МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.925.75+517.956.226

Емельянов Дмитрий Павлович

Построение решений краевых задач для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
Ломов Игорь Сергеевич

Москва – 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. В диссертационной работе рассматриваются следующие краевые задачи в прямоугольнике $\Omega \equiv [0,1] \times [0,b]$ для эллиптического дифференциального уравнения с параболическим вырождением порядка m, аналитическими по переменной вырождения коэффициентами и правой частью: задача

$$\begin{cases} u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которую мы далее, следуя М.В. Келдышу [29], будем называть краевой задачей D, и задача

$$\begin{cases} u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

которую мы будем называть краевой задачей E.

В то время как общие свойства приведённых выше задач исследованы очень подробно, вопрос о наследовании решениями таких задач свойства аналитичности коэффициентов и правой части подробно не рассматривался. Известные результаты аналитической теории дифференциальных уравнений относятся к исследованию задач Коши при целых порядках вырождения m (см., например, С.В. Ковалевская [82], В.В. Голубев [20], А.И. Янушаускас [75]).

Целью диссертационной работы автора будет исследование неаналитической зависимости решений приведённых краевых задач в окрестности отрезка вырождения $y = 0$ при произвольных порядках вырождения $1 \leqslant m \leqslant 2$.

В предположении, что коэффициенты уравнения $a(y)$, $c(y)$ и правая часть $f(x,y)$ аналитичны по y в комплексном круге $U = \{y \in \mathbb{C} : |y| < R\}$, где $R > b$, и при условии, что $a(y) \geqslant 0$ при $y \in [0,b]$ классическое решение построено в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega},$$

который сходится при общих ограничениях на правую часть $f(x,y)$. При этом для функций $Y_k(y)$ получены представления:

при $m = 2$, $c(y) \geqslant 0$ и $c(0) = 0$:

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + y^{r_k}\psi_{k,1}(y) + \ln y \cdot \psi_{k,2}(y),$$

$$r_k = \frac{1 - c'(0) + \sqrt{(1 - c'(0))^2 + 4\pi^2 k^2 + 4a(0)}}{2},$$

при $m = 1$:

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y), \quad c(0) \geqslant 1,$$

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + y^{1-c(0)}\psi_{k,1}(y), \quad c(0) < 1, \quad c(0) \neq 0, -1, -2, ...,$$

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \ln y \cdot \psi_{k,1}(y), \quad c(0) = 0, -1, -2, ...,$$

при $1 < m < 2$ и $c(0) = 0$:

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q}\psi_{k,n}(y) + \ln y \cdot \psi_{k,q}(y), \quad m = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

$$Y_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)}\psi_{k,n}(y), \quad m \notin \mathbb{Q}.$$

В указанных представлениях все функции $\psi_{k,n}(y)$ являются аналитическими в области U аналитичности коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

Степень разработанности темы исследования. Бурное развитие физики и её инженерных приложений начиная с конца XIX века привело к необходимости рассмотрения в рамках математической физики задач для линейных уравнений в частных производных, меняющих свой тип. Такой класс уравнений получил название уравнений смешанного типа. В частности, большой интерес представляют уравнения второго порядка, принадлежащие к классу эллиптических уравнений в одной части области рассмотрения и к классу гиперболических в другой. Линия (поверхность) раздела данных областей называется линией (поверхностью) параболического вырождения.

Рассмотрим задачи для таких уравнений на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Если коэффициенты при старших производных являются аналитическими функциями в области рассмотрения, то, согласно результату М. Чибрарио [76], существует регулярная замена независимых переменных, переводящая линию вырождения в участок прямой $y = 0$ и приводящая уравнение к одному из следующих видов:

$$y^m \cdot u_{xx} + u_{yy} + a_1(x, y) \cdot u_x + a_2(x, y) \cdot u_y - a(x, y) \cdot u = f(x, y), \tag{3}$$

$$u_{xx} + y^m \cdot u_{yy} + a_1(x, y) \cdot u_x + a_2(x, y) \cdot u_y - a(x, y) \cdot u = f(x, y), \tag{4}$$

где целый неотрицательный показатель вырождения m является нечётным в случае смены типа уравнения с эллиптического на гиперболический и чётным в случае эллиптического уравнения с параболическим вырождением внутри или на границе области рассмотрения.

