МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

М Каменщиков

Каменщиков Михаил Александрович

Методы построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем

Специальность 1.1.2 –
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: **Фомичев Василий Владимирович**
доктор физико–математических наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультета вычислительной математики и кибернетики, кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, заведующий кафедрой.

Официальные оппоненты: **Асеев Сергей Миронович**
член–корреспондент РАН, доктор физико–математических наук, Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, отдел дифференциальных уравнений, главный научный сотрудник.

Канатников Анатолий Николаевич
доктор физико–математических наук, доцент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, кафедра «Математическое моделирование», профессор.

Миняев Сергей Игоревич
кандидат физико–математических наук, АО «Корпорация «МИТ», начальник отдела.

Защита диссертации состоится «12» апреля 2023 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Россия, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, аудитория 1610.

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/538145853/

Автореферат разослан «9» марта 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.8,
д.ф.-м.н., профессор

Чечкин Григорий Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация относится к одному из важных направлений дифференциальных уравнений — теории управления динамическими системами, представленными дифференциальными уравнениями: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью. В диссертации решается задача построения оптимальных наблюдателей (фильтров) пониженного порядка для линейных стационарных объектов управления в условиях вероятностной неопределенности.

Актуальность рассматриваемой задачи обосновывается теоретической значимостью оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка в таких задачах теории автоматического управления, как оптимальная стабилизация неустойчивых стохастических систем с помощью динамической обратной связи по зашумленному выходу, диагностика неисправностей при восстановлении полезной информации с датчиков динамической системы, $\mathcal{H}_2$–оптимальное понижение порядка модели, управление на скользящих режимах в стохастических системах. На практике фильтры (оптимальные наблюдатели) пониженного порядка находят широкое применение при решении задач спутниковой навигации и оценки состояния быстродействующих технических объектов, задач в области гидрологии, океанографии и медицины. Вместо традиционно используемого фильтра Калмана, формирующего оценку полного вектора состояния системы и имеющего порядок, совпадающий с порядком системы, предполагается строить его аналог, оптимальный наблюдатель, имеющий пониженную размерность фазового вектора и формирующий несмещенную оценку образа вектора состояния системы при линейном отображении. В этом случае понизится как требовательность к ресурсам вычислительного устройства, на котором реализуется оптимальный наблюдатель, так и время вычисления искомой оценки. Кроме того, невысокий порядок оптимального наблюдателя позволяет упростить анализ и синтез динамической системы.

Степень разработанности темы исследования. Задача оптимальной полноразмерной фильтрации впервые была решена Р.Л. Стратоновичем[1,2] в 1959-60 годах для случая нелинейных динамических систем и Р. Калманом и Р. Бьюси[3,4] в 1960-61 годах для случая линейных динамических дискретных и непрерывных систем. К предпосылкам создания фильтра Калмана часто относят работы знаменитых математиков К. Гаусса[5] и А. Лежандра[6], связанные с открытием метода наименьших квадратов и астрономическими исследованиями в конце XVIII – начале XIX века, в которых движение планет и комет изучалось посредством телескопических измерений. В XX веке исследование метода наименьших квадратов применительно к случайным процессам было проведено в 1941 году знаменитым математиком А.Н. Колмогоровым, в работе[7] которого дано всестороннее рассмотрение и исчерпывающее решение проблемы прогнозирования для стационарных случайных процессов в дискретном времени (стационарных случайных последовательностей), и в 1949 году основоположником кибернетики Н. Винером, в работе[8] которого рассматривалась задача прогнозирования стационарных процессов в установившемся режиме для непрерывного времени с использованием интегрального уравнения Винера–Хопфа и факторизации спектральных плотностей. Кроме того, появлению фильтра Калмана предшествовала работа[9] В.С. Пугачева 1944 года, в которой исследова-

[1] *Стратонович Р.* Оптимальные нелинейные системы, осуществляющие выделение сигнала с постоянными параметрами из шума // Известия вузов СССР, серия «Радиофизика. 1959. т. 2. с. 862—901.

[2] *Stratonovich R. L.* Application of the Markov processes theory to optimal filtering // Radio Engineering and Electronic Physics. 1960. Vol. 5. P. 1–19.

[3] *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems. 1960.

[4] *Kalman R. E.*, *Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory. 1961.

[5] *Gauss C. F.* Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium auctore Carolo Friderico Gauss. sumtibus Frid. Perthes et IH Besser, 1809.

[6] *Legendre A. M.* Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes; par AM Legendre... 1806.

[7] *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1941. т. 5, № 1. с. 3—14.

[8] Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications. Vol. 113 / N. Wiener [et al.]. MIT press Cambridge, MA, 1949.

[9] *Пугачев В. С.* Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями // Труды военно-воздушной академии им. Н.Е. Жуковского. 1944. № 118.

лись векторные стохастические дифференциальные уравнения, порождаемые произвольными процессами с независимыми приращениями, и впервые было получено уравнение для одномерной характеристической функции случайного процесса; таким образом, этой работой были заложены основы статистической теории процессов управления (статистической динамики).

