ОТЗЫВ официального оппонента
на (о) диссертацию(и) на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Денисова Константина Юрьевича
на тему: «Большие нижние локальные уклонения ветвящихся процессов в случайной среде»
по специальности 1.1.4. – теория вероятностей и математическая статистика

Изучение поведения ветвящихся процессов является важной задачей теории вероятностей. Они служат моделями многообразных природных процессов, а соответствующие результаты имеют широкое применение в различных областях науки и техники. В частности, они описывают изменения во времени численности различных популяций в биологии и числа частиц в физике. Сначала рассматривались модели с неизменным во времени распределением числа потомков отдельной частицы, что часто не отражало практическую ситуацию из-за изменения окружающей среды. Это привело к появлению более сложных моделей ветвящихся процессов в случайной среде. К настоящему моменту имеется значительное число различных результатов для них. Сейчас продолжаются их активные исследования, а получение новых результатов представляет существенный интерес.

Исследование асимптотического поведения вероятностей больших уклонений сумм независимых и зависимых случайных величин и случайных процессов играет важную роль в теории вероятностей и математической статистике. Результаты о больших уклонениях интересны и сами по себе, и как важный инструмент при доказательстве сильных предельных теорем, в частности, законов больших чисел и законов повторного логарифма. Получение новых результатов в этом направлении является важной и актуальной задачей теории вероятностей и математической статистики. При этом различают результаты о логарифмической и точной асимптотике больших уклонений. Результаты о точной асимптотике доказывать значительно сложнее.

Настоящая диссертация посвящена исследованию асимптотики вероятностей больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде. С учетом вышеизложенного избранная тема диссертации актуальна.

В работе получены новые результаты о точной асимптотике локальных вероятностей больших уклонений $P(Z_n = [ex\,p\{\theta n\}])$, где $\{Z_n\}$ – ветвящийся процесс в случайной среде с геометрическими распределениями чисел потомков. При этом были исследованы нижние ($\theta < \mu$) большие уклонения для надкритических процессов и верхние ($\theta > \mu$) большие уклонения для надкритических, критических и докритических (умеренно и, частично, строго) процессов. Здесь μ – среднее случайных величин, образующих сопровождающее случайное блуждание. Полученные результаты новы, интересны и опубликованы в четырех статьях (без соавторов).

По работе можно сделать следующие замечания.

В диссертации рассматриваются только процессы с геометрическими распределениями чисел потомков. Это связано с использованием имеющихся результатов об условном распределении числа потомков в n-ом поколении при фиксированных первых n случайных величинах, формирующих случайную среду. Это условное распределение представляет собой довольно сложную функцию от суммы сопровождающих случайных величин (формулы (2.2) и (2.15)). Асимптотика математического ожидания этой функции совпадает с асимптотикой исследуемых вероятностей. Отмечу, что отыскание этой асимптотики представляет довольно сложную задачу. Фактически, в работе исследовано поведение некоторых функционалов от случайных блужданий. И возникает следующий вопрос. Можно ли сначала получить аналогичные результаты для более широкого класса подобных функционалов, а потом переходить к случайным процессам, условные распределения которых определяются через функции от случайных блужданий? Полагаю, что такой подход привел бы к какому-то более широкому классу случайных процессов.

Леммы 2 и 3 главы 1 не содержат результатов о больших уклонениях экспоненциальных функционалов от случайных блужданий, скорее речь идет о предельных распределениях. Поэтому название главы не совсем точное. Кроме того, если бы в диссертации использовался указанный мной подход, леммы 2 и 3 не выглядели бы техническими.

Условие Крамера на стр. 10 лучше сформулировать в виде: $h^+ = sup\{ h: R(h) < \infty\} > 0$ и $h^- = inf\{h: R(h) < \infty\} < 0$.

На стр. 26-27 при определении надкритических процессов предполагается $h^- < -1$. Но на стр. 28 во 2-й строке сверху $h^- \geq -1$.

Автор вводит разделение на первую и вторую зону больших уклонений. Он мотивирует это на стр. 27 результатом теоремы 4 при $h^- < -1$. Однако формулировка теоремы 4 станет единой, если определить функцию уклонений как преобразование Лежандра от логарифма производящей функции моментов: $\Lambda(\theta) = \sup\limits_{h\geq -1}\{ h\theta - ln\, R\,(h)\}$. (Из-за вида рассматриваемой функции от сопровождающего блуждания нужно брать супремум по $h \in (-1,0)$.) В этом случае при $\theta \leq m(-1)$ функция под супремумом станет монотонной и супремум совпадет с $-\theta - ln\, R\,(-1)$. Кроме того, аналогичное переопределение функции уклонений с заменой $h\,\theta$ на $(h+1)\,\theta$ приведет к тому, что $e^{-\Lambda(\theta)n-n\theta}$из асимптотики в теореме 5 и $R^n(-1)$ из асимптотики теоремы 6 станут частями одной формулы.

Отличие двух упомянутых мной выше определений функции уклонений в теоремах 4 и 5 появится из-за того, что в формуле (2.15) есть множитель $U_n = e^{-S_n}$, а в ее аналоге для теоремы 4 этого множителя не будет. Поэтому в интеграле по распределению S_n в доказательстве теоремы 4 на стр. 31 возникает дополнительный множитель e^{-x}, который при переходе к сопряженным распределениям даст $h+1$ в определении функции уклонений. Условие $h \geq -1$ при этом нужно для существования рассматриваемых интегралов.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4. -теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Денисов К.Ю. заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. -теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории вероятностей и
математической статистики
математико-механического факультета
ФГБОУ высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»
ФРОЛОВ Андрей Николаевич

[redacted]

28.01.2025

Контактные данные:

тел.: +7(911)2522405, e-mail: a.frolov@spbu.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.05-теория вероятностей и математическая статистика

Личную подпись [redacted]
заверяю
И.О. начальника отде[redacted]
И.И. Константинова [redacted]
28.01.2025

Адрес места работы:

198504, (Санкт-Петербург) г. _Санкт-Петербург, Старый Петергоф,
_Университетский проспект, д. 28,
Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет
Тел.: +7(812) 3636233; e-mail: decanat@math.spbu.ru