

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Стручалин Глеб Игоревич**

**Адаптивные методы в квантовой томографии**

1.3.19. Лазерная физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на кафедре квантовой электроники физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Страупе Станислав Сергеевич**,  
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Богданов Юрий Иванович**,  
доктор физико-математических наук,  
ФГБУН Физико-технологический институт имени  
К. А. Валиева Российской академии наук, лабора-  
тория физики квантовых компьютеров,  
главный научный сотрудник

**Калачев Алексей Алексеевич**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
ФГБУН «Федеральный исследовательский центр  
«Казанский научный центр Российской академии  
наук», дирекция,  
директор

**Киктенко Евгений Олегович**,  
кандидат физико-математических наук,  
ООО «Международный центр квантовой оптики и  
квантовых технологий», группа квантовых инфор-  
мационных технологий,  
главный научный сотрудник

Защита диссертации состоится «27» июня 2024 г. в 12 часов 00 минут на за-  
седании диссертационного совета МГУ.013.4 Московского государственного  
университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские го-  
ры, д. 1, стр. 62, Корпус нелинейной оптики, аудитория им. С. А. Ахманова.  
E-mail: [diss.sov.31@physics.msu.ru](mailto:diss.sov.31@physics.msu.ru).

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки  
МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале:  
<https://dissovet.msu.ru/dissertation/3001>.

Автореферат разослан «\_\_» мая 2024 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
МГУ.013.4,  
канд. физ.-мат. наук

Коновко Андрей Андреевич

## Общая характеристика работы

Квантовая томография является неотъемлемой процедурой во многих областях квантовой информации. Она позволяет отлаживать квантовые схемы и вентили, создаваемые экспериментально, определять параметры каналов передачи квантовой информации, характеристики присутствующего шума. Под квантовой томографией в широком смысле понимают процедуру определения неизвестных квантовых состояний, процессов или их отдельных свойств посредством многократных измерений. При томографии состояний измерения проводятся над ансамблем идентично приготовленных квантовых систем. При томографии процессов заданное состояние подаётся на вход неизвестного процесса, затем результирующее состояние измеряется. После измерения  $N$  копий состояния происходит процедура обработки полученных данных для нахождения оценки состояния, процесса или интересующей величины.

Одной из целей разработки протоколов томографии является повышение точности оценки при заданном  $N$ . Этого можно достичь, двигаясь по двум направлениям: во-первых, за счёт оптимального выбора измерений, а во-вторых, за счёт модификации алгоритма обработки данных — статистической оценки. Оба подхода дополняют друг друга и могут применяться совместно. Оптимальные измерения, вообще говоря, зависят от неизвестного томографируемого состояния, и поэтому на практике прибегают к адаптивным схемам измерений, в которых новые измерения периодически рассчитываются на основе уже полученных результатов. Метод статистической обработки данных тоже может сильно влиять на точность оценок. В частности подбор адекватного ранга матрицы плотности томографируемого состояния способен качественно изменить скорость сходимости точности алгоритма томографии от числа измерений  $N$ .

В диссертационной работе основной упор сделан на различные адаптивные стратегии выбора оптимальных измерений (главы 2–4). Совместное влияние адаптивных измерений и метода оценивания на точность томографии отчасти рассмотрено в главе 4.

Другое направление развития квантовой томографии заключается в уменьшении количества  $P$  различных измеряемых проекторов. При полной томографии величина  $P$  ограничена снизу числом степеней свободы у матрицы плотности состояния или матрицы процесса, и если размерность исследуемой системы велика, то и  $P$  тоже. В стремлении уменьшить  $P$  интерес представляют методы неполной томографии, которые так или иначе используют априорную информацию о состоянии или процессе, например, ограничения на ранг матриц или их возможный функциональный вид. Также к неполной томографии можно отнести томографию отдельных свойств состояний, например, фиделити до заданного идеального состояния. Отсутствие необходимости восстанавливать полную матрицу плотности позволяет существенно уменьшить количество различных измерений  $P$ . Глава 5 посвящена экспериментальной проверке одного из

таких методов, который был недавно предложен для определения средних значений массива наблюдаемых.

**Актуальность работы** обусловлена как фундаментальным интересом к разработке и экспериментальной проверке новых методов квантовой томографии, так и возможностью практического применения результатов работы при создании и отладке квантовых вычислительных устройств.

**Степень разработанности** темы можно оценить как высокую. Зарождение квантовой томографии как процедуры определения неизвестного квантового состояния можно усмотреть в задаче различения квантовых состояний, которая исследовалась Холево и Хельстромом (Helstrom) в 1973 и 1976 году. В 1981 году Иванович рассматривает задачу определения состояний. Исторически в начале были разработаны методы статической томографии. В 1988 Вуттерс (Wootters) доказывает оптимальность измерений во взаимно несмещённых базисах. В 2004 году Рехачеком (Řeháček) предложен минимальный по числу измерений протокол томографии кубита и рассмотрено влияние ориентации набора измерений относительно истинного состояния. Параллельно с этим развиваются методы построения статистических оценок. В 1996 году Храдил (Hradil) использовал метод максимального правдоподобия для оценки квантовых состояний. Фудзивара (Fujiwara) в 2006 году публикует одну из первых теоретических работ по адаптивной квантовой томографии. Позднее в 2012 году была проведена экспериментальная проверка этого метода. Значительный вклад в развитие протоколов адаптивной байесовской томографии внесли работы Хусара (Huszár), Блюма (Blume) и Ферри (Ferrie). Дальнейшее развитие квантовой томографии идёт по пути увеличения размерности исследуемых систем и отхода от традиционных методов полной томографии, где восстанавливается матрица плотности целиком. Сюда можно отнести самонаправляемую (self-guided) и теньевую (shadow) томографию, сжатое считывание (compressive sensing), применение искусственных нейросетей для обучения модели квантового состояния.

**Целью диссертационной работы** является экспериментальная проверка и разработка протоколов адаптивной квантовой томографии с целью повышения точности восстановления неизвестного квантового состояния или процесса по сравнению с существующими подходами.

В рамках поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Расширить программную реализацию адаптивного байесовского протокола томографии со случая двумерных систем — кубитов — на случай состояний произвольной размерности.
2. Провести экспериментальную проверку адаптивной байесовской томографии состояний куквартов и однокубитовых процессов на примере поляризационных состояний бифотонов, получаемых в процессе спонтанного параметрического рассеяния.
3. Разработать протокол адаптивной томографии высокоразмерных двухкомпонентных систем, которому требуются только факторизованные

измерения и который может работать с любыми точечными оценками матрицы плотности.

4. Выполнить проверку разработанного протокола адаптивной томографии высокоразмерных двухкомпонентных систем в эксперименте с пространственными состояниями бифотонов, сравнить протокол с уже имеющимися методами адаптивной томографии.
5. Экспериментально исследовать свойства метода теневой томографии и точность оценок наблюдаемых, получаемых с его помощью, в эксперименте с пространственными состояниями фотонов.

**Объектом исследования** являются протоколы квантовой томографии состояний и процессов. **Предметом исследования** являются способы повышения точности оценок квантовых состояний и процессов, получаемых в ходе томографии, при заданном объёме статистики, включая адаптивные критерии выбора измерений и процедуры обработки результатов измерений.

**Научная новизна** заключается в следующих положениях:

1. Протокол адаптивной байесовской томографии квантовых состояний на основе энтропийного критерия оптимальности измерений экспериментально реализован и проверен на примере томографии состояний поляризационных кубитов.
2. Предложен алгоритм случайного блуждания на множестве чистых состояний с заданными свойствами (изотропность по направлениям, управление размером шага).
3. Протокол адаптивной байесовской томографии на основе энтропийного критерия оптимальности измерений обобщён на случай томографии квантовых процессов (каналов). Выполнена проверка в численных симуляциях и эксперименте с поляризационными кубитами. Отдельно исследован случай процессов с потерями, для которого показана необходимость модификации критерия оптимальности измерений.
4. Разработан новый протокол адаптивной томографии высокоразмерных состояний двухкомпонентных систем, использующий только факторизованные измерения, а также обладающий вычислительной простотой нахождения оптимальных измерений.
5. Сформулированы условия на протоколы томографии с факторизованными измерениями, необходимые для достижения максимальной скорости сходимости.
6. Экспериментально подтверждено свойство несмещённости оценок проекторов ранга 1 и фиделити в методе теневой томографии.
7. Показано, что в методе теневой томографии эмпирическое среднее даёт точность наравне с медианной оценкой, если объём статистики велик.
8. Предложен алгоритм равновероятной выборки стабилизаторных состояний, хранимых в виде вектора комплексных амплитуд, с вычислительной сложностью  $\mathcal{O}(n^3 2^n)$  от числа кубитов  $n$ .