Существуют различные подходы к решению задачи синтеза фильтров пониженного порядка для линейных стохастических систем, в том числе на основе решения матричных уравнений Риккати и Ляпунова[10,11,12,13], техники вычисления псевдообратных матриц[12,14,15], решения линейных матричных неравенств[16]. К ограничениям существующих методов[10,12,13,14,15] можно отнести совпадение порядка синтезируемого фильтра с размерностью оцениваемого функционала. В работах[17,18] приведены условия существования и алгоритмы синтеза функциональных наблюдателей для линейных стационарных полностью определенных систем. К недостаткам метода скалярных наблюдателей, предложенного в работах[17,18], можно отнести предположение о вещественности и различности спектра и необходимость отдельного изучения случаев кратных и комплексно–сопряженных корней характеристического уравнения синтезируемого наблюдателя.

[10] *Nagpal K. M.*, *Helmick R. E.*, *Sims C. S.* Reduced-order estimation part 1. Filtering // International Journal of Control. 1987. Vol. 45, no. 6. P. 1867–1888.

[11] *Домбровский В. В.* О синтезе и устойчивости непрерывных и дискретных линейных фильтров пониженного порядка // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. с. 91—99.

[12] *Darouach M.* On the optimal unbiased functional filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. Vol. 45, no. 7. P. 1374–1379.

[13] *Darouach M.*, *Zasadzinski M.* Reduced order filtering for stochastic discrete-time systems with unknown inputs // IFAC Proceedings Volumes. 2002. Vol. 35, no. 1. P. 133–138.

[14] *Darouach M.*, *Ali H. S.* Optimal unbiased functional filtering in the frequency domain // Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal. 2014. Vol. 2, no. 1. P. 308–315.

[15] *Darouach M.*, *Fernando T.* H_inf Functional filtering for linear systems with unknown inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020.

[16] *Geromel J. C.*, *Levin G.* Suboptimal reduced-order filtering through an LMI-based method // IEEE transactions on signal processing. 2006. Vol. 54, no. 7. P. 2588–2595.

[17] *Коровин С.*, *Медведев И.*, *Фомичев В.* Функциональные наблюдатели минимального порядка // Нелинейная динамика и управление. Сборник статей. Выпуск 5. 2006.

[18] *Коровин С. К.*, *Фомичев В. В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Цель и задачи диссертации. Целью диссертационной работы является разработка методов построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для изучаемых классов линейных стационарных динамических систем в условиях стохастической неопределенности. В качестве критерия оптимальности выбирается установившаяся среднеквадратическая ошибка наблюдения.

В диссертации автором решены следующие задачи:

1. Разработаны методы построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем в каноническом базисе.
2. Решена совместная задача стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения, задача диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах.
3. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего порядка в каноническом базисе.
4. Предложены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы автора являются новыми и состоят в следующем.

1. Впервые решена совместная задача стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения и задача диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах предложенными автором методами, основанными на обобщении классического условия несмещенности и позволяющими расширить множество допустимых параметров с помощью дополнительной информации о начальном состоянии.

2. Предложен новый метод построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка на основе: аналитического представления передаточных функций системы в отклонениях в каноническом базисе, интегральных квадратичных оценок качества[19], сведения задачи оптимального наблюдения к задаче нелинейной оптимизации на невыпуклом множестве допустимых параметров. Предложенный метод позволяет снять условие равенства размерности оцениваемого линейного функционала от вектора состояния и порядка построенного оптимального наблюдателя[10,12,13,14,15,20,21].
3. Впервые сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего порядка в каноническом базисе; предложены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как для непрерывных, так и для дискретных систем как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым образом вектора состояния.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа автора имеет преимущественно теоретический характер. Представленные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития и совершенствования математической теории автоматического управления, теории оптимальной фильтрации. В частности, предложенные результаты могут быть использованы как для построения фильтров пониженного порядка как части системы управления, так и как база для дальнейших исследований при решении задачи фильтрации для многосвязных динамических систем.

---

[19] *Красовский А. А.* О степени устойчивости линейных систем // Труды военно-воздушной инженерной академии им. Н.Е. Жуковского. 1946. № 281.

[20] *Gessing R.* State estimation for linear systems with observations partially corrupted by noise // Systems & control letters. 1992. Vol. 18, no. 2. P. 139–145.

[21] *Nakamizo T.* Reduced-order functional estimator for linear stochastic systems // Statistical methods in control and signal processing. 1997.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения оптимальных наблюдателей к решению прикладных задач. Например, оптимальные наблюдатели пониженного порядка могут найти применение при обработке сигналов спутниковых навигационных систем, при управлении подвижными космическими аппаратами, в гидрологии и океанографии при анализе водных ресурсов, в медицине при разделении тонов сердца и дыхания[15,16,22]. Вместе с тем предложенные результаты можно рассматривать как расширение класса исследуемых объектов управления в задаче оценки предельных точностных характеристик терминальных бортовых систем управления[23].

