МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛОСОФСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Легейдо Мария Михайловна

Иинтенсиональные семантики силлогистики

5.7.5. Логика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата философских наук

Научный руководитель:
доктор философских наук, профессор
Маркин Владимир Ильич

Москва — 2025

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования В логике сейчас очень часто поднимается вопрос о взаимоотношении между старыми и новыми логическими системами — традиционными и современными логическими теориями, особенно в контексте единства логики как науки и преемственности современных логических теорий относительно предшествующих.

Силлогистика по праву считается первой детально разработанной логической теорией, и исследования в данной области ведутся и сейчас. В современной логике получено много результатов о взаимосвязи силлогистики с различными современными логическими теориями, например с логикой предикатов первого порядка. Строятся различные силлогистические исчисления с использованием стандартных и нестандартных силлогистических констант, а также различных вариантов интерпретаций атрибутивных высказываний.

К анализу проблем в области силлогистики может быть применен аппарат не только классической экстенсиональной логики, но и интенсиональной: при построении таких логик различного типа правильно построенным выражениям сопоставляются интенсионалы, то есть смыслообразующие конструкции. Встает вопрос: можно ли применить такой подход к исследованию силлогистических теорий. Оказывается, что такие попытки уже были предприняты в истории логики. Первым разработал оригинальный интенсиональный подход к интерпретации силлогистики в своих логических работах Лейбниц (см. [12]). Подробнее об этом написано в разделе 1.2.

Основной вопрос, ответом на который должна послужить данная работа, заключается в том, можем ли мы применить современные методы символической, в том числе и интенсиональной, логики для анализа традиционных логических систем.

Степень разработанности темы Данная область исследований является достаточно новой в современной российской и зарубежной логике. Несмотря на то, что задача построения силлогистики как интенсиональной теории впервые была поставлена еще Лейбницем, значительное развитие эта тема получила лишь в последние 20 лет. Первоначально различные исследователи ставили перед собой задачу экспликации и реконструкции идей самого Лейбница, используя для ее решения средства современной логической семантики.

В. Ленценом в [33] был осуществлен детальный текстологический разбор работ Лейбница и предпринята попытка сформулировать лейбницевскую интенсиональную семантику атрибутивных высказываний в терминах современной логики.

В 2001 г. вышла статья В.И. Маркина [20], в которой построена семантика традиционной силлогистики, основанная на идеях Лейбница. В ней в качестве значений общим терминам приписывались непротиворечивые множества положительных и отрицательных признаков (именно так Лейбниц трактовал содержания понятий), а силлогистические константы репрезентировали различные отношения между понятиями по содержанию. Была доказана адекватность построенной семантики силлогистике Лукасевича (системе **C4**).

В.И. Маркиным было осуществлено построение семантик указанного типа для нескольких других систем позитивной силлогистики. Так, в работе [21] он сформулировал семантику, полученную за счет отказа от требований непротиворечивости содержаний понятий. Оказалось, что адекватной формализацией такой семантики является не система **ФС** фундаментальной силлогистики, а ее подсистема **ИФС**.

Позднее различные попытки построения интенсиональных семантик в духе лейбницевских идей предпринимались и зарубежными исследователями. Отметим в этой связи работы К. Гласхоффа [31] и Р. ван Роэя [34]. В 2017 году вышла статья В.Г. Кузнецова «Интенсиональная силлогистика В.Г. Лейбница и ее роль в истории логики» [16], в которой подробно исследовались лейбницевские идеи.

В 2015 году вышла статья В.И. Шалака [30], в которой автор предложил новый подход к интерпретации атрибутивных высказываний, названный им «синтаксическим». Он предложил общим терминам в качестве значений приписывать формулы пропозициональной логики, а условия истинности атрибутивных высказываний определять через отношение логической выводимости. Шалак доказал адекватность данной семантики системе фундаментальной силлогистики. Этот подход позже был модифицирован В.И. Маркиным (см. [23, 24, 25]), который предложил вместо отношения выводимости использовать отношение логического следования - как классического, так и релевантного. Были доказаны непротиворечивость и полнота построенных семантик относительно систем фундаментальной и традиционной силлогистики. Работы В.И. Шалака и В.И. Маркина открыли, по существу, новое направление в исследованиях по силлогистике, где имеется много проблем, требующих своего решения. Диссертационная работа как раз и предполагает разработку и развитие данного направления исследований.

Цель и задачи исследования Целью данной диссертации является развитие интенсионального подхода к построению силлогистических теорий. В работе формулируются интенсиональные семантики позитивной силлогистики, особенность которых состоит в том, что в качестве значений общим терминам (субъектам и предикатам атрибутивных высказываний) сопоставляются формулы первопорядкового языка или более простого пропозиционального языка (эти формулы выражают логические содержания соответствующих субъекту и предикату понятий), а условия истинности и ложности атрибутивных высказываний задаются с использованием отношения логического следования между указанными формулами.

Для достижения данной цели решались следующие задачи:

1. Сравнение интенсионального варианта воображаемой логики Васильева (система **IL2**) и традиционной силлогистики (система **C4**).

2. Построение семантики данного типа для ряда известных систем силлогистики (подсистем фундаментальной силлогистики, силлогистики Больцано, силлогистик с нестандартным набором исходных силлогистических констант).

3. Доказательство метатеорем о непротиворечивости и полноте аксиоматических силлогистических исчислений относительно соответствующих семантик.

4. Формулировка интенсиональных семантик позитивных силлогистик, в которых в условиях истинности атрибутивных высказываний используется вместо классического следования релевантное следование, следование в логике Хао Вана и следование в логике, двойственной логике Хао Вана.

5. Построение аксиоматических исчислений, которые адекватно формализуют семантики с релевантным следованием. Доказательство соответствующих метатеорем.

Объект и предмет исследования **Объектом** исследования являются различные силлогистические теории, а **предметом** — построение адекватных соответствующим исчислениям интенсиональных семантик с использованием отношения как классического, так и релевантного следования.

Научная новизна исследования Данная работа является первым в отечественной логике развернутым диссертационным исследованием, посвященным интенсиональным интерпретациям силлогистических теорий.

В ходе исследования были построены «релевантизированные» интенсиональные семантики для промежуточной системы между **ФС** и **ИФС**, семантики с использованием отношения классического и релевантного следования для силлогистических систем **С2** и силлогистики Больцано, а также для традиционного и фундаментального фрагментов силлогистики васильевского типа с тремя исходными силлогистическими константами и силлогистики Венна с пятью исходными константами; исследованы их метатеоретические свойства.

Стоит особо отметить, что «релевантизация» семантик силлогистических теорий не подразумевает построения логических теорий неклассического типа с релевантным определением отношения логического следования. Отношение следования между силлогистическими формулами остается классическим, но при определении условий значимости этих простых силлогистических формул используется уже отношение релевантного следования между формулами языка логики высказываний.

Методологическая основа исследования В ходе работы над диссертацией были использованы различные методы современной символической логики: метод формальных систем (логических исчислений), метод формальных семантик, аксиоматический метод.

Кроме того, в доказательствах метатеорем применяются такие металогические методы, как методы сравнения дедуктивных теорий в терминах погружающих операций (с использованием критерия погружаемости В.А. Смирнова) и дефинициальных расширений теорий.

Положения, выносимые на защиту

- исчисление **IL2**, формализующее интенсиональный вариант воображаемой логики Васильева, является консервативным расширением силлогистики Лукасевича (исчисления **C4**);
- для подсистемы фундаментальной силлогистики $\mathbf{ИФС}_2$ существует адекватная интенсиональная семантика, в которой отношение релевантного следования используется при определении условий истинности формул;
- выдвинута и обоснована гипотеза о том, что при использовании вместо классического следования следования в логике Хао Вана при определении условий истиности формул класс аксиом совпадет с классом теорем системы **ФС**, а при использовании следования в логике, двойственной логике Хао Вана — с классом теорем системы **ИФС**;

- для систем **C2** и силлогистики Больцано существуют адекватные интенсиональные семантики, использующие отношение и классического, и релевантного следования при определении условий истинности формул;
- для систем с нестандартными наборами констант — силлогистик васильевского типа и силлогистики Венна в двух ее вариантах — существуют адекватные интенсиональные семантики с использованием отношения классического следования, для которых сформулированы «релевантизированные» варианты.

Теоретическое и практическое значение исследования Одним из главных результатов, имеющих теоретическое значение, является построение интенсиональных семантик для различных силлогистических систем: как классических, так и с нестандартными наборами силлогистических констант. Показана продуктивность интенсионального подхода в построении и исследованиях силлогистических теорий как в исторической перспективе, так и в современной логике. Результаты, полученные в ходе исследования, показывают возможность и продуктивность использования неклассических логических систем для анализа силлогистических теорий.

Практическое значение диссертационного исследования заключается в том, что оно может быть использовано для чтения курсов по силлогистическим теориям и по истории логики для студентов и аспирантов, специализирующихся по логике.

Степень достоверности и апробация результатов исследования Результаты проведенной работы были подкреплены ссылками на публикации авторитетных и компетентных исследователей в сфере силлогистики и современной логики. Методология данного диссертационного исследования опирается на всесторонний и подробный анализ своего предмета. Основные положения и выводы исследования были изложены в четырех научных работах, опубликованных в изданиях, отвечающих требованиям п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

Публикации в изданиях, отвечающих требованиям п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова:

1. Маркин В.И., Легейдо М.М. Интенсиональная семантика логики классов Дж. Венна // Логические исследования. 2019. Т. 25, № 2. С. 114–137. (Ядро РИНЦ – Scopus, RSCI, 1,3 п.л., SJR – 0,251, объём авторского вклада не менее 50%).

2. Легейдо М.М. Интенсиональные семантики для некоторых систем позитивной силлогистики // Логические исследования. 2021. Т. 27, № 2. С. 9–30. (Ядро РИНЦ – Scopus, RSCI, 1 п.л., SJR – 0,251).

3. Konkova A., Legeydo M. Intensional semantics for syllogistics: what Leibniz and Vasiliev have in common // Logic and Logical Philosophy. 2022. Vol. 31. №2. P. 339–356. (Ядро РИНЦ – Web of Science, Scopus, 1 п.л., JCI – 0,87, объём авторского вклада не менее 50%).

4. Легейдо М.М., Конькова А.В. Об интересной связи между традиционной силлогистикой и воображаемой логикой // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2022. №70. С. 48–58. (Ядро РИНЦ – Web of Science, RSCI, 0,6 п.л., JCI – 0,09, объём авторского вклада не менее 50%).

Работа прошла обсуждение на заседании кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и была рекомендована к защите

Главные результаты диссертационного исследования и возможности их теоретического применения в различных предметных областях были представлены на следующих конференциях, круглых столах и семинарах:

- Маркин В.И., Никанорова[1] М.М. «Интенсиональная семантика силлогистики Венна». XIII международная конференция «Современная логика:

[1] Никанорова — фамилия соискателя до вступления в брак.

проблемы и перспективы», Санкт-Петербург, Россия, 31 мая – 2 июня 2018 года.

- Никанорова М.М. «Интенсиональные семантики для силлогистик с нестандартными константами». Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019», Москва, Россия, 8–12 апреля 2019 года.

- Конькова А.В., Легейдо М.М. «Об интересной связи между традиционной силлогистикой и воображаемой логикой». Международная конференция «Двенадцатые Смирновские чтения по логике», Москва, Россия, 24–26 июня 2021 года.

- Legeydo M. "Relevantized Intensional Semantics For Some Syllogistic Theories". Международная конференция "PhDs in Logic XII", Берлин, Германия, 8–10 сентября 2021 года.

- Легейдо М.М. «Интенсиональная семантика для силлогистик васильевского типа». VIII Российский философский конгресс «Философия в полицентричном мире», Москва, Россия 26–28 мая 2022 года.

Структура диссертации Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

1 Экстенсиональный и интенсиональный подходы в силлогистике

1.1 Экстенсиональный подход к семантике силлогистики

В традиционной и современной логике самой распространенной трактовкой силлогистики является ее понимание как теории, которая исследует объемные связи между общими терминами. Такая трактовка идет еще от Аристотеля. В своих «Категориях» он пишет об общем для различных вещей понятии как об обозначающем эти предметы, то есть характеризует понятие с точки зрения его объема («И человек, и бык называются общим именем "создание", и понятие здесь одно и то же» [1, 1a]). Напомним, что понятие — мысль, которая посредством указания на некоторый признак, выделяет из универсума и собирает в класс (обобщает) предметы, обладающие этим признаком. Объем понятия — класс предметов, выделяемых из универсума и обобщаемых в данном понятии. Аристотель приводит следующий пример: «Когда одно сказывается о другом, как о подлежащем, то все, что говорится о сказуемом, будет говориться и о подлежащем; так, например, человек вообще сказывается о каком-нибудь определенном человеке, а живое существо ("создание") — о человеке вообще; следовательно, живое существо будет сказываться и о каком-нибудь определенном человеке: ведь определенный человек это — и человек, и живое существо» [1, 1b]. Здесь подразумевается экстенсиональная трактовка отношения между субъектами и предикатами атрибутивных высказываний.

При таком подходе силлогистические константы рассматриваются как знаки отношений между двумя множествами (объемами понятий): например, в фундаментальной силлогистике константа a репрезентирует отношение теоретико-множественного включения класса в класс (объема субъекта в объем предиката), константа i — наличие хотя бы одного общего элемента у двух классов: объемов субъекта и предиката, и так далее.

Стандартный язык чистой позитивной силлогистики содержит силлогистические константы a, e, i и o, а также, следуя Лукасевичу, — знаки терминов S, P, M, S_1, P_1, M_1 и т.д., логические связки $(\wedge, \vee, \supset, \neg)$ и скобки в качестве технических символов.

Понятие силлогистической формулы определяется следующим образом:

1. Если α и β — термины, то выражения вида $\alpha a \beta, \alpha i \beta, \alpha e \beta, \alpha o \beta$ — силлогистические формулы;

2. Если **A** — силлогистическая формула, то выражение вида $\neg$**A** — силлогистическая формула;

3. Если **A** и **B** — силлогистические формулы, то (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\supset$ B) — силлогистические формулы;

4. Ничто иное не является формулой.

В истории логики были сформулированы несколько систем силлогистики, различающихся классами законов. Для многих из них построены адекватные экстенсиональные семантики. Для дальнейшего исследования особый интерес представляют две системы: **ФС**, формализующая позитивный фрагмент фундаментальной силлогистики, и **С4**, формализующая позитивный фрагмент традиционной силлогистики.

Фундаментальная силлогистика является силлогистикой неаристотелевского типа, поскольку в ней не принимается ряд законов силлогистики Аристотеля. Эта теория основана на интерпретации высказываний, принимавшейся многими предшественниками символической логики (Лейбниц, Брентано, Венн, Де Морган и др.).

Экстенсиональная семантика для системы **ФС** может быть построена следующим образом [3, сс. 67–68]: моделью является пара $< D, \phi >$, где D — произвольное непустое множество, а ϕ — функция, сопоставляющая терминам силлогистического языка подмножества из D. Функция оценки $| \, |_{\phi}^{D}$ отображает множество силлогистических формул на множество истинностных значений $\{1,0\}$ при фиксированных D и ϕ.

$$\begin{array}{ll} |SaP|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \subseteq \phi(P); & |\neg\mathbf{A}|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow |\mathbf{A}|_\phi = 0; \\ |SeP|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \cap \phi(P) = \varnothing; & |\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow |\mathbf{A}|^D_\phi = 1 \mathbin{\dot\wedge} |\mathbf{B}|^D_\phi = 1; \\ |SiP|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \cap \phi(P) \neq \varnothing; & |\mathbf{A} \vee \mathbf{B}|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow |\mathbf{A}|^D_\phi = 1 \mathbin{\dot\vee} |\mathbf{B}|^D_\phi = 1; \\ |SoP|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \setminus \phi(P) \neq \varnothing; & |\mathbf{A} \supset \mathbf{B}|^D_\phi = 1 \Leftrightarrow |\mathbf{A}|^D_\phi = 1 \mathbin{\dot\supset} |\mathbf{B}|^D_\phi = 1. \end{array}$$

Формула является **ФС**-общезначимой, если и только если она принимает значение 1 в любой модели указанного типа. В дальнейшем в работе верхний индекс D будет опускаться, так как он остается неизменным для любых условий истинности.

Доказано, что система **ФС** непротиворечива и полна относительно сформулированной экстенсиональной семантики, т.е. **ФС** является адекватной формализацией чистого позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики. Данный результат подробно изложен в монографии В.А. Бочарова и В.И. Маркина [3].

Исчисление, аксиоматизирующее класс законов фундаментальной силлогистики, называется **ФС** [3, с.66]. Схемами его аксиом являются:

ФС0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

ФС1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **ФС5.** $SiP \supset SiS$;

ФС2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **ФС6.** $SoP \supset SiS$;

ФС3. $SeP \supset PeS$; **ФС7.** $SeP \equiv \neg SiP$.

ФС4. SaS; **ФС8.** $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **ФС** является правило *modus ponens.*

Смыслы силлогистических формул в системе **ФС** могут быть выражены в языке логики предикатов посредством следующего перевода ω [3, с. 66]:

$$\omega(SaP) = \forall x(Sx \supset Px);$$

$$\omega(SeP) = \forall x(Sx \supset \neg Px);$$

$$\omega(SiP) = \exists x(Sx \wedge Px);$$

$$\omega(SoP) = \exists x(Sx \wedge \neg Px);$$

$$\omega(\neg \mathbf{A}) = \neg \omega(\mathbf{A});$$

$$\omega(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \omega(\mathbf{A}) \nabla \omega(\mathbf{B}),$$

где ω — рекурсивная функция, сопоставляющая каждой силлогистической формуле некоторую формулу языка логики предикатов, а ∇ — любая бинарная пропозициональная связка.

Функция ω — общепринятый в математической логике перевод категорических высказываний в язык логики предикатов (распространенный и на сложные высказывания, образованные из категорических).

Формула силлогистического языка $\mathbf{A}$ является законом фундаментальной силлогистики, если и только если ее перевод $\omega(\mathbf{A})$ является законом логики предикатов, т.е. операция ω погружает систему **ФС** в исчисление предикатов.

Традиционную версию чистой позитивной силлогистики формализует силлогистическое исчисление, которое впервые было построено Я. Лукасевичем [19]. В. А. Смирнов [29] предложил иную формулировку этого исчисления и назвал его **С4**. Данная система может быть получена из исчисления **ФС** добавлением новой схемы аксиом

$$SaP \supset SiP.$$

Для того, чтобы получить адекватную экстенсиональную семантику для силлогистики **С4**, достаточно наложить на интерпретирующую функцию ϕ в модели $< D, \phi >$ следующее ограничение: $\phi(S) \neq \varnothing$ для любого общего термина S, то есть принять исходную семантическую предпосылку о непустоте всех общих терминов.

Формула является **С4**-общезначимой, если и только если она принимает значение 1 в каждой модели $< D, \phi >$, в которой $\phi(S) \neq \varnothing$.

Система **C4** погружается в классическое исчисление предикатов посредством перевода $\mathbf{\Theta}$, который как раз и фиксирует указанную выше экзистенциальную предпосылку:

$$\mathbf{\Theta}(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \wedge \exists x S_2 x \wedge \ldots \wedge \exists x S_n x) \supset \omega(\mathbf{A}),$$

где $\mathbf{A}$ — произвольная силлогистическая формула, а $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — список всех терминов в составе $\mathbf{A}$ [2].

Существуют и другие силлогистические системы, которые трактуются экстенсионально и которые будут рассмотрены в данном исследовании. Одной из них является система **C2**. Система **C2** является силлогистической системой аристотелевского типа, т.е. в ней выполняются все законы логического квадрата, правила обращения, а также все 24 правильных модуса простого категорического силлогизма.

Экстенсиональная семантика для системы **C2** обычно строится следующим образом. Определение модели остается прежним, а условия истинности атомарных силлогистических формул определяются так:

$$|SaP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \subseteq \phi(P) \mathbin{\dot{\wedge}} \phi(S) \neq \varnothing;$$
$$|SeP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \cap \phi(P) = \varnothing;$$
$$|SiP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \cap \phi(P) \neq \varnothing;$$
$$|SoP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \setminus \phi(P) \neq \varnothing \mathbin{\dot{\vee}} \phi(S) = \varnothing.$$

Формула является **C2**-общезначимой, если и только если она принимает значение 1 в любой модели указанного типа.

Схемами аксиом системы **C2** являются [3, с. 86]:

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$;

A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$;

A3. $SeP \supset PeS$;

A4. $SaP \supset SiP$;

A5. $SiP \supset SaS$;

A6. $SeP \equiv \neg SiP$.

A7. $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **C2** является правило *modus ponens.*

Другая система, которая будет рассмотрена в рамках данной работы — силлогистика Больцано. Согласно больцановской трактовке, истинные категорические высказывания всех типов должны иметь непустой субъект. Кроме того, должны выполняться требования и стандартной трактовки.

Экстенсиональная семантика для системы **СБ** может быть сформулирована следующим образом (определение модели опять остается прежним) [3, с. 76]:

$$|SaP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \subseteq \phi(P) \mathbin{\dot\wedge} \phi(S) \neq \varnothing;$$

$$|SeP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \cap \phi(P) = \varnothing \mathbin{\dot\wedge} \phi(S) \neq \varnothing;;$$

$$|SiP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \cap \phi(P) \neq \varnothing;$$

$$|SoP|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi(S) \setminus \phi(P) \neq \varnothing.$$

Формула является **СБ**-общезначимой, если и только если она принимает значение 1 в любой модели указанного типа.

Схемами аксиом системы **СБ** являются [3, с. 77]:

СБ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

СБ1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$;

СБ2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$;

СБ3. $SiP \supset PiS$;

СБ4. $SaP \supset SiP$;

СБ5. $SiP \supset SaS$;

СБ6. $SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$.

СБ7. $SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$.

Единственным правилом вывода в **СБ** является правило *modus ponens.*

1.2 Интенсиональная интерпретация силлогистики Лейбницем и ее современные формализации

В истории логики имеется альтернативный подход к интерпретации категорических суждений. Он заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций, но уже с точки зрения содержательных характеристик. В современном учении о понятии содержанием понятия называют признак, посредством которого выделяются и обобщаются предметы в понятии (данный признак может быть простым или сложным). В традиционной логике под содержанием понятия обычно понималась совокупность признаков — положительных (указывающих на наличие свойств) и отрицательных (указывающих на их отсутствие). Напомним, что между объемами и содержаниями понятий (если у них один универсум) действует закон обратного отношения: если одно понятие шире другого по объему, то оно беднее по содержанию, и наоборот.

При интенсиональном подходе силлогистические константы рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию. Идея такой интерпретации категорических высказываний принадлежит Г. Лейбницу, который прямо противопоставил свою «содержательную» трактовку «объемной».

Рассмотрим две работы Лейбница, где он развивает свой подход. Первая из них — «Элементы исчисления» [12, т. 3, с. 514–523]. В ней он пишет: «Схоластики говорят иначе, имея в виду не понятия, а примеры, являющиеся объектами общих понятий. Поэтому, они говорят, что [понятие] металла шире [понятия] золота, ибо оно содержит больше видов, чем золото; и если бы мы захотели перечислить все золотые предметы, с одной стороны, и металлические предметы — с другой, последних конечно же оказалось бы больше, к тому же первые содержались бы во вторых как часть в целом. $<\ldots>$ Но я предпочитаю ориентироваться на общие понятия, т.е. идеи и их комбинации, потому что они не зависят от существования индивидуальных предметов. Поэтому я утверждаю, что [понятие] золота больше [понятия] металла, ибо для понятия золота необходимо большее число компонентов, чем для [понятия] металла, и сложнее произвести золото, чем какой-нибудь другой металл» [12, т. 3, с. 518].

Вторая работа, к которой мы обратимся — «Новые опыты о человеческом разумении» [12, т. 2, с. 47–546]. Здесь Лейбниц предлагает программу трактовки силлогистики как интенсиональной теории: «Действительно, говоря:

“Всякий человек есть животное”, я хочу этим сказать, что все люди находятся в числе всех животных, но одновременно я имею в виду, что идея животного включена в идею человека. Животное содержит больше индивидов, чем человек, но человек содержит больше идей или больше формальных определений. Животное содержит больше экземпляров, человек — больше степеней реальности; у первого — больший объем, у второго — большее содержание. Поэтому мы вправе сказать, что все учение о силлогизме можно доказать на основании учения *de continente et contento* (о содержащем и содержимом), которое отлично от учения о целом и части, так как целое всегда больше части…» [12, т. 2, с. 501–502].

