков этих величин. Нелинейность локального оптического отклика влияет на все эти величины через входящую в них поляризацию среды. Для пучков с узким пространственным спектром, распространяющихся в линейных средах с пространственной дисперсией, выражения для компонент плотностей энергии, импульса и углового момента не изменяются существенным образом по сравнению со средами, не обладающими пространственной дисперсией, тогда как большие изменения содержатся в выражениях для плотностей потоков этих величин. Известны формулы для плотности и плотности потока энергии электромагнитного поля в линейных и нелинейных однородных непоглощающих средах в первом приближении по параметру пространственной дисперсии и полном пренебрежении частотной дисперсией. Аналитические выражения для плотностей импульса, углового момента и плотностей их потоков в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика практически не изучены. Их фундаментальная роль и практическая значимость позволяют говорить об **актуальности** темы диссертации.

Цели работы

1. Получение соотношений внутренней симметрии для компонент тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости четвертого и более высоких рангов, обеспечивающих выполнение в однородных и неоднородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии законов сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в случае как невырожденного по частотам, так и вырожденного нелинейного взаимодействия волн.
2. Нахождение явных аналитических выражений для плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в однородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии, демонстрирующих нелокальность оптической нелинейности произвольного порядка в случае как невырожденного по частотам, так и вырожденного взаимодействия волн.
3. Исследование возможности разделения углового момента электромагнитного поля в непоглощающих однородных средах произвольного класса пространственной симметрии с нелокальностью нелинейного оптического отклика на орбитальную и спиновую составляющие.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются следующие из системы уравнений Максвелла балансные уравнения, связывающие плотности энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля с плотностями потоков этих величин и отражающие фундаментальные законы сохранения, а также материальные уравнения, связывающие напряженности и индукции электрического и магнитного полей в нелинейных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии, обладающих нелокальностью нелинейного оптического отклика произвольного порядка. Предметом исследования являются особенности аналитических выражений для величин, входящих в отражающие законы сохранения энергии, импульса и углового момента балансные уравнения, которые появляются в результате учёта нелокальности нелинейного оптического отклика однородной непоглощающей среды произвольного класса пространственной симметрии.

Научная новизна полученных результатов

1. В первом приближении по параметру пространственной дисперсии получен полный набор соотношений внутренней симметрии для тензоров нелокальной нелинейной оптической восприимчивости четвертого и более высоких рангов в однородных и неоднородных непоглощающих средах любого класса пространственной симметрии в случае как невырожденного по частотам, так и вырожденного нелинейного взаимодействия волн.
2. Получены явные аналитические выражения для плотностей энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля и плотностей потоков этих величин, обусловленные нелокальностью нелинейного оптического отклика произвольного порядка однородной непоглощающей среды любого класса пространственной симметрии.
3. Выполнена оценка доли слагаемых, связанных с локальным и нелокальным кубическим по полю оптическим откликом однородной непоглощающей изотропной гиротропной среды, в формулах для плотностей энергии, импульса, углового момента и плотностей потоков этих величин в случае самовоздействия в ней эллиптически поляризованного пучка гауссова типа.
4. Показана возможность разделения плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля в однородной непоглощающей среде произвольного класса пространственной симметрии с нелокальностью нелинейного оптического отклика произвольного порядка на орбитальную и спиновую составляющие и найдены аналитические выражения для этих величин.

Практическая значимость работы

Полученные в работе соотношения внутренней симметрии межу компонентами тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости произвольного порядка вместе с ограничениями, накладываемыми пространственной симметрией среды, позволяют выразить все компоненты этих тензоров через конечное число независимых компонент. Это принципиально для корректной записи в первом приближении по параметру пространственной дисперсии материального уравнения, связывающего поляризацию среды с напряжённостями электрических полей взаимодействующих волн и их первыми пространственными производными, необходимой для дальнейшего решения уравнений распространения. Найденные выражения для компонент плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля, а также орбитальной и спиновой составляющих углового момента, не только необходимы для проверки корректности решения задач нелинейной оптики, но и дают возможность использовать законы сохранения энергии, импульса и углового момента для их эффективного решения. Развитые в диссертации методы получения связанных с нелокальностью оптического отклика добавок к классическим выражениям для энергии, импульса, углового момента и плотностей потоков этих величин в первом порядке по параметру пространственной дисперсии могут быть использованы для нахождения уточняющих их формул во втором и более высоких приближениях по этому параметру, а также для учета других оптических свойств среды.

Методология исследования

Соотношения внутренней симметрии между компонентами тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости произвольного порядка и компоненты плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в непоглощающих средах различных классов пространственной симметрии получены как результат преобразования отражающих законы сохранения энергии, импульса и углового момента соотношений, следующих из уравнений Максвелла и материальных уравнений, записанных в форме Ландау-Лифшица, к виду балансных уравнений. При разделении плотности и плотности потока углового момента на орбитальную и спиновую составляющие используется представление напряжённости электрического поля и индукции магнитного поля через скалярный и векторный потенциалы. Для получения численных оценок связанных с кубической нелинейностью и ее нелокальностью компонент плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и спиновой части углового момента при самовоздействии эллиптически поляризованного излучения в изотропной гиротропной непоглощающей среде использовалось параксиальное уравнение распространения, которое решалось методом прогонки.

Методология исследования также является основанием **достоверности** полученных результатов. Все основные результаты, представленные в диссертационной работе, прошли проверку во время рецензирования при публикации в рецензируемых журналах.

Положения, выносимые на защиту

I. Для однородных непоглощающих нелинейных сред произвольного класса пространственной симметрии, проявляющих нелокальность оптического отклика n-го порядка, в первом приближении по параметру пространственной дисперсии d/λ (d — масштаб проявления нелокальности оптического отклика, λ — длина волны) справедливы следующие утверждения:

1. Соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости $n+2$-го ранга, последний индекс которого связан с дифференцированием напряженности электрического поля по пространственным координатам, включают
   - симметрию по перестановке любых индексов, относящихся к электрическим полям на одинаковых частотах.
   - антисимметрию по перестановке первого и предпоследнего индексов с одновременной перестановкой первой и последней частот в последовательности частотных аргументов.
   - равенство нулю суммы соответственно деленных на произведение кратностей вырождения первой и последней частот в последовательностях частотных аргументов трех компонент этого тензора, связанных циклической перестановкой первого, последнего и находящегося между ними частотных аргументов, и такой же перестановкой индексов, соответствующих этим частотам.
2. Нелокальность нелинейного оптического отклика проявляется
   - в формулах для плотностей энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в виде дополнительных слагаемых, содержащих пространственные производные напряженности электрического поля, в выражении для входящей в них поляризации среды.
   - в формулах для компонент плотностей потоков энергии и импульса в виде новых слагаемых, содержащих компоненты тензора нелокальной оптической восприимчивости n-го порядка.
   - в формулах для компонент плотности потока углового момента в виде двух новых групп слагаемых, первая из которых содержит явно зависящие от пространственных координат слагаемые, обусловленные спецификой выражения для плотности потока импульса в среде, демонстрирующей нелокальность нелинейного оптического отклика, а вторая состоит из явно

независящих от пространственных координат слагаемых, не содержащих пространственных производных напряженности электрического поля.