Краевые задачи для уравнений вида (3) в смешанной области возникают, в частности, в трансзвуковой газовой динамике. Первые существенные исследования в этом направлении принадлежат Ф. Трикоми [81] [80]. В указанных работах им была поставлена краевая задача для уравнения вида (3) с $a \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv f \equiv 0$ и $m = 1$ в области, ограниченной гладкой кривой в эллиптической части и двумя характеристиками в гиперболической части. Для этой задачи, впоследствии названной задачей Трикоми, были доказаны существование и единственность регулярного решения.

Дальнейшее развитие указанного направления осуществлено Геллерстедтом [77] (задача Трикоми для уравнения более общего вида с $a(x, y) \equiv const > 0$ и правой частью), Ф.И. Франклем [72], М.А. Лаврентьевым [35] (модельное уравнение) и А.В. Бицадзе [5] [3] (задача Трикоми для уравнений (3) общего вида; задача с заданной нормальной производной); И.Л. Кароль [25] (существование и единственность решения задачи Трикоми для уравнения с вырождением $\operatorname{sgn} y\,|y|^m$).

Для различных частных случаев уравнения вида (3) был доказан принцип максимума для однородных уравнений (3): А.В. Бицадзе [6] для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, Жерменом и Баде [78] для уравнения Трикоми, К.И. Бабенко [1] для обобщения уравнения Трикоми.

Отметим также вклад С.П. Пулькина [62] [63], Ф.И. Франкля [73] и В.П. Михайлова [45] в исследовании обобщённых решений задачи Трикоми.

Ряд задач для уравнений смешанного типа также рассматривался А.П. Солдатовым [68] [67].

Спектральные свойства задачи Трикоми подробно исследованы в работах Е.И. Моисеева [51] [49] [50] [52]. В частности, им было получено решение задачи Трикоми в виде биортогонального ряда. Аналогичный вид решения получен Е.И. Моисеевым для задачи Дирихле для уравнения вида (3) в области эллиптичности.

Исследование краевых задач для уравнений (3) и (4) в области эллиптичности $y > 0$ имеет ценность в том числе в контексте исследования задач для уравнений смешанного типа. Если коэффициент $a(x, y) \geqslant 0$, то для данных однородных уравнений имеет место принцип максимума в области эллиптичности (см., например, [4]).

Хольмгрен [79] и Геллерстедт [77] явно построили функции Грина для смешанной краевой задачи и задачи Дирихле для частного случая уравнения (3).

Краевая задача Дирихле для уравнения (3) общего вида заменой

$$\eta = \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}$$

сводится к задаче Дирихле в ограниченной области для эллиптического уравнения без вырождения. Для уравнения без вырождения доказано существование функции Грина и классического решения при условии, что существует функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в той же области.

В случае краевой задачи Дирихле для уравнения (4) указанные преобразования могут быть произведены только лишь для некоторых случаев вырождений и коэффициентов уравнения. В общем же случае краевая задача Дирихле для уравнения (4) не имеет решения.

Фундаментальные результаты для этого случая получены М.В. Келдышем [29]. Им была поставлена краевая задача E, отличающаяся от краевой задачи Дирихле (задачи D) заменой условия на значения функции на кривой вырождения на условие ограниченности. В указанной работе приведены достаточные условия, при которых краевые задачи D и E для уравнения (4) с нулевой правой частью имеют единственное решение.

Отметим, что для уравнений класса (4) представляет интерес характер неаналитической зависимости решения краевой задачи от переменной y для такого уравнения вблизи кривой вырождения при условии аналитических коэффициентов и правой части. Исследованиями в этой области занимались А.И. Янушаускас [75], В.Н. Врагов [16] [15] и др.

Следует отметить, что результат В.Н. Врагова [15], относящийся к краевой задаче E в случае линейного вырождения, частично соответствует результату, полученному во второй главе диссертации автора. При этом результат автора получен иным методом и относится к краевой задаче в прямоугольнике, в то время как В.Н. Врагов рассматривает область с гладкой границей.

И.С. Ломовым [36] [37] [43] предложен новый метод построения решений краевых задач для уравнения (4) — метод спектрального выделения особенностей. Решение строится в виде разложения по собственным функциям дифференциального оператора. Коэффициенты такого разложения являются аналитическими функциями аргумента y, аналитичность которых может нарушаться при $y = 0$. Характер неаналитической зависимости коэффициентов от переменного y в окрестности точки $y = 0$ выписывается явно с привлечением известных результатов аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Устанавливаются условия сходимости построенного спектрального разложения решения при $m = 2$ и нулевых $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$.

Указанный выше метод выделения особенностей является развитием метода регуляризации С.А. Ломова [38] [39] [40]. Метод регуляризации развивался различными авторами, в том числе В.И. Качаловым [41] [42] [26] [27].