Методология и методы исследования. В диссертационной работе автором используются методы математической теории управления, теории стохастических дифференциальных и разностных уравнений, теории случайных процессов, вычислительной математики и решения задач оптимизации. При построении наблюдателей использованы интегральные критерии качества, аналитические выражения передаточных функций, канонические представления динамических систем.

Положения, выносимые на защиту:

1. Необходимые и достаточные условия существования несмещенных оценок, формируемых при решении задачи, объединяющей две классические задачи теории управления: стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения, и задачи диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах.
2. Необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего динамических порядков в каноническом базисе.

[22] *Simon D.* Reduced Order Kalman Filtering without Model Reduction. // Control & Intelligent Systems. 2007. Vol. 35, no. 2.

[23] Бортовые терминальные системы управления / Б. Н. Петров [и др.]. Москва : Машиностроение, 1983.

3. Аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.
4. Методы решения задачи построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка, основанные на сведении задач оптимального наблюдения к задачам нелинейной оптимизации на невыпуклом множестве допустимых параметров и аналитическом вычислении передаточных функций динамических систем в отклонениях.

Степень достоверности. Достоверность результатов автора подтверждена строгими математическими доказательствами.

Все результаты, выносимые автором на защиту, получены автором лично.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях, а также научных семинарах:

- XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2018», секция «Вычислительная математика и кибернетика» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 9–13 апреля 2018);
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019», секция «Вычислительная математика и кибернетика» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 8–12 апреля 2019);
- XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 (Москва, ИПУ РАН, 17–20 июня 2019);
- научная конференция «Тихоновские чтения 2019» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 28 октября — 1 ноября 2019);

- научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 26–31 октября 2020);
- научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 20–29 апреля 2021);
- XXXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (Петрозаводск, 21–25 июня 2021);
- научная конференция «Ломоносовские чтения 2022» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 14–22 апреля 2022);
- международная конференция «Теория оптимального управления и приложения» (OCTA 2022) (Екатеринбург, 27 июня — 1 июля 2022);
- всероссийский научно–исследовательский семинар «Нелинейная динамика и управление» (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, 26 сентября 2022).

Публикации. По теме исследования опубликовано 20 работ. Из них 1 статья [1] в журнале «Mathematics» (входит в базы данных Web of Science, Scopus), 4 статьи [2—5] с переводом в журналах «Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика» (входит в базу данных RSCI), «Дифференциальные уравнения» (входит в базы данных Web of Science, Scopus, RSCI), 3 аннотации докладов [6—8] в журнале «Дифференциальные уравнения» (входит в базу данных RSCI), 2 статьи в сборниках трудов конференции [9; 10], 6 тезисов докладов [11—16].

Личный вклад автора. Автором решены поставленные в работе задачи: задача построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем, совместная задача стабилизации и оптимального наблюдения и задача диагностики неисправностей для линейных стационарных стохастических систем при аддитивных белых шумах. Доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего порядка в каническом базисе, предложены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 156 страниц, включая 19 рисунков. Библиография включает 100 наименований.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствуют паспорту специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физико-математические науки).

15. Теория управления дифференциальными уравнениями и системами: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость предложенных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Обзор литературы содержит реферативное описание имеющихся результатов по теме диссертации, приводятся ссылки на ключевые работы и монографии, позволяющие составить представление об истории развития и о текущем состоянии исследуемой области.

В первой главе приведены постановки задач построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем.

Задача 1. Для линейной стационарной динамической системы, заданной системой дифференциальных уравнений с выходом и аддитивными возмущениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \\ y(t) = Cx(t) + v(t); \end{cases} \qquad t \geqslant 0; \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ и $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — известные вход и выход системы; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ — известные постоянные матрицы; начальное состояние $x(0)$ — случайный вектор размерности n; $w(t)$ и $v(t)$ — некоррелированные между собой и с начальным состоянием белые шумы размерности n и l соответственно с априорно известными вероятностными характеристиками;

построить оптимальный наблюдатель пониженного порядка $k < n$ (систему дифференциальных уравнений с выходом)

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{q}}(t) = N\widetilde{q}(t) + TBu(t) + My(t), \quad \widetilde{q}(0) = T\bar{x}_0, \\ \widetilde{\sigma}(t) = P\widetilde{q}(t); \end{cases} \qquad t \geqslant 0; \tag{2}$$

где $\widetilde{q}(t) \in \mathbb{R}^k$ — известный фазовый вектор; $N \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $M \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $T \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $P \in \mathbb{R}^{p\times k}$ — постоянные матрицы, подлежащие определению; $\bar{x}_0 = \mathbb{E}[x(0)]$ — среднее значение начального состояния исходной системы (1); $\widetilde{\sigma}(t) \in \mathbb{R}^p$ — оптимальная несмещенная (несмещенность означает $\mathbb{E}[\sigma(t) - \widetilde{\sigma}(t)] \equiv 0$) линейная оценка линейного функционала (традиционное в теории наблюдателей состояния название образа вектора состояния $x(t)$ при линейном отображении)

$$\sigma(t) = Fx(t), \qquad F \in \mathbb{R}^{p\times n} \text{— известная матрица;} \tag{3}$$

в смысле установившейся среднеквадратической ошибки наблюдения

$$J_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[(\sigma(t) - \widetilde{\sigma}(t))^{\mathsf{T}}(\sigma(t) - \widetilde{\sigma}(t))] \to \min. \tag{4}$$

Аналогичная постановка задачи построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка приведена для линейных стационарных дискретных динамических систем.