**Теоретическая и практическая значимость** заключается в важности результатов работы как для фундаментальных исследований в области квантовой обработки информации, так и для практической реализации квантовых устройств и установок и их экспериментальной отладки.

**Методология диссертационного исследования** основана на широко используемых и испытанных методах выполнения эксперимента и численных расчётов. В протоколе адаптивной байесовской томографии для выбора оптимальных измерений использовалась энтропия Шеннона в качестве меры неопределённости знаний о системе. При вычислениях априорные и апостериорные распределения вероятностей аппроксимировались с помощью последовательной выборки по значимости. Для повторной выборки из распределений использовался алгоритм Метрополиса — Гастингса. Разработка адаптивного протокола томографии высокоразмерных двухкомпонентных систем основывалась на универсальном распределении фиделити для оценок матриц плотности. Для нахождения адаптивных измерений применялся оптимизационный алгоритм Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно. Оценка максимального правдоподобия вычислялась посредством метода ускоренного проективного градиентного подъёма. Качество оценок в теневой томографии характеризовалось коэффициентом корреляции Пирсона.

Поляризационные состояния пар фотонов, воплощающих собой два кубита, рождались в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) в нелинейных кристаллах. Для приготовления состояний одиночных фотонов также использовались СПР пары в схеме совпадений, где один фотон из пары служит для оповещения. Пространственные состояния фотонов создавались и преобразовались с помощью голограмм, отображаемых на жидкокристаллических фазовых модуляторах света. Источником фотонов являлось либо ослабленное одномодовое лазерное излучение (в эксперименте по теневой томографии), либо СПР при накачке нелинейного кристалла лазерным излучением с определённым модовым составом (при томографии высокоразмерных двухкомпонентных состояний).

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Адаптивный байесовский протокол квантовой томографии в эксперименте с поляризационными куквартами демонстрирует качественно лучшую зависимость точности  $d_B^2(N)$  от числа зарегистрированных пар фотонов  $N$ , чем стратегия случайных измерений, при томографии чистых и близких к ним состояний. С уменьшением чистоты состояния преимущество от использования адаптивного протокола тоже снижается, но адаптивный протокол всегда не хуже случайных измерений.
2. Адаптивный байесовский протокол квантовой томографии процессов в эксперименте демонстрирует преимущество по точности  $d_B^2(N)$  над стратегией случайных измерений для унитарных и близких к унитарным процессам, а также для не сохраняющих след процессов единичного ранга независимо от величины потерь.

3. Адаптивный байесовский протокол томографии состояний и процессов менее чувствителен к шумам по сравнению со стратегией случайных измерений, то есть позволяет достичь большей точности при наличии случайных инструментальных ошибок в экспериментальной установке. Достижение предельной точности, ограничиваемой шумами измерений, можно определить в эксперименте, отслеживая тестовую статистику  $\chi^2$ .
4. Для получения скорости сходимости  $1 - F \propto 1/N$  в случае несовпадения ранга истинного состояния  $R_s$  и ранга оценки  $R_e$  протокол томографии состояний размерности  $D$  должен содержать  $(R_e - R_s)(2D - R_e - R_s)$  независимых операторов измерений, каждый из которых ортогонален к проекторам на собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям истинного состояния.
5. Теневая томография позволяет строить несмещённые оценки средних значений проекторов единичного ранга с высоким коэффициентом корреляции с непосредственным измерением даже в случае существенно неполного набора измерений и вне зависимости от размерности пространства состояний исследуемой системы.

**Достоверность результатов** эксперимента обеспечивается использованием современных оптических компонентов, приборов и измерительного оборудования. Достоверность численных симуляций опирается на применение распространённых и протестированных программных средств (компиляторов, библиотек алгоритмов). Наблюдается сходство результатов эксперимента и численных расчётов, а также согласие с аналитически ожидаемым поведением. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Личный вклад.** Все результаты работы получены автором лично или при непосредственном участии. Автор принимал участие в постановке задач, разработке алгоритмов, обсуждении деталей программной реализации методов, выполнении экспериментов, представленных в диссертационной работе.

**Апробация результатов** работы проводилась на конференциях:

1. 23rd International Laser Physics Workshop (LPHYS'14), София, Болгария, 2014 год,
2. Quantum Information Processing and Communication (QIPC), Лидс, Англия, 2015 год,
3. 26th International Laser Physic Workshop (LPHYS'17), Казань, Россия, 2017 год,
4. International Workshop on Quantum Tomography (IWQT), Шанхай, Китай, 2018 год,
5. Международная конференция «Микро- и наноэлектроника – 2018» (ICMNE), Звенигород, Россия, 2018 год,
6. Международный форум «Микроэлектроника – 2020», Ялта, Россия, 2020 год,

7. Конференция по математическим методам квантовых технологий, Москва, Россия, 2020 год,

а также на семинарах кафедры квантовой электроники физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Из представленных конференций 6 являются международными.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 научных статьях общим объемом 9,30 п. л., опубликованных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в Перечне изданий МГУ:

1. Experimental adaptive quantum tomography of two-qubit states / G. I. Struchalin, I. A. Pogorelov, S. S. Straupe, K. S. Kravtsov, I. V. Radchenko, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2016. — Янв. — Т. 93, вып. 1. — С. 012103. — WoS JIF 2,9 / 2,17 п. л. / Создание экспериментальной установки, программная реализация алгоритмов томографии, проведение измерений и обработка результатов.
2. Experimental adaptive process tomography / I. A. Pogorelov, G. I. Struchalin, S. S. Straupe, I. V. Radchenko, K. S. Kravtsov, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2017. — Янв. — Т. 95, вып. 1. — С. 012302. — WoS JIF 2,9 / 2,05 п. л. / Создание экспериментальной установки, обобщение алгоритма томографии состояний на томографию процессов, обработка результатов измерений.
3. Adaptive quantum tomography of high-dimensional bipartite systems / G. I. Struchalin, E. V. Kovlakov, S. S. Straupe, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2018. — Сент. — Т. 98, вып. 3. — С. 032330. — WoS JIF 2,9 / 2,82 п. л. / Теоретическая разработка и программная реализация алгоритма томографии, выполнение численных симуляций, помощь в проведении измерений, обработка результатов.
4. Оценка свойств квантовых состояний с использованием «классических теней» / Г. И. Стручалин, Я. А. Загоровский, Е. В. Ковлаков, С. С. Страупе, С. П. Кулик // Наноиндустрия. — 2020. — Т. 13, S4 (99). — С. 671–672. — РИНЦ Импакт-фактор 0,274 / 0,20 п. л. / Программная реализация алгоритма томографии, доказательство теорем, помощь в проведении измерений и обработке результатов.
5. Experimental Estimation of Quantum State Properties from Classical Shadows / G. I. Struchalin, Ya. A. Zagorovskii, E. V. Kovlakov, S. S. Straupe, S. P. Kulik // PRX Quantum. — 2021. — Янв. — Т. 2, вып. 1. — С. 010307. — WoS JIF 9,7 / 2,06 п. л. / Программная реализация алгоритма томографии, доказательство теорем, помощь в проведении измерений и обработке результатов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 179 страниц текста с 40 рисунками и 14 таблицами. Список литературы содержит 123 наименования.

## Содержание работы

**Первая глава** содержит обзор литературы, описывающий алгоритмы и методы квантовой томографии, а также смежные теоретические понятия, необходимые для понимания тематики диссертации. Например, приведено понятие положительной операторно-значной меры (POVM) измерения и расстояний на множестве матриц плотности, с помощью которых можно оценивать точность томографии. В начале главы изложены методы статистической обработки результатов измерений. К ним относятся метод линейной инверсии, метод максимального правдоподобия и байесовский подход к восстановлению неизвестного квантового состояния. Также приводятся известные теоретические нижние границы точности оценок, получаемых в квантовой томографии, и описано влияние класса измерений на точность.