Существует несколько способов построения формальных семантик, основанных на идеях Лейбница, например, семантика, предложенная В.И. Маркиным. Системой, для которой адекватен лейбницевский подход к трактовке категорических высказываний, является **C4** (силлогистика Лукасевича).

Интенсиональная семантика для этой системы задается следующим образом (см. [21]):
Рассматривается множество $L = \{p_1, {\sim}p_1, p_2, {\sim}p_2, \dots\}$, где p_1, p_2 и т.д. понимаются как положительные признаки, а ${\sim}p_1, {\sim}p_2$ и т.д. — как отрицательные.

Лейбниц трактует понятие интенсионально, то есть как совокупность признаков. Он не упоминает, что эта совокупность является непустой, так как этот факт кажется ему очевидным, и также в своих примерах рассматривает только непротиворечивые понятия. Поэтому при построении семантики для **C4** используются только понятия $\alpha \subseteq L$, которые удовлетворяют следующим двум условиям непустоты и непротиворечивости:

1. $\alpha \neq \varnothing$;
2. $\neg \dot{\exists}\, p_i(p_i \in \alpha \mathbin{\dot{\wedge}} {\sim}p_i \in \alpha)$.

Пусть **H** есть множество всех непротиворечивых понятий. На этом множестве задается операция $^{\#}$, которая сопоставляет каждому понятию α противоположное ему понятие $\alpha^{\#}$:

$$(p_i \in \alpha^{\#} \Leftrightarrow \sim p_i \in \alpha) \dot{\wedge} (\sim p_i \in \alpha^{\#} \Leftrightarrow p_i \in \alpha).$$

Далее определяется интерпретационная функция π, которая сопоставляет каждому общему термину некоторое непротиворечивое понятие (трактуемое интенсионально).

Условия истинности формул языка силлогистики при интерпретации π задаются так:

$$\mathbf{D1}. |SaP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S);$$
$$\mathbf{D2}. |SeP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) \neq \varnothing;$$
$$\mathbf{D3}. |SiP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing;$$
$$\mathbf{D4}. |SoP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing;$$

Силлогистическая формула является общезначимой, е.т.е $|\mathbf{A}|_\pi = 1$ при любой интерпретации π.

Данная семантика адекватно эксплицирует подход, предложенный Лейбницем. Его трактовка высказываний типа a полностью соответствует сформулированной семантике. Он пишет: «Таким образом, отсюда мы можем знать, является ли истинным некое общеутвердительное предложение. Ведь в нем понятие субъекта, взятое абсолютно и неопределенно и вообще рассматриваемое само по себе в целом, всего содержит понятие предиката. Например, “Всякое золото есть металл”, т.е. понятие металла содержится в понятии золота, рассматриваемом само по себе, так что все, что принимается за золото, тем самым принимается за металл» [12, т. 3, с. 520].

Относительно интерпретации частноутвердительных высказываний Лейбниц пишет: «Однако в частноутвердительном предложении нет необходимости, чтобы предикат присутствовал в субъекте, рассматриваемом сам по себе и абсолютно, т.е. чтобы понятие субъекта само по себе содержало понятие предиката, но достаточно предикату содержаться в каком-то виде субъекта, т.е. чтобы понятие какого-то вида субъекта содержало понятие предиката, хотя бы и не было выражено, каков именно этот вид» [12, т. 3, с. 521]. Вид, по Лейбницу — более широкое по содержанию понятие: «Что касается понятий, или составляющий терминов, то они различаются как часть и целое, так что понятие рода является частью, а понятие вида — целым» [12, т. 3, с. 517]. «Таким образом, поскольку для частноутвердительного предложения не требуется ничего другого, кроме того, чтобы вид субъекта содержал предикат, отсюда [следует, что] субъект относится к предикату либо как вид к роду, либо как вид к чему-то совпадающему, ... либо как род к виду, т.е. понятие субъекта может выступать по отношению к понятию предиката либо как целое к части, либо как целое к совпадающему с ним целому» [12, т. 3, сс. 520–521].

Итак, частноутвердительное высказывание истинно, согласно Лейбницу, если субъект и предикат имеют общий вид. В построенной выше семантике это можно выразить так:

$$|SiP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \dot{\exists}\, \alpha \in \mathbf{H}(\pi(S) \subseteq \alpha \mathbin{\dot{\wedge}} \pi(P) \subseteq \alpha).$$

Вид, как известно, — это более широкое понятие по содержанию. Если есть два понятия, то общий вид образовать довольно просто: включить недостающие признаки из обоих понятий в общий вид. Проблема здесь заключается в том, что в таком случае получившееся более широкое понятие может оказаться противоречивым, даже когда оба понятия являются непротиворечивым (например, если первое понятие содержит положительный признак p_i, а другое — отрицательный признак $\sim p_i$).

В.И. Маркин [20] показал равносильность этого утверждения представленному выше условию **D2**.

Что же касается требования непротиворечивости понятий, то в работе «Элементы исчисления» [12, т. 3, с. 514–522], где сформулирована интенсиональная семантика, не упоминаются отрицательные признаки. Однако в другой работе — «Исследование универсального исчисления» [12, т. 3, с. 533–

537] Лейбниц рассматривает понятия, которые содержат отрицательные признаки, и даже предлагает некоторый аналог операции $^{\#}$. Он пишет: «Если же в свою очередь будет отрицаться этот термин — “ученый не-умный, несправедливый”, очевидно получится “справедливый, умный не-ученый”» [12, т. 3, с. 537]. Видим, что, как и в случае с операцией $^{\#}$, положительные признаки заменяются на отрицательные, а отрицательные — на положительные.

Таким образом, представление утверждения $\boldsymbol{i}$ в лейбницевской его трактовке эквивалентно предложенному в семантике. Но при этом надо отметить, что понятие должно трактоваться как совокупность отрицательных и положительных принципов с принятием принципа их непротиворечивости.

В работе [20] доказаны непротиворечивость и полнота системы **C4** относительно данной интенсиональной семантики.

Подобные интенсиональные семантики построены и для других силлогистических систем. Рассмотрим сначала этот вопрос применительно к фундаментальной силлогистике, которая с экстенсиональной точки зрения отличается от традиционной лишь отказом от исходного требования непустоты объемов терминов. Можно предположить, что при построении интенсиональной семантики достаточно воспользоваться законом обратного отношения между объемами и содержаниями понятий. То есть, если при экстенсиональной трактовке фундаментальная силлогистика получается из традиционной путем отказа от требования непустоты объемов понятий, то при интенсиональном подходе нужно отбросить предпосылку о непротиворечивости их содержаний. Для этого необходимо включить в рассмотрение наряду с непротиворечивыми понятиями и противоречивые.

Как и ранее $\mathbf{H}$ — есть множество всех непротиворечивых понятий, пусть $\mathbf{\Pi}$ — множество всех понятий (противоречивых и непротиворечивых). Очевидно, что $\mathbf{H} \subset \mathbf{\Pi}$, каждое понятие α из $\mathbf{\Pi}$ должно удовлетворять требованию непустоты, но не обязано быть непротиворечивым.

Необходимо расширить до $\mathbf{\Pi}$ область определения и область значений функции $^{\#}$. Пусть интерпретационная функция π сопоставляет теперь каждому общему термину в качестве значения некоторое понятие $\pi(P) \in \mathbf{\Pi}$. Условия истинности атомарных силлогистических формул при этом сохраним прежними:

$$\mathbf{D1}.|SaP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S);$$
$$\mathbf{D2}.|SeP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) \neq \varnothing;$$
$$\mathbf{D3}.|SiP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing;$$
$$\mathbf{D4}.|SoP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing;$$

Оказалось, что эта семантика не адекватна силлогистике **ФС**. Исчисление **ИФС**, адекватное интенсиональной трактовке категорических высказываний с включением в сферу рассмотрения противоречивых понятий, получается путем отбрасывания схем аксиом **ФС5** и **ФС6**, и выглядит следующим образом:

ИФС0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;
ИФС1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$;
ИФС2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$;
ИФС3. $SeP \supset PeS$;
ИФС4. SaS;
ИФС5. $SeP \equiv \neg SiP$;
ИФС6. $SoP \equiv \neg SaP$.
Единственным правилом вывода в **ИФС** остается правило *modus ponens.*

Для системы **ИФС** доказаны [3, с. 313] непротиворечивость и полнота относительно только что рассмотренного варианта интенсиональной семантики.

Адекватная интенсиональная семантика для фундаментальной силлогистики **ФС** строится следующим образом: базисные конструкции остаются такими же, как и для **ИФС**, то есть допускаются противоречивые понятия, но изменяются семантические определения элементарных формул:

$$\begin{aligned}
&|SaP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S) \mathbin{\dot\vee} \pi(S) \notin \mathbf{H};\\
&|SeP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H};\\
&|SiP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(S) \cup \pi(P) \in \mathbf{H};\\
&|SoP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing \mathbin{\dot\wedge} \pi(S) \in \mathbf{H}.
\end{aligned}$$

Условия истинности для общих высказываний в системе **ФС** более слабые, чем в **ИФС**, а для частных — более сильные. Для высказываний типа a и o это очевидно, а для того, чтобы сказанное стало понятным относительно e и i, условия их истинности можно переформулировать эквивалентным образом:

$$\begin{aligned}
&|SeP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) \neq \varnothing \mathbin{\dot\vee} \pi(S) \notin \mathbf{H} \mathbin{\dot\vee} \pi(P) \notin \mathbf{H};\\
&|SiP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing \mathbin{\dot\wedge} \pi(S) \in \mathbf{H} \mathbin{\dot\vee} \pi(P) \in \mathbf{H}.
\end{aligned}$$

Если комбинировать различные условия истинности для категорических высказываний, то можно получить еще две системы, которые будут занимать промежуточное положение между **ФС** и **ИФС**.

Первая из них — $\mathbf{ИФС}_1$, где константы a и o трактуются как в **ФС**, а константы e и i — как в **ИФС** [3, с. 319]:

$$\begin{aligned}
&|SaP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S) \mathbin{\dot\vee} \pi(S) \notin \mathbf{H};\\
&|SeP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) \neq \varnothing;\\
&|SiP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing;\\
&|SoP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing \mathbin{\dot\wedge} \pi(S) \in \mathbf{H}.
\end{aligned}$$

Класс общезначимых формул в такой семантике аксиоматизирует исчисление, полученное из **ФС** путем отбрасывания аксиомы **ФС5** $SiP \supset SiS$.

Пусть, наоборот, константы a и o трактуются как в **ИФС**, а константы e

и i как в **ФС**:

$$|SaP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S);$$
$$|SeP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) \neq \varnothing \mathbin{\dot\vee} \pi(S) \notin \mathbf{H} \mathbin{\dot\vee} \pi(P) \notin \mathbf{H};$$
$$|SiP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing \mathbin{\dot\wedge} \pi(S) \in \mathbf{H} \mathbin{\dot\vee} \pi(P) \in \mathbf{H};$$
$$|SoP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing.$$

Для данной семантики адекватная формализация получается путем отбрасывания из **ФС** схемы аксиом **ФС6** $SoP \supset SiS$. Это система $\mathbf{ИФС}_2$ [3, с. 319].

Другой вариант интерпретации варианта интенсиональной семантики Лейбница предлагает немецкий математик К.Гласхоф в своей статье «Интенсиональная семантика Лейбница для аристотелевской логики» [31].

При такой интенсиональной трактовке он предлагает отображать общие термины в виде наборов $i(x)$, которые описывают содержащиеся в них значения (признаки). Тогда истинность суждения «Все x есть y» будет соответствовать выполнению следующего условия:

$$i(x) \supseteq i(y)$$

Гласхоф подчеркивает, что согласно такой интерпретации интенсиональное содержание расширяется при переходе к все более и более конкретным понятиям, в то время как при экстенсиональной трактовке происходит наоборот. Он отмечает, что Лейбниц прекрасно понимал разницу между экстенсиональным (в котором как раз работает закон обратного отношения содержания и объема понятий) и интенсиональным (в котором не работает) методами интерпретации аристотелевской силлогистики, но его построение интерпретации второго типа было связано с теорией характеристических чисел.

Гласхоф предпринимает свою попытку построить семантику для интенсиональной силлогистики, применяя метод арифметических исчислений Лейбница к аристотелевской силлогистике. Но здесь он, очевидным образом, сталкивается с проблемой интерпретации частноутвердительного высказывания.

В экстенсиональной трактовке суждение «Некоторые x есть y» является отрицанием суждения «Ни один x не есть y», однако при интенсиональной трактовке, как ее описывает Гласхоф, это уже не работает: мы не может оценить такое высказывание, основываясь только на содержаниях x и y. Соотнесение обоих понятий к «общему» виду уже не будет работать, например, понятия «красный» и «зеленый» будут иметь общий признак «цвет», но, очевидно, что суждение «Что-то красное является синим» не будет истинно. С другой стороны, не сложно представить себе ситуацию, когда два понятия не будут иметь общих признаков, но, тем не менее, суждение Ixy с этими понятиями будет истинно. Гласхоф связывает эту проблему интерпретации частноутвердительного высказывания с самим построением логики Аристотеля, которая содержит в себе «экстенсиональный уклон», как он его называет.

Решение этой задачи Гласхоф находит в построении Лейбницем исчислением с использованием характеристических чисел. Лейбниц сопоставляет каждому понятию x два других понятия: одно содержит более общие признаки, чем x (таким понятием будут является все y такие, чтобудет истинным Axy), второе — все признаки, которые точно не содержатся в x (то есть все y такие, что Exy истинно).

Гласхоф предлагает следующую интенсиональную семантику. Пусть T есть множество общих терминов: $T = \{x, y, z\}$, а A, E, I, O — четыре силлогистические константы. Суждение — это любое выражение вида $U\xi\upsilon$, где U — силлогистическая константа, а ξ и υ - общие термины. Пусть L обозначает совокупность всех суждений, и пусть P обозначает фиксированное подмножество L.

Тогда объем (extension) термина x можно определить следующим образом:

$$e(x) = \{x\} \cup \{y \in T \mid Ayx \in P\}$$

Самым очевидным вариантом, по словам Гласхофа, для определения содержательной интерпретации (intension) будет симметричная запись:

$$i^{\star}(x) = \{x\} \cup \{y \in T \mid Axy \in P\}$$

Однако, такой способ не эффективен. Мы не можем определить истинность $i^\star(Exy)$ и $i^\star(Ixy)$ обратившись только к собственным содержаниям $i^\star(x)$ и $i^\star(y)$, как уже объяснялось выше.

В рамках своей системы универсальных исчислений Лейбниц решает эту проблему следующим образом: в множестве терминов T существует счетное подмножество простых чисел $T^\wedge \subseteq T$, пронумерованное от 2 и далее:

$$\begin{array}{cccccc} T^\wedge & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots \\ & 2 & 3 & 5 & 7 & \ldots \end{array}$$

Теперь каждому подмножеству множества $T^\wedge$ может быть сопоставлено число. Например, подмножеству $\{x_2, x_4\}$ будут соответствовать числа $3 * 7 = 21$. Тогда, согласно основной теореме арифметики (она звучит следующим образом: все составные числа, которые можно разложить на множители, являются произведением простых чисел), для каждого числа n существует единственное подмножество $T^\wedge$, полученное путем умножения тех общих терминов x_i, которые являются простыми множителями этого числа n. Согласно Лейбницу можно записать характеристическое число для непростого $x \in T$ как

$$+s - \sigma,$$

где s — произведение простых чисел свойств, содержащихся в x, то есть всех простых свойств y, при которых Axy истинно, а σ — произведение всех простых чисел, принадлежащих z, таких, что Exz истинно. Например, если есть такой термин x, характеризующийся $\{Axx_1, Axx_3, Exx_4\}$, то характеристическое число x должно быть $+10 - 7$.

Согласно такому подходу, можно определить интерпретационную функцию i более точно, как упорядоченную пару подмножеств T:

$$\begin{aligned} i(x) &= (\{x\} \cup \{y \in T \mid Axy \in P\}, \{y \in T \mid Exy \in P\}) \\ &= (s(x), \sigma(x)). \end{aligned}$$

Функция может быть теперь расширена до предложений посредством следующих определений:

$$i(Axy) = \mathbf{1} \Leftrightarrow s(x) \supseteq s(y) \mathbin{\dot{\wedge}} \sigma(x) \supseteq \sigma(y);$$
$$i(Exy) = \mathbf{1} \Leftrightarrow s(x) \cap \sigma(y) \neq \varnothing \mathbin{\dot{\vee}} s(y) \cap \sigma(x) \neq \varnothing.$$

Определения для $\boldsymbol{Oxy}$ и $\boldsymbol{Ixy}$ получаются путем отрицания $\boldsymbol{Exy}$ и $\boldsymbol{Axy}$ соответственно.

Предложенный Гласхофом вариант интенсиональной сементики напрямую является продолжением лейбницевской интерпретации, то есть основывается на теориях универсальных исчислений и характеристических чисел, а не на использовании современного аппарата символической логики, который используется в нашей работе. Тем не менее, он интересен именно попыткой решения задачи интерпретации частноутвердительного высказывания.

1.3 Развитие идей Лейбница в трудах И. Канта и Н.А. Васильева[2]

Немного другой взгляд на интенсиональную трактовку категорических высказываний можно найти в трудах И. Канта. Так, например, в работе 1762 года «Ложное мудрствование в четырех фигурах силлогизма» [11, с. 23–40] Кант сводит все силлогизмы к I фигуре, доказывая, что только умозаключения такого типа являются «чистыми», то есть состоят из трех предложений (двух посылок и заключения). «Если же оно [умозаключение] возможно только через соединение между собой более чем трех суждений, то оно умозаключение смешанное» [11, с. 27–28]. Четвертое суждение появляется в силу возможности получения одной из посылок через непосредственное умозаключение (обращение или противопоставление).

Интересно рассмотреть, какие правила предлагает Кант для утверждения правильности силлогистического умозаключения. Он пишет: «Всякое суждение через опосредованный признак есть умозаключение» [11, с. 25]. Суждением, в данном случае, Кант называет силлогизм вообще. Этот «опосредованный признак» называют средним термином. Итак, главным правилом

[2] В тексте данной главы используется материал, опубликованный в [32] и [18].

для утвердительных умозаключения является: «Признак признака есть признак самой вещи»; а для отрицательных: «Что противоречит признаку вещи, противоречит и самой вещи» [11, с. 26]. В данном случае это не стоит воспринимать буквально: например, у розы есть признак «быть красной», а у «красноты» есть признак «быть цветом». Очевидно, что роза цветом не является. При более современной интерпретации это можно перефразировать в более аристотелевском ключе (которому Кант и следует): все, что сказывается о более общем понятии, будет применимо и к более узкому. Можно назвать это правило, которое Кант называет *Nota notae*, своеобразным интенсиональным подходом, которое отчетливо противопоставляется классическому, экстенсиональному (*Dictum de omni*): «Что о понятии утверждается во всем его объеме, то утверждается и о каждом другом понятии, которое в нем содержится» [11, с. 26]. Кант видит очевидным для читателя тот факт, что это второе правило (экстенсиональное) обладает истинностью только в силу первого правила (интенсионального), потому что «то понятие, которое включается в другие, всегда обособлено от них как некоторый признак, все, что этому понятию присуще, есть поэтому признак признака, а тем самым и признак самих вещей, от которых он был обособлен» [11, с. 27]. Так, можно сделать вывод о том, что Кант ставит интенсиональную трактовку силлогистических рассуждений выше экстенсиональной.

Попытку формализовать и доказать тезис Канта предпринял российский логик В.Н. Брюшинкин. В своей статье «Кант и силлогистика. Некоторые размышления по поводу "Ложного мудрствования в четырех фигурах силлогизма"» [4].

Пусть Пр(A,B) есть «A есть признак B», $\boldsymbol{MA}$ — объем понятия A. Тогда $\boldsymbol{MA} \subseteq \boldsymbol{MB}$ будет обозначать, что объем понятия A есть часть объема понятия B. Тогда первое правило *Nota notae* можно записать так:

$$\text{Пр}(C,B) \wedge \text{Пр}(B,A) \rightarrow \text{Пр}(C, A),$$

а *Dictum de omni* так:

$$\boldsymbol{MA} \subseteq \boldsymbol{MB} \wedge \text{Пр}(C,B) \rightarrow \text{Пр}(C,A).$$

Далее в статье представлено доказательство следующего утверждения, которое по сути и является главным тезисом Канта — зависимости объемов от содержания:

$$MA \subseteq MB \leftrightarrows \text{Пр (В,А)}.$$

Таким образом, можно прийти к выводу о том, что для Канта интенсиональная трактовка умозаключений выходит на первый план, несмотря на эквивалентность обоих правил. Брюшинкин обосновывает это тем, что Кант делает такой выбор намеренно, основываясь на своих «философских предпочтениях», ведь даже различие между аналитическими и синтетическими суждениями Кант проводит по тому, включается ли предикат в понятие субъекта или нет. Так аналитические суждения «через свой предикат ничего не добавляют к понятию субъекта», а синтетические — «присоединяют к понятию субъекта предикат, который вовсе и не мыслился в нем...» [10, с. 48].

Один из основоположников неклассической логики российский логик Н.А. Васильев кратко упоминает интенсиональную интерпретацию понятий в работе «Воображаемая логика». Он предлагает несколько особых интерпретаций воображаемой логики, одну из которых можно назвать интенсиональной именно в понимании Лейбница (скорее всего, сам Васильев с работами Лейбница по силлогистике знаком не был, по крайней мере, они ни разу не упоминаются в его трудах.)

Он приводит следующую интерпретацию: «В нашей логике, утверждая, что S есть P, мы утверждаем все содержание понятия P, утверждаем и в отдельности каждый из признаков P и всю их совокупность» [5, с. 87]. Мы видим, что при построении воображаемой логики Васильев делает акцент не на элементах, входящих в объем понятия, а на совокупности признаков, которые составляют это понятие.

Далее у Васильева можно найти интерпретацию, которая напрямую соотносится с Лейбницем: «Если понятие A состоит из признаков $p, q, r, s, \ldots$, тогда понятие $non-A$ должно состоять из признаков $non-q, non-r, non-s$»

[5, с. 88]. Васильев пишет о том, что если строить силлогистику с разными типами отрицаний и, как следствие, тремя видами качественной характеристики, используя такую интерпретацию понятий, то она получается совершенно отличной от воображаемой логики с экстенсиональной семантикой: различаются, например, правила I фигуры силлогизма. В конце этого размышления он подчеркивает, что «привел эти интерпретации, желая показать, как на разные лады можно видоизменять смысл известных логических операций и получать благодаря этому самые существенные изменения логических операций» [5, с. 88], тем самым показывая формальные различия трактовок и отмечая важность точного принятия одной из них.

Рассмотрим подробнее[3] одну из современных формализаций такой воображаемой логики, а именно систему **IL2**, которая содержит три типа общих суждений: одно утвердительное и два отрицательных. Первая трактовка отрицания у Васильева состоит в том, что каждый признак предиката отрицается в субъекте (он называет такое отрицание сильным или абсолютным). Например, если предикат содержит признаки $p, q, non - s$, то субъект обязательно должен содержать признаки $non - p, non - q, s$. Второй тип общих отрицательных суждений — это суждения с так называемым слабым отрицанием. Такой тип суждения является формализацией идеи Васильева об индифферентных суждениях, противоречивых, то есть содержащих связку «есть и не есть». В таких суждениях некоторые признаки предиката утверждаются в субъекте, а некоторые отрицаются: «Так, отрицая, что Колумб был первым европейцем, приплывшим в Америку, мы не отрицаем, что он был европейцем и что он приплыл в Америку» [5, с. 87]. Сам Васильев обобщает свою идею следующим образом: «Вообще мы можем или 1) утверждать все признаки A, или 2) отрицать все признаки A, или 3) некоторые признаки утверждать, некоторые отрицать» [5, с. 88].

Силлогистика **IL2** была формализована В.И. Маркиным и Д.В. Зайцевым

[3] В тексте данного раздела использованы материалы, опубликованные в [13].

в работе «Воображаемая логика-2: реконструкция одного из вариантов знаменитой логической системы Н.А. Васильева» [9]. Язык содержит три силлогистические константы для общих высказываний: A_1 для утвердительных, A_2 для (абсолютно) отрицательных и A_3 для слабо отрицательных (т. е. индифферентных). Кроме того, дополнительно вводятся три константы — I_1, I_2 и I_3 — для частных высказываний трех соответствующих качеств (сам Васильев при формулировке альтернативной версии воображаемой логики, в отличие от основной ее версии, частные суждения не рассматривает).