В первой главе для специального типа наблюдателей (2), в которых $k = p$, $P = I_p$, $T = F$, и вектор состояния $\widetilde{q}(t)$ сам по себе является оценкой $\widetilde{\sigma}(t)$

$$\dot{\widetilde{\sigma}}(t) = N\widetilde{\sigma}(t) + My(t) + FBu(t), \qquad \widetilde{\sigma}(0) = F\bar{x}_0; \tag{5}$$

сформулировано и доказано условие несмещенности в задаче 1 при произвольном управлении и предложено обобщение условия несмещенности: в *задаче диагностики*, то есть в задаче 1 при управлении $u(t) \equiv 0$, и в *совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения*, то есть в задаче 1 при условии $m = p$ и стабилизирующем исходную систему (1) управлении $u(t) = -\widetilde{\sigma}(t)$.

Теорема 1.1. *В задаче 1 для формирования несмещенной оценки $\widetilde{\sigma}(t)$ оптимальным наблюдателем вида* (5) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось классическое условие*

$$FA - MC - NF = 0. \tag{6}$$

Если в задаче диагностики $\bar{x}_0 \neq 0$, и пара $\{A, \bar{x}_0\}$ — управляема, то условие (6) *также является необходимым и достаточным условием несмещенности оценки $\widetilde{\sigma}(t)$. При этом если пара $\{A, \bar{x}_0\}$ не является управляемой, то для несмещенности оценки $\widetilde{\sigma}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(FA - MC - NF)K_{A,\bar{x}_0} = 0,$$

где $K_{A,\,\bar{x}_0}$ — матрица управляемости Калмана для пары $\{A,\ \bar{x}_0\}$. Если в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения $\bar{x}_0 \neq 0$, и пара $\{A_F, \bar{x}_0\}$ — управляема, то условие (6) *также является необходимым и достаточным условием несмещенности оценки $\widetilde{\sigma}(t)$, где $A_F = A - BF$. При этом если пара $\{A_F, \bar{x}_0\}$ не является управляемой, то для несмещенности оценки $\widetilde{\sigma}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(FA - MC - NF)K_{A_F,\bar{x}_0} = 0,$$

где $K_{A_F,\,\bar{x}_0}$ *— матрица управляемости Калмана для пары* $\{A_F,\ \bar{x}_0\}$. *Если* $\bar{x}_0 = 0$, *то произвольный наблюдатель вида* (5) *формирует несмещенную оценку* $\widetilde{\sigma}(t)$ *в задаче диагностики или в совместной задаче стабилизации и оптимального наблюдения.*

Доказанная теорема об условиях, обобщающих классическое условие несмещенности оценки, расширяет допустимое множество параметров оптимального наблюдателя с помощью наличия дополнительной информации о начальном состоянии и позволяет усовершенствовать существующие методы фильтрации и оценки состояния[24,25] по минимизации критерия оптимальности.

Кроме того, в главе 1 предложен метод построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка, основанный на сведении указанных задач к задачам нелинейной оптимизации при условии устойчивости характеристического полинома искомого наблюдателя и передаточных функций систем в отклонениях. В конце главы теоретические результаты проиллюстрированы на примерах.

Основные результаты первой главы диссертации опубликованы в работах автора [2; 6; 7; 9; 11; 12].

Во второй главе решены задачи оптимального наблюдения: задача 1 для непрерывного времени и аналогичная задача для дискретного времени, в которых исходные системы имеют скалярный выход, то есть размерность выхода $l = 1$, и заданы в канонической форме наблюдаемости

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_n \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ 1)\,,$$

где α_i — вещественные коэффициенты характеристического полинома матрицы A, а оцениваемый скалярный ($p = 1$) линейный функционал от вектора состояния имеет специальную структуру, позволяющую в каноническом базисе построить оптимальные наблюдатели различных динамических порядков,

---

[24] *O'Reilly J.* Observers for linear systems. London : Academic press, 1983.

[25] *Aoki M., Huddle J.* Estimation of the state vector of a linear stochastic system with a constrained estimator // IEEE Transactions on Automatic Control. 1967. Vol. 12, no. 4. P. 432–433.

начиная с наблюдателя первого порядка ($k = 1$) и продолжая до одного из представителей повышенного порядка ($k = n+1$).