Разбор протоколов измерений начинается со статических методов, в которых набор измерений предопределён заранее. Уделено внимание важному набору измерений, а именно измерениям во взаимно несмещенных базисах. Описана экспериментальная реализация протоколов томографии с использованием факторизованных и перепутанных измерений на примере поляризационных кубитов (пар кубитов).

В разделе, посвящённом адаптивным протоколам томографии, резюмируются основные общие свойства таких протоколов. Так, набор измерений периодически подстраивается под томографируемое состояние. При этом для получения качественно лучшей точности оценки, измерительный базис должен быть выровнен с текущей оценкой квантового состояния. Наиболее сложными для восстановления оказываются близкие к чистым состояния.

Экспериментальная проверка различных методов томографии, выполненная в оригинальных главах диссертационной работы, в существенной части опирается на перепутанные пары поляризационных кубитов. В обзорной главе приведено несколько схем приготовления таких состояний с помощью процесса спонтанного параметрического рассеяния (СПР).

Помимо томографии квантовых состояний рассмотрена также томография квантовых процессов. В обзоре приводится математический аппарат описания квантовых преобразований, включая представление операторной суммой, представление в виде  $\chi$ -матрицы и изоморфизм Чоя — Ямиолковского. Даны определения расстояний между процессами, по которым можно оценивать точность результатов томографии. Введено понятие стандартной томографии процесса (в противовес томографии со вспомогательной подсистемой), проведена аналогия между томографией состояний и процессов.

**Вторая глава** посвящена адаптивной байесовской томографии состояний с использованием энтропийного критерия адаптивности на примере поляризационных кубитов. Впервые данный протокол был предложен в теоретической работе [1]. Экспериментальная реализация для одиночного поляризационного

кубита была проведена в [2]. Во второй главе диссертационной работы рассматривается случай двухкомпонентной системы, состоящей из пары кубитов. Двухкомпонентность ведёт к тому, что возможны два класса измерений: факторизованные и перепутанные (общего вида). Эксперимент проведён для случая факторизованных измерений, а сравнение с измерениями общего вида выполнено посредством численных симуляций.

В байесовской томографии рассчитывается апостериорное распределение вероятностей  $p(\rho|\mathcal{D}_N)$ , которое показывает насколько вероятно состояние  $\rho$  при условии наблюдаённых результатов измерений  $\mathcal{D}_N$ :

$$p(\rho|\mathcal{D}_N) \propto \mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)p(\rho), \quad (1)$$

где  $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)$  — функция правдоподобия, а  $p(\rho)$  — априорное распределение. Точечной оценкой состояния служит среднее по распределению  $\hat{\rho} = \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D}_N)}[\rho]$ . Погрешность оценки определяется как средний размер распределения  $d_B^2$  в выбранной метрике  $d_B^2(\rho, \hat{\rho})$ :

$$\bar{d}_B^2 = \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D})}[d_B^2(\rho, \hat{\rho})]. \quad (2)$$

В работе используется метрика Бюреса, основанная на фиделити  $F$ :

$$d_B^2(\rho, \hat{\rho}) = 2 - 2\sqrt{F(\rho, \hat{\rho})}, \quad F(\rho, \hat{\rho}) = \left( \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\hat{\rho}\sqrt{\rho}} \right)^2. \quad (3)$$

В рассматриваемом адаптивном протоколе последующее измерение выбирается таким образом, чтобы математическое ожидание энтропии Шеннона апостериорного распределения максимально уменьшилось после получения результатов выбранного измерения. Это соответствует максимизации информации о состоянии, получаемой по результатам измерения.

Схема экспериментальной установки по томографии поляризационных кубитов приведена на рисунке 1. Пара нелинейных кристаллов ВВО с перпендикулярными друг другу осями накачивается диодным лазером с длиной волны 408 нм. В процессе частотно-вырожденного СПР типа 1 в кристаллах рождается пара поляризационно запутанных фотонов. Степень перепутывания приготавливаемого состояния контролируется поляризацией накачки. Каждый фотон из пары является поляризационным кубитом и направляется в своё плечо экспериментальной установки, где происходит проекционное измерение в выбранном базисе. Фотоны регистрируются лавинными фотодетекторами D1–D4, подключенными к схеме учёта совпадений СС. Задающие измерительный базис фазовые пластинки WP1–WP4 установлены в моторизованных вращающихся оправках, управляемых компьютером.

В проведённом эксперименте адаптивный критерий выбора измерений (протокол  $FA$ ) сравнивался со стратегией случайных измерений ( $FR$ ), которая является неадаптивной. Произведена томография двух состояний: факторизованного  $|HH\rangle$  (оба фотона имеют горизонтальную поляризацию) и белловского

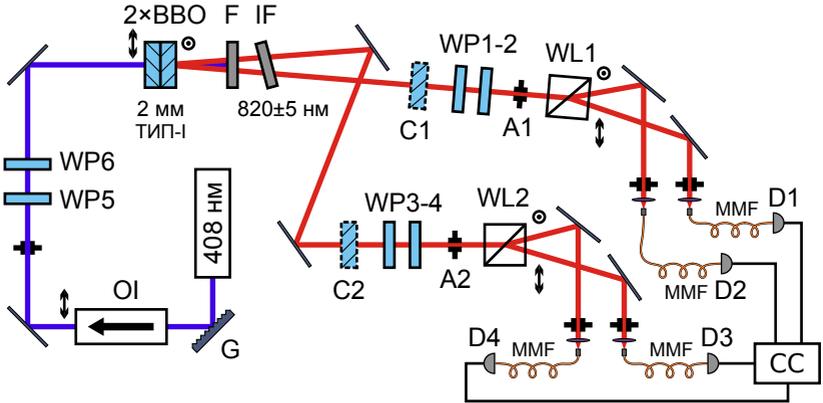


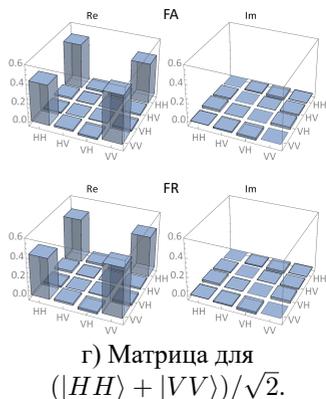
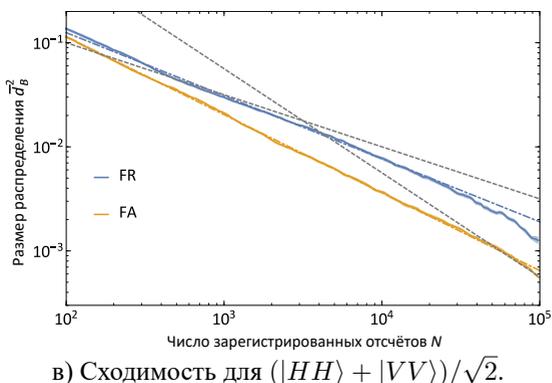
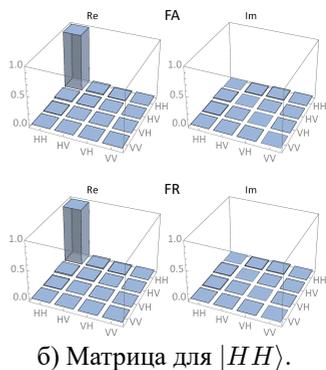
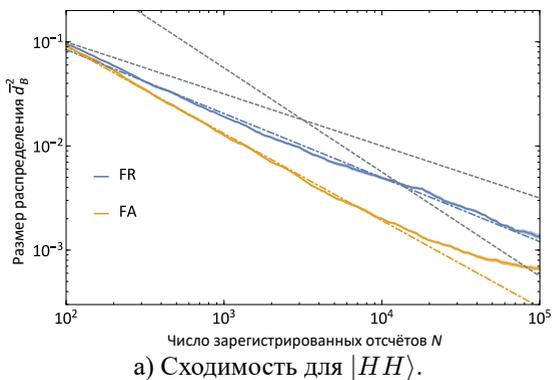
Рис. 1 — Схема экспериментальной установки по томографии состояний поляризационных кварцтов.