3. Выражения для плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля могут быть представлены в виде трех групп слагаемых, первые две из которых являются соответственно орбитальной и спиновой составляющими этих величин, а интегральные вклады третьих групп слагаемых в формулы для полного углового момента и его потока равны нулю.

II. Отличительной чертой соотношений внутренней симметрии тензоров локальной нелинейной оптической восприимчивости $n+1$-го ранга и нелокальных нелинейных оптических восприимчивостей $n+p+1$-го ранга $(p = 1,2,\dots)$, описывающих пространственную дисперсию в p-ом приближении по параметру d/λ, в неоднородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии является

- возникновение в соотношениях, связывающих компоненты тензора нелокальной линейной восприимчивости $p+2$-го ранга, пространственных производных от компонент тензоров нелокальных оптических восприимчивостей всех более высоких рангов, чем $p+2$.
- возникновение в записанном в первом приближении по параметру пространственной дисперсии $(p = 1)$ соотношении внутренней симметрии тензора локальной оптической восприимчивости, описывающего нелинейность n-го порядка, первых пространственных производных от компонент тензора нелокальной оптической восприимчивости того же порядка.

III. При самофокусировке эллиптически поляризованного гауссова пучка в непоглощающей однородной изотропной гиротропной среде, демонстрирующей кубическую нелинейность, максимальная величина обусловленных нелинейным откликом вещества компонент тензора энергии-импульса Минковского достигается в тех точках пространства, где поле пучка имеет линейную поляризацию, и может достигать десяти процентов от компонент тензора энергии-импульса, связанных с локальным линейным оптическим откликом среды, в тех точках среды, где его интенсивность в пятьдесят раз превышает максимальную интенсивность в падающем пучке. Нелокальность оптического отклика среды приводит к ненулевому значению спиновых составляющих плотности углового момента и плотности его потока в тех точках пространства, где пучок поляризован линейно.

Апробация работы и публикации по теме диссертации

Результаты работы опубликованы в 8 статьях в рецензируемых международных научных журналах [1—8] и доложены на 20th International Conference Laser Optics ICLO 2022 (доклад “Energy and momentum of electromagnetic field in media with nonlocality of nonlinear optical response”), XII международной конференции по фотонике и информационной оптике 2023 (доклад "Влияние нелокальности нелинейного оптического отклика среды на поток углового момента распространяющегося излучения"), 21st International Conference Laser Optics ICLO 2024 (доклад "Nonlinear components of energy, momentum and angular momentum of Gaussian beams in self-focusing in isotropic gyrotropic media").

Личный вклад автора

Результаты диссертации получены автором лично. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук профессора В. А. Макарова, с которым определялось направление исследований и проводилось обсуждение полученных результатов. На всех этапах работы научную консультацию автору оказывал кандидат физико-математических наук К. С. Григорьев. Численное исследование самовоздействия эллиптически поляризованного гауссова пучка в изотропной гиротропной среде реализовано автором на основе работ, ранее выполненных доктором физико-математических наук В.А. Макаровым и кандидатами физико-математических наук К. С. Григорьевым и Н. А. Пановым.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка используемых обозначений и списка литературы. Объём работы составляет 102 страницы, в том числе 3 рисунка. Главы разбиты на параграфы. Первый параграф каждой главы содержит краткий обзор литературы по теме главы. Остальные параграфы содержат оригинальные результаты. В конце каждой главы в сжатой форме приводятся основные результаты изложенных в ней исследований.

Содержание работы

Глава 1. Внутренняя симметрия тензоров нелокальной оптической восприимчивости

Первая глава содержит вывод соотношений внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости, необходимых для корректной записи закона сохранения энергии электромагнитного поля в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика. В **первом параграфе** приводится обзор известных на данный момент соотношений внутренней симметрии для тензоров нелокальной линейной и нелинейной восприимчивости n-го порядка среды произвольного класса пространственной симметрии. Ввиду существенного различия полученных разными авторами немногочисленных соотношений внутренней симметрии возникает задача обобщения этих результатов и определения полного набора всех возможных соотношений внутренней симметрии. Этот параграф содержит также обзор проблем, связанных с корректной записью закона сохранения энергии в неоднородных непоглощающих средах с нелокальностью оптического отклика.

В диссертации используется подход Ландау-Лифшица, в котором напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}$ считается тождественно равной его индукции $\mathbf{B}$, а все возможные магнитные эффекты в среде учитываются в нелокальной зависимости индукции электрического поля $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(n)}$ от его напряжённости $\mathbf{E}$. Здесь $\mathbf{P}^{(n)}$ — поляризация среды, обусловленная нелинейностью среды n-го порядка. Если в ней распространяются $n+1$ волн на частотах ω_1, ω_2, …, ω_n и $\omega_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$, то спектральная компонента $P_i^{(n)}(\omega_{n+1},\mathbf{r})$ определяется формулой:

$$P_i^{(n)}(\omega_{n+1},\mathbf{r}) = \int \tilde{\chi}^{(n)}_{ii_1i_2\dots i_n}(\omega_{n+1};\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n,\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\dots,\mathbf{r}_n) \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(E_{i_k}(\omega_k,\mathbf{r}_k)d\mathbf{r}_k\right). \qquad (1)$$

Здесь $\hat{\tilde{\chi}}^{(n)}$ — тензор нелинейной восприимчивости n-го порядка, учитывающий пространственную дисперсию оптического отклика. Для упрощения дальнейших формул будем считать, что первые $m \le n$ частот ω_1, ω_2, …, ω_m различны, а каждая из частот ω_{m+1}, ω_{m+2}, …, ω_n совпадает с одной из частот среди ω_1, ω_2, …, ω_m. Интегрирование в (1) производится по всему пространству, но существенный вклад вносит только небольшая его область, характерный пространственный масштаб d которой намного меньше $\lambda = 2\pi c/\min(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n+1})$. В этом случае каждую напряженность электрического поля в (1) можно разложить в ряд Тейлора вблизи точки, задаваемой $\mathbf{r}$. Если подставить каждый из этих рядов в (1) и в полученном выражении ограничиться слагаемыми первого порядка по $d/\lambda << 1$ (первое приближение по параметру пространственной дисперсии), то материальное уравнение примет вид:

$$P_i^{(n)}(\omega_{n+1},\mathbf{r}) = \chi^{(n)}_{ii_1^n}(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^n;\mathbf{r}) \prod_{p=1}^{n} E_{i_p}(\omega_p,\mathbf{r}) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m} \gamma^{(n)}_{ii_1^{s-1}i_{s+1}^n i_s k}\left(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{s-1},\bar{\omega}_{s+1}^n,\omega_s;\mathbf{r}\right) \prod_{\substack{p=1\\p\neq s}}^{n} E_{i_p}(\omega_p,\mathbf{r})\partial_k E_{i_s}(\omega_s,\mathbf{r}). \qquad (2)$$