Указанные результаты переносятся в диссертационной работе автора на более широкий класс уравнений (4) с показателем вырождения $1 \leqslant m \leqslant 2$.

Отметим вклад других исследователей уравнений смешанного типа и вырождающихся эллиптических уравнений: И.Н. Векуа [9] [8] [10], С.Г. Михлин [48] [46] [47], М.М. Смирнов [65] [66], М.И. Вишик [12] [11], А.П. Солдатов [69], А.В. Фурсиков [74], О.А. Олейник [54] [55] [53], А.Б. Костин и В.Б. Шерстюков [33] [34], И.М. Петрушко [58] [59], С.В. Руткаускас [64], С.М. Пономарёв [60] [61], В.М. Ивакин [22], Е.А. Волков [13], В.П. Глушко [17] [18] [19], А.Д. Баев [2], В.В. Панков [56].

В большей части перечисленных работ рассматриваются краевые задачи в областях, граница которых является гладкой в эллиптической области. В контексте диссертационной работы важен эффект, оказываемый угловыми точками области, в которой решается краевая задача. В частности, показано, что задача Дирихле в двумерном случае остаётся корректной, если мера каждого угла области решения задачи в эллиптической части не превосходит π. Среди исследований в этом направлении можно отметить работы Е.А. Волкова [14] и В.А. Кондратьева [31] [32].

Цели и задачи диссертационной работы. В работе автора исследуются краевые задачи D и E для дифференциального уравнения $u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x, y)$ в прямоугольнике. Ставится задача построить решения в явном виде и выделить неаналитическую зависимость от аргумента y решений в окрестности прямой $y = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant 2$.

Для достижения этой цели автором работы решаются следующие задачи:

1. Построение формальных решений задач D и E для дифференциального уравнения $u_{xx} + y^m u_{yy} + c(y)u_y - a(y)u = f(x, y)$, сведение их к серии задач для

обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y^m Y'' + c(y)Y' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = f(y)$, выделение особенностей.

3. Исследование асимптотических свойств решений уравнений $y^m Y'' + c(y)Y' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = f(y)$ с большим параметром k.

4. Доказательство сходимости формальных рядов к классическим решениям задач п. 1. Доказательство существования классических решений.

Научная новизна. Степень разработанности диссертации. В диссертационной работе развивается метод спектрального выделения особенностей И.С. Ломова.

1. Для случая $m = 2$ полученный ранее И.С. Ломовым результат о представлении решения обобщается на случай $c(y) \not\equiv 0$. Решается открытая до этого проблема малых знаменателей и логарифмических особенностей коэффициентов формального ряда: доказывается, что даже в случае их наличия построенная сумма двух рядов сходится при минимальных ограничениях на правую часть дифференциального уравнения.

2. Аналогичные результаты (явный вид решения и его особенностей) получены в случаях $1 \leqslant m < 2$. Отдельно рассматривается случай иррациональных m; установлено разложение решения по степеням y и y^{2-m}.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретическое и практическое значение. Они могут быть использованы при исследовании неклассических задач математической физики и построении численных методов их решения. Они вносят существенный вклад в аналитическую теорию вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, методы аналитической теории дифференциальных уравнений, асимптотические методы, метод спектрального выделения особенностей.

Положения, выносимые на защиту. 1. Для краевой задачи E для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения (2) при порядках вырождения $m = 1, 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При $m = 2$ решены проблемы малых знаменателей и логарифмических особенностей.

2. Для краевой задачи D для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения (1) при порядках вырождения $1 \leqslant m < 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При этом в случае иррациональных m установлено разложение решения по целым степеням переменной $\tau = y^{2-m}$ с аналитическими коэффициентами.

3. Установлены асимптотические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением порядка $m \in [1, 2]$ и большим параметром k при неизвестной функции.

Степень достоверности. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации и отдельные её части докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских **конференциях**:

1. Международная конференция «Математика в созвездии наук», приуроченная к юбилею ректора МГУ, академика Виктора Антоновича Садовничего (Москва, МГУ, 1–2 апреля 2024 г.);

2. Международная конференция «Ломоносовские чтения — 2024» (Москва, МГУ, 20 марта — 3 апреля 2024 г.);

3. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXIV» (Воронеж, ВГУ, 3–9 мая 2023 г.);

4. Международная конференция «Ломоносовские чтения — 2023» (Москва, МГУ, 4–14 апреля 2023 г.);

5. Международная конференция «Ломоносовские чтения — 2022» (Москва, МГУ, 14–22 апреля 2022 г.);

6. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2021» (Москва, МГУ, 12–23 апреля 2021 г.);

7. Международная конференция: ВЗМШ «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, ВГУ, 28 января — 2 февраля 2021 г.);

8. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2020» (Москва, МГУ, 10–21 ноября 2020 г.);

9. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2019» (Москва, МГУ, 8–12 апреля 2019 г.);

10. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXIX», посвященная 90-летию В.А. Ильина (Москва, МГУ, 2–6 мая 2018 г.);

11. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2018» (Москва, МГУ, 9–13 апреля 2018 г.).