$(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$ . Построены зависимости размера распределения  $\bar{d}_B^2(N)$  от числа зарегистрированных отсчетов  $N$  для разных протоколов и приготовленных состояний (см. рисунок 2). Аппроксимация зависимостей степенной функцией  $\bar{d}_B^2(N) = cN^a$  показывает, что томография с использованием адаптивных измерений обладают качественно лучшей скоростью сходимости, так как показатель степени  $a$  меньше для адаптивного протокола независимо от входного состояния ( $a = -0.83(5)$  против  $a = -0.61(4)$  для  $|HH\rangle$ ;  $a = -0.74(9)$  против  $a = -0.60(6)$  для  $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$ ). Также показано, что при фиксированном  $N$  адаптивная томография точнее восстанавливает свойства томографируемого состояния, как, например, степень перепутывания concurrence [3] и чистота  $\text{Tr } \rho^2$ .

Экспериментально исследовано влияние инструментальных погрешностей на точность получаемых оценок  $\hat{\rho}$ . Для этого использовалась следующая модель шума: каждый раз при повороте фазовой пластинки WP1–WP4 её положение выставляется на угол  $\theta_i + \delta\theta_i$  вместо точного значения угла  $\theta_i$ , которое используется при построении оценок. Величина  $\delta\theta_i$  является случайной, распределённой равномерно на отрезке  $[-\Delta\theta, \Delta\theta]$ . Для каждой амплитуды шума  $\Delta\theta \in \{0^\circ, 3^\circ, 5^\circ\}$  выполнено по  $K = 10$  проходов томографии с применением адаптивных и случайных измерений. Точность томографии определялась как средний разброс  $d_{\text{spr}}^2(N)$  результатов от прохода к проходу:

$$d_{\text{spr}}^2(N) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_B^2(\hat{\rho}_k(N), \sigma(N)) \quad (4)$$

где  $\hat{\rho}_k(N)$  — оценка, полученная на шаге  $N$  при  $k$ -ом запуске, и  $\sigma(N) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k(N)$  — средняя оценка по  $K$  запускам. При умеренном объёме статистики  $N \lesssim 10^3$  различия в сходимости между обоими протоколами не



$FR$  — случайные измерения,  $FA$  — адаптивные.

Рис. 2 — Усреднённые экспериментальные зависимости размера апостериорного распределения  $d_B^2$  от числа зарегистрированных совпадений  $N$  для (а) факторизованного и (в) перепутанного состояния. Жирные линии — размер распределения, пунктир — аппроксимация степенной функцией вида  $d_B^2(N) = cN^a$ , а штрих-пунктир — зависимости  $\propto N^{-1/2}$  и  $\propto N^{-1}$ , отложенные для сравнения. На рисунках (б) и (г) показаны усреднённые матрицы плотности, найденные по результатам томографии при  $N = 10^5$ . Слева изображена вещественная часть матричных элементов, справа — мнимая.

наблюдается. Но когда зависимости  $d_{\text{spr}}^2(N)$  выходят на насыщение для больших  $N$ , шумовой порог для  $FA$  располагается ниже. Таким образом, предельно достижимая точность томографии выше для адаптивного протокола при прочих равных. С ростом  $\Delta\theta$  предельные значения разброса  $d_{\text{spr}}^2$  для случайного и адаптивного протокола сближаются. В проведённом эксперименте разница становится несущественной при  $\Delta\theta = 5^\circ$ .

На рисунке 2а можно заметить, что кривая для адаптивного протокола при  $N \gtrsim 10^4$  отклоняется от степенной зависимости и как будто выходит на насыщение. Анализ этого явления показал, что такое поведение не есть ошибка эксперимента, так как оно также обнаруживается в численных симуляциях. Причина замедления скорости сходимости кроется в том, что матрица плотности томографируемого состояния обладает (практически) вырожденным спектром собственных значений. В симуляциях продемонстрировано, что в начале зависимость действительно выходит на плато, но затем асимптотическая сходимость  $d_B^2 \propto 1/N$  восстанавливается. Для борьбы с возникновением плато было предложено использовать априорное распределение, равномерное в симплексе собственных значений, вместо распределения, порождённого метрикой Бюреса. Последнее применялось в эксперименте и рекомендовалось в литературе. Изменение априорного распределения может улучшить точность томографии примерно на два порядка для некоторых состояний. Стоит отметить, что сказанное относится к факторизованным измерениям. Для измерений общего вида плато не проявляется и всегда наблюдается сходимость  $1/N$ .

С целью выяснения влияния класса измерений (факторизованные или общего вида) на точность томографии были проведены численные симуляции четырёх протоколов:  $FR$ ,  $FA$ ,  $GR$  и  $GA$ , где  $F$  означает факторизованные измерения,  $G$  — общего вида,  $R$  — случайные,  $A$  — адаптивные. В среднем для чистых истинных состояний точность соотносится как  $GA = FA > GR = FR$ , где знак «больше» означает «выше точность». При этом для адаптивных протоколов наблюдается сходимость  $d_B^2 \propto 1/N$ , а для случайных  $d_B^2 \propto 1/\sqrt{N}$ . Картина качественно меняется для смешанных состояний, распределённых равномерно по мере Бюреса:  $GA > FA = GR \gtrsim FR$ . Только  $GA$  обладает сходимостью  $d_B^2 \propto 1/N$ , для остальных протоколов зависимость близка к  $d_B^2 \propto 1/N^{3/4}$ . Отметим, что ранее сходимость  $1/N^{3/4}$  была предсказана теоретически для неадаптивной томографии смешанных состояний одиночных кубитов [4].

В третьей главе алгоритм адаптивной байесовской томографии переносится на случай томографии квантовых процессов, действующих над одиночными поляризационными кубитами.

Описание квантового процесса  $\mathcal{E}(\rho)$ , действующего на входное состояние  $\rho$  размерности  $D$ , даётся его  $\chi$ -матрицей размера  $D^2 \times D^2$ , которая как и матрица плотности является эрмитовой и неотрицательно определённой, однако, её след не нормирован и ограничен сверху:  $\text{Tr } \chi \leq D$ . Процессы можно разделить на два типа: сохраняющие след, для которых  $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho) = 1$  (отсюда также следует  $\text{Tr } \chi = D$ ), и каналы с потерями с  $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho) < 1$ . След выходной матрицы плотности  $\mathcal{E}(\rho)$

интерпретируется как вероятность осуществления процесса. В поляризационной оптике примером канала с потерями является поляризатор.

По аналогии с байесовской томографией состояний вводится апостериорное распределение  $p(\chi|\mathcal{D}_N)$  на множестве  $\chi$ -матриц, которое рассчитывается по формуле Байеса. В качестве оценки процесса берётся средняя по распределению  $\chi$ -матрица, а погрешность вычисляется как размер распределения по обобщённой метрике Бюреса [5]:

$$d_B^2(\chi_{\mathcal{E}}, \chi_{\mathcal{F}}) = \text{Tr} \chi_{\mathcal{E}} + \text{Tr} \chi_{\mathcal{F}} - 2 \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\chi_{\mathcal{E}}} \chi_{\mathcal{F}} \sqrt{\chi_{\mathcal{E}}}}. \quad (5)$$

Хотя  $\chi$ -матрица процесса очень похожа по свойствам на матрицу плотности состояния, различия в нормировке приводят к тому, что алгоритм байесовской томографии необходимо модифицировать. Например, использованные априорные распределения на множестве матриц плотности не подходят, так как множество  $\chi$ -матриц для сохраняющих след процессов изоморфно лишь подмножеству матриц плотности. Для процессов с потерями ситуация усложняется, так как нормировка следа имеет характер неравенства  $\text{Tr} \chi < D$ .

В диссертационной работе процедура генерации априорного распределения для процессов основана на том факте, что произвольный сохраняющий след квантовый процесс над системой размерности  $D$  можно рассматривать как унитарную динамику над расширенной системой размерности  $D^3$ . Для унитарных матриц существует мера Хаара, которая естественным образом определяет равномерное распределение. Переходя от унитарной динамики к представлению  $\chi$ -матрицей, получим индуцированное априорное распределение на множестве  $\chi$ -матриц. Для несохраняющих след процессов идея остаётся схожей, но расширение происходит до унитарных матриц размерности  $D^3 + D$ .