Здесь для краткости введены обозначения i_s^n для последовательности индексов i_s, i_{s+1}, …, i_n и $\bar{\omega}_s^n$ для последовательности частот ω_s, ω_{s+1}, …, ω_n. Локальная нелинейная восприимчивость среды $\hat{\chi}^{(n)}$ и нелокальная нелинейная восприимчивость среды $\hat{\gamma}^{(n)}$ определяются интегральными соотношениями, в которые входит используемая в (1) обобщённая восприимчивость $\hat{\tilde{\chi}}^{(n)}$. Материальные уравнения для $P_i^{(n)}(\omega_{1,2\dots,n},\mathbf{r})$ имеют вид, аналогичный (2). Если среда однородна, то тензоры $\hat{\chi}^{(n)}$ и $\hat{\gamma}^{(n)}$ в (2) не зависят от координат.

Во **втором параграфе** изложен вывод соотношений внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}(\omega_{n+1};\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ в однородной среде в случае, когда все его частотные аргументы различны (невырожденные по частоте процессы) [1]. Если поглощением света в среде на каждой из частот ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_{n+1} можно пренебречь и отсутствуют многофотонные резонансы на всех комбинациях частот взаимодействующих волн, то между компонентами тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ существуют определённые связи, обусловленные требованием выполнения закона сохранения энергии. Из записанных для такой среды уравнений Максвелла следует, что условие выполнения закона сохранения энергии имеет вид: $\int dV \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{Im}\left(\omega_l E_i^*(\omega_k) P_i^{(n)}(\omega_k)\right) = 0$. После подстановки в него нелокальной составляющей поляризации среды (2) интеграл должен обращаться в нуль для произвольного выбора независимых частот ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n и произвольных фаз электрических полей на этих частотах. Это оказывается возможным если компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(n)}_{i_{n+1} i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_l m}(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{l-1},\bar{\omega}_{l+1}^n,\omega_l) = \\
&= -\gamma^{(n)}_{i_l i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1} m}(-\omega_l;\bar{\omega}_1^{l-1},\bar{\omega}_{l+1}^n,-\omega_{n+1}),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(n)}_{i_{n+1} i_1^{l-1} i_l i_{l+1}^{n-1} i_n m}(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{l-1},\omega_l,\bar{\omega}_{l+1}^{n-1},\omega_n) + \\
&+\gamma^{(n)}_{i_l i_1^{l-1} i_n i_{l+1}^{n-1} i_{n+1} m}(-\omega_l;\bar{\omega}_1^{l-1},\omega_n,\bar{\omega}_{l+1}^{n-1},-\omega_{n+1}) + \\
&+\gamma^{(n)}_{i_n i_1^{l-1} i_{n+1} i_{l+1}^{n-1} i_l m}(-\omega_n;\bar{\omega}_1^{l-1},-\omega_{n+1},\bar{\omega}_{l+1}^{n-1},\omega_l) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Формула (3) является обобщением соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной линейной восприимчивости. Аналогичное соотношение, в котором тензор $\hat{\gamma}^{(n)}$ не зависит от частот взаимодействующих волн, было получено ранее для сред без частотной дисперсии (приближение Клейнмана). Равенство (4) ранее было известно только для тензора нелокальной квадратичной восприимчивости. В нём циклически переставлялись три частоты и соответствующие им нижние индексы тензора $\hat{\gamma}^{(2)}$.

В **третьем параграфе** приведён вывод соотношений внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}(\omega_{n+1};\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$, описывающего вырожденные по частоте нелинейные оптические процессы в однородных непоглощающих средах [4]. В этом случае среди его частотных аргументов есть одинаковые и использованное ранее интегральное условие выполнения закона сохранения энергии не позволяет однозначно определить связь между компонентами $\hat{\gamma}^{(n)}$. Обобщающие (3)–(4) соотношения внутренней симметрии в этом случае должны обеспечивать возможность преобразования непосредственно следующих из уравнений Максвелла соотношений

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\partial_t\mathbf{D} + \frac{1}{c}\mathbf{B}\partial_t\mathbf{B} + \mathrm{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{c}\partial_t[\mathbf{D}\times\mathbf{B}] + \mathbf{D}\times\nabla\times\mathbf{E} + \mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{B} = 0 \tag{6}$$

к виду однородных балансных уравнений

$$\frac{1}{c}\partial_t U + \partial_i S_i = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{c}\partial_t g_i + \partial_j G_{ij} = 0, \tag{8}$$

в которых U — плотность энергии электромагнитного поля, S_i — компоненты вектора плотности потока энергии, g_i — плотность импульса и G_{ij} — плотность потока импульса. Будем считать, что среди частот взаимодействующих волн только частоты ω_1, ω_2, …, ω_m являются различными и не равными $-\omega_{n+1}$, а каждая из частот $\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \ldots, \omega_n$ равна одной из частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ или $-\omega_{n+1}$. В этом случае подстановка связанной с нелокальностью оптического отклика среды составляющей поляризации (2) в формулы (5)–(6) приводит к необходимости выполнения соотношения (3) в вырожденных по частотам нелинейных процессах, а вместо (4) должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{F(-\omega_{n+1})F(\omega_n)}\gamma^{(n)}_{i_{n+1}i_1^{l-1}i_l i_{l+1}^{n-1}i_n k}(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{l-1},\omega_l,\bar{\omega}_{l+1}^{n-1},\omega_n)+\\
&+\frac{1}{F(\omega_l)F(-\omega_{n+1})}\gamma^{(n)}_{i_l i_1^{l-1}i_n i_{l+1}^{n-1}i_{n+1}k}(-\omega_l;\bar{\omega}_1^{l-1},\omega_n,\bar{\omega}_{l+1}^{n-1},-\omega_{n+1})+\\
&+\frac{1}{F(\omega_n)F(\omega_l)}\gamma^{(n)}_{i_n i_1^{l-1}i_{n+1}i_{l+1}^{n-1}i_l k}(-\omega_n;\bar{\omega}_1^{l-1},-\omega_{n+1},\bar{\omega}_{l+1}^{n-1},\omega_l)=0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $F(\omega_n)$ — кратность вырождения частоты ω_n в нелинейном процессе, определяемая как число равных ω_n частот справа от точки с запятой в последовательности частотных аргументов произвольной компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, увеличенное на единицу, если частота слева от точки запятой в этой последовательности равна $-\omega_n$. Помимо соотношений (3) и (9), тензор $\hat{\gamma}^{(n)}$ должен быть симметричен по перестановке любых индексов, относящихся к электрическому полю на одной и той же частоте, включая первый и предпоследний индексы. Из этого свойства и соотношения (3) также следует, что $\gamma^{(n)}_{i_{n+1}i_1^{l-1}i_l i_{l+1}^{n-1}i_n k}(-\omega_n;\bar{\omega}_1^{n-1},\omega_n)\equiv 0$.