Результаты диссертации также докладывались и обсуждались на следующих международных и всероссийских **семинарах**:

1. Межвузовский научно-исследовательский семинар «Анализ и его приложения» (руководители проф. Г.Г. Брайчев, проф. И.В. Тихонов и проф. В.Б. Шерстюков) (Москва, МПГУ, 5 декабря 2023 г.);

2. Научно-исследовательский семинар «Обратные задачи математической физики и естествознания» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. РАН В.А. Садовничий и проф. А.И. Прилепко) (Москва, Мех-мат МГУ, 27 апреля 2023 г.);

3. Научно-исследовательский семинар «Обратные задачи математической

физики и естествознания» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. РАН В.А. Садовничий и проф. А.И. Прилепко) (Москва, Мех-мат МГУ, 20 апреля 2023 г.);

4. Научно-исследовательский семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. РАН Е.И. Моисеев и проф. И.С. Ломов) (Москва, ВМК МГУ, 21 ноября 2022 г.);

5. Семинар в рамках Шестой Римско-Московской школы по матричным методам и прикладной линейной алгебре (Москва, МГУ, август 2018 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 4 научные статьи в рецензируемых журналах [84–87] из списка ВАК РФ, индексируемых РИНЦ и RSCI, при этом переводные версии статей [84, 86, 87] опубликованы в журнале, индексируемом Web of Science и Scopus, и 6 тезисов докладов [88–93].

Личный вклад автора. Все приводимые в работе результаты, за исключением специально выделенных, сформулированы и доказаны автором лично. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 93 наименований. Общий объём диссертации составляет 150 страниц.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит информацию об актуальности рассматриваемой темы, краткую историю вопроса, изложение цели работы, методов и основных результатов.

В **главе 1** приводятся общие постановки рассматриваемых краевых задач

D и E, после чего подробно рассматривается краевая задача E с квадратичным вырождением y^2.

В **разделе 1** формулируются краевые задачи D и E (в терминологии М.В. Келдыша) с произвольным порядком вырождения m.

Краевая задача D: в области $\Omega \equiv (0,1) \times (0,b)$, $b > 0$, требуется найти функцию $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

краевая задача E: в области $\Omega \equiv (0,1) \times (0,b)$, $b > 0$, требуется найти функцию $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

Показатель вырождения $m > 0$. Коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ и правая часть задач $f(x,y)$ являются аналитическими функциями переменного y в комплексном круге $U \equiv \{y \in \mathbb{C} : |y| < R\}$, где $R > b$ — некоторое число, правая часть $f(x,y)$ принадлежит классу $C(\bar{\Omega})$, $a(y) \geqslant 0$ при $y \in [0,b]$.

Также рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^m Y''(y) + c(y)Y'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = 0, \quad 0 < y < b, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

получающееся при разделении переменных. Приводится ряд известных фактов о решениях уравнения (7).

В **разделе 2** приводится постановка краевой задачи E в случае квадратичного вырождения $m = 2$. На коэффициенты задачи дополнительно накладываются условия $c(y) \geqslant 0$ при $y \in [0,b]$ и $c(0) = 0$. С этого момента и до окончания **первой главы** m полагается равным 2.

В **разделе 3** производится регуляризация задачи (6) и приводится общий вид её формального решения:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}(g_k(y)\varphi_k(y)+g_0(y)\chi_k(y)+\eta_k(y))\sin\pi kx,\quad (x,y)\in\bar{\Omega},\tag{8}$$

где функции $\varphi_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\eta_k(y)$ полагаются аналитическими в круге U, $g_k(y)\equiv(y/b)^{r_k}$, $k\in\mathbb{N}$, $g_0(y)=\ln(y/b)$,

$$r_k=\frac{1-c'(0)+\sqrt{(1-c'(0))^2+4\pi^2k^2+4a(0)}}{2}>0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Вводится счётное число новых независимых переменных $\tau_0,\tau_1,...,\tau_k,...$ и рассматривается функция

$$v(x,y,\tau)=\sum_{k=1}^{+\infty}(\tau_k\varphi_k(y)+\tau_0\chi_k(y)+\eta_k(y))\sin\pi kx,\tag{9}$$

которая формально зависит от своих аргументов аналитически и при подстановке $\tau_0=g_0(y)$, $\tau_1=g_1(y)$, ..., $\tau_k=g_k(y)$, ... совпадает с функцией (8).