Прямое использование энтропийного критерия адаптивности для несохраняющих след процессов также затруднено на практике. Дело в том, что для учёта потерь непосредственно в исследуемом процессе, игнорируя потери в схеме детектирования или приготовления состояний, необходимо схему регистрации совпадений перевести в режим накопления отсчётов в течение фиксированного времени (вместо накопления до фиксированной суммы событий). В проведённом эксперименте статистика совпадений является пуассоновской, отсюда в критерии адаптивности нужно вычислять энтропию распределения Пуассона, для которой нет выражений в замкнутой форме и требуется вычисление бесконечных рядов. Заметим, что для сохраняющих след процессов распределение отсчётов сводится к мультиномиальному, для которого такой проблемы не возникает. Суммирование рядов значительно замедляет программную реализацию протокола томографии, поэтому в работе решено было прибегнуть к эвристическому критерию, который по сложности вычислений эквивалентен энтропийному критерию для случая отсутствия потерь.

Рассматриваемый протокол адаптивной байесовской томографии квантовых процессов был проверен экспериментально с помощью установки, изображённой на рисунке 3. Пары фотонов, рождённые в процессе СПР, используются

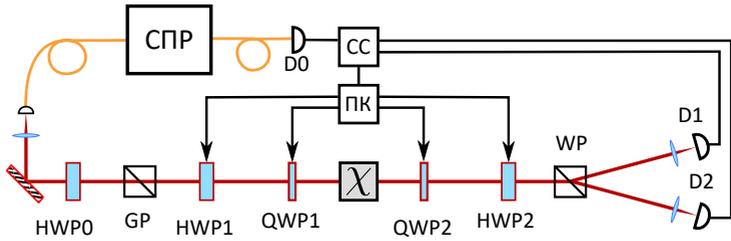


Рис. 3 — Схема экспериментальной установки по томографии процессов над поляризационными кубитами.

для условного приготовления одиночных фотонов (один фотон является триггером). Фазовые пластинки, установленные в моторизированных вращающихся подвижках, позволяют приготовить произвольное чистое входное состояние поляризационного кубита и задать любое проекционное измерение состояния после квантового процесса.

Томография проводилась для различных типов процессов: унитарное преобразование (фазовая пластинка), процесс с декогеренцией (многомодовый световод), процесс с изотропными потерями (нейтральный фильтр с ослаблением 3 дБ), процесс с зависящими от входного состояния потерями (линейный поляризатор). Для адаптивного протокола и стратегии случайных измерений были построены зависимости размера апостериорного распределения  $\bar{d}_B^2(N)$  от числа зарегистрированных совпадений  $N$ , усреднённые по 10 запускам томографии.

Результаты аппроксимации полученных зависимостей степенной функцией вида  $cN^a$  в диапазоне  $10^2 \leq N \leq 10^5$  представлены в таблице 1. Для всех процессов, кроме световода, показатель степени  $a$  у адаптивных измерений меньше по сравнению со случайными, что свидетельствует о лучшей точности оценки  $\chi$ -матрицы. Причина такого поведения в том, что все процессы, кроме световода, имеют в теории единичный ранг  $\text{rank } \chi = 1$  (экспериментально полученные матрицы имеют лишь одно большое собственное значение, а остальные пренебрежимо малы). Процессы, для которых  $\text{rank } \chi > 1$ , вносят деполаризацию в состояние (также как и многомодовый световод), и для них точность случайных и адаптивных измерений одинакова и близка к предельной  $d_B^2(N) \propto 1/N$ .

Подобно томографии состояний было исследовано влияние инструментальных ошибок в углах установки фазовых пластинок на точность получаемых оценок  $\chi$ -матриц процессов. Из полученных результатов следует аналогичный вывод, что предельно достижимая точность для адаптивных измерений выше, чем для случайных, и преимущество более выражено при низкой величине ошибок.

Дополнительно предложено использовать тестовую статистику  $\chi^2$  [6] для определения объёма выборки  $N$ , после накопления которого точность оценки  $\hat{\chi}$  перестает существенно улучшаться ввиду наличия инструментальных ошибок.

Таблица 1 — Результаты аппроксимации зависимости размера распределения  $\bar{d}_B^2(N)$  от числа зарегистрированных отсчётов  $N$  функцией вида  $cN^a$ .

Измерения	Процесс	$a$	$c$
Случайные	Фазовая пластинка	$-0.698 \pm 0.016$	$1.67 \pm 0.13$
Адаптивные	Фазовая пластинка	$-0.844 \pm 0.016$	$2.01 \pm 0.13$
Случайные	Многомодовый световод	$-1.027 \pm 0.013$	$4.44 \pm 0.11$
Адаптивные	Многомодовый световод	$-1.044 \pm 0.006$	$4.26 \pm 0.05$
Случайные	Фильтр 3 дБ	$-0.680 \pm 0.003$	$0.94 \pm 0.02$
Адаптивные	Фильтр 3 дБ	$-0.866 \pm 0.002$	$1.92 \pm 0.02$
Случайные	Поляризатор	$-0.689 \pm 0.004$	$0.72 \pm 0.03$
Адаптивные	Поляризатор	$-0.870 \pm 0.004$	$1.62 \pm 0.04$

Точность оценки можно определить по расстоянию  $d_B^2(\hat{\chi}; \chi_0)$  до томографируемого процесса  $\chi_0$ , но, очевидно, эта величина недоступна экспериментатору. Напротив, статистика  $\chi^2$  рассчитывается на основе наблюдаемых данных и определяется следующим образом:

$$\chi^2 = \sum_{\gamma} \frac{(n_{\gamma} - b\hat{p}_{\gamma})^2}{b\hat{p}_{\gamma}}, \quad (6)$$

где  $n_{\gamma}$  — количество событий, когда наблюдался исход  $\gamma$ ,  $b = \sum_{\gamma} n_{\gamma}$  и  $\hat{p}_{\gamma}$  — ожидаемая вероятность наблюдения исхода  $\gamma$ , рассчитанная по правилу Борна.

В численных симуляциях и эксперименте по томографии единичного преобразования показано, что зависимости расстояния до истинного процесса  $d_B^2(\hat{\chi}(N), \chi_0)$  и нормированной статистики  $\chi^2(N)/b$  коррелируют. Значение  $N$ , при котором  $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$  выходит на шумовой порог, качественно совпадает с таковым для зависимости  $\chi^2/b$  (см. рисунок 4).

В **четвёртой главе** описывается оригинальный адаптивный протокол томографии состояний, специально оптимизированный под использование факторизованных измерений. Протокол проверен в эксперименте по томографии пространственных состояний пар фотонов, рождённых в процессе СПР. Сформулированы теоретические условия на набор измерений, при выполнении которых достигается высокая точность восстановления неизвестного состояния.

Особенность высокоразмерной томографии заключается в больших затратах машинного времени на вычисление оценок состояний и поиск оптимальных измерений. Также обычно высокоразмерные системы естественным образом разделены на несколько подсистем, откуда возникает понятие о факторизованных измерениях. Таким образом, желательно, чтобы протокол томографии одновременно обладал следующими свойствами:

- высокой точностью оценок (сходимостью  $d_B^2 \propto 1/N$  для чистых состояний и близких к ним),
- возможностью использовать только факторизованные измерения,
- простота вычислений.

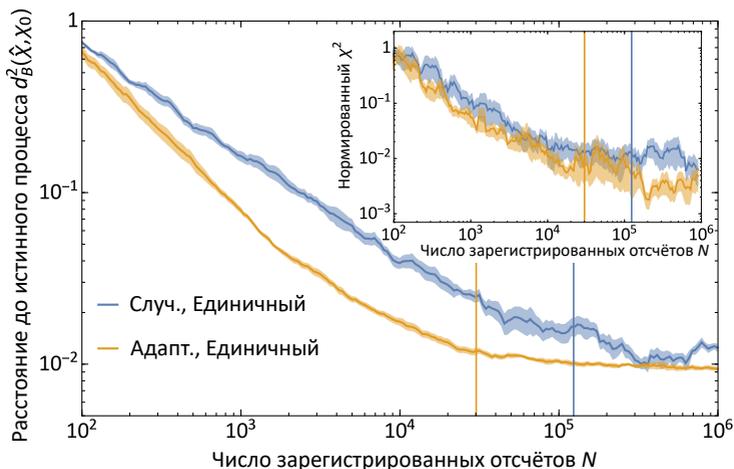


Рис. 4 — Зависимость расстояния  $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$  до теоретического истинного процесса от числа зарегистрированных отсчётов  $N$  для случайных и адаптивных измерений. Вставка: зависимость нормированной тестовой статистики  $\chi^2/b$  от  $N$  (сглажена посредством скользящего среднего вдоль оси  $N$  по 5 соседним точкам). Вертикальные линии показывают те значения  $N$ , когда двойная логарифмическая производная принимает величину  $\frac{d \ln d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)}{d \ln N} = -0.25$  для соответствующих протоколов томографии.