Далее в этом языке строится аксиоматическое исчисление **IL2**. Схемы аксиомы данной системы представлены в [9] и [13] (необходимо отметить особый тип записи аксиом в данной системе: запись A_1SS будет аналогична SA_1S, то есть силлогистическая константа выносится перед общими терминами):

IL2.0 Аксиомы классического исчисления высказываний

IL2.1 $(A_1MP \wedge A_1SM) \supset A_1SP$	**IL2.10** $\neg(A_1SP \wedge I_2SP)$
IL2.2 $(A_1MP \wedge A_2SM) \supset A_2SP$	**IL2.11** $\neg(A_2SP \wedge I_1SP)$
IL2.3 $(A_2MP \wedge A_1SM) \supset A_2SP$	**IL2.12** $I_1SP \supset I_1PS$
IL2.4 $(A_2MP \wedge A_2SM) \supset A_1SP$	**IL2.13** $I_2SP \supset I_2PS$
IL2.5 $(A_1MP \wedge I_1SM) \supset I_1SP$	**IL2.14** $A_1SP \supset I_1SP$
IL2.6 $(A_1MP \wedge I_2SM) \supset I_2SP$	**IL2.15** $A_2SP \supset I_2SP$
IL2.7 $(A_2MP \wedge I_1SM) \supset I_2SP$	**IL2.16** $A_3SP \equiv \neg I_1SP \wedge \neg I_2SP$
IL2.8 $(A_2MP \wedge I_2SM) \supset I_1SP$	**IL2.17** $I_3SP \equiv \neg A_1SP \wedge \neg A_2SP$
IL2.9 A_1SS	

Единственным правилом вывода является *modus ponens.*

Интенсиональная семантика для этой системы использует те же самые конструкции, что и описанная выше семантика для силлогистики **C4**, рассмотренной нами в главе 1.1. Интерпретирующая функция π сопоставляет каждому общему термину понятие, трактуемое интенсионально. Под понятием понимается подмножество множества $\{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, \ldots\}$, которое удовлетворяет двум условиям: (1) оно не является пустым; (2) оно не может содержать в себе двух противоречащих признаков. Вводится операция $^\#$, обладающая всеми указанными выше свойствами, она сопоставляет каждому понятию противоположное ему.

В [9] и [13] задаются следующие условия истинности атомарных формул шести типов при интерпретации π:

Определение 1.

$$|A_1SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S);$$
$$|A_2SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \subseteq \pi(S);$$
$$|A_3SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \cap \pi(S) = \varnothing \mathbin{\dot\wedge} \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing;$$
$$|I_1SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing;$$
$$|I_2SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \cap \pi(S) = \varnothing;$$
$$|I_3SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \setminus \pi(S) = \varnothing \mathbin{\dot\wedge} \pi(P)^{\#} \setminus \pi(S) = \varnothing.$$

Условия истинности сложных формул и понятие общезначимой формулы обычные. Доказана непротиворечивость и полнота исчисления **IL2** относительно данной семантики [9].

Можно заметить, что для некоторых типов суждений условия истинности в интенсиональных семантиках систем **C4** и **IL2** совпадают. Было выдвинуто предположение, что более богатая система **IL2** является консервативным расширением системы **C4**. Данный результат был получен совместно с Коньковой А.В. и опубликован в [18].

Изменим способ записи (алфавит) для исчисления **C4**: будем использовать вместо константы a константу A_1, а вместо константы i — константу I_1. В результате получим систему **C4***, которая строится в подъязыке системы **IL2**. При новой форме записи исчисление **C4** будет содержать следующие схемы аксиом:

A*0: Аксиомы **КИВ**;

A*1: $(A_1MP \wedge A_1SM) \supset A_1SP$;

A*2: $(A_1MP \wedge I_1MS) \supset I_1SP$;

A*3: A_1SS;

A*4: I_1SS.

Единственное правило вывода — *modus ponens.*

Отметим, что новое исчисление **C4*** обладает всеми теми же метатеоретическими свойствами, которыми обладает и исчисление **C4**. В таком случае изменится и форма записи условий значимости атомарных формул (из определения 1):

Определение 2.

$$|A_1SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S);$$
$$|I_1SP|_\pi = 1 \Leftrightarrow \pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing.$$

Метатеорема 1. *Любая формула, доказуемая в исчислении* **C4***, *доказуема в исчислении* **IL2**.

Доказательство. Доказательство метатеоремы ведется индукцией по длине доказательства формулы в исчислении **C4***. Достаточно показать, что все аксиомы исчисления **C4*** доказуемы в **IL2** и что применение правила *modus ponens* сохраняет свойство быть доказуемой формулой.

A*0: аксиомы классического исчисления высказываний являются аксиомами исчисления **IL2**, а потому доказуемы в нем;

A*1: $(A_1MP \wedge A_1SM) \supset A_1SP$.

Является аксиомой **IL2.1** исчисления **IL2**;

A*2: $((A_1MP \wedge I_1MS) \supset I_1SP)$

1.	$(A_1MP \wedge I_1SM) \supset I_1SP$	**IL2.5**
2.	$I_1MS \supset I_1SM$	**IL2.12**
3.	$(A_1MP \wedge I_1MS) \supset I_1SP$	1,2; **ЛВ**

A*3: A_1SS.

Является ксиомой **IL2.9** исчисления **IL2**;

A*4: I_1SS.

1.	$A_1SS \supset I_1SS$	**IL2.14**
2.	A_1SS	**IL2.9**
3.	I_1SS	1,2; **ЛВ**

Правило *modus ponens* имеется в обоих исчислениях и является в них единственным. □

Эта метатеорема эквивалентна утверждению о том, что исчисление **IL2** является расширением исчисления **C4***, согласно следующему определению В.А. Смирнова [29, с. 57]:
«Теория $\mathbf{T}_2$ является *расширением* теории $\mathbf{T}_1$, если и только если всякое предложение, доказуемое в $\mathbf{T}_1$, доказуемо и в $\mathbf{T}_2$».

Выделим в языке исчисления **IL2** подъязык с двумя силлогистическими константами: A_1 и I_1.

Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма 1. *Для всякой формулы* **A** *подъязыка* **IL2** *и для всякой интерпретации* π *верно, что* $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ *в* **IL2** *тогда и только тогда, когда* $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ *в* **C4***.

Доказательство. Доказательство ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в составе **A**:
A имеет вид A_1SP:
$|A_1SP|_\pi = \mathbf{1}$ в **IL2** (по опр. 1) $\Leftrightarrow \pi(P) \subseteq \pi(S) \Leftrightarrow |A_1SP|_\pi = \mathbf{1}$ в **C4*** (по опр. 2)

Случай, когда формула **A** имеет вид I_1SP доказывается аналогично.

Далее рассматриваем случаи, когда **A** — сложная формула. Используем индуктивное допущение: для любой формулы **B** с меньшим, чем у **A**, числом пропозициональных связок верно, что $|\mathbf{B}|_\pi = \mathbf{1}$ в **IL2** $\Leftrightarrow |\mathbf{B}|_\pi = \mathbf{1}$ в **C4***. Условия истинности сложных формул у **IL2** и **C4*** совпадают, а значит, обоснование данного пункта тривиально. □

Метатеорема 2. *Для любой формулы подъязыка верно, что она общезначима в* **IL2** *тогда и только тогда, когда она общезначима в* **C4***.

Доказательство. Из Леммы 1 вытекает следующее утверждение: для всякой формулы **A** подъязыка **IL2** верно, что $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ в **IL2** для всякого π тогда и только тогда, когда $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ в **C4*** для всякого π. $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ в **IL2** для всякого π, по определению, означает что формула **A** общезначима в **IL2**. Аналогично, $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ в **C4*** для всякого π означает, по определению, что формула **A** общезначима в **C4***. □

Метатеорема 3. *Исчисление* **IL2** *является консервативным расширением исчисления* **C4***.

Доказательство. Воспользуемся определением, сформулированным Смирновым В.А. [29, с. 57]:
«$\mathbf{T}_2$ есть *консервативное расширение* $\mathbf{T}_1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{T}_2$ есть расширение $\mathbf{T}_1$, и для всякого предложения **A**, сформулированного в терминах теории $\mathbf{T}_1$, если **A** доказуемо в $\mathbf{T}_2$, то оно доказуемо в $\mathbf{T}_1$».
Первое утверждение в определяющей части — тот факт, что система **IL2** является расширением системы **C4*** — уже доказано (**Метатеорема 1**).
Второе утверждение, а именно тот факт, что для всякого предложения **A**, сформулированного в терминах теории **C4***, если A доказуемо в **IL2**, то оно доказуемо в **C4*** вытекает из следующих утверждений:

1. Результат В.И. Маркина и Д.В. Зайцева [9] о семантической непротиворечивости исчисления **IL2**, из которого следует, что для любой формулы подъязыка IL2 верно, что если она доказуема в **IL2**, то она **IL2**-общезначима;

2. Метатеорема 2, которая говорит о том, что любая формула языка **C4*** общезначима в **IL2** тогда и только тогда, когда она общезначима в **C4***;

3. Результат [3, с. 90] о семантической полноте исчисления **C4***: любая формула, если она **C4***-общезначима, то она доказуема в **C4***.

□

Полученный результат позволяет рассматривать идеи Васильева как развитие и расширение интенсионального подхода через построение более богатой теории с оцениванием не только стандартных силлогистических высказываний, но и высказываний особого типа — с сильным отрицанием. Прослеживается преемственность от Лейбница к Васильеву, хотя точных свидетельств о том, что Васильев был знаком с указанными работами Лейбница, нет. Ни в одной из увидевших свет работ Васильева и опубликованных работ о нём нет никаких упоминаний интенсионального подхода Лейбница.

1.4 «Синтаксическая» переинтерпретация интенсиональной семантики

Оригинальный подход к построению семантик для силлогистических систем был предложен В.И. Шалаком [30]. Свою трактовку категорических высказываний он назвал «синтаксической», потому что в рамках такой интерпретации значениями их субъектов и предикатов становятся не множества предметов, не совокупности признаков, а формулы языка пропозициональной логики.

В.И. Шалак сформулировал адекватную «синтаксическую» семантику для системы **ФС**. Для ее построения вводится функция δ, сопоставляющая каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний (который содержит в качестве исходных связки $\wedge, \vee, \neg$).

Условия значимости атомарных формул определяются Шалаком следующим образом:

$$\delta \vDash SaP \Leftrightarrow \delta(S) \vdash \delta(P);$$
$$\delta \vDash SeP \Leftrightarrow \delta(S),\ \delta(P) \vdash \mathbf{f};$$
$$\delta \vDash SiP \Leftrightarrow \delta(S),\ \delta(P) \nvdash \mathbf{f};$$
$$\delta \vDash SoP \Leftrightarrow \delta(S) \nvdash \delta(P),$$

где «$\delta \models \mathbf{A}$» — утверждение о том, что силлогистическая формула $\mathbf{A}$ значима при интерпретации δ, $\mathbf{f}$ — константа ложности, а $\vdash$ — отношение классической выводимости на множестве пропозициональных формул. Условия значимости сложных формул такие же как в классической логике высказываний.

Условия значимости для формул можно изменить так, чтобы константа ложности не использовалась, и вместо отношения классической выводимости рассматривать его семантический аналог — отношение классического логического следования (в пропозициональной логике) [23]. Для оценки силлогистических формул при той или иной интерпретации общих терминов выбирается двухместный метапредикат Φ. Запись $\Phi(\mathbf{A}, \delta)$ читается так: «силлогистическая формула $\mathbf{A}$ значима при интерпретации общих терминов δ». Модифицированное определение условий значимости таково:

Определение 3.

$$\begin{array}{ll}
\Phi(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P); & \Phi(\neg\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot{\neg}\, \Phi(\mathbf{A}, \delta); \\
\Phi(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P); & \Phi(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{A}, \delta) \mathbin{\dot{\wedge}} \Phi(\mathbf{B}, \delta); \\
\Phi(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P); & \Phi(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{A}, \delta) \mathbin{\dot{\vee}} \Phi(\mathbf{B}, \delta); \\
\Phi(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P); & \Phi(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \dot{\neg}\, \Phi(\mathbf{A}, \delta) \mathbin{\dot{\vee}} \Phi(\mathbf{B}, \delta).
\end{array}$$

Поясним это определение на примерах. Если термину S функция δ приписывает формулу $q \wedge r$, а термину P формулу $q \vee r$, то силлогистическая формула SaP значима при этой интерпретации, так как из первой пропозициональной формулы логически следует вторая. Если же термину S приписана $q \vee r$, а термину P формула — $\neg q \wedge \neg r$, то силлогистическая формула SiP не является значимой, поскольку из первой следует отрицание второй. Значимой при данной интерпретации оказывается противоречащая ей формула SeP.

Формула $\mathbf{A}$ называется Φ-общезначимой, е.т.е. $\Phi(\mathbf{A}, \delta)$ при любой интерпретации общих терминов δ. Множество Φ-общезначимых формул, как показал Шалак [30], совпадает с множеством теорем силлогистического исчисления **ФС**.

Шалак предложил также адекватную «синтаксическую» интерпретацию для силлогистики Лукасевича (системы **C4**). Ее можно получить, если ограничить возможные значения общих терминов классически непротиворечивыми пропозициональными формулами. Иными словами, необходимо вместо функции δ (сопоставляющей общему термину *любую* пропозициональную формулу) ввести в семантику интерпретирующую функцию δ', которая каждому общему термину приписывает в качестве значения некоторую *выполнимую* формулу. Новый предикат значимости $\Phi'(\mathbf{A}, \delta')$ определяется аналогично предикату $\Phi(\mathbf{A}, \delta)$. Разница лишь в том, что функция δ в определении последнего меняется на δ'.

Формула называется Φ'-общезначимой, е.т.е. $\Phi'(\mathbf{A}, \delta')$ при любой интерпретации общих терминов δ'. Из полученного В.И. Шалаком в [30] результата следует, что множество Φ'-общезначимых силлогистических формул равно множеству теорем системы **С4**.

«Синтаксическую» интерпретацию силлогистики, предложенную Шалаком, не следует противопоставлять интенсиональной интерпретации. Более того, можно считать предложенный им подход *новой версией* интенсиональной семантики для силлогистических систем. Дело в том, что нет никакой разницы в приписывании общим терминам пропозициональных формул ($q \vee r, q \wedge r, \neg q \wedge \neg r$ и т.п.) и в приписывании им бескванторных формул одноместной логики предикатов с единственной свободной переменной x (например, $Q^1(x) \vee R^1(x), Q^1(x) \wedge R^1(x), \neg Q^1(x) \wedge \neg R^1(x)$). С тем же успехом, в качестве значения общему термину можно сопоставлять предикатную формулу $A(x)$, которая либо является атомарной и содержит единственную переменную x, либо представляет собой булеву комбинацию подобных атомарных формул. Но, согласно Е.К. Войшвилло [7], предикат $A(x)$ как раз и фиксирует *содержание понятия* $xA(x)$. Следует, конечно, оговориться, что при таком подходе не будет охвачен весь класс понятий, но тем не менее мы будем иметь дело именно с понятиями и их содержаниями.

В рассмотренных ранее интенсиональных семантиках для систем **С4** и **ИФС** формула SaP интерпретируется как соответствующая утверждению о том, что содержание P есть часть содержания S. Метаутверждение «$A(x) \models B(x)$», согласно Войшвилло, также означает, что содержание понятия $xB(x)$ есть часть содержания понятия $xA(x)$. Значит, если субъекту S сопоставлена формула $A(x)$, а предикату P — формула $B(x)$, то «синтаксическая» интерпретация SaP аналогична интенсиональной.

Сходная аналогия между указанными интерпретациями имеет место и для других атомарных силлогистических формул. Так, SeP можно трактовать, с интенсиональной точки зрения, как утверждение о логической несовместимости содержаний субъекта и предиката. Но и при «синтаксической» интерпретации условие значимости SeP — «$\delta(S) \models \neg\delta(P)$» — фиксирует именно это отношение.

1.5 «Релевантизированная» семантика

В.И. Маркин в [23] поставил вопрос о том, изменится ли класс общезначимых формул, если в условиях значимости заменить отношение классического следования на релевантное.

Существует несколько подходов к семантическому построению системы **FDE**, мы остановимся на подходе, предложенном Е.К. Войшвилло [6, с. 28–30]. Исходным понятием семантики является понятие обобщенного описания состояния. Обобщенное описание состояния — это произвольное подмножество множества $\{p_1, \neg p_1, p_2, \neg p_2, \ldots\}$, где $p_1, p_2, \ldots$ — список всех пропозициональных переменных языка. Среди обобщенных описаний состояний можно выделить классические (карнаповские): α является классическим описанием состояния, если и только если α удовлетворяют двум условиям:

1. $\dot\forall\, p_i(p_i \in \alpha \,\dot\vee\, \neg p_i \in \alpha)$ (условие полноты)

2. $\neg\,\dot\exists\, p_i(p_i \in \alpha \,\dot\wedge\, p_i \notin \alpha)$ (условие непротиворечивости).

Назовем множество таких классических описаний состояния $\mathbf{M_K}$.

Далее, независимо друг от друга вводятся предикаты истинности и ложности. Запись $T\mathbf{A}/\alpha$ означает, что формула $\mathbf{A}$ истина в описании состояния α, а запись $F\mathbf{A}/\alpha$ — что ложна. Эти предикаты определяются по индукции следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
Tp_i/\alpha \Leftrightarrow p_i \in \alpha & T(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})/\alpha \Leftrightarrow T\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\wedge} T\mathbf{B}/\alpha \\
Fp_i/\alpha \Leftrightarrow \neg p_i \in \alpha & F(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})/\alpha \Leftrightarrow F\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\vee} F\mathbf{B}/\alpha \\
T\neg\mathbf{A}/\alpha \Leftrightarrow F\mathbf{A}/\alpha & T(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})/\alpha \Leftrightarrow T\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\vee} T\mathbf{B}/\alpha \\
F\neg\mathbf{A}/\alpha \Leftrightarrow T\mathbf{A}/\alpha & F(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})/\alpha \Leftrightarrow F\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\wedge} F\mathbf{B}/\alpha
\end{array}
$$

Тогда отношение классического логического следования через описания состояния можно задать следующим образом: $A \models_{Cl} B \Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbf{M_K}(T\mathbf{A}/\alpha \Rightarrow T\mathbf{B}/\alpha)$. В дальнейшем для классического следования индекс Cl будет опускаться.

Неклассические описания состояния могут оказаться неполными и противоречивыми (например, множество $\{p_1, p_2, \neg p_3\}$ является противоречивым и неполным, так как нет информации о других переменных, и оно содержит переменную и ее отрицание). Множество таких неполных и противоречивых описаний состояния обозначим $\mathbf{M_O}$.

Например, из формулы $\mathbf{A}$ релевантно следует ($\models_{rel}$) формула $\mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $\forall\alpha \in \mathbf{M_O}(T\mathbf{A}/\alpha \Rightarrow T\mathbf{B}/\alpha)$.

Итак, при замене отношения классического следования на релевантное при определении значимости формул семантика видоизменяется следующим образом. Вводится новый предикат значимости I, который на атомарных силлогистических формулах определяется так:

Определение 4.

$$I(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P);$$

$$I(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P);$$

$$I(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P);$$

$$I(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P),$$

где δ — функция, сопоставляющая каждому общему термину формулу языка классической логики высказываний, не содержащей иных пропозициональных связок, кроме $\neg, \wedge, \vee$. Условия значимости для сложных формул остаются прежними.

Хорошо видно, что отличие I от ранее использовавшегося предиката значимости Φ состоит лишь в замене классического следования на релевантное, а именно на следование в релевантной логике **FDE**. В определении это обозначается индексом $\models_{rel}$.

Силлогистическая формула $\mathbf{A}$ называется I-общезначимой, е.т.е $I(\mathbf{A}, \delta)$ при любой интерпретации δ.

Оказалось, что множество I-общезначимых формул не совпадает с множеством Φ-общезначимых формул, а именно, первое строго включается во второе. Таким образом, при замене классического следования на релевантное в определении значимости силлогистических формул семантика перестает быть адекватной силлогистике **ФС**. Например, законы фундаментальной силлогистики $SiP \supset SiS$ и $SoP \supset SiS$ не являются I-общезначимыми.

В работе [23] В.И. Маркиным было доказано, что данная семантика аксиоматизируется системой **ИФС**.

Но и для фундаментальной силлогистики имеется адекватная «релевантизированная» семантика. Для построения семантики, адекватной системе **ФС**, необходимо ввести иной предикат значимости F, изменив при этом сами условия значимости элементарных силлогистических формул:

Определение 5.

$$F(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S);$$
$$F(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P);$$
$$F(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P);$$
$$F(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S).$$

Условия значимости сложных силлогистических формул остаются стандартными, понятие F-общезначимой формулы вводится аналогично рассмотренным ранее.

Маркиным также доказано [24], что все теоремы **ФС** и только они являются F-общезначимыми. Для этого сначала зададим перевод ψ, погружающий систему **ФС** в ее подсистему **ИФС** [24]:

Определение 6.
$\psi(SaP) = SaP \vee SeS$;
$\psi(SeP) = (SeP \vee SeS) \vee PeP$;
$\psi(SiP) = (SiP \wedge SiS) \wedge PiP$;
$\psi(SoP) = SoP \wedge SiS$;
$\psi(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi(\mathbf{A})$;
$\psi(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi(\mathbf{A}) \nabla \psi(\mathbf{B})$.

где ∇ — произвольная бинарная связка.

В дальнейшем в работе мы будем придерживаться «синтаксической» версии интенсионального подхода, сформулированного выше, и рассмотрим семантики для некоторых других систем силлогистики как с использованием классического отношения логического следования, так и релевантного.

1.6 Интенсиональные семантики с другими неклассическими следованиями

В предыдущем разделе мы рассмотрели, как изменяется класс законов фундаментальной силлогистики при замене отношения классического логического следования на релевантное при определении условий значимости формул.

Но кроме классических ($\mathbf{M_K}$) и обобщенных ($\mathbf{M_O}$) описаний состояний можно выделить еще два: множество всех непротиворечивых описаний состояния ($\mathbf{M_H}$) и множество всех полных описаний состояния ($\mathbf{M_\Pi}$). Первые будут обладать свойством непротиворечивости, но могут не обладать свойством полноты, а вторые — обладать свойством полноты, но не обязательно быть непротиворечивыми.

Рассмотрим отношение следования, заданное на множестве всех непротиворечивых описаний состояния, то есть на множестве $\mathbf{M_H}$. Обозначим его $\models_{HW}$, так как данное следование соответствует следованию в логике Хао Вана [6, с. 137]. Зададим это следование следующим образом: $A \models_{HW} B \Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbf{M_H}(T\mathbf{A}/\alpha \Rightarrow T\mathbf{B}/\alpha)$. При этом определения предикатов истинности и ложности сохраняются. Интересным представляется вопрос, получается ли новая силлогистическая система при замене классического следования на следование Хао Вана при определении условий значимости формул.

Для того, чтобы проверить, какая силлогистическая система получается при такой замене, нам понадобится следующее известное утверждение.

Утверждение 1. *Пусть α — непротиворечивое описание состояния, т.е. $\alpha \in \mathbf{M_H}$. Для любой формулы $\mathbf{A}$ пропозиционального языка неверно, что $T\mathbf{A}/\alpha$ и $F\mathbf{A}/\alpha$.*

Докажем справедливость двух следующих метатеорем для следования Хао Вана:

Метатеорема 4. *Если $\mathbf{A} \models_{HW} \neg\mathbf{A}$, то $\mathbf{A} \models_{HW} \mathbf{B}$*

Доказательство.