В **четвёртом параграфе** получены соотношения внутренней симметрии тензоров нелокальной линейной оптической восприимчивости третьего и более высоких рангов в неоднородных непоглощающих средах [6]. В них материальное уравнение имеет вид (1), где $n=1$. Раскладывая электрическое поле под интегралом в ряд Тейлора и не ограничиваясь конечным числом слагаемых, можно получить материальное уравнение:

$$P_i(\omega,\mathbf{r}) = \chi_{ij}(\omega;\mathbf{r})E_j(\omega,\mathbf{r}) + \sum_{p=1}^{\infty}\gamma_{iji_1i_2\ldots i_p}(\omega;\mathbf{r})\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_p}E_j(\omega,\mathbf{r}), \tag{10}$$

в котором тензоры $\hat{\chi}$ и $\hat{\gamma}$ зависят от $\mathbf{r}$. Подстановка $P_i(\omega,\mathbf{r})$ в (5) позволяет убедиться, что для выполнения закона сохранения энергии компоненты зависящих от координат тензоров $\hat{\chi}$ и $\hat{\gamma}$ в неоднородной линейной среде должны быть связаны следующими соотношениями:

$$\chi_{ij}(\omega;\mathbf{r})-\chi^*_{ji}(\omega;\mathbf{r})=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_p}\gamma_{iji_1i_2\ldots i_p}(\omega;\mathbf{r})= \tag{11}$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p}\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_p}\gamma^*_{jii_1i_2\ldots i_p}(\omega;\mathbf{r}),$$

$$\gamma_{iji_1i_2\ldots i_p}(\omega;\mathbf{r})-(-1)^p\gamma^*_{jii_1i_2\ldots i_p}(\omega;\mathbf{r})=\partial_k\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{n+s}\times\right. \tag{12}$$

$$\left.\times\sum_{m=0}^{p}L^{(m,n)}\partial_{k_1}\ldots\partial_{k_{n+s}}\gamma_{iji_1i_2\ldots i_pkk_1\ldots k_{n+s}}(\omega;\mathbf{r})\right\}=(-1)^{p+1}\times$$

$$\times\partial_k\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{n+s}\sum_{m=0}^{p}L^{(m,n)}\partial_{k_1}\ldots\partial_{k_{n+s}}\gamma^*_{jii_1i_2\ldots i_pkk_1\ldots k_{n+s}}(\omega;\mathbf{r})\right\},$$

где $L^{(m,n)}=\sum_{q=0}^{m-1}L^{(m-q,n-1)}$ при $n\geq 1$ и $L^{(m,0)}=1$ при любом $m\geq 0$. Закон сохранения энергии электромагнитного поля не требует искусственного добавления слагаемых в материальное уравнение (10), сделанного В.М. Аграновичем и В.Л. Гинзбургом (Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, Наука, 1979) для неоднородных линейных сред. Однако одновременный учёт неоднородности и нелокальности оптического отклика приводит к более сложным соотношениям внутренней симметрии.

В **пятом параграфе** получены соотношения внутренней симметрии тензоров локальной и нелокальной нелинейных оптических восприимчивостей в неоднородных средах [6] в первом приближении по параметру пространственной дисперсии. В этом случае материальное уравнение имеет вид (2) и для получения соотношений внутренней симметрии явно зависящих от координат тензоров локальной и нелокальной нелинейных оптических восприимчивостей его нужно подставить в (5) и (6), после чего получить условия, позволяющие преобразовать (5) к виду балансного уравнения (7), а (6) — к виду неоднородного балансного уравнения $\frac{1}{c}\partial_t g_i+\partial_j G_{ij}=f_i$, где плотность сил f_i описывает изменение импульса электромагнитного поля, связанное с неоднородностью среды. Эти преобразования возможны, если компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ подчиняются соотношениям (3) и (9), а также являются симметричными по перестановке между собой любых индексов, относящихся к электрическому полю на одной и той же частоте. Компоненты тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ должны быть связаны соотношением:

$$\frac{1}{F(-\omega_{n+1})}\chi^{(n)}_{i_{n+1}i_1^n}(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^n;\mathbf{r})-\frac{1}{F(\omega_l)}\chi^{(n)}_{i_li_1^{l-1}i_{l+1}^{n+1}}(-\omega_l;\bar{\omega}_1^{l-1},\bar{\omega}_{l+1}^n,$$

$$-\omega_{n+1};\mathbf{r})=\frac{1}{2F(-\omega_{n+1})F(\omega_l)}\partial_k\left[\gamma^{(n)}_{i_{n+1}i_1^{l-1}i_{l+1}^ni_lk}(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{l-1},\bar{\omega}_{l+1}^n,\omega_l;\mathbf{r})-\right.$$

$$-\gamma^{(n)}_{i_l i_1^{l-1} i_{l+1}^n i_{n+1} k}(-\omega_l; \bar{\omega}_1^{l-1}, \bar{\omega}_{l+1}^n, -\omega_{n+1}; \mathbf{r})\Bigg], \qquad (13)$$

отличающимся от аналогичного соотношения для компонент тензора локальной нелинейной оптической восприимчивости в однородной среде наличием ненулевой правой части, связанной с пространственными производными тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости.

Глава 2. Законы сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика

Во второй главе описан вывод формул для плотностей и плотностей потоков энергии и импульса электромагнитного поля, распространяющегося в однородной непоглощающей нелинейной среде произвольного класса пространственной симметрии с нелокальностью оптического отклика. В **первом параграфе** приводится обзор работ, посвященных попыткам учесть специфику оптического отклика среды в выражениях для энергии и импульса электромагнитного поля.