Рассмотренные в предыдущих главах байесовские протоколы томографии удовлетворяют первым двум пунктам. Однако, по вычислительной сложности они уступают, например, методу максимального правдоподобия в связке с измерениями в собственном базисе оценки [7]. Однако, измерения в собственном базисе, вообще говоря, требует измерений общего вида. Известны и другие идеи в построении оптимальных адаптивных стратегий [8–10], однако, их экспериментальная реализация ограничивается двухкубитовыми состояниями [11–13].

В диссертационной работе предложен протокол, который в той или иной мере сочетает все три вышеупомянутых свойства. Оптимальное измерение зависит только от текущей оценки состояния, а метод, которым она была получена, не важен. Это позволяет, например, использовать наиболее быстрые алгоритмы вычисления оценок. Само по себе нахождение оптимального измерения сводится к оптимизационной задаче и выполняется достаточно быстро. Как показали проведённые численные симуляции и эксперименты, основное время затрачивается на вычисление оценки по методу максимального правдоподобия, а не на поиск измерения.

Теория протокола опирается на универсальное статистическое распределение фиделити  $F(\rho, \hat{\rho})$  между истинным состоянием  $\rho$  и его оценкой  $\hat{\rho}$  [14]. В статье [14] рассматривается случай, когда ранг истинного состояния  $R_s$  и оценки  $R_e$  совпадают:  $R_s = R_e$ . В диссертационной работе исследована ситуация

несовпадения рангов:  $R_s < R_e$ . Она возникает, например, если чистое состояние ( $R_s = 1$ ) или близкое к нему восстанавливается как состояние полного ранга ( $R_e = D$ ), что типично для эксперимента. Показано, что при  $R_s < R_e$  для поддержания сходимости  $1/N$  необходимо выполнение следующего условия (в противном случае будет наблюдаться сходимость  $1/\sqrt{N}$ ):

**Условие 1.** *Протокол должен содержать измерение  $M$ , которое ортогонально к проекторам на собственные вектора  $|\psi_k\rangle$ , отвечающие ненулевым собственным значениям истинного состояния  $\rho$ :*

$$M|\psi_k\rangle = 0, k = 1, \dots, R_s. \quad (7)$$

Такие измерения названы ортогональными. Это условие эквивалентно тому, что вероятность исхода для ортогонального измерения равна нулю.

Второе условие указывает достаточное число различных ортогональных измерений:

**Условие 2.** *Протокол должен содержать  $(R_e - R_s)(2D - R_e - R_s)$  независимых измерений, удовлетворяющих условию 1.*

На практике ортогональные измерения строятся к текущей оценке состояния  $\hat{\rho}$ , в чём и заключается адаптивность описываемого протокола. Сама же оценка находится по методу максимального правдоподобия.

Также исследована проблема существования измерений, которые одновременно ортогональны и факторизованы. Показано, что такие измерения существуют для любого набора векторов  $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1}^K$ , если

$$K \leq K_{\max} = d_1 + \dots + d_l - l, \quad (8)$$

где  $d_i$  — размерность  $i$ -й компоненты составной томографируемой системы,  $l$  — число компонент.

Предложенный протокол FO сравнивался с протоколами FR, GR и Eigen в ходе численных симуляций для двухкомпонентных систем размерностей  $D = 3 \times 3$  и  $D = 6 \times 6$ , где введены обозначения: F — факторизованные измерения, O — ортогональные, R — случайные, G — измерения общего вида, Eigen — адаптивные измерения в собственном базисе текущей оценки. Показано, что для чистых истинных состояний и оценок полного ранга FR и GR имеют сходимость  $d_B^2 \propto 1/\sqrt{N}$ , а FO и Eigen ведут себя как  $d_B^2 \propto 1/N$ , но коэффициент пропорциональности для FO больше. При томографии смешанных состояний полного ранга в среднем преимущество даёт только протокол Eigen. Такое поведение ожидается в силу ограничения (8).

Апробация протокола FO проводилась в эксперименте по томографии поперечных пространственных мод пар фотонов, рождённых в процессе СПР типа II в кристалле РРКТР (см. рисунок 5). Квантовые состояния кодировались в поперечных модах Эрмита — Гаусса  $|\text{HG}_{nm}\rangle$ . Одномодовое лазерное излучение

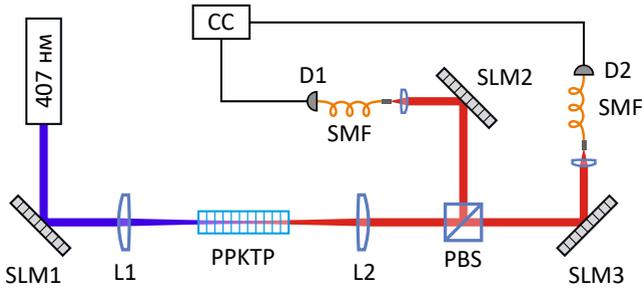


Рис. 5 — Упрощённая схема экспериментальной установки по томографии пространственных состояний фотонов.

направлялось на пространственный фазовый модулятор (ПФМ) SLM1 с целью получения заданного поперечного профиля пучка накачки в первом порядке дифракции. Контролируя модовый состав накачки, можно изменять приготавливаемое состояние пар фотонов на выходе. Фотоны из пары разделялись с помощью поляризационного светоделителя PBS, в каждом канале которого происходило проекционное измерение посредством преобразования состояний на ПФМ SLM2-3 и заведения в одномодовое оптоволокно. Лавинные фотодетекторы D1 и D2 были подключены к схеме подсчёта совпадений CC. Ограничивая число учитываемых мод, можно задавать размерность пространства томографируемой системы.

Экспериментально посредством протоколов FR и FO были протомографированы два состояния: факторизованное  $|HG_{00}\rangle \otimes |HG_{00}\rangle$  (гауссовское состояние) и перепутанное  $(|HG_{10}\rangle \otimes |HG_{00}\rangle + |HG_{00}\rangle \otimes |HG_{10}\rangle)/\sqrt{2}$  (белловское). Эти состояния были восстановлены в пространствах размерности  $D = 3 \times 3$  и  $D = 6 \times 6$  (см. рисунок 6). Для белловского состояния при  $D = 36$  различия в точности протоколов не было обнаружено, что наиболее вероятно объясняется низкой чистотой состояния  $\text{Tr } \rho^2$ . В остальных случаях FO даёт преимущество по сравнению с FR. Например, при объёме статистики  $N = 5 \times 10^4$  точность повысилась в  $\approx 2.2$  раза для гауссовского состояния при  $D = 9$  и  $\approx 1.4$  раза при  $D = 36$ . Для белловского состояния отношение точности составило  $\approx 1.25$  при  $D = 9$ .

В отличие от предыдущих глав, где речь шла о методах полной томографии, в которых матрица плотности или  $\chi$ -матрица процесса восстанавливается однозначно по результатам измерений, **пятая глава** посвящена экспериментальной проверке одного из методов неполной квантовой томографии — теневой томографии (shadow tomography) [15].