В главе 2 показано, что если существует скалярный ($k = 1$) оптимальный наблюдатель (5), в котором $N = \lambda$, $M = g$ — вещественные константы, удовлетворяющие условиям несмещенности оценки и устойчивости:

$$N = \lambda;\ M = g;\ F(\lambda I_n - A) = -gC,\ F = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix};\ \lambda < 0; \qquad (7)$$

то существует оптимальный наблюдатель (2) порядка k ($2 \leqslant k \leqslant n+1$), в котором матрицы N, P заданы в 1–ой канонической форме наблюдаемости и удовлетворяют условиям несмещенности оценки и устойчивости

$$F = PT, \quad TA - MC - NT = 0, \quad N\text{— гурвицева.} \qquad (8)$$

Сформулирована и доказана теорема о передаточных функциях оптимальных наблюдателей различных динамических порядков. При этом использовалось вспомогательное

Определение 2.1. Разделенной разностью полинома $\gamma(s) = s^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} \gamma_{j+1} s^j$ называется выражение вида:

$$\delta_\gamma(s,\mu) = \frac{\gamma(s) - \gamma(\mu)}{s - \mu} = \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j(\mu) s^{n-1-j},$$

в котором для коэффициентов $\delta_j(\mu)$ существуют рекуррентные соотношения:

$$\delta_0(\mu) = 1; \quad \delta_j(\mu) = \mu\delta_{j-1}(\mu) + \gamma_{n-j+1} \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

Теорема 2.1. *Если система* (1) *задана во второй канонической форме наблюдаемости с характеристическим полиномом* $\alpha(s) = s^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} s^j$; *выполнены условия* (7) *существования скалярного* ($k = 1$) *оптимального наблюдателя* (5), *условия* (8) *существования оптимальных наблюдателей* (2) *порядка* $k > 1$ *в первой канонической форме наблюдаемости с характеристическим полиномом* $\beta(s) = s^k + \sum\limits_{j=0}^{k-1} l_{j+1} s^j$; *то*

1) передаточная функция наблюдателей порядка $k = \overline{1, n-1}$ имеет вид:

$$W_{\widetilde{\sigma}y}(s) = \frac{-\alpha(\lambda)\beta_{k-1}(s)}{(s-\lambda)\beta_{k-1}(s)} = \frac{-\alpha(\lambda)}{s-\lambda},$$

где $\beta_{k-1}(s)$ — устойчивый полином степени $k-1$.

2) передаточная функция наблюдателей порядка $k = n$ имеет вид:

$$W_{\widetilde{\sigma}y}(s) = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_{\beta}(s,\lambda) + \beta(\lambda)\delta_{\alpha}(s,\lambda)}{\beta(s)};$$

3) передаточная функция наблюдателей порядка $k = n+1$ имеет вид:

$$W_{\widetilde{\sigma}y}(s) = \frac{-\alpha(\lambda)\delta_{\beta}(s,\lambda) + \beta(\lambda)\delta_{\alpha}(s,\lambda) + (\lambda^n - C_1)\alpha(s)}{\beta(s)}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Аналогичная теорема сформулирована и доказана для дискретных систем. Кроме того, найдены передаточные функции для систем в отклонениях, позволяющие вычислить среднеквадратичную ошибку наблюдения в установившемся режиме.

На основе доказанных теорем о передаточных функциях сделан вывод о постоянстве критерия оптимальности для построенных оптимальных наблюдателей пониженного порядка, начиная с первого порядка. При этом задача оптимизации при построении наблюдателя пониженного порядка не возникает.

В конце главы 2 на примере систем четвертого порядка использованы найденные передаточные функции и проведено сравнение построенных наблюдателей как по критерию оптимальности, так и по динамике среднеквадратичной ошибки наблюдения.

Результаты второй главы опубликованы в работах автора [3; 13; 14].

В третьей главе решена задача построения оптимальных наблюдателей второго и третьего порядков при условии, что наблюдателей первого порядка не существует для стохастических объектов управления со скалярным выходом как в непрерывном, так и в дискретном времени.

В каноническом базисе сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности наблюдателей второго и третьего порядков в предположении, что наблюдателей первого порядка не существует.

Теорема 3.1. *Для системы дифференциальных уравнений* (1) *порядка выше третьего* ($n > 3$) *с измеряемым выходом и аддитивными вероятностными возмущениями, заданной во второй канонической форме наблюдаемости, и наблюдателей* (2) *второго* ($k = 2$) *и третьего* ($k = 3$) *порядков, формирующих несмещенную оценку линейного функционала* (3) *от вектора состояния с матрицей* $F = (f_1 \ \ \dots \ \ f_n)$ *и искомых в первой канонической форме наблюдаемости, верно, что*