Индукция $\mathbf{D}$ в (5) и (6) аддитивно содержит составляющие поляризации среды $\mathbf{P}^{(n)}$, поэтому плотности и плотности потоков энергии и импульса электромагнитного поля могут быть представлены в виде сумм: $U = \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}$, $S_i = \sum_{n=1}^{\infty} S_i^{(n)}$, $g_i = \sum_{n=1}^{\infty} g_i^{(n)}$, $G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} G_{ij}^{(n)}$. **Второй** и **третий** параграфы посвящены нахождению аналитических выражений для $U^{(n)}$, $S_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$ и $G_{ij}^{(n)}$ соответственно для невырожденных [2] (§ 2.2) и вырожденных [5] (§ 2.3) по частотам нелинейных оптических процессов, которые появляются в результате преобразований равенств, возникающих после подстановки в (5) и (6) материальных уравнений (2), к виду однородных балансных уравнений (7) и (8). Это удалось осуществить благодаря известным соотношениям внутренней симметрии тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ и полученным в первой главе соотношениям внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$. Определённые таким образом величины образуют тензор энергии—импульса Минковского. При этом полученные формулы для $U^{(n)}$, $S_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$ и $G_{ij}^{(n)}$ содержат функционально одинаковые комбинации компонент электрических и магнитных полей для каждой из частот взаимодействующих волн. Если процесс является вырожденным по частотам, эти величины можно получить двумя способами, основанными на двух различных подходах к формальному определению числа взаимодействующих волн. В первом, называемом далее *прямым подходом*, считается, что в обладающей нелинейностью n-го порядка среде взаимодействуют только $m+1$ волн с различными частотами, если каждая из частот ω_{m+1}, ω_{m+2}, …, ω_n совпадает с одной из частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ или $-\omega_{n+1}$ ($m \leq n$). Во втором, называемом далее *подходом, основанным на предельном переходе* от случая взаимодействия $n+1$ волн с различными частотами к случаю вырожденного по частотам нелинейного взаимодействия волн, считается, что в среде, демонстрирующей нелинейность n-го порядка, взаимодействует $n+1$ волн, частоты некоторых из которых могут совпадать. В итоге, выражения для $U^{(n)}$, $S_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$ и $G_{ij}^{(n)}$ записываются в виде:

$$U^{(n)} = \sum_{l=1}^{m} \left[1 - K(\omega_l)\right] P_i^{(n)*}(\omega_l) E_i(\omega_l) +$$

$$+ \left[1 - K(-\omega_{n+1})\right] P_i^{(n)}(\omega_{n+1}) E_i^*(\omega_{n+1}) + \text{c.c.}, \tag{14}$$

$$S_k^{(n)} = c^{-1} \sum_{l=1}^{m} \left[K(-\omega_{n+1}) E_i^*(\omega_{n+1}) \frac{\partial P_i^{(n)}(\omega_{n+1})}{\partial(\partial_k E_j(\omega_l))} \partial_t E_j(\omega_l) + \right.$$

$$+ K(\omega_l) E_i(\omega_l) \frac{\partial P_i^{(n)*}(\omega_l)}{\partial(\partial_k E_j^*(\omega_{n+1}))} \partial_t E_j^*(\omega_{n+1}) +$$

$$\left. + K(\omega_l) \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq l}}^{m} E_i(\omega_l) \frac{\partial P_i^*(\omega_l)}{\partial(\partial_k E_j(\omega_s))} \partial_t E_j(\omega_s) \right] + \text{c.c.}, \tag{15}$$

$$g_p^{(n)} = \sum_{l=1}^{m} e_{pij} P_i^{(n)*}(\omega_l) B_j(\omega_l) + e_{pij} P_i^{(n)}(\omega_{n+1}) B_j^*(\omega_{n+1}) + \text{c.c.}, \tag{16}$$

$$G_{pk}^{(n)} = \sum_{l=1}^{m} \left[\delta_{pk} K(\omega_l) P_i^{(n)*}(\omega_l) E_i(\omega_l) - P_k^{(n)*}(\omega_l) E_p(\omega_l) \right] +$$

$$+ \delta_{pk} K(-\omega_{n+1}) P_i^{(n)}(\omega_{n+1}) E_i^*(\omega_{n+1}) - P_k^{(n)}(\omega_{n+1}) E_p^*(\omega_{n+1}) -$$

$$- \sum_{l=1}^{m} \left(K(-\omega_{n+1}) E_i^*(-\omega_{n+1}) \frac{\partial P_i^{(n)}(\omega_{n+1})}{\partial(\partial_k E_j(\omega_l))} \partial_p E_j(\omega_l) + \right.$$

$$+ K(\omega_l) E_i(\omega_l) \frac{\partial P_i^{(n)*}(\omega_l)}{\partial(\partial_k E_j^*(\omega_{n+1}))} \partial_p E_j^*(\omega_{n+1}) +$$

$$\left. + K(\omega_l) \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq l}}^{m} E_i(\omega_l) \frac{\partial P_i^*(\omega_l)}{\partial(\partial_k E_j(\omega_s))} \partial_p E_j(\omega_s) \right) + \text{c.c.}. \tag{17}$$

Здесь $K(\omega_l) = [F(\omega_l)(m+1)]^{-1}$ при использовании прямого подхода и $K(\omega_l) = (n+1)^{-1}$ для подхода, основанного на предельном переходе. Если в среде, обладающей нелинейностью n-го порядка взаимодействуют ровно $n+1$ волн на различных частотах, оба подхода, естественно, приводят к одинаковому результату. Из формул (14)–(17) видно, что учёт нелокальности нелинейного оптического отклика среды в выражениях для плотности энергии и импульса электромагнитного поля сводится только к изменению вида входящей в них поляризации среды, тогда как плотности потоков этих величин содержат новые слагаемые, не пропорциональные поляризации. Явный вид формул (14)–(17) при генерации второй и третьей гармоник, суммарной и разностной частот и в случае самофокусировки лазерных пучков приведён в [2; 5] и тексте диссертации.

Четвёртый параграф посвящен оценке доли слагаемых, связанных с нелокальностью кубического по полю оптического отклика однородной непоглощающей изотропной гиротропной среды, в формулах для плотностей энергии и импульса электромагнитного поля и плотностей потоков этих величин при самовоздействии эллиптически поляризованного лазерного пучка гауссова профиля [7]. В случае распространения вдоль оси z параксиальное приближение позволяет ограничиться только величинами U, S_z, g_z и G_{zz}, выражения для которых можно записать в виде: $U = \varepsilon I\left(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)/2\pi$, $S_z = \varepsilon^{1/2} I\left(1-\alpha_1-\alpha_3/3\right)/2\pi$, $g_z = \varepsilon^{3/2} I\left(1+2\alpha_1+4\alpha_2/3+2\alpha_3/3\right)/2\pi$, $G_{zz} = \varepsilon I\left(1+\alpha_2/3\right)/2\pi$. Здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, $\alpha_1 = 4\pi^2\gamma_1 M/(\varepsilon\lambda)$, $\alpha_2 = 6\pi^2 I\left(\chi_1+\chi_2(1-M^2)\right)/(\varepsilon\lambda)$, $\alpha_3 = 6\pi^2\gamma_3 IM/(\varepsilon\lambda)$, $I(x,y,z) = |E_x|^2+|E_y|^2$ — нормированная интенсивность пучка, $M(x,y,z) = 2\mathrm{Im}(E_x E_y^*)/I$ — степень эллиптичности его эллипса поляризации. В этих формулах γ_1, $\chi_{1,2}$ и γ_3 — константы, определяющие все ненулевые компоненты тензоров $\hat{\gamma}^{(1)}$, $\hat{\chi}^{(3)}$ и $\hat{\gamma}^{(3)}$ соответственно.