Цель теневой томографии заключается в предсказании математических ожиданий  $o_i = \text{Tr } O_i \rho$ ,  $i = 1, \dots, M$  множества  $n$ -кубитных наблюдаемых  $\{O_i\}_{i=1}^M$ . Для этого измеряются  $P$  проекторов на стабилизаторные состояния  $|\psi_i\rangle$ ,  $i = 1, \dots, P$ , которые получаются в результате действия случайных унитарных преобразований из группы Клиффорда  $\mathbf{P}_n$  на вектор  $|0\rangle$ :  $|\psi_i\rangle = U|0\rangle$ ,  $U \in$

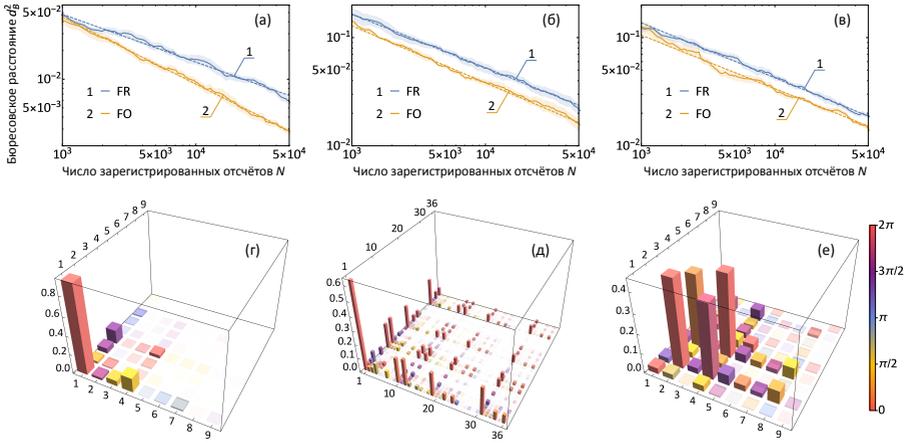


Рис. 6 — Зависимости квадрата бюрессовского расстояния  $d_B^2(N)$  до финальной оценки от числа зарегистрированных отсчётов  $N$ , полученные в эксперименте по томографии (а) гауссовского состояния, восстановленного в пространстве размерности  $D = 9$  и (б)  $D = 36$ , а также (в) белловского состояния, восстановленного в пространстве размерности  $D = 9$ . Заливка возле кривых соответствует одному стандартному отклонению среднего. Пунктирные линии — аппроксимация степенной функцией вида  $cN^a$ . Восстановленные матрицы плотности (г-е) изображены под соответствующими графиками сходимости. Высота столбика показывает абсолютную величину матричного элемента, его фаза отражена цветом.

$\mathbf{P}_n$  [16]. По результатам измерений рассчитывается классическая тень  $\hat{\rho}$  истинного состояния  $\rho$ :

$$\hat{\rho} = (2^n + 1) \sum_{i=1}^P f_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| - \mathbb{I}, \quad (9)$$

где  $f_i$  — наблюдаемая частота исхода измерения  $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . Далее  $\hat{\rho}$  подставляется в выражение для математического ожидания наблюдаемой, чтобы получить предсказанные значения  $\hat{o}_i = \text{Tr } O_i \hat{\rho}$ .

Основное достоинство теневой томографии заключается в том, что количество проекторов  $P$ , необходимых для получения заданной точности оценок  $\hat{o}_i$ , не зависит от размерности системы  $D = 2^n$ , если величина  $\max_i \text{Tr } O_i^2$  ограничена сверху константой. При этом сама тень  $\hat{\rho}$  может сильно отклоняться от истинного состояния  $\rho$ . В диссертационной работе в качестве наблюдаемых брались проекторы на случайные состояния и, следовательно,  $\max_i \text{Tr } O_i^2 = 1$ , а математические ожидания  $o_i$  равны вероятностям исходов проекционных измерений на эти состояния.

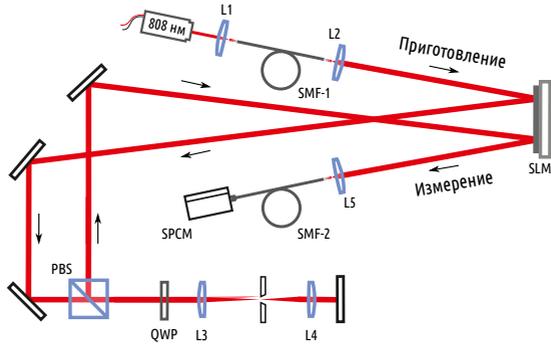


Рис. 7 — Схема экспериментальной установки для проведения теневой томографии.

Экспериментальная проверка теневой томографии была выполнена на установке, схема которой изображена на рисунке 7. Как и в предыдущей главе, квантовое состояние кодировалось в пространственных модах Эрмита — Гаусса. Ослабленное лазерное излучение сперва направлялось на верхнюю половину ПФМ SLM для приготовления заданного состояния в первом порядке дифракции. Затем, после фильтрации остальных порядков с помощью диафрагмы, пучок попадал на нижнюю половину ПФМ, где происходило нужное унитарное преобразование для выбора измерения. Одномодовый световод SMF-2, подключённый к счётному лавинному фотодетектору SPCM, проецировал состояние на собственную фундаментальную гауссову моду.

Обычно при работе на классическом компьютере с  $n$ -кубитным стабилизаторным состоянием  $|\psi\rangle$  не хранят явно все  $2^n$  комплексных амплитуд, а работают со множеством его стабилизирующих операторов, которое можно описать с помощью полиномиального по  $n$  количества переменных [16]. Однако, в применяемой экспериментальной установке для расчёта фазовых голограмм, отображаемых на ПФМ, необходимо явно указать комплексные амплитуды, поэтому в диссертационной работе предложен метод для генерации амплитуд случайных стабилизаторных состояний. Наивный подход, в котором сначала генерируются случайные стабилизаторы, а затем по ним вычисляется вектор состояния, требует  $\mathcal{O}(n2^{3n})$  арифметических операций. В предложенном методе сложность удалось понизить до  $\mathcal{O}(n^32^n)$ , обратившись к общей форме стабилизаторного состояния [17].

Для проверки теневой томографии сначала было проведено  $P = 10^4$  случайных стабилизаторных измерений, по результатам которых найдена классическая тень  $\hat{\rho}$  (9) томографируемого состояния  $\rho$ . Затем были измерены 5000 проекторов  $O_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$  на случайные вектора  $|\varphi_i\rangle$ , распределённые равномерно по мере Хаара, чтобы получить частоты исходов  $\hat{\delta}_i^{\text{meas.}} \approx \text{Tr } O_i \rho$ . Для тех же операторов  $O_i$  по найденной ранее классической тени  $\hat{\rho}$  вычислены оценки  $\hat{\delta}_i^{\text{est.}} = \text{Tr } O_i \hat{\rho}$ . Таким образом, оценка теневой томографии  $\hat{\delta}_i^{\text{est.}}$  сравнивалась с

Таблица 2 — Коэффициент корреляции Пирсона  $r$  и фиделити приготовления  $F$ , усреднённые по пяти случайным состояниям, для различных размерностей системы  $D$ .

$D$	$r$	$F$
2	$0.989 \pm 0.002$	$0.981 \pm 0.013$
4	$0.983 \pm 0.001$	$0.974 \pm 0.011$
8	$0.976 \pm 0.002$	$0.899 \pm 0.009$
16	$0.953 \pm 0.003$	$0.920 \pm 0.020$
32	$0.875 \pm 0.006$	$0.807 \pm 0.031$

независимо измеренной частотой  $\hat{o}_i^{\text{meas.}}$ . В идеальном случае ожидается  $\hat{o}_i^{\text{meas.}} = \hat{o}_i^{\text{est.}}$ , но из-за погрешностей эксперимента коэффициент корреляции Пирсона  $r$  для массива  $\{(\hat{o}_i^{\text{meas.}}, \hat{o}_i^{\text{est.}})\}_{i=1}^{5000}$  будет немного отклоняться от единицы:  $r \lesssim 1$ .

Для каждой размерности системы  $D = 2^n, n = 1, \dots, 5$  описанная выше процедура была повторена для пяти разных случайных истинных состояний. Во всех случаях наблюдались высокие значения коэффициента корреляции Пирсона  $r$ , что свидетельствует о согласованности оценок по методу теневой томографии с прямыми измерениями (см. таблицу 2).

Отметим, что в проведённых экспериментах число зарегистрированных фотонов при измерении одного проектора  $O_i$  составляло примерно  $I = 3 \times 10^5 \gg 1$  в пересчёте на  $o_i = 1$ , и поэтому статистической ошибкой можно пренебречь. Большой объём выборки также позволил отказаться от использования медианной оценки для расчёта  $\hat{o}_i$  (как предлагается в исходной работе [15]) в пользу обычного эмпирического среднего  $\hat{o}_i = \text{Tr } O_i \hat{\rho}$ .

