**ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук Добровольского Николая Николаевича на тему: «Дзета-функции моноидов натуральных чисел и смежные вопросы» по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»**

Соискатель Добровольский Н. Н. свою диссертационную работу посвятил ряду вопросов аналитической теории чисел и теории диофантовых приближений.

В большой по объему диссертации рассматриваются пять основных тем: логарифмы эйлеровых произведений; гиперболическая дзета-функция Гурвица; дзета-функция моноидов натуральных чисел; закономерности для остаточных дробей алгебраических иррациональностей; новые направления исследований по классам периодических функций, порожденных моноидами натуральных чисел, и алгебрам рядов Дирихле моноидов натуральных чисел.

Несомненно, что диссертация обладает внутренним единством, что продиктовано логикой развития теоретико-числового метода в приближенном анализе, развитием которого успешно занимался соискатель, начиная со своих первых научных работ.

В первой главе, основываясь на классической работе Дэвенпорта – Хельбронна, соискатель изучает поведение непрерывной функции, полученной почленным логарифмированием произведения Эйлера, устанавливает глубокий факт, что эта непрерывная функция при приближении справа к абсциссе абсолютной сходимости эйлерова произведения пробегает все ветви логарифмической функции. Отсюда автор получает интересные утверждения о поведении дзета-функции Римана вблизи абсциссы абсолютной сходимости.

При развитии теоретико-числового метода Н. М. Коробова естественно возникает гиперболическая дзета-функция Гурвица. Основываясь на классическом изложении теории дзета-функции Гурвица из монографии Н. Г. Чудакова, во второй главе соискатель строит содержательную теорию гиперболической дзета-функции Гурвица. Сразу отметим, что каждая глава заканчивается заключением, в котором обрисовываются направления дальнейших возможных исследований.

В главах с 3 по 6 и с 8 по 10 развивается основная тема диссертации – дзета-функция моноидов натуральных чисел. Отметим, что диссертант в своих работах стал исследовать новый объект, который имеет континуум различных частных случаев. Развитая в этих главах теория показала, что новый объект обладает рядом свойств, которые отсутствуют у дзета-функции Римана.

В небольшой третьей главе дается определение основного объекта исследования – дзета-функции моноида натуральных чисел, приводятся различные примеры, указывается связь с комбинаторикой через обобщенную функцию Мёбиуса, вводится важнейший для дальнейшего объект исследования – последовательности простых чисел с экспоненциальным ростом. И сразу обнаруживается принципиальное отличие дзета-функции моноида с множеством простых, образующих последовательности простых чисел с экспоненциальным ростом, от дзета-функции Римана: для любого такого моноида соответствующая дзета-функция сходится в правой полуплоскости, где вещественная часть комплексного аргумента положительная. Забегая вперед, отметим, что в шестой главе сначала формулируется гипотеза заградительного ряда, а потом с помощью элегантных рассуждений доказывается что для любой такой дзета-функции её областью голоморфности является указанная правая полуплоскость, а мнимая ось целиком состоит из особых точек. Здесь мы видим принципиальное отличие от теории дзета-функции Римана. У дзета-функции Римана имеется только одна особая точка – полюс на вещественной оси в точке один. Далее, с помощью несобственного интеграла дзета-функция Римана продолжается в критическую полосу, а потом с помощью функционального уравнения на всю комплексную плоскость. Всего этого просто не существует в случае дзета-функции моноида с последовательностью простых чисел с экспоненциальным ростом. Уже в пятой главе с помощью глубоких классических теорем Ингама и Россера о распределении простых чисел соискатель показывает, что абсцисса абсолютной сходимости может принимать любые значения от нуля до единицы.

Моноиды натуральных чисел делятся на два больших класса: моноиды с однозначным разложением на простые элементы и моноиды без однозначного разложения на простые элементы. В последнем случае множество простых элементов моноида содержит псевдопростые числа. В четвертой главе соискатель детально исследует вопрос о моноидах с однозначным разложением на простые и ему удалось найти общий вид таких моноидов.

Восьмая и девятая главы посвящены вопросам распределения простых элементов в некоторых моноидах.

Десятая глава связана с решением обратной задачи для моноида с экспоненциальной последовательностью простых. Здесь обнаружилось принципиальное отличие теории обратных задач в классических работах Б. М. Бредихина, где был случай показательной плотности распределения. В случае, который рассматривает диссертант, это понятие не работает и ему пришлось ввести новое понятие – логарифмическую показательную плотность распределения.