1) необходимые и достаточные условия существования единственного наблюдателя второго порядка и матрицы T *и* M *имеют вид*

$$t_{2n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n, \ f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0,$$
$$l_1 = \frac{f_2 f_4 - f_3^2}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0, \ l_2 = \frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 - f_2^2} > 0,$$
$$f_i = -l_1 f_{i-2} - l_2 f_{i-1}, \ i = 5, \dots, n, \text{для } n > 4,$$
$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \dots & f_n & t_{2n} \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - (\alpha_n - l_2) t_{2n} + l_1 f_n \end{pmatrix},$$

где условие единственности $f_1 f_3 - f_2^2 \neq 0$ *означает, что не существует наблюдателя* (5) *первого порядка, формирующего несмещенную оценку линейного функционала* (3);

2) необходимые и достаточные условия существования наблюдателя третьего порядка и матрицы T и M имеют вид

$$t_{2n} = -l_1 f_{n-2} - l_2 f_{n-1} - l_3 f_n,\ t_{3n} = -l_1 f_{n-1} - l_2 f_n - l_3 t_{2n},$$

$$a \neq \frac{f_3(f_3^2 - f_2 f_4) + f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_1 f_3 - f_2^2}, \tag{9}$$

$$l_1 = \frac{f_4(f_4^2 - f_3 a) + a(f_2 a - f_3 f_4) + b(f_3^2 - f_2 f_4)}{a(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)} > 0,$$
$$l_2 = \frac{f_4(f_2 a - f_3 f_4) + a(f_3^2 - f_1 a) + b(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{a(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)} > 0,$$
$$l_3 = \frac{f_4(f_3^2 - f_2 f_4) + a(f_1 f_4 - f_2 f_3) + b(f_2^2 - f_1 f_3)}{a(f_1 f_3 - f_2^2) - f_3(f_3^2 - f_2 f_4) - f_4(f_1 f_4 - f_2 f_3)} > 0,$$
$$l_2 l_3 - l_1 > 0,$$

$$a = \begin{cases} f_5, \text{ если } n > 4, \\ t_{24}, \text{ если } n = 4; \end{cases} \qquad b = \begin{cases} f_6, \text{ если } n > 5, \\ t_{25}, \text{ если } n = 5, \\ t_{34}, \text{ если } n = 4; \end{cases}$$

$$f_i = -l_1 f_{i-3} - l_2 f_{i-2} - l_3 f_{i-1},\ i = 7, \ldots, n,\ \text{ для } n > 6,$$

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_{n-1} & f_n & t_{2n} \\ f_3 & f_4 & \ldots & f_n & t_{2n} & t_{3n} \end{pmatrix},$$
$$M = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i - t_{2n} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_{i+1} - \alpha_n t_{2n} - t_{3n} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-2} \alpha_i f_{i+2} - (\alpha_{n-1} - l_2) t_{2n} - (\alpha_n - l_3) t_{3n} + l_1 f_n \end{pmatrix},$$

где условие (9) *для случая $n > 5$ означает единственность наблюдателя третьего порядка, а для случая $n > 4$ означает, что не существует наблюдателя второго порядка, формирующего несмещенную оценку линейного функционала* (3).

Аналогичная теорема сформулирована и доказана для дискретных систем.

Кроме того, были предложены аналитические выражения передаточных функций наблюдателей, которые позволяют вычислить квадратичный критерий оптимальности как для непрерывных, так для дискретных систем.

Таким образом, доказанные теоремы позволили определить случаи, в которых при построении оптимальных наблюдателей второго и третьего порядков возникает задача нелинейной оптимизации.

В конце главы 3 на примерах систем четвертого порядка проведено сравнение построенных наблюдателей второго и третьего порядка по оптимизируемой метрике.

Результаты третьей главы опубликованы в работах автора [1; 4; 15].

В четвертой главе решена задача 1 для случая многосвязных систем, то есть систем дифференциальных уравнений с векторным измеряемым выходом (размерность выхода $l > 1$) и векторным оцениваемым образом вектора состояния (размерность линейного функционала $p > 1$). Кроме того, решена аналогичная задача в дискретном времени. В канонической форме Люенбергера предложена структура оптимальных наблюдателей. Сформулированы и доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях существования многосвязных как непрерывных, так и дискретных наблюдателей пониженного порядка.

Теорема 4.1. *Пусть система* (1) *наблюдаема,* $\operatorname{rank} C = l$*, и пара* $\{C, A\}$ *находится в каноническом представлении Люенбергера (суммы индексов наблюдаемости* $\theta_j = \sum\limits_{i=1}^{j} \nu_i$*). Векторный линейный функционал* (3)*, в котором в каноническом базисе матрица* $F = (f_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p\times n}$*, может быть восстановлен оптимальным наблюдателем* (2) *порядка* k*, искомым в канонической форме Люенбергера (суммы индексов наблюдаемости* $\varkappa_i = \sum\limits_{j=1}^{i} k_j$*), тогда и только тогда, когда относительно неизвестных элементов матриц* $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k\times n}$*,*