Для функции (9) получена расширенная задача

$$\begin{cases} v''_{xx}+y^2v''_{yy}+2yv''_{y\tau_0}-v'_{\tau_0}+2y\sum\limits_{k=1}^{+\infty}r_kv''_{y\tau_k}\tau_k+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}r_k(r_k-1)v'_{\tau_k}\tau_k+\\ \qquad +c(y)v'_y+c(y)\frac{v'_{\tau_0}}{y}+c(y)\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{r_kv'_{\tau_k}\tau_k}{y}-a(y)v=f(x,y),\\ v(0,y,\tau)=v(1,y,\tau)=v(x,b,\{0,1,1,...\})=0,\quad |v(x,0,0)|<+\infty,\\ (x,y)\in\Omega,\quad \tau_0<0,\quad 0<\tau_k<1. \end{cases}$$

С использованием разложения правой части $f(x,y)$ в ряд по системе функций $\{\sin\pi kx\}$

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(y)\sin\pi kx,\quad (x,y)\in\Omega,$$

получены задачи на коэффициенты рядов (8) и (9):

$$y^2\eta''_k(y)+c(y)\eta'_k(y)-(\pi^2k^2+a(y))\eta_k(y)+2y\chi'_k(y)+\frac{c(y)}{y}\chi_k(y)-\chi_k(y)=f_k(y),\tag{10}$$

$$y^2\chi''_k(y)+c(y)\chi'_k(y)-(\pi^2k^2+a(y))\chi_k(y)=0,\tag{11}$$

$$y^2\varphi_k''(y) + c(y)\varphi_k'(y) + 2yr_k\varphi_k'(y) +$$
$$+r_k(r_k-1)\varphi_k(y) + r_k\frac{c(y)}{y}\varphi_k(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\varphi_k(y) = 0, \quad 0 < y < b, \qquad (12)$$
$$\eta_k(b) = -\varphi_k(b), \quad \eta_k, \chi_k, \varphi_k \in A(U), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 4** устанавливается факт разрешимости поставленных задач для функции $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ в классе функций, аналитических в U. В **разделе 5** продолжается уточнение свойств функций $\varphi_k(y)$. Вводится функция

$$Y_k^0(y) = g_k(y) \cdot \mathring{\varphi}_k(y), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Данная функция является решением дифференциального уравнения (7), удовлетворяющим краевому условию $Y_k^0(0) = 0$. Устанавливаются двусторонние оценки функций $Y_k^0(y)$ и их производных.

Теорема 1.4. *Существуют постоянные* $0 < C_1 < C_2$, *не зависящие от* $k \in \mathbb{N}$, *такие, что при всех* $k \geqslant k_0$

$$C_1\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k}, \quad y \in [0, b],$$

$$C_1\frac{r_k}{y}\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant \frac{dY_k^0}{dy}(y) \leqslant C_2\frac{r_k}{y}\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k}, \quad y \in (0, b].$$

В **разделе 6** производятся первоначальные исследования, направленные на установление факта сходимости ряда (9). Вводятся обозначения

$$J_k \equiv \underset{n\in\mathbb{N}_0}{\operatorname{argmin}}|n(n+c'(0)-1)-\pi^2k^2-a(0)|, \quad \nu(n,k) \equiv n(n+c'(0)-1)-\pi^2k^2-a(0),$$

$$\delta_k \equiv \nu(J_k, k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Формулируются достаточные условия получения эффективных оценок функций $\eta_k(y)$:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : r_k \notin \mathbb{N},$$
$$\forall\, R_1 \in (b, R)\,\exists\, M > 0 : \left|\tfrac{f_k^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \tfrac{M}{R_1^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (13)$$
$$\exists\, C_\delta > 0, q_0 > \tfrac{b}{R} : \forall\, k \in \mathbb{N} : |\delta_k| \geqslant C_\delta q_0^{J_k}.$$

Теорема 1.7. *Пусть выполнены условия* (13) *и ряд Фурье функции* $f(x,y)$ *по системе* $\{\sin \pi kx\}$ *сходится равномерно по* $x \in [c,d] \subset (0,1)$ *для любого фиксированного* $y \in [0,b]$. *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y)\psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, *определяет в нём непрерывную функцию и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω.