Численное решение системы параксиальных уравнений для медленно меняющихся амплитуд циркулярно поляризованных компонент электрического поля, описывающей самовоздействие эллиптически поляризованного пучка с длиной волны λ и начальной шириной w, позволяет получить оценку величин α_2 и α_3. Эти параметры характеризуют отношения связанных с локальным и нелокальным кубическим откликом среды составляющих плотности энергии поля к связанной с локальным линейным откликом составляющей этой величины. Показано, что максимальная величина вкладов нелинейного оптического отклика среды в плотность и плотность потока энергии и импульса электромагнитного поля происходит в тех точках пространства, где в процессе распространения излучение становится линейно поляризованным. При использованных в диссертации и работе [7] параметрах пучка и среды на дистанции $z = z_{50}$, где интенсивность пучка на оси в 50 раз больше начального значения I_0, величина α_2 может достигать 0.1. Отношение α_3/α_2 достигает максимального значения $2\pi\gamma_3/\lambda\chi_1$ в тех точках пространства, где поляризация пучка становится круговой, причём при состояниях поляризации пучка, при которых эта величина положительная, самофокусировка происходит быстрее, чем при других M.

Глава 3. Закон сохранения углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика

В третьей главе рассматриваются особенности величин, связанных законом сохранения углового момента, возникающие благодаря нелокальности нелинейного оптического отклика однородной непоглощающей среды произвольного класса пространственной симметрии. **Первый параграф** содержит обзор работ, посвященных угловому моменту света в средах, обладающих различными особенностями оптического отклика. Также как и в формулах для энергии и импульса электромагнитного поля, учёт частотной дисперсии приводит к изменению выражения для плотности углового момента $J_i = e_{ijp}x_j g_p$, учёт пространственной дисперсии в случае линейного оптического отклика — к изменению плотности потока углового момента $\tilde{M}_{ik} = e_{ijp}x_j G_{pk}$, а локальная нелинейность среды проявляется через содержащие поляризацию слагаемые не только в J_i и $\tilde{M}_{ik}$, но и в плотности вращающего момента $\tau'_i = e_{ikp}G_{pk}$, определяющего изменение углового момента света при его распространении в анизотропной среде. Если среда обладает осью симметрии бесконечного порядка, то проекция вектора $\boldsymbol{\tau}'$ на эту ось равна нулю. В этом же параграфе обсуждаются работы, посвященные возможности разделения углового момента света на орбитальную (внешнюю) и спиновую (внутреннюю) составляющие.

Во **втором и третьем параграфах** на основе формально записанных с помощью (16) и (17) выражений для J_i и $\tilde{M}_{ik}$ для невырожденных [3] (§ 3.2) и вырожденных [5] (§ 3.3) по частотам нелинейных взаимодействий волн в однородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии, демонстрирующих нелокальность оптического отклика на внешнее электрическое поле, выводятся выражения для плотности потока углового момента и плотности вращающего момента, действующего на поле в анизотропной среде. Умножение закона сохранения импульса в форме (8) векторно на радиус-вектор $\mathbf{r}$ слева и приведение полученного результата к виду балансного уравнения позволяет получить соотношение $\frac{1}{c}\partial_t J_i + \partial_k \left[e_{ijp}x_j G_{pk}\right] = \tau'_i$, которое в отсутствие нелокальности оптического отклика полностью описывает закон сохранения углового момента электромагнитного поля. Если же оптический отклик среды нелокален, то нетрудно убедиться, что τ'_i не равно нулю в среде с симметрией $\infty\infty$ и является полной пространственной производной. Это свидетельствует о наличии в средах с нелокальностью оптического отклика n-го порядка дополнительной составляющей в выражении для плотности потока углового момента M_{ik}, т.е. закон сохранения углового момента света имеет вид балансного уравнения: $\frac{1}{c}\partial_t J_i + \partial_k M_{ik} = \tau_i$, где $J_i = e_{ijp}x_j g_p$, $M_{ik} = \tilde{M}_{ik} - S_{ik}$, а $\tau_i = \tau'_i + \tilde{\tau}_i$. Обусловленные нелокальностью нелинейного оптического отклика среды n-го порядка составляющие S_{ij} и $\tilde{\tau}_i$ удовлетворяют равенству $e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)} = \partial_j S_{ij}^{(n)} + \tilde{\tau}_i^{(n)}$, в котором $G_{pk}^{(n,nloc)}$ — связанная с нелокальным оптическим откликом среды составляющая плотности потока импульса (17). Получение явного аналитического выражения для $S_{ij}^{(n)}$ основано на преобразовании $e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)}$ с использованием полученных в первой главе соотношений внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости, правил дифференцирования произведений функций, а также описанных во второй главе подходов к учёту числа взаимодействующих волн. В результате $S_{ij}^{(n)}$ принимает вид:

$$S_{ij}^{(n)} = -e_{ikp}\left\{\sum_{s=1}^{m} K(\omega_s)\frac{\partial P_k^{(n)}(\omega_{n+1})}{\partial(\partial_j E_{i_s}(\omega_s))}E_p^*(\omega_{n+1})E_{i_s}(\omega_s)+\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\left[K(-\omega_{n+1})\frac{\partial P_k^{(n)*}(\omega_l)}{\partial(\partial_j E^*_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}))}E^*_{i_{n+1}}(\omega_{n+1})+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{m}K(\omega_s)\frac{\partial P_k^{(n)*}(\omega_l)}{\partial(\partial_j E_{i_s}(\omega_s))}E_{i_s}(\omega_s)\right]E_p(\omega_l)\right\}+\text{c.c.}. \tag{18}$$

Выражение для $\tilde{\tau}_i^{(n)}$ оказывается довольно громоздким, и здесь не приводится. Явный вид формулы (18) при генерации второй и третьей гармоник, суммарной и разностной частот и в случае самофокусировки лазерных пучков приведён в [3; 5] и тексте диссертации.