1.	$\mathbf{A} \models_{HW} \neg\mathbf{A}$	допущение
2.	$\mathbf{A} \not\models_{HW} \mathbf{B}$	допущение
3.	$\dot\forall\alpha \in \mathbf{M_H}(T\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\supset} T\neg\mathbf{A}/\alpha)$	1, по опр. $\models_{HW}$
4.	$\dot\exists\alpha \in \mathbf{M_H}(T\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\wedge} \dot\neg T\mathbf{B}/\alpha)$	2, по опр. $\models_{HW}$
5.	$\alpha \in \mathbf{M_H}$	
6.	$T\mathbf{A}/\alpha$	
	пункты 5–6 получаются из пункта 4 (α — абсолютно ограничена)	по правилу исключения $\dot\exists$
7.	$T\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\supset} T\neg\mathbf{A}/\alpha$	3, 5, $\dot\forall_{\text{и}}$
8.	$T\neg\mathbf{A}/\alpha$	7, 6, $\dot\supset_{\text{и}}$
9.	$F\mathbf{A}/\alpha$	8, условия истинности для $\neg$
10.	$\alpha \in \mathbf{M_H} \mathbin{\dot\wedge} T\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\wedge} F\mathbf{A}/\alpha$	5, 6, 9, $\dot\wedge_{\text{в}}$
11.	$\dot\neg(\alpha \in \mathbf{M_H} \mathbin{\dot\wedge} T\mathbf{A}/\alpha \mathbin{\dot\wedge} F\mathbf{A}/\alpha)$	утверждение 1
12.	$\mathbf{A} \models_{HW} \mathbf{B}$	из противоречия 10 и 11

□

Метатеорема 5. *Если $\mathbf{A} \models_{HW} \neg\mathbf{A}$, то $\mathbf{A} \models_{HW} \neg\mathbf{B}$*

Доказательство ведется аналогично Метатеореме 4 со следующими изменениями: в шаге 2. в качестве допущения вместо $\mathbf{A} \not\models_{HW} \mathbf{B}$ вводится допущение $\mathbf{A} \not\models_{HW} \neg\mathbf{B}$, соответственно меняются и все зависящие от него шаги.

Эти же теоремы будут верны и для отношения $\models_{Cl}$, потому что следование Хао Вана определяется на множестве всех непротиворечивых описаниях состояний, а классическое — на более узком классе, непротиворечивых и полных.

Зададим предикат значимости HW, определение которого отличается от определения предиката Φ (определение 3) лишь тем, что вместо отношения классического следования $\models$ используется отношение $\models_{HW}$.

Покажем, что аксиомы системы **ФС ФС5.** $(SiP \supset SiS)$ и **ФС6.** $(SoP \supset SiS)$ являются HW-общезначимыми.

ФС5. $SiP \supset SiS$

$HW(SiP \supset SiS, \delta) \Leftrightarrow \dot{\neg}\, HW(SiP, \delta) \,\dot{\vee}\, HW(SiS, \delta) \Leftrightarrow \dot{\neg}\,(\delta(S) \not\models_{HW} \neg\delta(P)) \,\dot{\vee}$ $\dot{\vee}\, \delta(S) \not\models_{HW} \neg\delta(S) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{HW} \neg\delta(P)\, v\dot{e}e\, \delta(S) \not\models_{HW} \neg\delta(S) \Leftrightarrow \models_{HW} \neg\delta(S) \,\dot{\supset}$ $\dot{\supset}\, \delta(S) \models_{HW} \neg\delta(P)$. Последнее утверждение верно в силу Метатеоремы 5.

ФС6. $SoP \supset SiS$

HW-общезначимость доказывается аналогично с использованием Метатеоремы 4.

Все другие аксиомы **ФС** также являются HW-общезначимыми, что позволяет сделать обоснованное предположение, что интенсиональная семантика с использованием отношения следования $\models_{HW}$ адекватна силлогистике **ФС**, а именно, что множество HW-общезначимых формул совпадает с множеством Φ-общезначимых формул.

Рассмотрим отношение следования, заданное на множестве полных описаний состояния ($\mathbf{M_\Pi}$). Обозначим его $\models_{DHW}$, так как данное множество задается в логике, которую Войшвилло называл логикой, двойственной логике Хао Вана [6, с. 137]. Мы обозначим это следование $\models_{DHW}$. Данное следование определяется следующим образом: $A \models_{DHW} B \Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbf{M_\Pi}(T\mathbf{A}/\alpha \Rightarrow T\mathbf{B}/\alpha)$.

Зададим предикат значимости DHW, который будет отличаться от предиката значимости I (определение 4) заменой отношения $\models_{rel}$ на отношение $\models_{DHW}$. Для того, чтобы выяснить, как изменится силлогистика при использовании данного отношения следования для определения условий значимости формул, нужно сначала доказать следующее утверждение.

Для любого из четырех обозначенных выше отношений следования верно, что из $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ следует $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A})$.

Достаточно продемонстрировать это для отношения $\models_{rel}$, поскольку если $\mathbf{A} \models_{rel} \mathbf{B}$, то и $\mathbf{A} \models_{DHW} \mathbf{B}$, и $\mathbf{A} \models_{DHW} \mathbf{B}$, и $\mathbf{A} \models_{Cl} \mathbf{B}$.

Утверждение 2. $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \models_{rel} \neg(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A})$.

Доказательство.

1.	$T(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A})/\alpha$	допущение
2.	$\dot{\neg}\, T\neg(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A})/\alpha$	допущение
3.	$T\mathbf{A}/\alpha$	1, условия истинности $\wedge$
4.	$T\neg\mathbf{A}/\alpha$	1, условия истинности $\wedge$
5.	$F\mathbf{A}/\alpha$	4, условия истинности $\neg$
6.	$\dot{\neg}\, F(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A})/\alpha$	2, условия истинности $\neg$
7.	$\dot{\neg}\, F\mathbf{A}/\alpha \,\dot{\wedge}\, \dot{\neg}\, F\neg\mathbf{A}/\alpha$	6, условия истинности $\wedge$
8.	$\dot{\neg}\, F\mathbf{A}/\alpha$	7, $\dot{\wedge}_{\text{и}}$
9.	$T\neg(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A})/\alpha$	из противоречия 5 и 8

□

Метатеорема 6. *Формула $SiP \supset SiS$ не является DHW-общезначимой.*

Доказательство. Пусть полное описание состояния α содержит литералы $p, \neg p, q$, но не содержит $\neg q$.

Верно, что $T(p \wedge \neg p)/\alpha$, т.к. и p, и $\neg p$ содержатся в α. Неверно, что $T\neg q/\alpha$, т.к. $\neg q \notin \alpha$.

Отсюда вытекает, что $p \wedge \neg p \not\models_{DHW} \neg q$, значит, $DHW(SiP, \delta)$.

Согласно Утверждению 2, $p \wedge \neg p \models_{DHW} \neg(p \wedge \neg p)$. Поэтому $\dot{\neg}\, DHW(SiS, \delta)$. Следовательно, $\dot{\neg}\, DHW(SiP \supset SiS, \delta)$. □

Метатеорема 7. *Формула* $SoP \supset SiS$ *не является* DHW*-общезначимой.*

Доказывается аналогично предыдущей теореме.

Мы показали, что формулы $SiP \supset SiS$ (теорема **ФС5.**) и $SoP \supset SiS$ (теорема **ФС6.**) не являются DHW-общезначимыми, а значит, можно сделать предположение, что интенсиональная семантика с использованием следования $\models_{DHW}$ адекватна силлогистике **ИФС** и что множество DHW-общезначимых формул совпадает с множеством I-общезначимых формул.

2 Интенсиональные семантики для силлогистик со стандартными константами[4]

2.1 Интенсиональная фундаментальная силлогистика и ее подсистемы

В разделе 1.2 нами были сформулированы промежуточные системы между исчислениями **ИФС** и **ФС** — $\mathbf{ИФС}_1$ и $\mathbf{ИФС}_2$. Рассмотрим подробнее систему $\mathbf{ИФС}_2$, где константы e и i трактуются как в **ФС**, а константы a и o — как в **ИФС**.

Понятие значимости формул определим для данной системы следующим образом (будем использовать здесь символ I_2 для метапредиката значимости):

Определение 7.

$$I_2(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P);$$

$$I_2(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \mathbin{\dot\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P);$$

$$I_2(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P);$$

$$I_2(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P).$$

Для сложных формул I_2 задается стандартно.

Зададим перевод η из силлогистики $\mathbf{ИФС}_2$ в её подсистему **ИФС**:

Определение 8.

$\eta(SaP) = SaP$;

$\eta(SeP) = (SeP \vee SeS) \vee PeP$;

$\eta(SiP) = (SiP \wedge SiS) \wedge PiP$;

$\eta(SoP) = SoP$;

$\eta(\neg\mathbf{A}) = \neg\eta(\mathbf{A})$;

$\eta(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \eta(\mathbf{A}) \nabla \eta(\mathbf{B})$.

[4] В тексте данной главы используется материал, опубликованный в [17].

Метатеорема 8. *Перевод η погружает* **ИФС**$_2$ *в* **ИФС***, т.е.*

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\textbf{ИФС}_2 \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \textbf{ИФС} \vdash \eta(\mathbf{A}))$$

Доказательство. Данная метатеорема будет доказываться с использованием следующего критерия погружаемости одного исчисления в другое, в основе которого лежит известный критерий В.А. Смирнова [29, сс. 121–122] (нам потребуется простой вариант этого критерия для случая, когда оба исчисления строятся в одном и том же языке):

«Исчисление $\mathbf{S}_1$ погружается в исчисление $\mathbf{S}_2$ посредством функции φ_1, если и только если (1) для каждой формулы $\mathbf{A}$ имеет место: $\mathbf{S}_1 \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{S}_2 \vdash \varphi_1\ (\mathbf{A})$, и существует такая функция φ_2, что (2) для каждой формулы $\mathbf{A}$ имеет место: $\mathbf{S}_2 \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{S}_1 \vdash \varphi_2(\mathbf{A})$, и (3) для каждой формулы $\mathbf{A}$ имеет место: $\mathbf{S}_1 \vdash \mathbf{A} \equiv \varphi_2(\varphi_1(\mathbf{A}))$»

Во-первых, покажем, что η-переводы (см. опр. 4) всех теорем системы **ИФС**$_2$ доказуемы в исчислении **ИФС**. Во-вторых, укажем функцию γ такую, что (a) γ-переводы всех теорем **ИФС** доказуемы в **ИФС**$_2$ и (b) для любой формулы $\mathbf{A}$ верно, что формула $\mathbf{A} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{A}))$ доказуема в исчислении **ИФС**$_2$.

Предварительно нам потребуется продемонстрировать доказуемость в системе **ИФС** формул следующего типа:

T1. $(MeM \wedge SaM) \supset SeS$.

1.	$(MeM \wedge SaM) \supset SeM$	**ИФС2**
2.	$SeM \supset MeS$	**ИФС3**
3.	$(MeS \wedge SaM) \supset SeS$	**ИФС2**
4.	$(MeM \wedge SaM) \supset SeS$	1, 2, 3; **ЛВ** (логика высказываний)

При переходе к п. 4 используется следующая выводимость в классическом исчислении высказываний: $(A \wedge B) \supset C, C \supset D, (D \wedge B) \supset E \vdash (A \wedge B) \supset E$.

Покажем справедливость первой части критерия погружаемости, а именно:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\textbf{ИФС}_2 \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \textbf{ИФС} \vdash \eta(\mathbf{A}))$$

Для обоснования этого утверждения достаточно доказать, что η-переводы всех аксиом **ИФС**$_2$ доказуемы в **ИФС**, и что если η-переводы посылок правила *modus ponens* доказуемы в **ИФС**, то в этой системе доказуем и η-перевод его заключения.

ИФС$_2$0. Переводы аксиом классического исчисления высказываний также являются пропозициональными тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИФС**.

ИФС$_2$1. $\eta((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = (MaP \wedge SaM) \supset SaP$

$(MaP \wedge SaM) \supset SaP$ является аксиомой **ИФС1** системы **ИФС**.

ИФС$_2$2. $\eta((MeP \wedge SaM) \supset SeP) = ((MeP \vee MeM) \vee PeP) \wedge SaM) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$.

1.	$(MeP \wedge SaM) \supset SeP$	**ИФС2**
2.	$(MeM \wedge SaM) \supset SeS$	**Т1**
3.	$(PeP \wedge SaM) \supset PeP$	**ИФС0**
4.	$(((MeP \vee MeM) \vee PeP) \wedge SaM) \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$	1, 2, 3; **ЛВ**

ИФС$_2$3. $\eta(SeP \supset PeS) = (SeP \vee SeS \vee PeP) \supset (PeS \vee PeP \vee SeS)$.

1.	$SeP \supset PeS$	**ИФС3**
2.	$(SeP \vee SeS \vee PeP) \supset (PeS \vee PeP \vee SeS)$	1, **ЛВ**

ИФС$_2$4. $\eta(SaS) = SaS$.

SaS является аксиомой **ИФС4** системы **ИФС**.

ИФС$_2$5. $\eta(SiP \supset SiS) = (SiP \wedge SiS \wedge PiP) \supset (SiS \wedge SiS \wedge SiS)$.

$(SiP \wedge SiS \wedge PiP) \supset (SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ является пропозициональной тавтологией, а значит, доказуема с использованием **ИФС0**.

ИФС$_2$6. $\eta(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv \neg(SiP \wedge SiS \vee PiP)$

1.	$SeP \equiv \neg SiP$	**ИФС5**
2.	$SeS \equiv \neg SiS$	**ИФС5**
3.	$PeP \equiv \neg PiP$	**ИФС5**
4.	$(SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv \neg(SiP \wedge SiS \vee PiP)$	1, 2, 3; **ЛВ**

ИФС$_2$7. $\eta(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \equiv \neg SaP)$

$(SoP \equiv \neg SaP)$ является аксиомой **ИФС7** системы **ИФС**.

Modus ponens

Допустим, что $\eta(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\eta(\mathbf{A})$ доказуемы в **ИФС**. Поскольку $\eta(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) = \eta(\mathbf{A}) \supset \eta(\mathbf{B})$, формула $\eta(\mathbf{A}) \supset \eta(\mathbf{B})$ является теоремой **ИФС**. Но $\eta(\mathbf{A})$ тоже теорема этой системы. Следовательно, $\eta(\mathbf{B})$ доказуема в **ИФС**.

Итак, мы показали, что η-переводы всех теорем системы $\mathbf{ИФС}_2$ доказуемы в **ИФС**.

Перейдем к доказательству второй части критерия погружаемости. В качестве обратной функции (перевода из **ИФС** в $\mathbf{ИФС}_2$) рассмотрим тождественное преобразование γ: $\gamma(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$.

Поскольку **ИФС** является подсистемой $\mathbf{ИФС}_2$, γ-переводы всех теорем $\mathbf{ИФС}_2$ доказуемы в **ИФС**:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{ИФС} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{ИФС}_2 \vdash \gamma(\mathbf{A}))$$

Остается обосновать следующее утверждение:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{ИФС}_2 \vdash (\mathbf{A} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{A}))))$$

Его доказательство осуществляем индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле A.

Базис включает четыре случая.

I. $\mathbf{A} \doteq SaP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SaP) = SaP$.

Формула $SaP \equiv SaP$ является тавтологией, а потому и аксиомой ($\mathbf{ИФС}_2\mathbf{0}$) системы **ИФС2**.

II. $\mathbf{A} \doteq SeP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$.

1.	$SeP \supset (SeP \vee SeS \vee PeP)$	**ИФС$_2$0**
2.	$SiP \supset SiS$	**ИФС$_2$5**
3.	$SeP \equiv \neg SiP$	**ИФС$_2$6**
4.	$SeS \equiv \neg SiS$	**ИФС$_2$6**
5.	$SeS \supset SeP$	2, 3, 4; **ЛВ**
6.	$PiS \supset PiP$	**ИФС$_2$5**
7.	$PeS \equiv \neg PiS$	**ИФС$_2$6**
8.	$PeP \equiv \neg PiP$	**ИФС$_2$6**
9.	$PeP \supset PeS$	6, 7, 8; **ЛВ**
10.	$PeS \supset SeP$	**ИФС$_2$3**
11.	$PeP \supset SeP$	9, 10; **ЛВ**
12.	$SeP \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP)$	1, 5, 11; **ЛВ**

III. $\mathbf{A} \risingdotseq SiP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$.

IV. $\mathbf{A} \risingdotseq SoP$. Тогда $\gamma(\eta(\mathbf{A})) = \eta(SoP) = SoP$.

Сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу схем аксиом **ИФС$_2$6** и **ИФС$_2$7**.

При обосновании индуктивного перехода принимаем допущение, что для любой формулы **B**, содержащей меньше пропозициональных связок, чем **A**, верно, что $\mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$ доказуема в системе **ИФС$_2$**.

V. $\mathbf{A} \risingdotseq \neg\mathbf{B}$.

Согласно индуктивному допущению, $\mathbf{ИФС_2} \vdash \mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$. Отсюда вытекает: $\mathbf{ИФС_2} \vdash (\neg\mathbf{B} \equiv \neg\gamma(\eta(\mathbf{B})))$. По определению переводов η и γ, имеем: $\gamma(\eta(\neg\mathbf{B})) = \gamma(\neg\eta(\mathbf{B})) = \neg\gamma(\eta(\mathbf{B}))$. Следовательно, $\mathbf{ИФС_2} \vdash (\neg\mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\neg\mathbf{B})))$.

VI. $\mathbf{A} \risingdotseq \mathbf{B} \nabla \mathbf{C}$, где ∇ есть один из символов $\wedge, \vee, \supset$.

Согласно индуктивному допущению, формулы $\mathbf{B} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{B}))$ и $\mathbf{C} \equiv \gamma(\eta(\mathbf{C}))$ доказуемы в **ИФС$_2$**.

Отсюда вытекает, что и формула $(\mathbf{B} \nabla \mathbf{C}) \equiv (\gamma(\eta(\mathbf{B})) \nabla \gamma(\eta(\mathbf{C})))$ доказуема в этой системе. Но, по определению переводов η и γ, $\gamma(\eta(\mathbf{B} \nabla \mathbf{C})) = \gamma(\eta(\mathbf{B}) \nabla \eta(\mathbf{C})) = \gamma(\eta(\mathbf{B})) \nabla \gamma(\eta(\mathbf{C}))$. Следовательно, $\mathbf{ИФС_2} \vdash (\mathbf{B} \nabla \mathbf{C}) \equiv$

$\gamma(\eta(\mathbf{B} \nabla \mathbf{C}))$. □

Метатеорема 9. *Произвольная силлогистическая формула* $\mathbf{A}$ I_2*-общезначима, если и только если её перевод* $\eta(\mathbf{A})$ I*-общезначим.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ, сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $I_2(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow I(\eta(\mathbf{A}), \delta)$ (см. опр. 4 и 7) для любой формулы $\mathbf{A}$ языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} \risingdotseq SaP$. $I_2(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \Leftrightarrow I(SaP, \delta) \Leftrightarrow I(\eta(SaP), \delta)$.

II. $\mathbf{A} \risingdotseq SeP$.

$I_2(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \ \dot\vee\ \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \ \dot\vee\ \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow I(SeP, \delta) \ \dot\vee\ I(SeS, \delta) \ \dot\vee\ I(PeP, \delta) \Leftrightarrow I(SeP \vee SeS \vee PeP, \delta) \Leftrightarrow I(\eta(SeP), \delta)$.

III. $\mathbf{A} \risingdotseq SiP$.

IV. $\mathbf{A} \risingdotseq SoP$.

Сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу того, что условия их I_2-значимости и I-значимости противоречат соответствующим условиям значимости атомарных формул SeP и SaP.

Далее рассматриваем случаи, когда $\mathbf{A}$ — сложная формула. Используем индуктивное допущение: для любой формулы $\mathbf{B}$ с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связок верно, что $I_2(\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow I(\eta(\mathbf{B}), \delta)$.

V. $\mathbf{A} \risingdotseq \neg\mathbf{B}$.

$I_2(\neg\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \neg I(\eta(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow I(\neg\eta(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow I(\eta(\neg\mathbf{B}), \delta)$.

VI. $\mathbf{A} \risingdotseq (\mathbf{B} \nabla \mathbf{C})$.

$I_2(\mathbf{B} \nabla \mathbf{C}) \Leftrightarrow I_2(\mathbf{B}, \delta) \nabla I_2(\mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow I(\eta(\mathbf{B}), \delta) \nabla I(\eta(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow$
$I((\eta(\mathbf{B}) \nabla \eta(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow I(\eta(\mathbf{B} \nabla \mathbf{C}), \delta)$.

Где ∇ есть один из символов $\wedge, \vee, \supset$.

Таким образом, мы обосновали следующее метаутверждение:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}\dot{\forall}\delta(I_2(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow I(\eta(\mathbf{A}),\delta))$$

Из него, по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\dot{\forall}\delta I_2(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \dot{\forall}\delta I(\eta(\mathbf{A}),\delta))$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A}$ I_2-общезначима в том и только в том случае, когда I-общезначим её перевод $\eta(\mathbf{A})$. $\square$

Метатеорема 10. *Для произвольной силлогистической формулы* $\mathbf{A}$ *верно, что* $\eta(\mathbf{A})$ *доказуема в* **ИФС***, если и только если* $\eta(\mathbf{A})$ *—* I*-общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** доказаны в [23]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, если и только если она I-общезначима (см. опр. 4). Поскольку η-перевод (см. опр. 8) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. $\square$

Метатеорема 11. *Произвольная силлогистическая формула* $\mathbf{A}$ *доказуема в исчислении* **ИФС**$_2$*, если и только если* $\mathbf{A}$ I_2*-общезначима.*

Доказательство. Согласно **Метатеореме 8**, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A}$ в системе **ИФС**$_2$ равносильна доказуемости ее перевода $\eta(\mathbf{A})$ (см. опр. 4) в системе **ИФС**. Согласно **Метатеореме 10**, доказуемость $\eta(\mathbf{A})$ в **ИФС** равносильна I-общезначимости $\eta(\mathbf{A})$ (см. опр. 8). Наконец, согласно **Метатеореме 9**, I-общезначимость $\eta(\mathbf{A})$ равносильна I_2-общезначимости формулы $\mathbf{A}$ (см. опр. 7). $\square$

Таким образом, адекватная релевантизированная семантика для силлогистики **ИФС**$_2$ построена.

Кроме **ИФС**$_2$ у **ФС** есть и другая подсистема — силлогистика **ИФС**$_1$, где константы a и o трактуются как в **ФС**, а константы e и i — как в **ИФС**.

Понятие значимости формул определим для данной системы следующим образом (будем использовать здесь символ I_1 для метапредиката значимости):

Определение 9.

$$I_1(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S);$$
$$I_1(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P);$$
$$I_1(SiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P);$$
$$I_1(SoP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S).$$

Для сложных формул I_1 задается стандартно.

Можно предположить, что класс общезначимых формул в такой семантике аксиоматизирует исчисление, полученное из **ФС** путем отбрасывания аксиомы **ФС5** $SiP \supset SiS$. Однако доказать это утверждение тем же методом, который использовался выше для системы **ИФС**$_2$, не удалось. Проблема остается открытой.

2.2 Интенсиональная семантика силлогистики С2

Рассмотрим подробнее систему **С2**, предложенную В.А. Смирновым. Напомним, что ее схемами аксиом являются:

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

A1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **A5.** $SiP \supset SaS$;

A2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **A6.** $SeP \equiv \neg SiP$.

A3. $SeP \supset PeS$; **A7.** $SoP \equiv \neg SaP$.

A4. $SaP \supset SiP$;

Единственным правилом вывода в **С2** является правило *modus ponens.*

Перевод χ, погружающий исчисление **С2** в исчисление **ФС** задается следующим образом [3, сс. 87–89]:

Определение 10.

$\chi(SaP) = SaP \wedge SiS$; $\chi(SeP) = SeP$;

$\chi(SiP) = SiP$; $\chi(SoP) = SoP \vee \neg SiS$;

$\chi(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi(\mathbf{A})$; $\chi(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \chi(\mathbf{A}) \nabla \chi(\mathbf{B})$.

Адекватную семантику в духе синтаксической интерпретации В.И. Шалака для системы **C2** предложил В.И. Маркин [24]. Условия значимости простых формул задаются следующим образом:

Определение 11.

$$Q'(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot\wedge \delta(S) \not\models \neg\delta(S);$$

$$Q'(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P);$$

$$Q'(SiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P);$$

$$Q'(SoP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \dot\vee \delta(S) \models \neg\delta(S).$$

Формула **A** называется Q'-общезначимой, если и только если $\dot\forall\delta Q'(\mathbf{A},\delta)$.

Для доказательства адекватности данной семантики исчислению **C2** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Метатеорема 12. *Произвольная силлогистическая формула* **A** Q'*-общезначима, если и только если ее перевод* $\chi(\mathbf{A})$ Φ*-общезначим (см. опр. 3).*

Доказательство. Для этого докажем предварительно следующее утверждение:

$$\dot\forall\mathbf{A}\dot\forall\delta(Q'(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{A}),\delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в **A**.

I. $\mathbf{A} \doteqdot SaP$.

$Q'(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot\wedge \delta(S) \not\models \neg\delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge SiS,\delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SaP),\delta)$.

II. $\mathbf{A} \doteqdot SeP$.

$Q'(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SeP,\delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SeP),\delta)$.

III. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SiP$.

$Q'(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SiP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SiP), \delta)$.

IV. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SoP$.

$Q'(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \mathbin{\dot\vee} \delta(S) \models \neg\delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SoP \vee SeS, \delta) \Leftrightarrow$ $\Phi(SoP \vee \neg SiS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(SoP), \delta)$.

V. $\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\mathbf{B}$.

$Q'(\neg\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \neg Q'(\mathbf{B}, \delta) \Leftrightarrow \neg\Phi(\chi(\mathbf{B}), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\neg(\chi(\mathbf{B})), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\neg\mathbf{B}), \delta)$.

VI. $\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

$Q'(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg Q'(\mathbf{B}, \delta) \mathbin{\dot\vee} Q'(\mathbf{C}, \delta) \Leftrightarrow \neg\Phi(\chi(\mathbf{B}), \delta) \mathbin{\dot\vee} \Phi(\chi(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow$ $\Phi(\chi(\mathbf{B}) \supset \chi(\mathbf{C}), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}), \delta)$.

Другие случаи, когда **A** есть сложная формула, обосновываются аналогично.

Эквивалентные преобразования в трех базисных пунктах осуществляются на основе определений предикатов Q' (см. опр. 11) и Φ (см. опр. 3) и операции χ (см. опр. 10), в индуктивном переходе используется также индуктивное допущение о том, что утверждение леммы верно для формул с меньшим, чем у **A**, числом пропозициональных связок.

Из только что доказанного утверждения — $\dot\forall\mathbf{A}\dot\forall\delta(Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta))$ по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot\forall\mathbf{A}(\dot\forall\delta Q'(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot\forall\delta\Phi(\chi(\mathbf{A}), \delta))).$$

Последнее означает, что произвольная формула **A** Q'-общезначима в том и только в том случае, когда Φ-общезначима формула $\chi(\mathbf{A})$. □

Докажем теперь метатеорему об адекватности предложенной семантики исчислению **C2**.

Метатеорема 13. *Произвольная формула* **A** *доказуема в исчислении* **C2***, если и только если формула* **A** Q'*-общезначима.*

Доказательство. Данная метатеорема является элементарным следствием трех утверждений:

(1) Произвольная формула **A** доказуема в исчислении **C2**, если и только если

ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ (см. опр. 10) доказуем в исчислении **ФС**;
(2) Произвольная формула **A** Q'-общезначима (см. опр. 11), если и только если ее перевод $\chi(\mathbf{A})$ является Φ-общезначимым (см. опр. 3);
(3) Для любой формулы **A** верно, что $\chi(\mathbf{A})$ доказуема в исчислении **ФС**, если и только если $\chi(\mathbf{A})$ Φ-общезначима.

Утверждение (1) справедливо в силу того, что перевод χ погружает **C2** в **ФС**. Утверждение (2) доказано выше (**Метатеорема 12**). Утверждение (3) следует из доказанной В.И. Шалаком [30] адекватности «синтаксической» интерпретации формул стандартного силлогистического языка системе **ФС**.

□

Покажем далее, что адекватная релевантизированная семантика для системы **C2** определяется следующими условиями значимости для атомарных силлогистических формул (для сложных формул они обычные). В качестве метапредиката значимости будем использовать символ Q:

Определение 12.

$$Q(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S);$$

$$Q(SeP,\delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P);$$

$$Q(SiP,\delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P);$$

$$Q(SoP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S).$$

Зададим перевод μ из силлогистики **C2** в систему **ИФС**:

Определение 13.

$\mu(SaP) = SaP \wedge SiS$; $\mu(SeP) = SeP \vee SeS \vee PeP$;
$\mu(SiP) = SiP \wedge SiS \wedge PiP$; $\mu(SoP) = SoP \vee \neg SiS$;
$\mu(\neg\mathbf{A}) = \neg\mu(\mathbf{A})$; $\mu(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \mu(\mathbf{A}) \nabla \mu(\mathbf{B})$.

Покажем, что он погружает **C2** в **ИФС**.

Для этого будем использовать перевод ψ, погружающий систему **ФС** в ее подсистему **ИФС** (см. определение 6).

Метатеорема 14. *Перевод μ погружает* **С2** *в* **ИФС**, *т.е.*

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{C2} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \mu(\mathbf{A})).$$

Доказательство. Так как исчисление **С2** погружается в исчисление **ФС** с помощью функции χ (см. опр. 10), а исчисление **ФС** погружается в **ИФС** с помощью функции ψ, то **С2** погружается в **ИФС** посредством композиции переводов χ и ψ. То есть,

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{C2} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{ИФС} \vdash \psi(\chi(\mathbf{A}))).$$

Остается доказать, что композиция переводов χ и ψ для произвольной формулы равносильна ее μ-переводу в системе **ИФС**:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{ИФС} \vdash \mu(\mathbf{A}) \equiv \psi(\chi(\mathbf{A})))$$

Доказательство ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Базис содержит четыре случая:

I. $\mathbf{A} \doteqdot SaP$.

Необходимо доказать, что **ИФС** $\vdash \mu(SaP) \equiv \psi(\chi(SaP))$, то есть что формула $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ доказуема в **ИФС**.

1. $(SaP) \wedge SiS) \supset ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **A0.**
2. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SiS$ **A0.**
3. $SiS \equiv \neg SeS$ **A7.**
4. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SaP$ 3; **ЛВ**
5. $((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset (SaP \wedge SiS)$ 2, 4; **ЛВ**
6. $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ 1, 5; **ЛВ**

II. $\mathbf{A} \doteqdot SeP$.

Необходимо доказать, что **ИФС** $\vdash \mu(SeP) \equiv \psi(\chi(SeP))$, то есть что формула $(SeP \vee SeS \vee PeP) \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP)$ доказуема в **ИФС**.

Она является законом логики высказываний, то есть одной из аксиом **A0.**

III. $\mathbf{A} \doteqdot SiP$.

Необходимо доказать, что **ИФС** $\vdash \mu(SiP) \equiv \psi(\chi(SiP))$

IV. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SoP$.

Необходимо доказать, что **ИФС** $\vdash \mu(SoP) \equiv \psi(\chi(SoP))$

Эти два случая сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу схем аксиом **ИФС5** и **ИФС6** системы **ИФС**.

Индуктивный переход обосновывается с помощью тех пунктов определений функций μ, χ и ψ (см. опр. 13, 10, 6), которые связаны с их применением к сложным формулам.

Итак, мы показали, что формулы $\mu(\mathbf{A})$ и $\psi(\chi(\mathbf{A}))$ логически эквивалентны в **ИФС**. Поскольку композиция переводов χ и ψ погружает **С2** в **ИФС**, то перевод μ также является операцией, погружающей **С2** в **ИФС**.

□

Метатеорема 15. *Произвольная силлогистическая формула* $\mathbf{A}$ Q*-общезначима, если и только если её перевод* $\mu(\mathbf{A})$ I*-общезначим, т.е.*

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(Q(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow I(\mu(\mathbf{A}),\delta))$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ, сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $Q(\mathbf{A},\delta)$, если и только если $I(\mu(\mathbf{A}),\delta)$ (см. опр. 12 и 4) для любой формулы $\mathbf{A}$ языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SaP$.

$Q(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot{\wedge}} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow I(SaP,\delta) \mathbin{\dot{\wedge}} I(SiS,\delta) \Leftrightarrow I(SaP \wedge SiS,\delta) \Leftrightarrow I(\mu(SaP),\delta)$.

II. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SeP$.

$Q(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot{\vee}} \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(S) \mathbin{\dot{\vee}} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow$
$I(SeP,\delta) \mathbin{\dot{\vee}} I(SeS,\delta) \mathbin{\dot{\vee}} I(PeP,\delta) \Leftrightarrow I(SeP \vee SeS \vee PeP,\delta) \Leftrightarrow I(\mu(SeP),\delta)$.

III. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SiP$.

IV. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SoP$.

Сводятся, соответственно, к случаям **II** и **I** в силу того, что условия их

Q-значимости (см. опр. 12) и I-значимости противоречат соответствующим условиям значимости атомарных формул SeP и SaP.
Индуктивный переход доказывается аналогично **Метатеореме 9** □

Метатеорема 16. *Для произвольной силлогистической формулы* $\mathbf{A}$ *верно, что* $\mu(\mathbf{A})$ *доказуема в* **ИФС**, *если и только если* $\mu(\mathbf{A})$ *—* I*-общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** доказаны в [23]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, е.т.е. она I-общезначима (см. опр. 4). Поскольку μ-перевод (см. опр. 13) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. □

Метатеорема 17. *Произвольная силлогистическая формула* $\mathbf{A}$ *доказуема в исчислении* **C2**, *е.т.е.* $\mathbf{A}$ Q*-общезначима.*

Доказательство. Согласно **Метатеореме 14**, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A}$ в системе **C2** равносильна доказуемости ее перевода $\mu(\mathbf{A})$ (см. опр. 13) в системе **ИФС**. Согласно **Метатеореме 16**, доказуемость $\mu(\mathbf{A})$ в **ИФС** равносильна I-общезначимости $\mu(\mathbf{A})$ (см. опр. 4). Наконец, согласно **Метатеореме 15**, I-общезначимость $\mu(\mathbf{A})$ равносильна Q-общезначимости формулы $\mathbf{A}$ (см. опр. 12). □

В свете построенной семантики остается несколько вопросов, решение которых является дальнейшей задачей.

2.3 Интенсиональная семантика силлогистики Больцано

Другая интерпретация категорических высказываний была предложена чешским математиком Бернардо Больцано: при экстенсиональном подходе она подразумевает непустоту субъекта в истинных высказываниях (как общих, так и частных). Данная силлогистическая теория не является аристотелевской, в ней не принимаются некоторые законы логического квадрата, обращения для e и два модуса IV фигуры силлогизма.

Напомним, что схемами аксиом системы **СБ** являются:

СБ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний;

СБ1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$; **СБ5.** $SiP \supset SaS$;

СБ2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; **СБ6.** $SeP \equiv \neg SiP \wedge SiS$.

СБ3. $SiP \supset PiS$; **СБ7.** $SoP \equiv \neg SaP \wedge SiS$.

СБ4. $SaP \supset SiP$;

Единственным правилом вывода в **СБ** является правило *modus ponens*.

Перевод ρ, погружающий исчисление **СБ** в исчисление **ФС** задается следующим образом [3, сс. 78–82]:

Определение 14.

$\rho(SaP) = SaP \wedge SiS$; $\rho(SeP) = SeP \wedge SiS$;

$\rho(SiP) = SiP$; $\rho(SoP) = SoP$;

$\rho(\neg \mathbf{A}) = \neg \rho(\mathbf{A})$; $\rho(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \rho(\mathbf{A}) \nabla \rho(\mathbf{B})$.

Построим адекватную семантику в духе Шалака для системы **СБ**. Условия значимости простых формул задаются следующим образом:

Определение 15.

$$R'(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg\delta(S);$$

$$R'(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg\delta(S);$$

$$R'(SiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P);$$

$$R'(SoP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P).$$

Формула $\mathbf{A}$ называется R'-общезначимой, если и только если $\dot{\forall}\delta R'(\mathbf{A}, \delta)$.

Для доказательства адекватности данной семантики исчислению **СБ** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Метатеорема 18. *Произвольная силлогистическая формула* $\mathbf{A}$ R'*-общезначима, если и только если ее перевод* $\rho(\mathbf{A})$ Φ*-общезначим (см. опр. 3).*

Доказательство. Для этого докажем предварительно следующее утверждение:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}\dot{\forall}\delta(R'(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(\mathbf{A}),\delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} \doteq SaP$.

$R'(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg\delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge SiS,\delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SaP),\delta)$.

II. $\mathbf{A} \doteq SeP$.

$R'(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \neg\delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SeP \wedge SiS,\delta) \Leftrightarrow$
$\Phi(\rho(SeP),\delta)$.

III. $\mathbf{A} \doteq SiP$.

$R'(SiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SiP,\delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SiP),\delta)$.

IV. $\mathbf{A} \doteq SoP$.

$R'(SoP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SoP,\delta) \Leftrightarrow \Phi(\rho(SoP),\delta)$.

Случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, и дальнейшее доказательство рассматриваются аналогично **Метатеореме 12** □

Докажем теперь метатеорему об адекватности предложенной семантики исчислению **СБ**.

Метатеорема 19. *Произвольная формула* $\mathbf{A}$ *доказуема в исчислении* **СБ**, *если и только если формула* $\mathbf{A}$ R'*-общезначима.*

Доказательство. Данная метатеорема является элементарным следствием трех утверждений:

(1) Произвольная формула $\mathbf{A}$ доказуема в исчислении **СБ**, если и только если ее перевод $\rho(\mathbf{A})$ (см. опр. 14) доказуем в исчислении **ФС**;

(2) Произвольная формула $\mathbf{A}$ R'-общезначима (см. опр. 15), если и только если ее перевод $\rho(\mathbf{A})$ является Φ-общезначимым (см. опр. 3);

(3) Для любой формулы $\mathbf{A}$ верно, что $\rho(\mathbf{A})$ доказуема в исчислении **ФС**, если и только если $\rho(\mathbf{A})$ Φ-общезначима.

Утверждение (1) справедливо в силу того, что перевод ρ погружает **СБ** в **ФС**. Утверждение (2) доказано выше (**Метатеорема 11**). Утверждение (3) следует из доказанной В.И. Шалаком [30] адекватности «синтаксической» интерпретации формул силлогистического языка системе **ФС**. $\square$

Покажем теперь, что адекватная релевантизированная семантика для системы **СБ** определяется следующими условиями значимости для атомарных силлогистических формул (для сложных формул они обычные). В качестве метапредиката значимости будем использовать символ R:

Определение 16.

$$R(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S);$$
$$R(SeP,\delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P)) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S);$$
$$R(SiP,\delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P);$$
$$R(SoP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S).$$

Покажем, что множество теорем исчисления **СБ** совпадает с классом R-общезначимых формул. Будем использовать тот же метод, что и в предыдущем разделе.

Зададим перевод τ из силлогистики **СБ** в систему **ИФС**:

Определение 17.

$\tau(SaP) = SaP \wedge SiS;$

$\tau(SeP) = (SeP \vee PeP) \wedge SiS;$

$\tau(SiP) = (SiP \wedge SiS) \wedge PiP;$

$\tau(SoP) = SoP \wedge SiS;$

$\tau(\neg\mathbf{A}) = \neg\tau(\mathbf{A});$

$\tau(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \tau(\mathbf{A}) \nabla \tau(\mathbf{B}).$

Покажем, что τ-перевод погружает **СБ** в **ИФС**.

Метатеорема 20. *Перевод τ погружает* **СБ** *в* **ИФС**, *т.е.*

$$\dot\forall\mathbf{A}(\textbf{СБ} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \textbf{ИФС} \vdash \tau(\mathbf{A})).$$

Доказательство. Так как исчисление **СБ** погружается в исчисление **ФС** посредством функции ρ (см. опр. 14), а исчисление **ФС** погружается в **ИФС** посредством функции ψ (см. опр. 6), то **СБ** погружается в **ИФС** посредством композиции переводов ρ и ψ.

Остается доказать, что композиция переводов ρ и ψ для произвольной формулы равносильна ее τ-переводу в системе **ИФС**:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{ИФС} \vdash \tau(\mathbf{A}) \equiv \psi(\rho(\mathbf{A}))$$

Доказательство этого метаутверждения ведется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Базис содержит четыре случая:

I. $\mathbf{A} \risingdotseq SaP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SaP) \equiv \psi(\rho(SaP))$, то есть что формула $(SaP \wedge SiS) \equiv ((SaP \vee SeS) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ доказуема в **ИФС**.

Доказательство приведено в предыдущем разделе.

II. $\mathbf{A} \risingdotseq SeP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SeP) \equiv \psi(\rho(SeP))$, то есть что формула $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \equiv (SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS$ доказуема в **ИФС**.

1. $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \supset ((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge$ $SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ **A0.**
2. $((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset SiS$ **A0.**
3. $SiS \equiv \neg SeS$ **A7.**
4. $((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge SiS \wedge SiS \wedge SiS) \supset$ $(SeP \vee PeP)$ 3; **ЛВ**
5. $((SeP \vee PeP) \wedge SiS) \equiv ((SeP \vee SeS \vee PeP) \wedge$ $(SiS \wedge SiS \wedge SiS)$ 1, 4; **ЛВ**

III. $\mathbf{A} \risingdotseq SiP$.

Необходимо доказать, что $\mathbf{ИФС} \vdash \tau(SiP) \equiv \psi(\rho(SiP))$, то есть что формула

$((SiP \wedge SiS) \wedge PiP) \equiv ((SiP \wedge SiS) \wedge PiP)$ доказуема в **ИФС**. Она является законом логики высказываний и, следовательно, одной из аксиом **A0.**

IV. $\mathbf{A} \leftrightharpoons SoP$.

Необходимо доказать, что **ИФС** $\vdash \tau(SoP) \equiv \psi(\rho(SoP))$, то есть что формула $(SoP \wedge SiS) \equiv (SoP \wedge SiS)$ доказуема в **ИФС**. Она является законом логики высказываний и, следовательно, одной из аксиом **A0.**

Обоснование индуктивного перехода ведется совершенно аналогично тому, как это делалось при доказательстве **Метатеоремы 14** предыдущего раздела.

Мы показали, что формулы $\tau(\mathbf{A})$ и $\psi(\rho(\mathbf{A}))$ логически эквивалентны в **ИФС**. Поскольку композиция переводов ρ и ψ погружает **СБ** в **ИФС**, то перевод τ также является операцией, погружающей **СБ** в **ИФС**. □

Метатеорема 21. *Произвольная силлогистическая формула* **A** *R-общезначима, если и только если её перевод $\tau(\mathbf{A})$ I-общезначим, т.е.*

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(R(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow I(\tau(\mathbf{A}),\delta))$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию δ, сопоставляющую общим терминам формулы пропозиционального языка в сигнатуре $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Покажем, что $R(\mathbf{A},\delta)$, если и только если $I(\tau(\mathbf{A}),\delta)$ (см. опр. 16 и 4) для любой формулы **A** языка силлогистики.

Снова будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в составе **A**.

I. $\mathbf{A} \leftrightharpoons SaP$.

$R(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow I(SaP,\delta) \mathbin{\dot\wedge} I(SiS,\delta) \Leftrightarrow I(SaP \wedge SiS,\delta) \Leftrightarrow I(\tau(SaP),\delta)$.

II. $\mathbf{A} \leftrightharpoons SeP$.

$R(SeP,\delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\vee} \delta(P) \models_{rel} \neg\delta(P)) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow (I(SeP,\delta) \mathbin{\dot\vee} I(PeP,\delta)) \mathbin{\dot\wedge} I(SiS,\delta) \Leftrightarrow I((SeP \vee PeP) \wedge SiS,\delta) \Leftrightarrow I(\tau(SeP),\delta)$.

III. $\mathbf{A} \leftrightharpoons SiP$.

$R(SiP,\delta) \Leftrightarrow (\delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S)) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow$

$(I(SiP,\delta) \dot{\wedge} I(SiS,\delta)) \dot{\wedge} I(PiP,\delta) \Leftrightarrow I((SiP \wedge SiS) \wedge PiP,\delta) \Leftrightarrow I(\tau(SiP),\delta)$.

IV. A $\rightleftharpoons SoP$.

$R(SoP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\vee} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(S) \Leftrightarrow I(SoP,\delta) \dot{\wedge} I(SiS,\delta) \Leftrightarrow F(SoP \wedge SiS,\delta) \Leftrightarrow I(\tau(SoP),\delta)$.

Случаи, когда **A** — сложная формула, и дальнейшее доказательство рассматриваются аналогично тому, как это делалось при доказательстве **Метатеоремы 9** первого раздела данной главы. □

Метатеорема 22. *Для произвольной силлогистической формулы* **A** *верно, что* τ**(A)** *доказуема в* **ИФС**, *если и только если* τ**(A)** — I*-общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** доказаны в [23]: произвольная формула языка силлогистики доказуема в данной системе, е.т.е. она I-общезначима (см. опр. 4). Поскольку τ-перевод (см. опр. 17) любой формулы силлогистического языка также принадлежит этому языку, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. □

Метатеорема 23. *Произвольная силлогистическая формула* **A** *доказуема в исчислении* **СБ**, *е.т.е.* **A** R*-общезначима.*

Доказательство. Согласно **Метатеореме 20**, доказуемость произвольной формулы **A** в системе **СБ** равносильна доказуемости ее перевода τ**(A)** (см. опр. 17) в системе **ИФС**. Согласно **Метатеореме 22**, доказуемость τ**(A)** в **ИФС** равносильна I-общезначимости τ**(A)** (см. опр. 4). Наконец, согласно **Метатеореме 21**, I-общезначимость τ**(A)** равносильна R-общезначимости формулы **A** (см. опр. 16). □

Еще один вопрос кажется интересным для дальнейшего развития данного подхода: изменятся ли множество теорем систем **С2** и **СБ**, если заменить в их интенсиональных семантиках классическое следование на релевантное (в Определениях 11 и 15 соответственно)?

Как и для системы $\mathbf{ИФС}_1$ можно лишь предположить, какие именно исчисления будут аксиоматизировать данные семантики. Например, в обоих случаях можно показать общезначимость переводов, но показать погружаемость используемым выше способом не удалось: для релевантного фрагмента **C2** и **СБ** не проходит аксиома **A5.** и **СБ5.** соответственно: $SiP \supset SaS$. Проблема также остается открытой.

3 Интенсиональные семантики для силлогистик с нестандартными константами

3.1 Интенсиональные семантики для силлогистик васильевского типа[5]

В своей работе «О частных суждениях, о треугольнике противоположностей и о законе исключенного четвертого» [5] российский логик Н.А. Васильев подвергает критике интерпретацию частных высказываний «Некоторые S есть P» и «Некоторые S не есть P» в традиционной силлогистике. Квантор «некоторые» трактуется в ней в смысле «существует по крайней мере один» и не противополагается квантору «все». При данной трактовке частные суждения не выражают, согласно Васильеву, законченного знания об отношении своего субъекта к предикату, оставляют неопределенность, все ли S есть P (для утвердительных) и все ли S не есть P (для отрицательных). Наука же, по мнению Васильева, «употребляет "некоторые" в смысле "не все" и иначе она не может употреблять» [5, с. 15].

Подлинно научное частное суждение должно давать полную информацию об отношении объема S к объему P. Таковым является определенно-частное высказывание «Только некоторые S есть P». В нем соединяются утверждение и отрицание: одни S есть P, а остальные S не есть P. Определенно-частное высказывание имеет ту же познавательную ценность, что и общие высказывания, ведь оно содержит информацию обо всем объеме термина S.

Для обозначения типа определенно-частного суждения Васильев использует константу m. Он предлагает в основу силлогистики положить суждения трех типов: общеутвердительные, общеотрицательные и определенно-частные. Атомарными формулами языка этой силлогистики будут SaP, SeP и SmP. Исходные суждения силлогистики Васильева (с одинаковыми субъектами и предикатами) образуют так называемый «треугольник противоположностей», заменяющий логический квадрат традиционной силлогистики. Эти

[5] В тексте данной главы используется материал, опубликованный в [32].

суждения попарно противоположны, и все три несовместимы по ложности (одно из них обязательно истинно).

Фундаментальная силлогистика васильевского типа В языке с исходными константами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{m}$ В.А. Смирновым [28], Т.П. Костюк и В.И. Маркиным [15] построены аксиоматические исчисления васильевского типа, дефиницияльно эквивалентные некоторым известным системам позитивной силлогистики, сформулированным в стандартном языке.

Одно из этих исчислений — система **ФСВ** — аксиоматизирует фундаментальную силлогистику васильевского типа.

Схемами аксиом **ФСВ** являются:

ФСВ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

ФСВ1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$;

ФСВ2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$;

ФСВ3. $SeP \supset PeS$;

ФСВ4. $\neg(SaP \wedge SmP)$;

ФСВ5. $\neg(SeP \wedge SmP)$;

ФСВ6. $SaP \vee SeP \vee SmP$;

ФСВ7. SaS;

ФСВ8. $SeS \supset SeP$;

ФСВ9. $SeS \supset SaP$.

Единственное правило вывода — *modus ponens.*

Костюк и Маркин [15] доказали, что исчисление **ФСВ** дефинициально эквивалентно системе **ФС**, формализующей стандартную фундаментальную силлогистику. Этот результат можно переформулировать в терминах погружающих операций: **ФСВ** и **ФС** взаимно погружаемы (рекурсивно эквивалентны).