На первый взгляд особняком стоит седьмая глава, в которой соискатель, разработав метод параметрических множеств, выводит две новые асимптотические формулы для теории гиперболической дзета-функции решёток. Но, анализируя содержание этой главы, мы видим, что в ней появляется дзета-функция Дедекинда главных идеалов чисто вещественного поля. А множество абсолютных величин норм главных идеалов является нетривиальным примером моноида натуральных чисел.

Особое внимание остановим на содержании одиннадцатой главы. Как указал Н. М. Коробов ещё в работе 1967 года, посвящённой шестидесятилетию своего учителя, член-корреспондента АН СССР А. О. Гельфонда, теория диофантовых приближений имеет принципиальное значение для теоретико-числового метода в приближенном анализе. В частности, большую роль играют числа с ограниченными неполными частными в разложении в непрерывную дробь. После работ К. К. Фролова в 1976 году в теоретико-числовом методе стали играть значительную роль алгебраические сетки и решётки, о которые введется речь в упомянутой выше седьмой главе. Но в настоящее время известно очень мало о непрерывных дробях алгебраических иррациональностей. Хорошо известны классические результаты Лагранжа и Э. Галуа о квадратичных иррациональностях. Согласно теореме Э. Галуа бесконечная непрерывная дробь будет чисто периодической тогда и только тогда, когда раскладываемое число является приведенной квадратичной иррациональностью. Соискатель смог получить, на наш взгляд, фундаментальную теорему, заслуживающую самой высокой оценки. Им установлено, что начиная с некоторого места все остаточные дроби в разложении алгебраической иррациональности в непрерывную дробь являются либо приведенными алгебраическими иррациональностями в случае чисто вещественного алгебраического числа, либо обобщенным числом Пизо в общем случае. Эту теорему соискатель установил на основе анализа поведения минимальных многочленов остаточных дробей. Он показал, что они подчиняются дробно-линейным преобразованиям многочленов. Рекуррентные формулы для минимальных многочленов позволили соискателю уточнить классический алгоритм Лагранжа разложения алгебраического числа в непрерывную дробь. Он показал, что начиная с некоторого места достаточно вычислить два последовательных значения очередного минимального многочлена в точках, определяемых с помощью предыдущего минимального многочлена в точке предыдущего неполного частного и двух знаменателей предыдущих подходящих дробей. Отметим, что изучение дробно-линейных преобразований позволило соискателю найти и объяснить закономерности поведения сопряженных алгебраических иррациональностей остаточных дробей.

Последняя двенадцатая глава диссертации посвящена формулировки дальнейших новых направлений исследований, которые уже в настоящее время проводятся в нашей стране.

Диссертация написана достаточно подробно. Автор стремился сделать изложение максимально доступным, поэтому каждая глава содержит отдельное введение и заключение. Местами с этой целью автор допускает отдельные повторы, чтобы позволить читателю независимое изучение отдельных глав диссертации.

Отметим некоторые недостатки изложения. Например, в лемме 118 «число удовлетворяет многочлену», а не уравнению. В лемме 120 индекс суммирования должен быть ν, а не n. Этот список можно расширить, но упомянутые недостатки носят несущественный характер, не влияют на высокое качество работы.

Автореферат достаточно подробно и полно излагает содержание диссертации.

Таким образом, можно утверждать, что соискатель внёс существенный вклад в такие области математики, как аналитическая теория чисел и теория диофантовых приближений. Результаты диссертационной работы Н. Н. Добровольского являются оригинальными, имеют как теоретическую, так и практическую значимость. Все они прошли апробацию на всероссийских и международных конференциях, а также своевременно опубликованы в 28 рецензируемых изданиях из списка рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Диссертация отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к докторским диссертациям. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Всё перечисленное выше даёт основание считать, что соискатель Добровольский Николай Николаевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета
ФГОУ ВО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

Чирский Владимир Григорьевич

Контактные данные: E-mail: vgchirskii@yandex.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена докторская диссертация: 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес места работы: ФГОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва, Ленинские горы, д. 1
тел.: (495) 939-10-00
E-mail: info@rector.msu.ru