В **разделе 7** доказывается сходимость ряда (9) формального решения расширенной задачи, а также частный случай сходимости ряда (8).

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия* (13) *и ряд Фурье функции* $f(x,y)$ *по системе* $\{\sin \pi kx\}$ *сходится равномерно по* $x \in [c,d] \subset (0,1)$ *для любого фиксированного* $y \in [0,b]$. *Тогда равномерно по* $y \in [0,b]$ *выполнено*

$$\varphi_k^{(N)}(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad N = 0,1,2,$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tau_k \varphi_k(y)\psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ *и определяет в нём непрерывную функцию, а ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(y)\varphi_k(y)\psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, *определяет в нём непрерывную функцию и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω.

Следствие 1.8.1. *В условиях теоремы 1.8, формальное решение* (9) *расширенной задачи определено и сходится к непрерывной функции, а формальное решение* (8) *исходной задачи* (6) *определено и является её классическим решением.*

Теорема 1.9. *Пусть $a(0)$ и $c'(0)$ — рациональные числа, а правая часть $f(x, y)$ является аналитической функцией по совокупности переменных (x, y) в области $(-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times U$, $\varepsilon > 0$. Тогда формальное решение (9) расширенной задачи определено и сходится к непрерывной функции, а формальное решение (8) исходной задачи (6) определено и является её классическим решением.*

В **разделе 8** устанавливаются свойства второго элемента ФСР уравнения (7). Он строится в виде

$$Y_k^b(y) \equiv -Y_k^0(y) \int\limits_b^y \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta\right) d\xi, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.11. *Существуют $C_4 > C_3 > 0$, не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0, b]$, такие, что*

$$Y_k^b(y) \leqslant \frac{C_4}{k} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, b],$$
$$Y_k^b(y) \geqslant \frac{C_3}{k} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, 3b/4],$$
$$\left|\frac{dY_k^b}{dy}(y)\right| \leqslant \frac{C_4}{y} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, b].$$

Получены оценки определителей Вронского $w_k(y)$ систем $\{Y_k^0(y), Y_k^b(y)\}$.

Раздел 9 начинается с построения функций Грина $G_k(y, \eta)$ краевых задач нахождения ограниченных решений $Y_k(y)$ уравнений (7), удовлетворяющих условию $Y_k(b) = 0$. Доказываются оценки их средних. Коэффициенты ряда (8) обозначаются как

$$Y_k(y) \equiv \eta_k(y) + g_0(y)\chi_k(y) + g_k(y)\varphi_k(y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b].$$

Теорема 1.14. *Пусть функции $f_k(y)$ являются равномерно ограниченными вместе с первыми и вторыми производными при $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0, b]$. Тогда равномерно по $y \in [0, b]$ имеет место асимптотика*

$$Y_k(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Кроме того, на любом компакте $K \subset (0, b)$ равномерно по $y \in K$ справедлива асимптотическая формула

$$Y_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-N}}\right), \quad N = 0, 1, 2.$$

В **разделе 10** формулируется основной результат **главы I** — теорема сходимости ряда (8) к решению задачи (6).

Теорема 1.15. *Пусть правая часть $f(x, y)$ задачи (6) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0, 1)$ функция $f(x, y) \in A(U)$ как функция аргумента y.*

Тогда существует классическое решение задачи (6), представимое рядом (8), который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ аналитичны в области U.

Если при некотором $k \in \mathbb{N}$ число $r_k \notin \mathbb{N}$, то $\chi_k(y) \equiv 0$.

Завершает **главу I раздел 11**, приводящий пример использования полученных в главе результатов. Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + y u'_y - yu = f \equiv const, \quad (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0, \quad |u(x, 0)| < +\infty. \end{cases}$$

На основании следствия 1.8.1 находится её решение

$$u(x, y) = 4f \sum_{k=1, k/2 \notin \mathbb{N}}^{+\infty} \left[\frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2} - y^{\pi k} \frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{y}{m^2 + 2\pi k m}\right) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2 + 2\pi k m}\right)^{-1} \right] \cdot \frac{\sin \pi k x}{\pi k}.$$

Ряд сходится равномерно в $[0, 1]^2$. Его можно дифференцировать под знаком суммы по x и по y внутри $(0, 1)^2$ два раза.

Результаты **главы 1** были опубликованы в работах [87], [86], [91], [89], [92].

В **главе 2** подробно рассматриваются краевые задачи D и E с линейным вырождением y. Результаты **главы 1** переносятся на случай линейного вырождения.