Зададим перевод $^+$ из языка системы **ФСВ** в язык системы **ФС** и обратный перевод * из стандартного языка в «васильевский»:

Определение 18.

$$
\begin{array}{ll}
SaP^+ = SaP & SaP^* = SaP \\
SeP^+ = SeP & SeP^* = SeP \\
SmP^+ = SoP \wedge SiP & SiP^* = \neg SeP \\
(\neg \mathbf{A})^+ = \neg \mathbf{A}^+ & SoP^* = \neg SaP \\
(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^+ = \mathbf{A}^+ \nabla \mathbf{B}^+ & (\neg \mathbf{A})^* = \neg \mathbf{A}^* \\
 & (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*
\end{array}
$$

(∇ — произвольная бинарная связка).

Перевод $^+$ погружает **ФСВ** в **ФС**, а перевод * погружает **ФС** в **ФСВ**.

Построим адекватную семантику для системы **ФСВ** на основе «синтаксической» интерпретации атомарных формул в духе Шалака:

Определение 19.

$$B(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P),$$

$$B(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg \delta(P),$$

$$B(SmP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \ \dot{\wedge}\ \delta(S) \not\models \neg \delta(P),$$

где B — предикат значимости а δ — функция, которая сопоставляет каждому общему термину произвольную формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg, \wedge, \vee$.

Условия значимости для сложных формул остаются стандартными.

Формула **A** называется B-общезначимой, если и только если $\dot{\forall} \delta B(\mathbf{A}, \delta)$.

Для доказательства адекватности данной семантики исчислению **ФСВ** необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Метатеорема 24. *Произвольная силлогистическая формула* **A** *языка с исходными константами* a, e *и* m B*-общезначима, если и только если ее перевод* $\mathbf{A}^+$ *Ф-общезначим.*

Доказательство. Для этого докажем предварительно следующее утверждение:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}\dot{\forall}\delta(B(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \varPhi(\mathbf{A}^{+},\delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} \doteqdot SaP$.

$B(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \Leftrightarrow \varPhi(SaP,\delta) \Leftrightarrow \varPhi(SaP^{+},\delta)$.

II. $\mathbf{A} \doteqdot SeP$.

$B(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \varPhi(SeP,\delta) \Leftrightarrow \varPhi(SeP^{+},\delta)$.

III. $\mathbf{A} \doteqdot SmP$.

$B(SmP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \mathbin{\dot{\wedge}} \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \varPhi(SoP,\delta) \mathbin{\dot{\wedge}} \varPhi(SiP,\delta) \Leftrightarrow \varPhi(SoP \wedge SiP,\delta) \Leftrightarrow \varPhi(SmP^{+},\delta)$.

IV. $\mathbf{A} \doteqdot \neg\mathbf{B}$.

$B(\neg\mathbf{B},\delta) \Leftrightarrow \neg B(\mathbf{B},\delta) \Leftrightarrow \neg\varPhi(\mathbf{B}^{+},\delta) \Leftrightarrow \varPhi(\neg(\mathbf{B}^{+}),\delta) \Leftrightarrow \varPhi((\neg\mathbf{B})^{+},\delta)$.

V. $\mathbf{A} \doteqdot \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

$B(\mathbf{B} \supset \mathbf{C},\delta) \Leftrightarrow \neg B(\mathbf{B},\delta) \mathbin{\dot{\vee}} B(\mathbf{C},\delta) \Leftrightarrow \neg\varPhi(\mathbf{B}^{+},\delta) \mathbin{\dot{\vee}} \varPhi(\mathbf{C}^{+},\delta) \Leftrightarrow$
$\varPhi(\mathbf{B}^{+} \supset \mathbf{C}^{+},\delta) \Leftrightarrow \varPhi((\mathbf{B} \supset \mathbf{C})^{+},\delta)$.

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, обосновываются аналогично.

Эквивалентные преобразования в трех базисных пунктах осуществляются на основе определений предикатов B и $\varPhi$ и операции $^{+}$, в индуктивном переходе используется также индуктивное допущение о том, что утверждение леммы верно для формул с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связок.

Из только что доказанного утверждения — $\dot{\forall}\mathbf{A}\dot{\forall}\delta(B(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \varPhi(\mathbf{A}^{+},\delta))$ — по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\dot{\forall}\delta B(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \dot{\forall}\delta\varPhi(\mathbf{A}^{+},\delta))).$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A}$ B-общезначима в том и только в том случае, когда $\varPhi$-общезначима формула $\mathbf{A}^{+}$. $\square$

Докажем теперь метатеорему об адекватности предложенной семантики исчислению **ФСВ** васильевского типа.

Метатеорема 25. *Произвольная формула* **A** *доказуема в исчислении* **ФСВ**, *если и только если формула* **A** B*-общезначима.*

Доказательство. Данная метатеорема является элементарным следствием трех утверждений:

(1) Произвольная формула **A** доказуема в исчислении **ФСВ**, если и только если ее перевод $\mathbf{A}^{+}$ (см. опр. 18) доказуем в исчислении **ФС**;

(2) Произвольная формула **A** B-общезначима (см. опр. 19), если и только если ее перевод $\mathbf{A}^{+}$ является Φ-общезначимым (см. опр. 3);

(3) Для любой формулы **A** языка с исходными константами a, e и m верно, что $\mathbf{A}^{+}$ доказуема в исчислении **ФС**, если и только если $\mathbf{A}^{+}$ Φ-общезначима.

Утверждение (1) справедливо в силу того, что перевод $^{+}$ погружает **ФСВ** в **ФС**. Утверждение (2) доказано выше (**Метатеорема 1**). Утверждение (3) следует из доказанной Шалаком [30] адекватности «синтаксической» интерпретации формул стандартного силлогистического языка системе **ФС**. □

Традиционная силлогистика васильевского типа Система **ФСВ** не является адекватной формализацией ассерторической силлогистики Васильева, поскольку в ней не доказуем один из «законов противоположностей»:

$$\neg(SaP \wedge SeP).$$

Если данный тип формул присоединить к **ФСВ** в качестве дополнительной схемы аксиом, получится исчисление, дедуктивно эквивалентное (равное по классу доказуемых формул) системе **C4B**, предложенной Т.П. Костюк и В.И. Маркиным [15]. При этом схемы **ФСВ8** и **ФСВ9** оказываются излишними, поскольку формулы указанных типов можно доказать с использованием других постулатов **ФСВ** и новой схемы аксиом $\neg(SaP \wedge SeP)$.

Система **C4B**, формализующая силлогистику Васильева с тремя исходными силлогистическими константами, рекурсивно эквивалентна силлогистике

Лукасевича **C4** со стандартными константами, причем опять-таки функцией, погружающей **C4B** в **C4** является перевод $^{+}$, а функцией, погружающей **C4** в **C4B**,— перевод * (см. опр. 18).

Для силлогистики **C4B** также можно построить семантику, в которой атомарные высказывания интерпретируются через отношение следования между формулами пропозициональной логики.

Пусть интерпретирующая функция δ' сопоставляет каждому общему термину некоторую *выполнимую* формулу языка логики высказываний, не содержащую иных связок, кроме $\wedge$, $\vee$ и $\neg$, то есть формула $\neg\delta'(S)$ не доказуема в исчислении высказываний. Понятие значимости силлогистической формулы $\mathbf{A}$ при интерпретации δ' — $B'(\mathbf{A}, \delta')$ — определяется так же, как и двухместный предикат $B(\mathbf{A}, \delta)$ (см. опр. 19), с той лишь разницей, что вместо δ используется δ'. Формула $\mathbf{A}$ называется B'-общезначимой, если и только если $B'(\mathbf{A}, \delta')$ для любой интерпретации δ'.

Напомним, что предложенную Шалаком адекватную «синтаксическую» интерпретацию силлогистики **C4** можно переформулировать аналогичным образом, заменяя в условиях значимости для **ФС** функцию δ, сопоставляющую общему термину *любую* пропозициональную формулу, на функцию δ', сопоставляющую общему термину *выполнимую* пропозициональную формулу. Действуя таким образом вместо предиката значимости Φ (см. опр. 3) получим предикат Φ'.

Метатеорема 26. *Произвольная силлогистическая формула* $\mathbf{A}$ *языка с исходными константами* a, e *и* m B'*-общезначима, если и только если ее перевод* $\mathbf{A}^{+}$ Φ'*-общезначим.*

Доказательство. Воспроизводим доказательство **Метатеоремы 24** меняя B на B', δ на δ', Φ на Φ'. □

Далее можно доказать метатеорему об адекватности предложенной семантики силлогистике **C4B** васильевского типа:

Метатеорема 27. *Произвольная формула* **A** *доказуема в исчислении* **C4B**, *если и только если формула* **A** *B'-общезначима.*

Доказательство. Доказательство осуществляется по тому же плану, что и в **Метатеореме 25**. При этом используются:

(1) результат Костюк и Маркина о погружаемости **C4B** в силлогистику Лукасевича **C4** посредством перевода $^{+}$ (см. [15] и опр. 18);

(2) ранее доказанная **Метатеорема 26**;

(3) результат Шалака о том, что множество Φ'-общезначимых формул совпадает с множеством формул, доказуемых в системе **C4** [30]. □

«Релевантизированная» семантика васильевского типа Для языка силлогистики васильевского типа с исходными константами a, e и m можно предложить и другую семантику, в которой отношение классического следования в условиях значимости формул будет заменено на отношение релевантного следования (в системе **FDE**).

С этой целью введем вместо B новый предикат значимости Y, его определение получается из определения B заменой отношения $\models$ на $\models_{rel}$. Таким образом, условия значимости для атомарных силлогистических формул васильевского языка будут выглядеть следующим образом (для сложных формул они обычные):

Определение 20.

$$Y(SaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P)$$

$$Y(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P)$$

$$Y(SmP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P),$$

где δ – функция, сопоставляющая каждому общему термину *любую* формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg, \wedge, \vee$. Формула **A** будет называться Y-общезначимой, если и только если $\dot\forall\delta Y(\mathbf{A}, \delta)$.

Возникает вопрос, какое аксиоматическое исчисление адекватно формализует класс Y-общезначимых формул. Заметим здесь, что некоторые B-общезначимые формулы (то есть законы системы **ФСВ**) не являются Y-общезначимыми. Например, аксиомы видов **ФСВ8** ($SeS \supset SeP$) и **ФСВ9** ($SeS \supset SaP$) не являются Y-значимыми при следующем δ: $\delta(S) = q \wedge \neg q$, $\delta(P) = r$. Действительно, антецедент этих формул SeS значим, поскольку $q \wedge \neg q \models_{rel} \neg(q \wedge \neg q)$, но оба консеквента — SeP и SaP — не значимы, ведь $q \wedge \neg q \not\models_{rel} \neg r$ и $q \wedge \neg q \not\models_{rel} r$.

Далее мы покажем, что «релевантизированную» семантику васильевского языка аксиоматизирует исчисление **ИФСВ**, которое получается из **ФСВ** отбрасыванием схем аксиом **ФСВ8** и **ФСВ9**. Таким образом, схемами аксиом **ИФСВ** являются:

ИФСВ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

ИФСВ1. $(MaP \wedge SaM) \supset SaP$,

ИФСВ2. $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$,

ИФСВ3. $SeP \supset PeS$,

ИФСВ4. $\neg(SaP \wedge SmP)$,

ИФСВ5. $\neg(SeP \wedge SmP)$,

ИФСВ6. $SaP \vee SeP \vee SmP$,

ИФСВ7. SaS.

Единственное правило вывода прежнее — *modus ponens.*

Далее мы будем устанавливать металогические отношения между исчислением

ИФСВ и системой интенсиональной фундаментальной силлогистики **ИФС**, сформулированной в языке со стандартными константами. Дедуктивные постулаты **ИФС** указаны на странице 22.

Условимся, что $\mathbf{L}$ — множество формул **ИФС**, и $\mathbf{L_B}$ — множество формул **ИФСВ**.

Докажем рекурсивную эквивалентность (взаимопогружаемость) исчислений

ИФСВ и **ИФС**. В качестве погружающих операций будут выступать заданные в начале данного параграфа переводы $^+$ (из $\mathbf{L_B}$ в $\mathbf{L}$) и * (из $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L_B}$).

Метатеорема 28. *Перевод* $^+$ *погружает систему* **ИФСВ** *в систему* **ИФС**, *а перевод* * *погружает систему* **ИФС** *в систему* **ИФСВ**, *т.е.*

$$\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L_B}(\textbf{ИФСВ} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \textbf{ИФС} \vdash \mathbf{A}^+) \text{ и } \dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L}(\textbf{ИФС} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \textbf{ИФСВ} \vdash \mathbf{A}^*).$$

Доказательство. Данная метатеорема будет доказываться с использованием следующего критерия взаимной погружаемости двух исчислений, в основе которого лежит известный критерий погружаемости В.А. Смирнова [29, с. 127]:

«Исчисление $\mathbf{S_1}$ погружается в исчисление $\mathbf{S_2}$ посредством функции ψ_1 (из множества формул $\mathbf{S_1}$ в множество формул $\mathbf{S_2}$), а исчисление $\mathbf{S_2}$ погружается в исчисление $\mathbf{S_1}$ посредством функции ψ_2 (из множества формул $\mathbf{S_2}$ в множество формул $\mathbf{S_1}$), если и только если (1) для каждой формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_1}$ имеет место: $\mathbf{S_1} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{S_2} \vdash \psi_1(\mathbf{A})$, (2) для каждой формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_2}$ имеет место: $\mathbf{S_2} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{S_1} \vdash \psi_2(\mathbf{A})$, (3) для каждой формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_1}$ имеет место: $\mathbf{S_1} \vdash \mathbf{A} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{A}))$, (4) для каждой формулы $\mathbf{A}$ языка $\mathbf{S_2}$ имеет место: $\mathbf{S_2} \vdash \mathbf{A} \equiv \psi_1(\psi_2(\mathbf{A}))$».

1. Докажем, что $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L_B}(\textbf{ИФСВ} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \textbf{ИФС} \vdash \mathbf{A}^+)$.

Используем индукцию по длине доказательства формулы $\mathbf{A}$ в системе **ИФСВ**.

ИФСВ0. Переводы аксиом классического исчисления высказываний являются также пропозициональными тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИФС**.

ИФСВ1. $((MaP \wedge SaM) \supset SaP)^+ = ((MaP \wedge SaM) \supset SaP)$.
$((MaP \wedge SaM) \supset SaP)$ является аксиомой **ИФС1** системы **ИФС**.

ИФСВ2. $((MeP \wedge SaM) \supset SeP)^+ = ((MeP \wedge SaM) \supset SeP)$.
$((MeP \wedge SaM) \supset SeP)$ является аксиомой **ИФС2** системы **ИФС**.

ИФСВ3. $(SeP \supset PeS)^+ = SeP \supset PeS$.

$SeP \supset PeS$ является аксиома **ИФС3** системы **ИФС**.

ИФСВ4. $(\neg(SaP \wedge SmP))^+ = \neg(SaP \wedge SoP \wedge SiP)$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**ИФС6**
2.	$\neg(SoP \wedge SaP)$	1; **ЛВ**
3.	$\neg(SaP \wedge SoP \wedge SiP)$	2; **ЛВ**

ИФСВ5. $(\neg(SeP \wedge SmP))^+ = \neg(SeP \wedge SoP \wedge SiP)$.

1.	$SeP \equiv \neg SiP$	**ИФС5**
2.	$\neg(SeP \wedge SiP)$	1; **ЛВ**
3.	$\neg(SeP \wedge SoP \wedge SiP)$	2; **ЛВ**

ИФСВ6. $(SaP \vee SeP \vee SmP)^+ = SaP \vee SeP \vee (SoP \wedge SiP)$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**ИФС6**
2.	$SaP \vee SoP$	1; **ЛВ**
3.	$SeP \equiv \neg SiP$	**ИФС5**
4.	$SeP \vee SiP$	3; **ЛВ**
5.	$(SaP \vee SoP) \wedge (SeP \vee SiP)$	2, 4; **ЛВ**
6.	$SaP \vee SeP \vee (SoP \wedge SiP)$	5; **ЛВ**

ИФСВ7. $(SaS)^+ = SaS$.

SaS является аксиома **ИФС4** системы **ИФС**.

Modus ponens. Допустим, что $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})^+$ и $\mathbf{A}^+$ доказуемы в **ИФС**. Поскольку $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})^+ = \mathbf{A}^+ \supset \mathbf{B}^+$, то формула $\mathbf{A}^+ \supset \mathbf{B}^+$ является теоремой **ИФС**. Но $\mathbf{A}^+$ тоже теорема этой системы. Следовательно, $\mathbf{B}^+$ доказуема в **ИФС**.

Мы доказали, что $^+$-перевод любой теоремы **ИФСВ** доказуем в **ИФС**.

2. Теперь докажем, что $\dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}$(**ИФС** $\vdash \mathbf{A} \Rightarrow$ **ИФСВ** $\vdash \mathbf{A}^*$).

ИФС0. Переводы аксиом классического исчисления высказываний являются также пропозициональными тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИФСВ**.

ИФС1. $((MaP \wedge SaM) \supset SaP)^* = (MaP \wedge SaM) \supset SaP$

$(MaP \wedge SaM) \supset SaP$ является аксиомой **ИФСВ1** системы **ИФСВ**.

ИФС2. $((MeP \wedge SaM) \supset SeP)^* = (MeP \wedge SaM) \supset SeP$

$(MeP \wedge SaM) \supset SeP$ является аксиомой **ИФСВ2** системы **ИФСВ**.

ИФС3. $(SeP \supset PeS)^* = SeP \supset PeS$

$SeP \supset PeS$ является аксиомой **ИФСВ3** системы **ИФСВ**.

ИФС4. $(SaS)^* = SaS$

SaS является аксиомой **ИФСВ7** системы **ИФСВ**.

ИФС5. $(SeP \equiv \neg SiP)^* = (SeP \equiv \neg\neg SeP)$

$(SeP \equiv \neg\neg SeP)$ является пропозициональной тавтологией, а значит, выводится с использованием **ИФСВ0**.

ИФС6. $(SoP \equiv \neg SaP)^* = (\neg SaP \equiv \neg SaP)$

$(\neg SaP \equiv \neg SaP)$ является пропозициональной тавтологией, а значит, выводится с использованием **ИФСВ0**.

Modus ponens. Обосновывается так же, как в предыдущем пункте.

3. Докажем далее, что $\dot{\forall} \mathbf{A} \in \mathbf{L_B}(\text{**ИФСВ**} \vdash \mathbf{A} \equiv (\mathbf{A}^+)^*)$.

Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SaP$. Тогда $(\mathbf{A}^+)^* = (SaP^+)^* = (SaP)^* = SaP$.

Нужно доказать в **ИФСВ** формулу $SaP \equiv SaP$, которая является пропозициональной тавтологией.

II. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SeP$. Тогда $(\mathbf{A}^+)^* = (SeP^+)^* = (SeP)^* = SeP$.

Нужно доказать в **ИФСВ** формулу $SeP \equiv SeP$, которая тоже является пропозициональной тавтологией.

III. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SmP$. Тогда $(\mathbf{A}^+)^* = (SmP^+)^* = (SiP \wedge SoP)^* = \neg SeP \wedge \neg SaP$.

Нужно доказать в **ИФСВ** формулу $SmP \equiv (\neg SeP \wedge \neg SaP)$.

Слева направо:

1.	$\neg(SaP \wedge SmP)$	**ИФСВ4**
2.	$SmP \supset \neg SaP$	1; ЛВ
3.	$\neg(SeP \wedge SmP)$	**ИФСВ5**
4.	$SmP \supset \neg SeP$	3; ЛВ
5.	$SmP \supset (\neg SeP \wedge \neg SaP)$	2, 4; ЛВ

Справа налево:

1.	$SaP \vee SeP \vee SmP$	**ИФСВ6**
2.	$(\neg SeP \wedge \neg SaP) \supset SmP$	1; ЛВ

При обосновании индуктивного перехода принимаем допущение, что для любой формулы $\mathbf{B}$ из $\mathbf{L_B}$, содержащей меньше пропозициональных связок, чем $\mathbf{A}$, верно, что формула $\mathbf{B} \equiv (\mathbf{B}^+)^*$ доказуема в системе **ИФСВ**.

IV. $\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg\mathbf{B}$

Согласно индуктивному допущению, **ИФСВ** $\vdash \mathbf{B} \equiv (\mathbf{B}^+)^*$. По законам логики высказываний отсюда вытекает: **ИФСВ** $\vdash \neg\mathbf{B} \equiv \neg(\mathbf{B}^+)^*$. По определению переводов $^+$ и *, имеем: $((\neg\mathbf{B})^+)^* = (\neg\mathbf{B}^+)^* = \neg(\mathbf{B}^+)^*$. Следовательно, в **ИФСВ** $\vdash \neg\mathbf{B} \equiv ((\neg\mathbf{B})^+)^*$.

V. $\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$

Согласно индуктивному допущению, **ИФСВ** $\vdash \mathbf{B} \equiv (\mathbf{B}^+)^*$ и **ИФСВ** $\vdash \mathbf{C} \equiv (\mathbf{C}^+)^*$.

Отсюда по законам логики высказываний вытекает, что и формула $(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \equiv ((\mathbf{B}^+)^* \supset (\mathbf{C}^+)^*)$ доказуема в этой системе. Но, по определению переводов $^+$ и *, $((\mathbf{B} \supset \mathbf{C})^+)^* = (\mathbf{B}^+ \supset \mathbf{C}^+)^* = ((\mathbf{B}^+)^* \supset (\mathbf{C}^+)^*)$. Следовательно, **ИФСВ** $\vdash (\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \equiv ((\mathbf{B} \supset \mathbf{C})^+)^*$.

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, рассматриваются сходным образом.

4. Остается доказать, что $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L}($**ИФС** $\vdash \mathbf{A} \equiv (\mathbf{A}^*)^+)$.

Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле $\mathbf{A}$ языка со стандартными силлогистическими константами.

I. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SaP$. Тогда $(\mathbf{A}^*)^+ = (SaP^*)^+ = (SaP)^+ = SaP$.

Нужно доказать в **ИФС** формулу $SaP \equiv SaP$, которая является пропозициональной тавтологией.

II. $\mathbf{A} \doteqdot SeP$. Тогда $(\mathbf{A}^*)^+ = (SeP^*)^+ = (SeP)^+ = SeP$.
Нужно доказать в **ИФС** формулу $SeP \equiv SeP$, которая тоже является пропозициональной тавтологией.

III. $\mathbf{A} \doteqdot SiP$. Тогда $(\mathbf{A}^*)^+ = (SiP^*)^+ = (\neg SeP)^+ = \neg SeP^+ = \neg SeP$.
Надо доказать в **ИФС** формулу $SiP \equiv \neg SeP$.

1. $SeP \equiv \neg SiP$ **ИФС5**
2. $SiP \equiv \neg SeP$ 1; **ЛВ**

IV. $\mathbf{A} \doteqdot SoP$. Тогда $(\mathbf{A}^*)^+ = (SoP^*)^+ = (\neg SaP)^+ = \neg SaP^+ = \neg SaP$.
Надо доказать в **ИФС** формулу $SoP \equiv \neg SaP$. Это аксиома **ИФС6** системы **ИФС**.

Индуктивный переход обосновывается как в предыдущем пункте доказательства. □

Метатеорема 29. *Произвольная силлогистическая формула* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_B}$ Y*-общезначима, если и только если ее перевод* $\mathbf{A}^+$ I*-общезначим.*

Доказательство. Напомним, что предикат значимости I используется для условий истинности для релевантизированной семантики системы **ИФС** (см. опр. 4).

Для этого необходимо сначала доказать следующее утверждение:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}\dot{\forall}\delta(Y(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow I(\mathbf{A}^+,\delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в $\mathbf{A}$.

I. $\mathbf{A} \doteqdot SaP$.
$Y(SaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \Leftrightarrow I(SaP,\delta) \Leftrightarrow I((SaP)^+,\delta)$.

II. $\mathbf{A} \doteqdot SeP$.
$Y(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow I(SeP,\delta) \Leftrightarrow I((SeP)^+,\delta)$.

III. $\mathbf{A} \doteqdot SmP$.

$Y(SmP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \Leftrightarrow I(SoP,\delta) \mathbin{\dot\wedge} I(SiP,\delta) \Leftrightarrow$
$I(SiP \wedge SoP,\delta) \Leftrightarrow I((SmP)^{+},\delta)$.