В **четвёртом параграфе** осуществлено разделение ранее полученных выражений для плотности и плотности потока углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика на орбитальные и спиновые составляющие, наиболее близкие к каноническим выражениям для плотностей и плотностей потоков орбитальной и спиновой составляющих углового момента света, получаемым на основе плотности функции Лагранжа электромагнитного поля. Используемый в настоящей работе метод основан на представлении компонент $\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{B}(\omega)$, входящих непосредственно (не через поляризацию среды) в выражения для плотности J_i и плотности потока M_{ik} углового момента, через скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$. В результате подстановки $\mathbf{E}(\omega) = -\nabla\varphi(\omega) - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}(\omega)$, $\mathbf{B}(\omega) = \nabla\times\mathbf{A}(\omega)$ в формулы для J_i и M_{ik}, а также изменения порядка дифференцирования в полученных выражениях, последние удаётся представить в виде сумм: $J_i = L_i + \sigma_i + F_i$ и $M_{ik} = L_{ik} + S_{ik} + F_{ik}$, слагаемые в которых удовлетворяют балансным уравнениям $\frac{1}{c}\partial_t\left(L_i + \sigma_i\right) + \partial_k\left(L_{ik} + S_{ik}\right) = \tau_i$ и $\frac{1}{c}\partial_t F_i + \partial_k F_{ik} = 0$. Их правые части дают основание утверждать, что сумма $L_i + \sigma_i$ позволяет получить то же значение углового момента в произвольном конечном объёме, что и J_i, а сумма $L_{ik} + S_{ik}$ позволяет получить то же значение потока углового момента через произвольную поверхность, как и при использовании M_{ik}. Ниже приведены выражения для этих слагаемых:

$$L_i = \sum_{\omega\in\Omega} e_{ijk}x_j D_l^*(\omega)\partial_k A_l(\omega) + \text{c.c.}, \tag{19}$$

$$\sigma_i = \sum_{\omega\in\Omega} e_{ijk}D_j^*(\omega)A_k(\omega) + \text{c.c.}, \tag{20}$$

$$F_i = -\partial_l\left(\sum_{\omega\in\Omega} e_{ijk}x_j D_l^*(\omega)A_k(\omega)\right) + \text{c.c.}, \tag{21}$$

$$L_{ik} = e_{ijp}x_j\sum_{\omega\in\Omega}\left[\delta_{pk}\left(\frac{1}{2}E_l(\omega)^*E_l(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}E_l^*(\omega)P_l^{(n)}(\omega) - \right.\right. \tag{22}$$

$$
-\frac{1}{2}B_l^*(\omega)B_l(\omega)\Bigg) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{\omega'\in\Omega\\ \omega'\neq\omega}} \frac{1}{n+1}E_l^*(\omega)\left(\frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial[\partial_k E_m(\omega')]}\partial_p E_m(\omega')+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial[\partial_k E_m^*(\omega')]}\partial_p E_m^*(\omega')\right) + e_{knl}B_l^*(\omega)\partial_p A_n(\omega) + D_k^*(\omega)\partial_p\varphi(\omega)\Bigg] + \text{c.c.},
$$

$$
F_{ik} = \sum_{\omega\in\Omega} e_{ijn}\left\{\partial_m\left[e_{mkl}B_l^*(\omega)x_j A_n(\omega)\right] + \frac{1}{c}\partial_t\left[x_j D_k^*(\omega)A_n(\omega)\right]\right\} + \text{c.c.}, \tag{23}
$$

$$
S_{ik} = \sum_{\omega\in\Omega}\Bigg(\delta_{ik}B_l^*(\omega)A_l(\omega) - B_i^*(\omega)A_k(\omega) + e_{ijp}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{\omega'\in\Omega\\ \omega'\neq\omega}} E_p^*(\omega)\times
$$

$$
\times\left(\frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial[\partial_k E_l(\omega')]}E_l(\omega') + \frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial[\partial_k E_l^*(\omega')]}E_l^*(\omega')\right)\Bigg) + \text{c.c.}. \tag{24}
$$

Здесь Ω — множество частот всех волн, взаимодействующих в некотором количестве нелинейных оптических процессов. Для простоты формулы (19)–(24) записаны при использовании подхода, основанного на предельном переходе.

В отсутствие нелокальности нелинейного оптического отклика формула (19) в точности совпадает с каноническим выражением для плотности орбитальной составляющей углового момента, (20) — с каноническим выражением для плотности спиновой составляющей углового момента, (22) — с каноническим выражением для плотности потока орбитальной составляющей углового момента, а (24) — с каноническим выражением для плотности потока спиновой составляющей углового момента. Это, а также наличие у (19) и (22) явной зависимости от пространственных координат и производных, а также отсутствие её в формулах (20) и (24), позволяет считать эти величины плотностями и плотностями потоков орбитальной и спиновой составляющих углового момента света в средах с нелокальностью нелинейного оптического отклика. Так как F_i и F_{ik} выражаются через полные производные, то интегралы от них по всему пространству равны нулю. В работах, посвященных разделению полного углового момента света и его потока на орбитальную и спиновую составляющие такие величины обычно отбрасываются. Явный вид формул (19)–(24) при самофокусировке лазерных пучков приведён в [8] и тексте диссертации.

В **пятом параграфе** выполнено сравнение вкладов спиновых составляющих плотности и плотности потока углового момента, связанных с локальным и нелокальным кубическим по полю оптическим откликом изотропной непоглощающей среды, с вкладами в эти величины, обусловленными её линейным локальным откликом, при самовоздействии в ней эллиптически поляризованного лазерного пучка гауссова профиля. В параксиальном приближении в случае распространения пучка вдоль оси z наибольшие значения имеют компоненты σ_z и S_{zz}, выражения для которых записываются в виде $\sigma_z = -\varepsilon^{3/2}I\lambda(M+\beta_1+\beta_2+\beta_3)/4\pi^2$, и $S_{zz} = -\varepsilon I\lambda(M+\beta_1/2+\beta_3/4)/4\pi^2$.

Здесь $\beta_1 = 8\pi^2\gamma_1/(\varepsilon\lambda)$, $\beta_2 = 4\pi\chi_1 IM/\varepsilon$, $\beta_3 = 8\pi^2\gamma_3 I(1+M^2)/(\varepsilon\lambda)$, а остальные величины определены в § 2.4. При этом в точках пространства, где излучение линейно поляризованно ($M = 0$), σ_z и S_{zz} не обращаются в нуль. Максимального значения $\beta_{2,3}$ достигают в тех точках пространства, где излучение циркулярно поляризованно. Для пучков, параметры которых использовались для численной оценки в § 2.4, β_2 может достигать $0.1M$. Отношение β_3/β_2, является малым и обычно не превышает одного процента.