Оценка теневой томографии является несмещённой независимо от числа измерений  $P$  и размерности системы  $D$ . Это отличает её, например, от метода максимального правдоподобия, для которого оценки лишь асимптотически не смещены. Несмещённость приводит к более высокой точности оценок, если набор измерений не является томографически полным. Для экспериментальной проверки этого свойства были рассмотрены корреляции  $\hat{o}_i^{\text{est.}}$  ( $\hat{o}_i^{\text{meas.}}$ ) для  $D = 8$  и 32 (см. рисунок 8). Исследованы два случая: малое число измерений  $P$  (100 для  $D = 8$  и 300 для  $D = 32$ ) и большое  $P = 10^4$ . Облака точек были аппроксимированы линейной зависимостью  $\hat{o}_i^{\text{est.}} = \beta \hat{o}_i^{\text{meas.}}$ . Для переполненных наборов измерений ( $P = 10^4$ ) оба метода томографии дают несмещённые оценки с коэффициентом пропорциональности  $\beta \approx 1$ . Для низких значений  $P$  предсказания  $\hat{o}_i^{\text{est.}}$  по методу максимального правдоподобия сильно сдвинуты к нулю,  $\beta < 1$ :  $\beta = 0.745 \pm 0.002$  для  $D = 8$  и  $\beta = 0.455 \pm 0.001$  для  $D = 32$ . Теневая томография при этом по-прежнему не смещена:  $\beta = 1.004 \pm 0.004$  для  $D = 8$  и  $\beta = 1.016 \pm 0.003$  для  $D = 32$ .

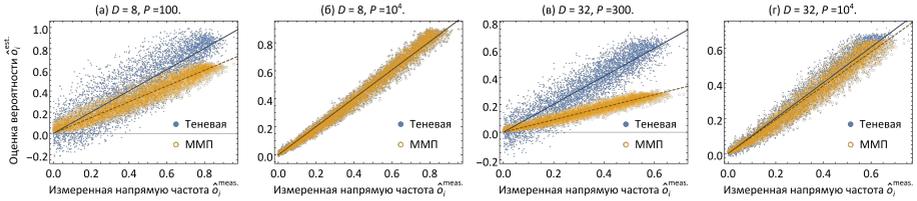


Рис. 8 — Сравнение корреляционных графиков  $\hat{\sigma}_i^{est.}$  ( $\hat{\sigma}_i^{meas.}$ ), полученных с помощью теневой томографии («Теневая») и метода максимального правдоподобия («ММП») для разных размерностей системы  $D$  и числа стабилизаторных измерений  $P$ . Прямые — наилучшая аппроксимация линейной функцией вида  $\hat{\sigma}_i^{est.} = \beta \hat{\sigma}_i^{meas.}$  (сплошные линии — теневая томография, пунктир — ММП).

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Экспериментально исследован протокол адаптивной байесовской томографии с использованием энтропийного критерия оптимальности измерений на примере томографии поляризационных кубитов.
2. Адаптивный протокол демонстрирует лучшую точность восстановления по сравнению со стратегией случайных измерений.
3. Проведены численные симуляции томографии факторизованного состояния, результаты которых хорошо согласуются с проведённым экспериментом.
4. Протокол адаптивной байесовской томографии состояний обобщён на случай томографии квантовых преобразований. Исследованы вопросы генерации априорного распределения и случайного блуждания на пространстве  $\chi$ -матриц.
5. Выполнена проверка протокола в численных симуляциях и эксперименте для различных типов процессов, затрагивающих одиночный поляризационный кубит. Показано, что рассматриваемый адаптивный протокол превосходит по точности стратегию случайных измерений для процессов единичного ранга и близких к ним.
6. Обнаружено, что адаптивный протокол менее подвержен влиянию инструментальных погрешностей, таких как ошибка в установке углов фазовых пластинок, по сравнению со случайными измерениями.
7. Предложен новый адаптивный протокол томографии состояний высокоразмерных двухкомпонентных систем с использованием только лишь факторизованных измерений, которые предпочтительны при экспериментальной реализации ввиду своей простоты относительно измерений общего вида.
8. Предложенный протокол проверен в численных симуляциях и эксперименте по томографии пространственных состояний пар фотонов,

рождаемых в процессе СПР, для размерностей  $D = 9$  и  $D = 36$ . Адаптивный протокол выигрывает у стратегии случайных измерений при томографии чистых состояний и близких к ним.

9. Сформулированы условия на любой протокол томографии, необходимые для достижения максимальной скорости сходимости фиделити  $1/N$ . В случае использования только лишь факторизованных измерений найдено предельное значение ранга истинного состояния, при превышении которого сходимость  $1/N$  невозможна, а наблюдается сходимость  $1/\sqrt{N}$ , типичная для неадаптивных методов.
10. Предложен алгоритм для равновероятной выборки стабилизаторных состояний, хранимых в виде вектора комплексных амплитуд, вычислительная сложность которого  $\mathcal{O}(n^3 2^n)$  от числа кубитов  $n$ .
11. Метод теневой томографии проверен экспериментально при томографии пространственных состояний фотонов. Продемонстрирована высокая степень корреляции между оценками теневой томографии и напрямую измеренными средними величинами для проекторов ранга 1.
12. Экспериментально подтверждена несмещённость оценок по методу теневой томографии независимо от размерности пространства исследуемой системы, что ведёт к существенно лучшей точности оценок при неполном наборе измерений по сравнению с методом максимального правдоподобия.
13. Показано, что использование эмпирического среднего вместо медианной оценки в методе теневой томографии не приводит к ухудшению точности, если объём накопленной статистики велик.

## Список литературы

1. *Huszár, F.* Adaptive Bayesian quantum tomography / F. Huszár, N. M. T. Houlby // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Май. — Т. 85, вып. 5. — С. 052120.
2. Experimental adaptive Bayesian tomography / K. S. Kravtsov [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Июнь. — Т. 87, вып. 6. — С. 062122.
3. *Wootters, W. K.* Entanglement of formation and concurrence / W. K. Wootters // *Quantum Information and Computation.* — 2001. — Т. 1. — С. 27—44.
4. Collective versus local measurements in a qubit mixed-state estimation / E. Bagan [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Янв. — Т. 69, вып. 1. — С. 010304.
5. *Bengtsson, I.* Geometry of Quantum States / I. Bengtsson, K. Życzkovsky. — Cambridge : Cambridge University Press, 2006.
6. Cross-Validated Tomography / D. Mogilevtsev [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Сент. — Т. 111, вып. 12. — С. 120403.

7. Adaptive Quantum State Tomography Improves Accuracy Quadratically / D. H. Mahler [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Окт. — Т. 111, вып. 18. — С. 183601.
8. *Sugiyama, T.* Adaptive experimental design for one-qubit state estimation with finite data based on a statistical update criterion / T. Sugiyama, P. S. Turner, M. Muraо // Phys. Rev. A. — 2012. — Май. — Т. 85, вып. 5. — С. 052107.
9. Experimental Demonstration of Adaptive Quantum State Estimation / R. Okamoto [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Сент. — Т. 109, вып. 13. — С. 130404.
10. *Kalev, A.* Fidelity-optimized quantum state estimation / A. Kalev, I. Hen // New J. Phys. — 2015. — Т. 17, № 9. — С. 093008.
11. *Lerch, S.* Adaptive quantum state estimation of an entangled qubit state / S. Lerch, A. Stefanov // Opt. Lett. — 2014. — Сент. — Т. 39, № 18. — С. 5399—5402.
12. Adaptive quantum state tomography via linear regression estimation: Theory and two-qubit experiment / B. Qi [и др.] // npj Quantum Information. — 2017. — Т. 3, № 1. — С. 19.
13. Quantum state and process tomography via adaptive measurements / H. Wang [и др.] // Sci. China: Phys. Mech. Astron. — 2016. — Авг. — Т. 59, № 10. — С. 100313.
14. *Bogdanov, Y. I.* Unified statistical method for reconstructing quantum states by purification / Y. I. Bogdanov // J. Exp. Theor. Phys. — 2009. — Июнь. — Т. 108, № 6. — С. 928—935.
15. *Huang, H.-Y.* Predicting many properties of a quantum system from very few measurements / H.-Y. Huang, R. Kueng, J. Preskill // Nat. Phys. — 2020. — 22 июня.
16. *Gottesman, D.* Stabilizer Codes and Quantum Error Correction / D. Gottesman. — 1997.
17. *Dehaene, J.* Clifford group, stabilizer states, and linear and quadratic operations over GF(2) / J. Dehaene, B. De Moor // Phys. Rev. A. — 2003. — Окт. — Т. 68, вып. 4. — С. 042318.

*Стручалин Глеб Игоревич*

Адаптивные методы в квантовой томографии

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 80 экз.

Типография \_\_\_\_\_