IV. $\mathbf{A} \doteq \neg\mathbf{B}$.
$Y(\neg\mathbf{B},\delta) \Leftrightarrow \neg Y(\mathbf{B},\delta) \Leftrightarrow \neg I(\mathbf{B}^{+},\delta) \Leftrightarrow I(\neg(\mathbf{B}^{+}),\delta) \Leftrightarrow I((\neg\mathbf{B})^{+},\delta)$.

V. $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.
$Y(\mathbf{B} \supset \mathbf{C},\delta) \Leftrightarrow \neg Y(\mathbf{B},\delta) \mathbin{\dot\vee} Y(\mathbf{C},\delta) \Leftrightarrow \neg I(\mathbf{B}^{+},\delta) \mathbin{\dot\vee} I(\mathbf{C}^{+},\delta) \Leftrightarrow$
$I(\mathbf{B}^{+} \supset \mathbf{C}^{+}),\delta) \Leftrightarrow I((\mathbf{B} \supset \mathbf{C})^{+},\delta)$.

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, рассматриваются аналогично.

Эквивалентные преобразования в трех базисных пунктах осуществляются на основе определений предикатов Y и I и операции $^{+}$, в индуктивном переходе используется также индуктивное допущение о том, что утверждение леммы верно для формул с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связок.

Из только что доказанного утверждения по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot\forall\mathbf{A}(\dot\forall\delta Y(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \dot\forall\delta I(\mathbf{A}^{+},\delta))).$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A}$ Y-общезначима в том и только в том случае, когда I-общезначим ее перевод $\mathbf{A}^{+}$. □

Метатеорема 30. *Для произвольной силлогистической формулы* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_B}$ *верно, что* $\mathbf{A}^{+}$ *доказуема в* **ИФС**, *если и только если* $\mathbf{A}^{+}$ — *I-общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота системы **ИФС** доказаны В.И. Маркиным [24]. Произвольная формула языка $\mathbf{L}$ доказуема в данной системе тогда и только тогда, когда она I-общезначима. Поскольку $^{+}$-перевод любой формулы языка $\mathbf{L_B}$ принадлежит языку $\mathbf{L}$, то указанная равносильность (доказуемости и общезначимости) имеет место и для него. □

Метатеорема 31. *Произвольная формула* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_B}$ *доказуема в исчислении* **ИФСВ**, *если и только если формула* $\mathbf{A}$ *Y-общезначима.*

Доказательство. Согласно **Метатеореме 28**, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A} \in \mathbf{L_B}$ в **ИФСВ** равносильна доказуемости ее перевода $\mathbf{A}^+$ в **ИФС**. Согласно **Метатеореме 30**, доказуемость $\mathbf{A}^+$ в **ИФС** равносильна I-общезначимости $\mathbf{A}^+$. И, согласно **Метатеореме 29**, I-общезначимость $\mathbf{A}^+$ равносильна
Y-общезначимости формулы $\mathbf{A}$. □

Таким образом мы сформулировали семантику для силлогистического языка с исходными константами a, e и m, использующую отношение релевантного следования, и построили адекватную ей аксиоматическую систему силлогистики.

3.2 Логика классов Дж. Венна и её формализация[6]

В первой главе своего фундаментального труда «Символическая логика» [35] Дж. Венн дает достаточно подробное изложение оригинальной логической системы, которую можно охарактеризовать как теорию бинарных отношений между классами. Он выделяет пять базовых отношений между двумя множествами:

1. равенство множеств;
2. строгое включение первого множества во второе;
3. строгое включение второго множества в первое;
4. перекрещивание множеств;
5. несовместимость (внеположенность) множеств.

Каждому из этих отношений соответствует одна из пяти диаграмм Эйлера-Жергонна, которые приведены на Рис.1.

[6] В тексте данного раздела используется материал, опубликованный в [27].

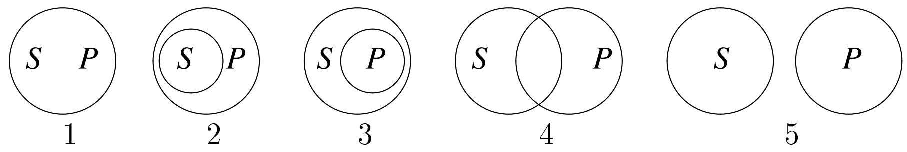

Рис. 1: Диаграммы Эйлера-Жергонна

Венн ставит вопрос о способе выражения каждого из этих отношений в языке. При этом он существенно опирается на классификацию суждений, предложенную У. Гамильтоном, который считал необходимым при определении количественной характеристики категорического высказывания принимать во внимание квантификацию не только субъекта, но и предиката. Если в идущей от Аристотеля традиции категорические суждения делятся по количеству на общие и частные, то в учении Гамильтона, они должны делиться на обще-общие, обще-частные, частно-общие и частно-частные.

Каждое из отношений *1–4* между двумя множествами адекватно выражается одной из четырех разновидностей утвердительных высказываний с квантифицированными субъектами и предикатами, отношение *5* — обще-общим отрицательным высказыванием (которое Венн считает эквивалентным обычному общеотрицательному высказыванию):

1. Все $\boldsymbol{S}$ есть все $\boldsymbol{P}$;

2. Все $\boldsymbol{S}$ есть некоторые $\boldsymbol{P}$;

3. Некоторые $\boldsymbol{S}$ есть все $\boldsymbol{P}$;

4. Некоторые $\boldsymbol{S}$ есть некоторые $\boldsymbol{P}$;

5. Ни один $\boldsymbol{S}$ не есть ни один $\boldsymbol{P}$ (Ни один $\boldsymbol{S}$ не есть $\boldsymbol{P}$).

Далее Венн подробно разбирает силлогизмы первой фигуры, посылками которых являются высказывания этих пяти типов, выделяет среди них корректные и некорректные способы рассуждения.

Таким образом, логическая система Венна может рассматриваться как *силлогистика с нестандартным набором силлогистических констант.* Выбор именно этих констант обусловлен необходимостью репрезентации выделяемых базовых бинарных отношений между классами. Д.В. Дубаков и В.И. Маркин в [8] предложили следующую символическую запись венновских констант: для отношения *1* используется константа $\boldsymbol{aa}$, для отношения *2* — константа $\boldsymbol{ai}$, для отношения *3* — константа $\boldsymbol{ia}$, для отношения *4* — константа $\boldsymbol{ii}$, для отношения *5* — стандартная константа $\boldsymbol{e}$.

При принятии указанных обозначений атомарными формулами силлогистики Венна будут являться выражения видов $\boldsymbol{SaaP}$, $\boldsymbol{SaiP}$, $\boldsymbol{SiaP}$, $\boldsymbol{SiiP}$, $\boldsymbol{SeP}$, где $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{P}$ — общие термины. Если формальную реконструкцию данной логической теории осуществлять в стиле Лукасевича, то есть с использованием в качестве основы классической логики высказываний, то в язык следует также ввести пропозициональные связки и скобки. Сложные формулы задаются при этом обычным способом.

Существует два аксиоматических исчисления, которые могут претендовать на роль современной реконструкции силлогистической логики классов Дж. Венна: система **C4V** Д.В. Дубакова и В.И. Маркина [8] и система **CФV**, построенная Маркиным в [22]. Главное различие между ними в том, что в исчислении **CФV** недоказуемы некоторые из так называемых «законов противоположностей», которые являются теоремами **C4V**:

$$\neg(SaaP \wedge SeP),\ \neg(SaiP \wedge SeP),\ \neg(SiaP \wedge SeP).$$

Причина неоднозначности в выборе адекватной формализации силлогистики Венна, как отмечает Маркин [22], состоит в двойственности позиции самого автора по вопросу о принятии «законов противоположностей». С одной стороны, Венн четко заявляет, что каждому из пяти атомарных суждений соответствует ровна одна диаграмма, и тогда они должны быть попарно противоположными. С другой стороны, он дает такую алгебро-логическую интерпретацию этих суждений, при которой допускаются пустые классы в качестве значений субъектов и предикатов. Но при пустом $\boldsymbol{S}$ высказывания форм $\boldsymbol{SaaP}$ и $\boldsymbol{SeP}$, $\boldsymbol{SaiP}$ и $\boldsymbol{SeP}$ оказываются одновременно истинными, а при пустом $\boldsymbol{P}$ высказывания форм $\boldsymbol{SiaP}$ и $\boldsymbol{SeP}$ также будут вместе истинными. Поэтому реконструкция силлогистики Венна может быть осуществлена в двух вариантах: «традиционном» (с исходной предпосылкой о непустоте терминов) и «фундаментальном» (без данной экзистенциальной предпосылки).

«Традиционный» вариант современной реконструкции силлогистики Венна (как логики бинарных отношений между *непустыми* классами) представляется исчислением **C4V**, схемами аксиом которого наряду с пропозициональными тавтологиями (**V0**) являются:

V1. $(MaaP \wedge SaaM) \supset SaaP$;
V2. $(MaaP \wedge SaiM) \supset SaiP$;
V3. $(MaiP \wedge SaaM) \supset SaiP$;
V4. $(MaiP \wedge SaiM) \supset SaiP$;
V5. $(MeP \wedge SaaM) \supset SeP$;
V6. $(MeP \wedge SaiM) \supset SeP$;
V7. $SaaP \supset PaaS$;
V8. $SaiP \supset PiaS$;
V9. $SiaP \supset PaiS$;
V10. $SiiP \supset PiiS$;
V11. $SeP \supset PeS$;
V12. $SaaS$;
V13. $\neg(SaaP \wedge SaiP)$;
V14. $\neg(SaaP \wedge SiaP)$;
V15. $\neg(SaaP \wedge SiiP)$;
V16. $\neg(SaiP \wedge SiaP)$;
V17. $\neg(SaiP \wedge SiiP)$;
V18. $\neg(SaaP \wedge SeP)$;
V19. $\neg(SiiP \wedge SeP)$;
V20. $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP$.

Единственное правило вывода этого исчисления — *modus ponens*.

При построении «фундаментального» варианта реконструкции силлогистики Венна как логики *любых* (в том числе, и *пустых*) классов, аксиоматика видоизменяется. Постулатами соответствующей системы **ΦCV** являются: правило *modus ponens*, **V0**, схемы аксиом **V1**–**V17**, **V19**–**V20** системы **C4V**, и две дополнительные схемы аксиом:

V21. $SeS \supset SeP$; **V22.** $SeS \supset (SaaP \vee SaiP)$.

Формулы последних двух типов доказуемы в **C4V**, поэтому исчисление **ΦCV** является подсистемой **C4V**.

Дубаков и Маркин показали [8], что исчисление **C4V** рекурсивно эквивалентно системе позитивной фундаментальной силлогистики **C4**, строящейся в языке со стандартными константами, то есть эти исчисления погружаются друг в друга.

Существует перевод υ_1, погружающий систему **C4V** в систему **C4**:

Определение 21.

$$\upsilon_1(SaaP) = SaP \wedge PaS; \qquad \upsilon_1(SiiP) = SiP \wedge SoP \wedge PoS;$$
$$\upsilon_1(SaiP) = SaP \wedge PoS; \qquad \upsilon_1(SeP) = SeP;$$
$$\upsilon_1(SiaP) = SoP \wedge PaS; \qquad \upsilon_1(\neg A) = \neg \upsilon_1(A);$$
$$\upsilon_1(A \nabla B) = \upsilon_1(A) \nabla \upsilon_1(B),$$

Существует также обратный перевод υ_2, погружающий систему **C4** в систему **C4V**:

Определение 22.

$$\upsilon_2(SaP) = SaaP \vee SaiP; \qquad \upsilon_2(SiP) = \neg SeP;$$
$$\upsilon_2(SeP) = SeP; \qquad \upsilon_2(SoP) = \neg SaaP \wedge \neg SaiP;$$
$$\upsilon_2(\neg A) = \neg \upsilon_2(A); \qquad \upsilon_2(A \nabla B) = \upsilon_2(A) \nabla \upsilon_2(B),$$

где ∇ — произвольная бинарная связка.

В [22] Маркин отмечает, что перевод υ_1 погружает также систему **ФCV** (формализующую «фундаментальный» вариант силлогистики Венна) в исчисление **ФC** (со стандартным набором силлогистических констант), а перевод υ_2 погружает **ФC** в **ФCV**. Таким образом, исчисления **ФCV** и **ФC** также являются рекурсивно эквивалентными.

Фундаментальная силлогистика Дж. Венна Сформулируем сначала интенсиональную семантику, в которой высказывания языка силлогистики Венна интерпретируются через отношение классического следования между формулами пропозициональной логики, для системы **ФCV** — формализации «фундаментальной» версии силлогистики Венна.

Пусть δ — функция, сопоставляющая каждому общему термину *любую* формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg, \wedge, \vee$. Зададим предикат V значимости формул языка $\mathbf{\Phi CV}$ при интерпретации δ. Для атомарных формул этот предикат определяется так:

Определение 23.

$$V(SaaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \models \delta(S);$$

$$V(SaiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \not\models \delta(S);$$

$$V(SiaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \models \delta(S);$$

$$V(SiiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(S) \not\models \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \not\models \delta(S);$$

$$V(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P).$$

Для сложных формул условия значимости обычные.

Формула A называется V-общезначимой, если и только если $\dot\forall\delta V(A, \delta)$, то есть A значима при любой интерпретации δ.

Условимся, что $\mathbf{L}$ — множество формул силлогистического языка со стандартными исходными константами a, e, i, o, а $\mathbf{L_V}$ — множество формул языка силлогистики Венна, в котором исходными являются константы aa, ai, ia, ii и e.

Для демонстрации адекватности данной семантики исчислению $\mathbf{\Phi CV}$ необходимо сначала доказать следующую метатеорему:

Метатеорема 32. *Произвольная формула $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ V-общезначима, если и только если ее перевод $\upsilon_1(\mathbf{A})$ Φ-общезначим.*

Доказательство. Обоснуем предварительно следующее утверждение:

$$\dot\forall A \in \mathbf{L_V} \dot\forall\delta(V(A, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(A), \delta)).$$

Будем использовать возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в формуле A.

I. $\mathbf{A} \eqcirc SaaP$.

$V(SaaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \mathbin{\dot\wedge} \delta(P) \models \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP, \delta) \mathbin{\dot\wedge} \Phi(PaS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge PaS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(SaaP), \delta)$.

II. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SaiP$.

$V(SaiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SaP, \delta) \dot{\wedge} \Phi(PoS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(SaP \wedge PoS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(SaiP), \delta)$.

III. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SiaP$.

$V(SiaP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \models \delta(S) \Leftrightarrow \Phi(SoP, \delta) \dot{\wedge} \Phi(PaS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(SoP \wedge PaS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(SiaP), \delta)$.

IV. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SiiP$.

$V(SiiP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models \delta(S)$
$\Leftrightarrow \Phi(SiP, \delta) \dot{\wedge} \Phi(SoP, \delta) \dot{\wedge} \Phi(PoS, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(SiiP), \delta)$.

V. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SeP$.

$V(SeP, \delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models \neg\delta(P) \Leftrightarrow \Phi(SeP, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(SeP), \delta)$.

VI. $\mathbf{A} \rightleftharpoons \neg B$.

$V(\neg B, \delta) \Leftrightarrow \neg V(B, \delta) \Leftrightarrow \neg\Phi(\upsilon_1(B), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\neg\upsilon_1(B), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(\neg B), \delta)$.

VII. $\mathbf{A} \rightleftharpoons B \supset C$.

$V(B \supset C, \delta) \Leftrightarrow \neg V(B, \delta) \dot{\vee} V(C, \delta) \Leftrightarrow \neg\Phi(\upsilon_1(B), \delta) \dot{\vee} \Phi(\upsilon_1(C), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(B) \supset \upsilon_1(C), \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(B \supset C), \delta)$.

Другие случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, обосновываются аналогично.

Экививалентные преобразования в пяти базисных пунктах осуществляются на основе определений предикатов V и Φ и перевода υ_1, в индуктивном переходе используется также индуктивное допущение о том, что утверждение леммы верно для формул с меньшим, чем у $\mathbf{A}$, числом пропозициональных связок.

Из доказанного утверждения — $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}\dot{\forall}\delta(V(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \Phi(\upsilon_1(\mathbf{A}), \delta))$ — по законам первопорядковой логики следует:

$$\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}(\dot{\forall}\delta V(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot{\forall}\delta\Phi(\upsilon_1(\mathbf{A}), \delta)).$$

Последнее означает, что произвольная формула A V-общезначима в том и только в том случае, когда Φ-общезначима формула $\upsilon_1(A)$. □

Докажем теперь метатеорему об адекватности сформулированной выше семантики исчислению **ФCV**.

Метатеорема 33. *Произвольная формула* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ *доказуема в исчислении* **ФCV**, *если и только если* $\mathbf{A}$ *— V-общезначимая формула.*

Доказательство. В.И.Маркин [22] установил, что перевод υ_1 погружает «фундаментальный» вариант силлогистики Венна **ФCV** в стандартную фундаментальную силлогистику **ФC**, то есть

$$(1) \qquad \dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L_V}(\mathbf{\Phi CV} \vdash A \Leftrightarrow \mathbf{\Phi C} \vdash \upsilon_1(\mathbf{A})).$$

Полученный В.И. Шалаком [30] результат свидетельствует о том, что все теоремы **ФC**, и только они, являются $\varPhi$-общезначимыми формулами:

$$(2) \qquad \dot\forall \mathbf{B} \in \mathbf{L}(\mathbf{\Phi C} \vdash \mathbf{B} \Leftrightarrow \dot\forall \delta \varPhi(\mathbf{B}, \delta)).$$

Данная равносильность справедлива и для υ_1-переводов формул из $\mathbf{L_V}$, поскольку эти переводы принадлежат $\mathbf{L}$:

$$(3) \qquad \dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L_V}(\mathbf{\Phi C} \vdash \upsilon_1(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \dot\forall \delta \varPhi(\upsilon_1(\mathbf{A}), \delta)).$$

Согласно доказанной нами ранее **Метатеореме 32**,

$$(4) \qquad \dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L_V}(\dot\forall \delta V(\mathbf{A}, \delta) \Leftrightarrow \dot\forall \delta \varPhi(\upsilon_1(\mathbf{A}), \delta)).$$

Элементарным следствием утверждений (1), (3) и (4) является следующий тезис:

$$(5) \qquad \dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L_V}(\mathbf{\Phi CV} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \dot\forall \delta V(\mathbf{A}, \delta)).$$

Этот тезис означает, что множество теорем **ФCV** равно множеству V-общезначимых формул. □

Традиционная силлогистика Дж. Венна Сформулируем далее адекватную семантику того же самого типа для системы **C4V** — формализации другого, «традиционного» варианта силлогистики Венна, то есть для его логики бинарных отношений между *непустыми* классами.

Вместо интерпретирующей функции δ, сопоставляющей общим терминам *любую* формулу языка логики высказываний, не содержащую иных связок, кроме $\wedge$, $\vee$ и $\neg$, будем использовать функцию δ', которая сопоставляет каждому общему термину некоторую *выполнимую* формулу указанного типа.

Предикат значимости силлогистической формулы $\mathbf{A}$ при интерпретации δ' — $V'(\mathbf{A}, \delta')$ — определяется так же, как и предикат $V(\mathbf{A}, \delta)$, с той лишь разницей, что вместо δ используется δ'. Формула $\mathbf{A}$ называется V'-общезначимой, если и только если $V'(\mathbf{A}, \delta')$ для любой интерпретации δ'.

Напомним, что предложенная Шалаком адекватная семантика системы **C4** со стандартным набором исходных силлогистических констант может быть получена аналогичным образом: заменой в условиях значимости формул системы **ФС** интерпретирующей функции δ на функцию δ'. Действуя таким образом, вместо предиката значимости $\Phi(\mathbf{A}, \delta)$ получим предикат $\Phi'(\mathbf{A}, \delta')$.

Метатеорема 34. *Произвольная формула* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ V'*-общезначима, если и только если ее перевод* $\upsilon_1(\mathbf{A})$ Φ'*-общезначим.*

Доказательство. Воспроизводим доказательство **Метатеоремы 32** меняя V на V', δ на δ', Φ на Φ'. □

Метатеорема 35. *Произвольная формула* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ *доказуема в исчислении* **C4V***, если и только если* $\mathbf{A}$ *—* V'*-общезначимая формула.*

Доказательство. Доказательство осуществляется по тому же плану, что и в **Метатеореме 33**. При этом используются: (1) результат Дубакова и Маркина [8] о том, что υ_1 погружает систему **C4V** в **C4**; (2) результат Шалака [30] о том, что множество теорем **C4** равно множеству V'-общезначимых формул; (3) **Метатеорема 34**. □

«Релевантизированная» семантика языка силлогистики Венна. В предыдущем параграфе мы показали, что логические системы Венна, которые строились им как сугубо экстенсиональные логические теории, имеют адекватные интенсиональные интерпретации в духе Шалака. Можно сделать еще один шаг в «интенсионализации» семантики для силлогистики Венна: использовать в условиях значимости формул из $\mathbf{L_V}$ вместо классического следования релевантное.

Пусть δ — функция, сопоставляющая каждому общему термину произвольную формулу языка классической логики высказываний, не содержащую иных пропозициональных связок, кроме $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, а «$\models_{rel}$» — следование в релевантной логике **FDE**. Определим соответствующий предикат значимости W:

Определение 24.

$$W(SaaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \models_{rel} \delta(S);$$
$$W(SaiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \delta(S);$$
$$W(SiaP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \models_{rel} \delta(S);$$
$$W(SiiP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \not\models_{rel} \neg\delta(P) \dot{\wedge} \delta(S) \not\models_{rel} \delta(P) \dot{\wedge} \delta(P) \not\models_{rel} \delta(S);$$
$$W(SeP,\delta) \Leftrightarrow \delta(S) \models_{rel} \neg\delta(P).$$

Для сложных формул условия значимости обычные.

Формула A называется W-общезначимой, если и только если $\dot{\forall}\delta W(\mathbf{A},\delta)$.

Некоторые теоремы исчисления **ФСV** не являются W-общезначимыми формулами. Адекватное «релевантизированной» семантике исчисление **ИФСV** получается из **ФСV** отбрасыванием схем аксиом **V21** и **V22**. Систему **ИФСV** можно также получить из «традиционной» версии силлогистики Венна — системы **C4V**, исключив из постулатов последней схему аксиом **V18** ($\neg(SaaP \wedge SeP)$).

Докажем, что множество теорем **ИФСV** совпадает с множеством W-общезначимых формул.

Продемонстрируем сначала рекурсивную эквивалентность (взаимную погружаемость) исчислений **ИФСV** и **ИФС**. Погружающими функциями при этом будут заданные в предыдущем разделе переводы υ_1 (из $\mathbf{L_V}$ в $\mathbf{L}$) и υ_2 (из $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L_V}$).

Метатеорема 36. *Перевод* υ_1 *погружает систему* **ИФСV** *в систему* **ИФС**, *а перевод* υ_2 *погружает систему* **ИФС** *в систему* **ИФСV**, *т.е.* $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}(\textbf{ИФСV} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \textbf{ИФС} \vdash \upsilon_1(\mathbf{A}))$ *и* $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L}(\textbf{ИФС} \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \textbf{ИФСV} \vdash \upsilon_2(\mathbf{A}))$.

Доказательство. Данная метатеорема будет также доказываться с использованием критерия взаимной погружаемости двух исчислений, в основе которого лежит критерий погружаемости В.А. Смирнова [29, с. 127].

1. Докажем, что $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}(\textbf{ИФСV} \vdash A \Rightarrow \textbf{ИФС} \vdash \upsilon_1(\mathbf{A}))$.

Используем возвратную индукцию по длине доказательства формулы A в исчислении **ИФСV**. Необходимо показать, что υ_1-переводы всех аксиом **ИФСV** доказуемы в **ИФС**, а также что правило *modus ponens* «сохраняет» доказуемость в **ИФС** υ_1-переводов формул из $\mathbf{L_V}$.

V0. Переводы классических тавтологий также являются тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИФС**.

V1. $\upsilon_1((MaaP \wedge SaaM) \supset SaaP) = ((MaP \wedge PaM) \wedge (SaM \wedge MaS)) \supset (SaP \wedge PaS)$.

V2. $\upsilon_1((MaaP \wedge SaiM) \supset SaiP) = ((MaP \wedge PaM) \wedge (SaM \wedge MoS)) \supset (SaP \wedge PoS)$.

V3. $\upsilon_1((MaiP \wedge SaaM) \supset SaiP) = ((MaP \wedge PoM) \wedge (SaM \wedge MaS)) \supset (SaP \wedge PoS)$.