В **разделе 1** производится постановка краевых задач D и E для линейного вырождения ($m = 1$). При этом краевая задача D рассматривается при условии $c(0) < 1$, а краевая задача E при условии $c(0) \geqslant 1$.

В **разделе 2** строятся формальные решения задач (5) и (6). Решения ищутся в общем виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{14}$$

где коэффициенты $Y_k(y)$ удовлетворяют краевым задачам

$$\begin{cases} yY_k'' + c(y)Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

в случае (5) и

$$\begin{cases} yY_k'' + c(y)Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(b) = 0, \quad |Y_k(0)| < +\infty, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

в случае (6).

Для описания особенностей решений этих задач достаточно функции y^{r_1} или $\ln y$, где $r_1 = 1 - c(0)$. Таким образом, коэффициенты ищутся в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y)$$

в случае краевой задачи E и в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k(y)$$

в случае краевой задачи D, где функции $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ являются аналитическими в круге U.

Функции $\eta_k(y)$ в случае краевой задачи E ищутся как решения задач (16), а в случае краевой задачи D имеют место соотношения

$$y\eta_k''(y) + c(y)\eta_k'(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\eta_k(y) + 2\chi_k'(y) + \frac{c(y)}{y}\chi_k(y) - \frac{\chi_k(y)}{y} = f_k(y),$$

$$y\chi_k''(y) + c(y)\chi_k'(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\chi_k(y) = 0,$$

$$y\varphi_k''(y) + c(y)\varphi_k'(y) + 2r_1\varphi_k'(y) +$$

$$+\frac{r_1(r_1-1)}{y}\varphi_k(y) + r_1\frac{c(y)}{y}\varphi_k(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\varphi_k(y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

$$\eta_k(b) = -\varphi_k(b), \quad \eta_k, \chi_k, \varphi_k \in A(U), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\eta_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 3** устанавливается факт разрешимости задач для функций $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$. В **разделе 4** при условии $c(0) \geqslant 1$ исследуется специальная задача для уравнения с малым параметром $1/k$ при больших k:

$$\begin{cases} yY_k'' + c(y)Y_k' - (a(y) + \pi^2k^2)Y = 0, \quad y \in (0,b), \\ Y(0) = 1. \end{cases} \quad k > 0, \tag{17}$$

Её решение ищется в виде

$$Y_k(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot z_k(y),$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, i — мнимая единица, а J_α — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha = c(0) - 1$, $z_k(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$\begin{cases} y\mu z''(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y)z'(y) + \mu c(y)z'(y) + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)z(y) - \mu a(y)z(y) = 0, \\ z(0) = 1, \quad y \in (0,b), \quad \mu > 0, \end{cases} \tag{18}$$

где $\mu = 1/(\pi k)$, $R_\mu(y) = -iJ_{\alpha+1}(2i\sqrt{y}/\mu)/J_\alpha(2i\sqrt{y}/\mu)$, $\bar{c}(y) = (c(y) - c(0))/y$.

При формальном предельном переходе при $\mu \to 0+0$ задача (18) принимает вид

$$\begin{cases} 2\bar{z}'(y) + \bar{c}(y)\bar{z}(y) = 0, \quad y \in (0,b), \\ \bar{z}(0) = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 2.3. *Пусть коэффициенты* $a(y)$, $\sqrt{y}\cdot a'(y)$, $c(y)$ *и* $c'(y)$ *принадлежат классу* $C[0,b]$, *а функция* $\vec{c}'(y)$ *непрерывна на* $(0,b]$ *и имеет интегрируемую особенность в точке* $y=0$. *Тогда, если решение задачи* (17) *существует, то:*

1. Существует постоянная $M>0$ *такая, что имеют место оценки* $|z(y,\mu)|\leqslant M$, $|z'_y(y,\mu)|\leqslant M/\sqrt{y}$ *равномерно по* $y\in(0,b]$.

2. $z(y,\mu)\to\bar{z}(y)$ *при* $\mu\to 0+0$ *равномерно по* $y\in[0,b]$,

3. Для любого $\varepsilon\in(0,b)$, $z'_y(y,\mu)\to\bar{z}'_y(y)$ *при* $\mu\to 0+0$ *равномерно по* $y\in[\varepsilon,b]$.

