**Отзыв официального оппонента на диссертацию
Жилиной Светланы Александровны на тему
«Комбинаторные свойства бинарных отношений
на вещественных алгебрах Кэли-Диксона»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 «Математическая логика,
алгебра, теория чисел и дискретная математика»
(01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»)**

Диссертация посвящена вещественным алгебрам Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$, которые задаются наборами параметров $\gamma = (\gamma_0, \dots \gamma_{n-1})$, где $\gamma_i = \pm 1$. Наиболее известна главная последовательность $\mathcal{M}_n$, определяемая набором $\gamma = (-1, \dots, -1)$. Первые члены этой последовательности — классические алгебры комплексных чисел $\mathbb{C}$, кватернионов $\mathbb{H}$, октонионов $\mathbb{O}$ и седенионов $\mathbb{S}$. Хорошо известно, что алгебра кватернионов уже некоммутативна, алгебра октонионов — неассоциативна, но альтернативна, алгебра седенионов — даже не альтернативна, и в ней появляются делители нуля. Таким образом, даже алгебры главной последовательности устроены весьма нетривиально. Другая последовательность с именем — контр-алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{H}_n$, задаваемые параметрами вида $\gamma = (-1, \dots, -1, 1)$ (контркомплексные числа $\hat{\mathbb{C}}$, контркватернионы $\hat{\mathbb{H}}$ и т.д.).

В диссертации изучаются свойства графов отношений на алгебрах Кэли-Диксона: коммутативности, ортогональности и делителей нуля. Так как алгебры Кэли-Диксона, вообще говоря, некоммутативны, то граф делителей нуля является ориентированным, в отличие от графов симметричных отношений коммутативности и ортогональности. Поскольку графы отношений инвариантны относительно изоморфизмов алгебр, они могут быть использованы для описания групп автоморфизмов алгебр и решения проблемы изоморфизма алгебр.

В главе 1 вводятся основные понятия теории алгебр Кэли-Диксона и графов отношений на алгебрах, приводится обзор известных результатов.

В главе 2 рассматриваются такие пары делителей нуля в произвольных вещественных алгебрах Кэли-Диксона, компоненты которых альтернируют между собой. Один из основных результатов главы показывает, что в графе делителей нуля выделяются шестиугольные структуры, важные для последующих исследований. Кроме того, в этой главе описана связь между графом ортогональности Γ_O и графом делителей нуля Γ_Z вещественных алгебр Кэли-Диксона, показано, что чисто мнимые делители нуля образуют в Γ_O компоненту связности Γ'_O, а также установлено соотношение между централизаторами и ортогонализаторами чисто мнимых дважды альтернативных элементов.

Глава 3 посвящена алгебрам главной последовательности $\mathcal{M}_n$. В графах ортогональности алгебр $\mathcal{M}_n$ произвольной размерности выделены структуры, названные двойными шестиугольниками, которые состоят из 12 вершин и 24 ребер. Очень подробно рассмотрен случай алгебры седенионов $\mathbb{S}$: описаны компоненты связности графа ортогональности $\Gamma_O(\mathbb{S})$, и показано, что диаметр каждой его компоненты связности равен 3 и что $\Gamma_O(\mathbb{S})$ не содержит циклов нечетной длины. Эти результаты усиливают результаты Брауна и де Маре. Для графа коммутативности $\Gamma_C(\mathbb{S})$ описана компонента связности $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$, для которой получилось доказать, что её диаметр равен 3 или 4. На основе компьютерных вычислений сформулирована гипотеза, что диаметр $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ на самом деле равен 3.

В главе 4 подробно разобраны графы отношений контр-алгебр $\mathcal{H}_n$ малых размерностей: $\hat{\mathbb{C}}$, $\hat{\mathbb{H}}$, $\hat{\mathbb{O}}$, $\hat{\mathbb{S}}$. Установлено соотношение между их графами коммутативности и графами ортогональности, описаны компоненты связности и клики в графах ортогональности и делителей нуля. Как и для главной последовательности, случай $n = 4$, т. е. контрседенионы $\hat{\mathbb{S}}$, представляет существенные трудности. Тем не менее, в результате весьма техничных рассмотрений автору удалось доказать, что диаметр $\Gamma_Z(\hat{\mathbb{S}})$ равен 4, а диаметр $\Gamma'_O(\hat{\mathbb{S}})$ равен 5.

В главе 5 рассмотрены графы ортогональности на парах базисных элементов произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона. Такие графы проще для исследования, чем полные графы ортогональности алгебр, но уже их оказывается достаточно для решения проблемы изоморфизма алгебр. Описана структура графа $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$, и представлен алгоритм восстановления параметров алгебры Кэли-Диксона по графу $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1})$. Доказано, что для $n, m \geq 3$ изоморфизм графов $\Gamma_e(\mathcal{A}_{n+1}^{\gamma})$ и $\Gamma_e(\mathcal{A}_{m+1}^{\lambda})$ равносилен изоморфизму алгебр $\mathcal{A}_{n+1}^{\gamma}$ и $\mathcal{A}_{m+1}^{\lambda}$.

Работа выполнена на высоком уровне, автор продемонстрировал глубокое понимание проблематики и владение необходимой техникой. Получены сильные результаты в актуальной и активной области исследований. Результаты диссертации опубликованы в 6 работах, все 6 из которых — в журналах, индексируемых Scopus, Web of Science и RSCI.

Есть некоторое количество незначительных замечаний к тексту диссертации:

1) В подразделе 5.3.2 отмечено, что, в случае вещественных алгебр Кэли-Диксона малых размерностей, графы ортогональности на парах базисных элементов не инвариантны относительно изоморфизмов этих алгебр. Корректнее сказать, что рассматриваемые графы определяются не самими алгебрами Кэли-Диксона, а последовательностями их параметров.

2) Упомянутые в диссертации перспективы дальнейших исследований исчерпываются гипотезой 3.2.25 о диаметре графа $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ и разделом 5.4, описывающим схему решения проблемы изоморфизма для расширенного графа ортогональности на парах базисных элементов. Хотелось бы, чтобы в заключении был приведён более широкий список открытых вопросов по данной тематике.

Перечисленные замечания не являются существенными и не снижают научную ценность диссертации. Количество опечаток очень мало для текста такого объёма. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа С. А. Жилиной «Комбинаторные свойства бинарных отношений на вещественных алгебрах Кэли-Диксона» соответствует критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
кафедры теоретической информатики
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова

Адрианов Николай Михайлович

Подпись заверяю
нач. отдела кадров
(Соколова Г. Н.)