V4. $\upsilon_1((MaiP \wedge SaiM) \supset SaiP) = ((MaP \wedge PoM) \wedge (SaM \wedge MoS)) \supset (SaP \wedge PoS)$.

V5. $\upsilon_1((MeP \wedge SaaM) \supset SeP) = (MeP \wedge (SaM \wedge MaS)) \supset SeP$.

V6. $\upsilon_1((MeP \wedge SaiM) \supset SeP) = (MeP \wedge (SaM \wedge MoS)) \supset SeP$.

V7. $\upsilon_1(SaaP \supset PaaS) = (SaP \wedge PaS) \supset (PaS \wedge SaP)$.

V8. $\upsilon_1(SaiP \supset PiaS) = (SaP \wedge PoS) \supset (PoS \wedge SaP)$.

V9. $\upsilon_1(SiaP \supset PaiS) = (SoP \wedge PaS) \supset (PaS \wedge SoP)$.

V10. $\upsilon_1(SiiP \supset PiiS) = (SiP \wedge SoP \wedge PoS) \supset (PiS \wedge PoS \wedge SoP)$.

V11. $\upsilon_1(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$.

V12. $\upsilon_1(SaaS) = SaS \wedge SaS$.

V13. $\upsilon_1(\neg(SaaP \wedge SaiP)) = \neg((SaP \wedge PaS) \wedge (SaP \wedge PoS))$.

V14. $\upsilon_1(\neg(SaaP \wedge SiaP)) = \neg((SaP \wedge PaS) \wedge (SoP \wedge PaS))$.

V15. $\upsilon_1(\neg(SaaP \wedge SiiP)) = \neg((SaP \wedge PaS) \wedge (SiP \wedge SoP \wedge PoS))$.

V16. $\upsilon_1(\neg(SaiP \wedge SiaP)) = \neg((SaP \wedge PoS) \wedge (SoP \wedge PaS))$.

V17. $\upsilon_1(\neg(SaiP \wedge SiiP)) = \neg((SaP \wedge PoS) \wedge (SiP \wedge SoP \wedge PoS))$.

V19. $\upsilon_1(\neg(SiiP \wedge SeP)) = \neg((SiP \wedge SoP \wedge PoS) \wedge SeP)$.

V20. $\upsilon_1(SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP) = (SaP \wedge PaS) \vee (SaP \wedge PoS) \vee (SoP \wedge PaS) \vee (SiP \wedge SoP \wedge PoS) \vee SeP$.

В работе [8] приведены доказательства в исчислении **C4** перечисленных υ_1-переводов аксиом системы **ИФСV**, причем в этих доказательствах используются лишь те постулаты **C4**, которые принимаются в этом же качестве и в ее подсистеме **ИФС**.

Modus ponens. Допустим, что $\upsilon_1(\mathbf{A} \supset B)$ и $\upsilon_1(\mathbf{A})$ доказуемы в **ИФС**. Поскольку $\upsilon_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) = \upsilon_1(\mathbf{A}) \supset \upsilon_1(B)$, то $\upsilon_1(\mathbf{A}) \supset \upsilon_1(\mathbf{B})$ является теоремой **ИФС**. Но $\upsilon_1(\mathbf{A})$ тоже теорема этой системы. Следовательно, $\upsilon_1(\mathbf{B})$ доказуема в **ИФС**.

2. Докажем, что $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L}(\text{ИФС} \vdash \mathbf{A} \Rightarrow \text{ИФСV} \vdash \upsilon_2(\mathbf{A}))$.

Используем тот же метод, что и в пункте (a).

A0. Переводы классических тавтологий также являются тавтологиями и поэтому доказуемы в **ИФСV**.

A1. $\upsilon_2((MaP \wedge SaM) \supset SaP) = ((MaaP \vee MaiP) \wedge (SaaM \vee SaiM)) \supset (SaaP \vee SaiP)$.

Доказывается в **ИФСV** с использованием аксиом **V1**–**V4**.

A2. $\upsilon_2((MeP \wedge SaM) \supset SeP) = (MeP \wedge (SaaM \vee SaiM)) \supset SeP$.

Доказывается в **ИФСV** с использованием аксиом **V5**–**V6**.

A3. $\upsilon_2(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$.

$SeP \supset PeS$ является аксиомой **V11** системы **ИФСV**.

A4. $\upsilon_2(SaS) = SaaS \vee SaiS$.

Выводится из аксиомы **V12** системы **ИФСV**.

A7. $\upsilon_2(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \equiv \neg\neg SeP)$;

A8. $\upsilon_2(SoP \equiv \neg SaP) = ((\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \equiv \neg(SaaP \vee SaiP))$.
Формула $((\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \equiv \neg(SaaP \vee SaiP))$ является классической тавтологией и выводится из **ИФСV0**.

Modus ponens. Обосновывается так же, как в предыдущем пункте.

3. Докажем, что $\dot{\forall} A \in \mathbf{L_V}($**ИФСV** $\vdash (A \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(A)))$.

Доказательство ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Пусть **A** — атомарная формула одного из пяти типов.

I. $\mathbf{A} \risingdotseq SaaP$: $\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{A})) = \upsilon_2(SaP \wedge PaS) = (SaaP \vee SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS)$.

II. $\mathbf{A} \risingdotseq SaiP$: $\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{A})) = \upsilon_2(SaP \wedge PoS) = (SaaP \vee SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS)$.

III. $\mathbf{A} \risingdotseq SiaP$: $\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{A})) = \upsilon_2(SoP \wedge PaS) = (\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS)$.

IV. $\mathbf{A} \risingdotseq SiiP$: $\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{A})) = \upsilon_2(SiP \wedge SoP \wedge PoS)) = \neg SeP \wedge (\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS))$.

V. $\mathbf{A} \risingdotseq SeP$: $\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{A})) = \upsilon_2(SeP) = SeP$.

Таким образом, необходимо доказать в **ИФСV** следующие теоремы:
$SaaP \equiv ((SaaP \vee SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS))$;
$SaiP \equiv ((SaaP \vee SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS))$;
$SiaP \equiv ((\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (PaaS \vee PaiS))$;
$SiiP \equiv (\neg SeP \wedge (\neg SaaP \wedge \neg SaiP) \wedge (\neg PaaS \wedge \neg PaiS))$;
$SeP \equiv SeP$.

В работе [8] приведены доказательства указанных формул в исчислении **C4V**, причем в доказательствах не используется схема аксиом **V18**, а значит эти формулы доказуемы и в системе **ИФСV**.

В тех случаях, когда **A** есть сложная формула, принимаем допущение, что для любой формулы **B**, содержащей меньше пропозициональных связок, чем A, верно, что $\mathbf{B} \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B}))$ доказуема в системе **ИФСV**.

Пусть $\mathbf{A} \risingdotseq \neg\mathbf{B}$. Согласно индуктивному допущению, **ИФСV** $\vdash \mathbf{B} \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B}))$. По законам логики высказываний отсюда вытекает: **ИФСV** $\vdash \neg\mathbf{B} \equiv \neg\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B}))$. По определению переводов υ_1 и υ_2, имеем: $\upsilon_2(\upsilon_1(\neg\mathbf{B})) =$

$\upsilon_2\neg(\upsilon_1(\mathbf{B})) = \neg\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B})))$. Следовательно, в **ИФСV** доказуема формула $\neg\mathbf{B} \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(\neg\mathbf{B}))$.

Пусть $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$. Согласно индуктивному допущению, **ИФСV** $\vdash \mathbf{B} \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B}))$ и **ИФСV** $\vdash \mathbf{C} \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{C}))$. Отсюда по законам логики высказываний вытекает, что и формула $(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \equiv (\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B})) \supset \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{C})))$ доказуема в этой системе. Но $\upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) = \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B}) \supset \upsilon_1(\mathbf{C})) = \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B})) \supset \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{C}))$. Следовательно, **ИФСV** $\vdash (B \supset \mathbf{C}) \equiv \upsilon_2(\upsilon_1(\mathbf{B} \supset \mathbf{C}))$.

Остальные случаи, когда $\mathbf{A}$ есть сложная формула, рассматриваются сходным образом.

4. Докажем, что $\dot{\forall}\mathbf{A} \in \mathbf{L}($**ИФС** $\vdash (\mathbf{A} \equiv \upsilon_1(\upsilon_2(\mathbf{A}))))$.

Снова используем возвратную индукцию по числу пропозициональных связок в формуле A.

Сначала рассмотрим четыре случая, когда $\mathbf{A}$ — атомарная формула. Если $\mathbf{A} \doteq SaP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(\mathbf{A})) = \upsilon_1(SaaP \vee SaiP) = ((SaP \wedge PaS) \vee (SaP \wedge PoS))$. Если $\mathbf{A} \doteq SeP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(\mathbf{A})) = \upsilon_1(SeP) = SeP$. Если $\mathbf{A} \doteq SiP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(\mathbf{A})) = \upsilon_1(\neg SeP) = \neg\upsilon_1(SeP) = \neg SeP$. Если $\mathbf{A} \doteq SoP$, то $\upsilon_1(\upsilon_2(\mathbf{A})) = \upsilon_1(\neg SaaP \wedge \neg SaiP) = (\neg(SaP \wedge PaS) \wedge \neg(SaP \wedge PoS))$.

Таким образом, необходимо доказать в **ИФС** следующие теоремы:

$SaP \equiv ((SaP \wedge PaS) \vee (SaP \wedge PoS))$;

$SeP \equiv SeP$;

$SiP \equiv \neg SeP$;

$SoP \equiv (\neg(SaP \wedge PaS) \wedge \neg(SaP \wedge PoS))$.

В работе [8] приведены доказательства перечисленных формул с использованием схем **A0**, **A7**, **A8** и правила *modus ponens*. Эти дедуктивные средства входят в число постулатов **ИФС**, поэтому указанные формулы являются теоремами данной системы.

Индуктивный переход обосновывается аналогично пункту 3.

Обосновав утверждения 1–4, мы продемонстрировали взаимную погружаемость силлогистик **ИФСV** и **ИФС**. □

Метатеорема 37. *Произвольная формула* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ *W-общезначима, если и только если ее перевод* $\upsilon_1(\mathbf{A})$ *I-общезначим.*

Доказательство. Доказательство данной метатеоремы аналогично доказательству **Метатеоремы 32**.

Предварительно обосновывается следующее утверждение:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}\dot{\forall}\delta(W(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow I(\upsilon_1(\mathbf{A}),\delta).$$

Воспроизводим соответствующую часть доказательства **Метатеоремы 32**, меняя предикат значимости V на W, предикат значимости Φ на I, классическое следование на релевантное.

Из данной леммы по законам первопорядковой логики получаем:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\dot{\forall}\delta W(\mathbf{A},\delta) \Leftrightarrow \dot{\forall}\delta I(\upsilon_1(\mathbf{A}),\delta)).$$

Последнее означает, что произвольная формула $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ W-общезначима в том и только в том случае, когда I-общезначима $\upsilon_1(\mathbf{A})$. □

Метатеорема 38. *Для произвольной формулы* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ *верно, что* $\upsilon_1(\mathbf{A})$ *доказуема в* **ИФС**, *если и только если* $\upsilon_1(\mathbf{A})$ *— I-общезначимая формула.*

Доказательство. Семантические непротиворечивость и полнота силлогистики **ИФС** относительно «релевантизированной» семантики доказаны В.И. Маркиным [23]. Произвольная формула из $\mathbf{L}$ доказуема в данной системе, если и только если она I-общезначима. Поскольку перевод υ_1 любой формулы «венновского» языка из $\mathbf{L_V}$ принадлежит множеству формул стандартного языка $\mathbf{L}$, то указанная равносильность (доказуемости в **ИФС** и I-общезначимости) имеет место и для него. □

Метатеорема 39. *Произвольная формула* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ *доказуема в* **ИФСV**, *если и только если A W-общезначима.*

Доказательство. Согласно **Метатеореме 36**, доказуемость произвольной формулы $\mathbf{A} \in \mathbf{L_V}$ в системе **ИФСV** равносильна доказуемости ее перевода

$\upsilon_1(\mathbf{A})$ в системе **ИФС**. Согласно **Метатеореме 38**, доказуемость $\upsilon_1(\mathbf{A})$ в **ИФС** равносильна I-общезначимости $\upsilon_1(\mathbf{A})$. И, согласно **Метатеореме 37**, I-общезначимость $\upsilon_1(\mathbf{A})$ равносильна W-общезначимости формулы A. □

В заключение, сравним три рассмотренных нами системы силлогистики в языке с исходными константыми aa, ai, ia, ii и e по их дедуктивной силе.

Системы **C4V**, **ФCV** и **ИФCV** очень близки по классам тех силлогистических принципов, которые являются законами этих систем. В этом язык силлогистики Венна серьезно отличается от стандартного силлогистического языка, где переход от «традиционной» к «фундаментальной» версии силлогистики сопровождается отказом от многих известных законов: девяти модусов простого категорического силлогизма, закона обращения для высказываний типа a, многих умозаключений по логическому квадрату и др.

В каждом из исчислений **C4V**, **ФCV** и **ИФCV** доказуемы:

- 52 модуса категорического силлогизма (по 13 в каждой фигуре);
- одни и те же законы обращения;
- закон силлогистического тождества $SaaS$;
- закон «исключенного шестого» $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP$;
- семь из десяти «законов противоположностей» вида $\neg(SyP \wedge SqP)$, где y и q — различные константы из множества $\{aa, ai, ia, ii, e\}$.

Имеются однако и различия между указанными системами.

Только в **C4V** доказуемы три «закона противоположностей»: $\neg(SaaP \wedge SeP)$,
$\neg(SaiP \wedge SeP), \neg(SiaP \wedge SeP)$.
Только в системе **C4V** доказуем аналог «слабого» закона силлогистического тождества: $\neg SeS$.
В системе **ФCV** доказуемы ослабления этого закона: $SeS \supset SeP$, $SeS \supset (SaaP \vee SaiP)$.

А в «релевантизированной» версии «фундаментального» варианта силлогистики Венна **ИФСV** не доказуемы и они.

Заключение

Идея интенсиональной трактовки категорических высказываний, восходящая к логическим исследованиям Г. Лейбница, нашла свое отражение в современных исследованиях силлогистических систем. Как было показано, существует множество возможных трактовок и семантических построений силлогистик, основанных не на объемных, а на содержательных отношениях между понятиями.

Мы показали, что интенсиональный подход к силлогистическим семантикам, хоть и является относительно новым в истории символической логики, но его развитие имеет большой потенциал: то, что изначально рассматривалось как одна из идей Лейбница, может стать отдельным направлением в исследованиях по силлогистике.

Действительно, применяя данный подход, можно не только строить интенсиональные семантики для уже известных экстенсиональных вариантов силлогистических систем, но и получать новые системы, для которых экстенсиональная семантика и вовсе не сформулирована. Для этого в некоторых случаях при формулировке условий истинности формул потребовалось использование аппарата неклассических логик.

Во Введении были обозначены цель и задачи исследования. Основной целью исследования было поставлено развитие интенсионального подхода к построению силлогистических теорий, и для ее достижения было выделено пять задач, решение которых требовало предварительного анализа существующих исследований по данной тематике.

Для этого в первой главе, посвященной различию экстенсионального и интенсионального подходов в силлогистике, рассматривались уже существующие силлогистические теории (фундаментальная и традиционная силлогистики, система **C2** и силлогистика Больцано), выделялись их особенности. Здесь же приводились их экстенсиональные семантики, то есть семантики, основанные на отношениях между объемами субъекта и предиката атрибутивных высказываний. В силу большого количества исследований и исторической распространенности данного подхода к трактовке семантик силлогистики был сделан упор на те системы, которые анализируются в дальнейшем.

Далее в первой главе представлялась особая — интенсиональная — интерпретация категорических суждений, восходящая еще к работам Лейбница, и показывались различные, уже существующие, формализации такого подхода: В.И. Маркина, К. Гласхофа, В.Н. Брюшинкина.

Одной из задач исследования было выделено сравнение интенсионального варианта воображаемой логики Н.А. Васильева и традиционной силлогистики. Решение этой задачи приведено в первой главе. Совместно с А.В. Коньковой было доказано, что системы **IL2**, которая является формализацией фрагмента воображаемой логики Васильева, в действительности является консервативным расширением системы традиционной силлогистики **C4**.

Наконец, был проведен обзор наиболее интересного для данного исследования подхода В.И. Шалака («синтаксического»), который подразумевает интерпретацию силлогистических констант в терминах отношения логической выводимости и который был позже развит В.И. Маркиным, заменившим это отношение на отношение логического следования. Было показано, что подход В.И. Шалака можно рассматривать как развитие интенсиональной интерпретации силлогистики. Главное внимание было уделено вопросу о возможности замены классического отношения следования в определениях значимости силлогистических констант на релевантное, но были рассмотрены и варианты других следований — следование в логике Хао Вана и следование в логике, двойственной логике Хао Вана. Было выдвинуто предположение о том, что в случае с первым следованием класс аксиом полученной системы совпадает с классом аксиом системы **ФС**, а со вторым — с классом аксиом **ИФС**, и приведены убедительные аргументы в пользу справедливости этой гипотезы.

В работе были предложены «синтаксические» семантики с классическим следованием для ряда систем силлогистики. Так, во второй главе рассматривались системы **C2** и силлогистика Больцано. Для них были построены семантики с использованием отношения логического следования, что также являлось одной из задач исследования. Продемонстрирована адекватность этих семантик соответствующим силлогистическим исчислениям. Для этого были доказаны метатеоремы о непротиворечивости и полноте аксиоматических исчислений относительно семантик.

В третьей главе рассматривались системы с нестандартным набором силлогистических констант, а именно силлогистика васильевского типа (с тремя константами) и логика классов Дж. Венна (с пятью константами). В отношении данных систем также были решены все поставленные задачи, а именно предложены интенсиональные семантики с использованием отношения классического и релевантного следования для формулировки определений значимости силлогистических констант, построены аксиоматические исчисления, которые адекватно формализуют семантики с релевантным следованием. Была доказана и адекватность предложенных семантик соответствующим исчислениям. Попутно доказано, что силлогистики **ИФСВ** (интенсиональная силлогистика васильевского типа) и **ИФСV** (интенсиональная силлогистика Венна) в языках с нестандартными константами рекурсивно эквивалентны системе **ИФС** (интенсиональной фундаментальной силлогистике), строящейся в стандартном силлогистическом языке.

Проведенное исследование показывает, что различные силлогистические системы, не только фундаментальную и традиционную силлогистику, а, например, систему **C2** (которая является современной формализацией силлогистики Аристотеля), силлогистику Больцано, даже системы с нестандартными наборами силлогистических констант, можно интерпретировать в интенсиональном ключе. Это позволяет показать отличия условий истинности, которые сформулированы в интенсиональных терминах следования, от стандартных, сформулировать более сложные, уточненные условия значимости.

Данный подход является перспективным, и можно выделить несколько направлений его развития. В частности, открытой остается проблема, описанная в разделе 2.1, относительно построения адекватной семантики с релевантным следованием для системы $\mathbf{ИФС}_2$. Аналогичная проблема является нерешенной и для некоторых других известных систем силлогистики. Еще одно направление в развитии данного подхода предложено Маркиным в [26] Идея состоит в том, чтобы объединить экстенсиональные и интенсиональные трактовки атрибутивных высказываний в одной логической теории. При этом экстенсиональные условия истинности будут относиться к ассерторическим (фактофиксирующим) высказываниям, а интенсиональные условия истинности — к модальным.

Список литературы

[1] *Аристотель.* Собрание сочинений в 4 Т. Т. 2 — М.: Мысль. 1978.

[2] *Бежанишвили М.Н., Мчедлишвили Л.И.* Позитивная силлогистика и логика предикатов // Логика Аристотеля. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985.

[3] *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. — М.: Прогресс–Традиция, 2010.

[4] *Брюшинкин В.Н.* Кант и силлогистика. Некоторые размышления по поводу «Ложного мудрствования в четырех фигурах силлогизма» // Кантовский сборник. Вып. 11. Калининград, 1986. С. 29–39.

[5] *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. — М.: Наука, 1989.

[6] *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. — М.: Изд-во МГУ, 1988.

[7] *Войшвилло Е.К.* Понятие как форма мышления. Логико-гносеологический анализ. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.

[8] *Дубаков Д.В., Маркин В.И.* Система силлогистики с исходными константами, соответствующими круговым диаграммам. Труды научно-исследовательского семинара Логического центра ИФ РАН. Вып. XVIII. 2007. С. 63–75.

[9] *Зайцев Д. В., Маркин В. И.* Воображаемая логика-2: реконструкция одного из вариантов знаменитой логической системы Н.А. Васильева // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. 1999. Вып. 13. С. 134–142.

[10] *Кант И.* Критика чистого разума. — М.: Издательство «Э», 2016.

[11] *Кант И.* Собрание сочинений в 8 Т. Т. 2 — М.: Издательство «Чоро», 1994.

[12] *Лейбниц Г.В.* Сочинения в 4 Т. — М.: Мысль, 1982–1989.

[13] *Конькова А.В.* Воображаемая логика-2 Н.А. Васильева как силлогистическая теория // Логические исследования. 2019. Т. 25. № 2 С. 94–113.

[14] *Конькова А.В., Легейдо М.М.* Об интересной связи между традиционной силлогистикой и воображаемой логикой // Двенадцатые Смирновские чтения: материалы Международной научной конференции, Москва, 24–26 июня 2021 г. Русское общество истории и философии науки. Москва. 2021. С. 188–192.

[15] *Костюк Т.П., Маркин В.И.* Проблема реконструкции ассерторической силлогистики Н.А. Васильева // Международная конференция «Смирновские чтения». М.: ИФ РАН. 1997.

[16] *Кузнецов В.Г.* Интенсиональная силлогистика Г.В. Лейбница и ее роль в истории логики // Вестник Московского Университета. Серия 7: Философия. 2017. № 3, С. 3–18.

[17] *Легейдо М.М.* Интенсиональные семантики для некоторых систем позитивной силлогистики // Логические исследования. 2021. Т. 27. № 2. С. 9–30.

[18] *Легейдо М.М., Конькова А.В.* Об интересной связи между традиционной силлогистикой и воображаемой логикой // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2022. № 70. С. 48–58.

[19] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959.

[20] *Маркин В.И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. 2016. Вып. 8. С. 82–91.

[21] *Маркин В.И.* Интенсиональная семантика для систем позитивной силлогистики // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003. С. 166–174.

[22] *Маркин В.И.* Формальные реконструкции силлогистики Венна. // Вестник Московского университета. Серия 7: Философия. 2011. №1. С. 63–73.

[23] *Маркин В.И.* Интерпретация категорических высказываний в терминах релевантного следования // Логические исследования. 2016. Т. 22. №1. С. 70-81.

[24] *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика и релевантное следование // Логико-философские штудии. 2016. Т. 14. С. 36–45.

[25] *Маркин В.И.* Семантика позитивных силлогистик и релевантное следование // Логико-философские штудии. 2016. Т. 13, №2. С. 34–39.

[26] *Маркин В.И.* Силлогистика фактических объемов и логических содержаний понятий // Десятые Смирновские чтения: материалы Международной научной конференции, Москва, 15–17 июня 2017 г. М.: Современные тетради, 2017. С. 90–94.

[27] *Маркин В.И., Легейдо М.М.* Интенсиональная семантика логики классов Дж. Венна // Логические исследования. 2019. Т. 25. №2. С. 114–137.

[28] *Смирнов В.А.* Логические идеи Н.А. Васильева и современная логика // Н.А. Васильев. Воображаемая логика. — М.: Наука, 1989.

[29] *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.

[30] *Шалак В.И.* Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // Логические исследования. 2015. Т. 21, №1, С. 6–78.

[31] *Glashoff K.* An Intensional Leibniz Semantics for Aristotelian Logic // The Review of Symbolic Logic, 2010. № 3(2). P. 262–272.

[32] *Konkova A., Legeydo M.* Intensional Semantics for Syllogistics: What Leibniz and Vasiliev Have in Common // Logic and Logical Philosophy. 2022. Vol. 31. № 2. P. 339–356.

[33] *Lenzen W.* Zur extensionalen und "intensionalen" interpretationen der Leibnizschen logic // Studia Leibnitiana. 1983. № 15. S. 129–148.

[34] *Van Rooij R.* Leibnizian Intensional Semantics for Syllogistic Reasoning // Recent Trends in Philosophical Logic. Springer International Publishing. Switzerland. 2014. P. 179–194.

[35] *Venn J.* Symbolic Logic. London: Macmillan and Co., 1881.