Основные результаты и выводы

1. В рамках подхода Ландау-Лифшица к построению материальных уравнений в электродинамике сплошных сред получены соотношения внутренней симметрии тензора нелокальной нелинейной оптической восприимчивости n-го порядка ($n = 2,3,\dots$) в однородных непоглощающих средах всех классов пространственной симметрии в первом приближении по малому параметру пространственной дисперсии. Они включают в себя полную симметрию по перестановке любых индексов этого тензора, не требующих перестановки частотных аргументов, антисимметрию по перестановке первого и предпоследнего индексов с одновременной перестановкой первого и последнего частотных аргументов, а также равенство нулю суммы трёх компонент этого тензора, каждая из которых поделена на произведение кратностей вырождения первой и последней частот в последовательности частотных аргументов, с циклически переставленными (вместе с соответствующими частотам индексами) первым частотным аргументом, последним и произвольным частотным аргументом. Компоненты тензора нелокальной оптической восприимчивости, у которых первый частотный аргумент равен по величине и противоположен по знаку последнему тождественно равны нулю.
2. В рамках линейной оптики неоднородных непоглощающих сред произвольного класса пространственной симметрии получены соотношения внутренней симметрии тензоров локальной линейной оптической восприимчивости и нелокальных линейных восприимчивостей третьего и всех более высоких рангов. Их отличительной чертой, связанной с неоднородностью среды, является появление в соотношениях, связывающих компоненты тензора $p + 2$ ранга, где $p = 0,1,2,\dots$, пространственных производных от компонент тензоров нелокальных оптических восприимчивостей всех более высоких рангов. Учёт неоднородности линейных и нелинейных сред в первом приближении по малому параметру пространственной дисперсии не приводит к изменениям соотношений внутренней симметрии для тензора нелокальной оптической восприимчивости, но его пространственные производные содержатся в соотношении внутренней симметрии тензора локальной оптической восприимчивости.

3. Получены формулы для компонент плотностей и плотностей потоков энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля, распространяющегося в однородной непоглощающей среде произвольного класса пространственной симметрии, которая обладает нелокальностью нелинейного оптического отклика. В первом приближении по малому параметру пространственной дисперсии проявление нелокальности оптического отклика вещества сводится к учету в выражении для поляризации среды, входящей в формулы для плотностей энергии, импульса и углового момента электромагнитного поля в нелинейной среде без пространственной дисперсии, слагаемых, связанных с нелокальными нелинейными оптическими восприимчивостями. Выражения для компонент плотностей потоков энергии и импульса в средах с нелокальностью оптического отклика содержат новые слагаемые, не пропорциональные поляризации среды, а связанные с ней более сложным образом. Компоненты плотности потока углового момента содержат две группы слагаемых, обусловленных нелокальностью оптического отклика среды. Первая из них появляется из-за новых слагаемых в формуле для плотности потока импульса, а вторая, не зависящая явным образом от пространственных координат, возникает в результате анализа плотности вращающего момента, входящей в балансное уравнение.
4. Проведено разделение плотности и плотности потока углового момента света, распространяющегося в однородных непоглощающих средах произвольного класса пространственной симметрии, демонстрирующих нелокальность нелинейного оптического отклика любого порядка, на три составляющие. Первые две из них интерпретируются как орбитальная и спиновая составляющие плотности и плотности потока углового момента света. Интегральные вклады третьих составляющих соответственно в полный угловой момент и в его поток тождественно равны нулю.
5. Выполнена оценка доли связанных с нелокальностью кубического по полю оптического отклика однородной непоглощающей изотропной гиротропной среды слагаемых в формулах для плотностей энергии, импульса, углового момента электромагнитного поля и плотностей потоков этих величин при самовоздействии эллиптически поляризованных лазерных пучков гауссова профиля в непоглощающей изотропной гиротропной среде. Показано, что максимальная величина вкладов нелинейного оптического отклика среды в плотность и плотность потока энергии и импульса происходит в тех точках пространства, где в процессе распространения излучение становится линейно поляризованным, и может достигать величин, приблизительно равных одной десятой вкладов в компоненты тензора энергии–импульса Минковского электромагнитного поля, связанных с линейным локальным оптическим откликом среды на внешнее световое поле.

Список публикаций по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в Перечне изданий МГУ:

1. *Ryzhikov P. S.*, *Makarov V. A.* Intrinsic symmetry of nonlocal nonlinear optical susceptibilities // Laser Physics Letters. — 2022. — Т. 19, № 3. — С. 035401. — WoS JIF=1.4 / 0,56 п.л. / вклад соискателя 60%.
2. *Рыжиков П. С.*, *Макаров В. А.* Тензор энергии-импульса Минковского в нелинейной оптике сред с нелокальностью оптического отклика // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 2022. — Т. 162, № 1. — С. 45—54. — РИНЦ ИФ=1.18 / 0,80 п.л. / вклад соискателя 80%.
3. *Ryzhikov P. S.*, *Makarov V. A.* The additional optical angular momentum flux in media with nonlocality of nonlinear optical response // Laser Physics Letters. — 2022. — Т. 19, № 11. — С. 115401. — WoS JIF=1.4 / 0,90 п.л. / вклад соискателя 80%.
4. *Ryzhikov P. S.*, *Makarov V. A.* Intrinsic symmetry of nonlocal nonlinear optical susceptibility tensor in degenerate multi-wave mixing // Laser Physics Letters. — 2023. — Т. 20, № 10. — С. 105401. — WoS JIF=1.4 / 0,74 п.л. / вклад соискателя 70%.
5. *Рыжиков П. С.*, *Макаров В. А.* Энергия, импульс и угловой момент электромагнитного поля в среде с нелокальностью оптического отклика при вырожденном по частоте нелинейном взаимодействии волн // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 2024. — Т. 165, № 2. — С. 152—164. — РИНЦ ИФ=1.18 / 1,20 п.л. / вклад соискателя 70%.
6. *Ryzhikov P. S.*, *Makarov V. A.* Peculiarities of the intrinsic symmetry of linear and nonlinear optical susceptibility tensors in nonabsorbing inhomogeneous media with nonlocality of optical response // Laser Physics Letters. — 2024. — Т. 21, № 8. — С. 085401. — WoS JIF=1.4 / 0,71 п.л. / вклад соискателя 70%.
7. *Ryzhikov P. S.*, *Makarov V. A.* Effect of the Contribution of the Local and Nonlocal Optical Response of an Isotropic Gyrotropic Medium on the Components of the Minkowski Energy–Momentum Tensor of the Electromagnetic Field of the Self-Focusing Beam // Physics of Wave Phenomena. — 2024. — Т. 32, № 3. — С. 227—231. — WoS JIF=1.1 / 0,52 п.л. / вклад соискателя 70%.
8. *Рыжиков П. С.*, *Макаров В. А.* Орбитальная и спиновая составляющие плотности потока углового момента монохроматического излучения в непоглощающих средах с нелокальным нелинейным оптическим откликом // Вестник Московского Университета. — 2024. — Т. 79, № 4. — С. 2440403. — РИНЦ ИФ=0.51 / 0,86 п.л. / вклад соискателя 70%.

Рыжиков Платон Сергеевич

Энергия, импульс и угловой момент электромагнитного поля в средах с нелокальным нелинейным оптическим откликом

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____