$M = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k\times l}$ *выполняются следующие условия:*

$$t_{\varkappa_{i-1}+1,\theta_{j-1}+\eta_j+1} = -l_{\varkappa_{i-1}+1} t_{\varkappa_i,\theta_{j-1}+\eta_j},\ \textit{для}\ \nu_j > 1;$$

$$t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1,\theta_{j-1}+\eta_j+1} = t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i,\theta_{j-1}+\eta_j} - l_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1} t_{\varkappa_i,\theta_{j-1}+\eta_j},\ \textit{для}\ \nu_j > 1, k_i > 1;$$

$$m_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1,j} = -\sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1,\theta_{j-1}+\eta} - t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i,\theta_j} + l_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1} t_{\varkappa_i,\theta_j},\ \textit{для}\ k_i > 1;$$

$$m_{\varkappa_{i-1}+1,j} = -\sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\varkappa_{i-1}+1,\theta_{j-1}+\eta} + l_{\varkappa_{i-1}+1} t_{\varkappa_i,\theta_j},\ t_{\varkappa_i,j} = f_{i,j},$$

$$\mu_i = \overline{1, k_i - 1},\ \eta_j = \overline{1, \nu_j - 1},\ i = \overline{1, p},\ j = \overline{1, l};$$

$$\beta(s) = \det(sI_k - N) - \textit{непрерывно устойчивый полином.}$$

Аналогичная теорема сформулирована и доказана для дискретных систем.

Кроме того, на основе доказанных теорем было предложено левое матричное дробное описание передаточной функции как для системы дифференциальных уравнений, так и для системы разностных уравнений в отклонениях. Кроме того, предложена формула для нахождения общего количества неизвестных параметров наблюдателей в канонической форме Люенбергера.

На основе предложенного автором в главе 4 метода построения многосвязных наблюдателей удалось дать положительный ответ на вопрос о возможности решения задачи 1 с помощью оптимального наблюдателя порядка меньшего, чем ранее известный[26] гарантированный порядок асимптотического наблюдателя

$$k^* = \sum_{j=1}^{\min\{p,l\}} (\nu_j - 1),$$

где ν_j — упорядоченные по невозрастанию индексы наблюдаемости исходной динамической системы.

Таким образом, предложенный автором диссертации метод синтеза оптимальных наблюдателей пониженного порядка с использованием канонической

[26] *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Методы робастного обращения динамических систем. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009.

формы Люенбергера позволил усовершенствовать существующие методы оценки состояния[18,26] по минимизации динамического порядка наблюдателя.

С помощью предложенного в главе 4 метода решения задачи 1 повышается оптимальность многосвязных наблюдателей по сравнению с наблюдателями на основе скалярных наблюдателей путем снятия предположения о вещественности и различности спектра искомого наблюдателя. В конце главы теоретические результаты проиллюстрированы на примерах.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах автора [5; 10; 16].

В Заключении подводятся итоги выполненного исследования и приводятся основные результаты. Также обозначаются возможные направления дальнейших исследований.

Заключение

Основные результаты работы автора заключаются в следующем.

1. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования несмещенных оценок, формируемых при решении задачи, объединяющей две классические задачи теории управления: стабилизации посредством управления с обратной связью и оптимального наблюдения, и задачи диагностики неисправностей для линейных стационарных динамических систем при аддитивных белых шумах.
2. Представлены аналитические выражения для передаточных функций системы в отклонениях и оптимальных наблюдателей различных динамических порядков как для непрерывных, так и для дискретных динамических систем как со скалярными, так и с векторными измеряемым выходом и оцениваемым линейным функционалом от вектора состояния.
3. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных наблюдателей второго и третьего динамических порядков в каноническом базисе.

4. Разработаны методы решения задачи построения оптимальных наблюдателей (систем дифференциальных уравнений) пониженного порядка, основанные на сведении задач оптимального наблюдения к задачам нелинейной оптимизации на невыпуклом множестве допустимых параметров и аналитическом вычислении передаточных функций динамических систем в отклонениях.

Результаты диссертационной работы могут представлять интерес для специалистов, работающих в области теории управления динамическими системами.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с применением разработанного подхода к задачам фильтрации для допускающих статистическую линеаризацию нелинейных систем при случайных воздействиях, в том числе цветных и мультипликативных шумах. Кроме того, в связи с наличием различных канонических форм для описания объектов управления с векторным выходом, возможно развитие подхода к построению оптимальных наблюдателей для многосвязных динамических систем.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико–математических наук Василию Владимировичу Фомичеву за постановку задачи и внимание к работе, профессорско–преподавательскому составу факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за полученное образование, а также всем сотрудникам кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и внимание к диссертационной работе.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. *Kamenshchikov M.* Conditions for existence of second-order and third-order filters for discrete systems with additive noises // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 3. — (Web of Science, Scopus, Impact Factor 2021 — 2.592, CiteScore 2021 — 2.9).

2. *Каменщиков М. А.*, *Капалин И. В.* Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2018. — № 4. — с. 19—26. — (Двухлетний импакт–фактор РИНЦ 2018 — 0.305). — Перевод:

   Kamenshchikov M. A., *Kapalin I. V.* A Procedure for Constructing Optimum Functional Filters for Linear Stationary Stochastic Systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2018. — Vol. 42, no. 4. — P. 163–170. — (RSCI).

   Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты, а И.В. Капалиным поставлены задачи и намечены направления их решения.

3. *Каменщиков М. А.* Передаточные функции оптимальных фильтров различных динамических порядков для дискретных систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2021. — № 2. — с. 19—28. — (Двухлетний импакт–фактор РИНЦ 2021 — 0.077). — Перевод:

   Kamenshchikov M. A. Transfer functions of optimum filters of different dynamic orders for discrete systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2021. — Vol. 45, no. 2. — P. 60–70. — (RSCI).

4. *Фомичев В. В.*, *Каменщиков М. А.* Сравнительный анализ оптимальных фильтров второго и третьего порядков для непрерывных систем // Дифференциальные уравнения. — 2021. — т. 57, № 11. — с. 1546—1554. — (Двухлетний импакт–фактор РИНЦ 2021 — 8.043). — Перевод:

   Fomichev V., *Kamenshchikov M.* Comparative analysis of optimal filters of the second and third order for continuous-time systems // Differential Equations. — 2021. — Vol. 57, no. 11. — P. 1527–1535. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact Factor 2021 — 0.784, CiteScore 2021 — 1.3).

   Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором В.В. Фомичевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

5. *Фомичев В. В.*, *Каменщиков М. А.* Синтез субоптимальных фильтров для многосвязных дискретных систем // Дифференциальные уравнения. — 2022. — т. 58, № 8. — с. 1105—1111. — (Двухлетний импакт–фактор РИНЦ 2021 — 8.043). — Перевод:

   Fomichev V., *Kamenshchikov M.* Synthesis of suboptimal filters for multivariable multicriteria discrete systems // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, no. 8. — P. 1097–1104. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Impact Factor 2021 — 0.784, CiteScore 2021 — 1.3).

   Автором разработаны методы решения задач и получены все основные результаты. Научным руководителем, профессором В.В. Фомичевым поставлены задачи и намечены направления их решения.

Иные публикации автора по теме диссертации

6. *Каменщиков М. А.*, *Капалин И. В.* Обобщение условия несмещённости фильтра для замкнутых систем // Дифференциальные уравнения. — 2018. — т. 54, № 2. — с. 286—287. — (Двухлетний импакт–фактор РИНЦ 2018 — 0,684).

7. *Каменщиков М. А.*, *Капалин И. В.* Численное моделирование линейной стохастической системы в задаче оптимальной фильтрации пониженного порядка // Дифференциальные уравнения. — 2018. — т. 54, № 8. — с. 1142—1143. — (Двухлетний импакт–фактор РИНЦ 2018 — 0,684).

8. *Капалин И. В.*, *Каменщиков М. А.* Подход к вычислению стабилизатора пониженного порядка // Дифференциальные уравнения. — 2019. — т. 55, № 8. — с. 1163—1164. — (Двухлетний импакт–фактор РИНЦ 2019 — 1,189).

9. *Каменщиков М. А.*, *Капалин И. В.* Метод синтеза оптимального функционального фильтра для линейных стохастических систем // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019 / под ред. Д. А. Новикова. — Москва : ИПУ РАН, 2019. — с. 853—857.

10. *Каменщиков М. А.*, *Фомичев В. В.* Синтез субоптимальных фильтров для многосвязных стохастических систем // материалы Международной конференции Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022). — Екатеринбург : Издательство УМЦ УПИ, 2022. — с. 94—97.

11. *Каменщиков М. А.* Метод синтеза функциональных оптимальных наблюдателей для линейных динамических систем с шумами // Ломоносов-2018: сборник тезисов XXV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция Вычислительная математика и кибернетика. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — с. 22—23.

12. *Каменщиков М. А.* Условие несмещенности в совместной задаче стабилизации и оптимальной фильтрации // Ломоносов-2019: сборник тезисов XXVI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция Вычислительная математика и кибернетика. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — с. 24—25.

13. *Фомичев В. В.*, *Каменщиков М. А.* О функциональных наблюдателях для линейных систем со стохастическими возмущениями // Тихоновские чте-

ния: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — с. 9—9.

14. *Фомичев В. В.*, *Каменщиков М. А.* Методы построения фильтров пониженного порядка // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2020. — с. 8—8.

15. *Фомичев В. В.*, *Каменщиков М. А.* Сравнение оптимальных фильтров второго и третьего порядка в установившемся режиме // Ломоносовские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2021. — с. 151—152.

16. *Фомичев В. В.*, *Каменщиков М. А.* О задаче субоптимальной фильтрации для стохастических многосвязных систем // Ломоносовские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2022. — с. 91—92.

Каменщиков Михаил Александрович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук на тему:

Методы построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для линейных стационарных динамических систем

Подписано в печать 03.03.2023. Формат 60×90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 256.