Здесь $z(y,\mu)$ *и* $\bar{z}(y)$ *— решения задач* (18) *и* (19) *соответственно.*

Следствие 2.3.1. *Для решения задачи* (17) *при* $k\to+\infty$ *имеет место равномерная по* $y\in[0,b]$ *асимптотика*

$$Y_k(y)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi ki\sqrt{y}\right)^{\alpha}}\cdot J_\alpha(2\pi ki\sqrt{y})\cdot\left(\exp\left(\int\limits_0^y-\frac{\bar{c}(\xi)}{2}\,d\xi\right)+\bar{o}(1)\right),$$

$$y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.$$

В **разделе 5** исследуется ФСР уравнения (7) в случае краевой задачи E. Для обозначения специальным образом выбранных функций из ФСР уравнения (7) здесь и далее используются символы $Y_k^0(y)$ и $Y_k^b(y)$.

Теорема 2.4. *Существуют не зависящие от* $y\in[0,b]$ *и* $k\in\mathbb{N}$ *постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что имеют место неравенства*

$$0<C_1\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}\leqslant Y_k^0(y)\leqslant C_2\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

$$Y_k^{0\prime}(y)\leqslant C_2\cdot\frac{k}{\sqrt{y}}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

при всех $y\in[0,b]$ *и* $k\in\mathbb{N}$,

$$0<C_1\cdot k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}\leqslant Y_k^{0\prime}(y),$$

при всех $y\in[b/4,b]$ *и* $k\geqslant k_0$, $\alpha=c(0)-1$.

Теорема 2.5. *Существуют не зависящие от $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{y^{-c(0)+1/2}}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$C_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \leqslant Y_k^b(y), \quad y \in \left[\frac{b}{4}, \frac{3b}{4}\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot y^{-c(0)} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 6** исследуется ФСР уравнения (7) в случае краевой задачи D. Обозначая $\alpha = |c(0)-1|$, могут быть получены следующие оценки.

Теорема 2.6. *Существуют не зависящие от $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot y^{\alpha} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \cdot y^{\alpha} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

$$Y_k^{0\prime}(y) \leqslant C_2 \cdot k y^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

при всех $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k y^{\alpha} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^{0\prime}(y),$$

при всех $y \in [b/4, b]$ и $k \geqslant k_0$, $\alpha = 1 - c(0)$.

Теорема 2.7. *Существуют не зависящие от $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{k\sqrt{y}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$C_1 \cdot \frac{y^{\alpha}}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \leqslant Y_k^b(y), \quad y \in \left(0, \frac{3b}{4}\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

В **разделе 7** по аналогии с **разделами 8 и 9 главы 1** устанавливаются оценки определителей Вронского $w_k(y)$ ФСР уравнения (7) и оценки средних функций Грина $G_k(y, \eta)$ задач (15) и (16). В **разделе 8** по аналогии с **разделом 9 главы 1** устанавливается асимптотика коэффициентов $Y_k(y)$ ряда (14) при $k \to +\infty$. В **разделе 9** доказываются основные теоремы **главы 2** о существовании и явном виде решений задач (5) и (6).

Теорема 2.11. *Пусть $c(0) \geqslant 1$ и правая часть $f(x, y)$ задачи (6) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0, 1)$ функция $f(x, y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (6), представимое рядом*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ аналитичны в области U.

Теорема 2.12. *Пусть $c(0) < 1$, $c(0) \neq 0, -1, -2, \ldots$ и правая часть $f(x, y)$ задачи (5) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0, 1)$ функция $f(x, y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (5), представимое рядом*

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1} \varphi_k(y) \right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ аналитичны в области U.

Теорема 2.13. *Пусть $c(0) = 0, -1, -2, \ldots$ и правая часть $f(x, y)$ задачи (5) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом* *фиксированном* $x \in (0,1)$ *функция* $f(x,y) \in A(U)$ *как функция аргумента* y. *Тогда существует классическое решение задачи* (5), *представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_k(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k(y)\right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ *и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω, *функции* $\eta_k(y)$ *и* $\chi_k(y)$ *аналитичны в области* U.

Результаты **главы 2** были опубликованы в работах [84], [89].

В **главе 3** подробно рассматривается краевая задача D с вырождением y^m, $m \in (0,1) \cup (1,2)$. Для данного случая получены результаты, аналогичные результатам **глав 1 и 2**.

В **разделе 1** производится постановка задачи. Накладываются условия $m \in (0,1) \cup (1,2)$ и $c(0) = 0$. По аналогии с **главами 1 и 2** формальное решение ищется в виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{20}$$

где функции $Y_k(y)$ являются решениями краевых задач

$$\begin{cases} y^m Y_k'' + c(y) Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

В **разделе 2** производится выделение особенностей функций $Y_k(y)$ и доказывается разрешимость задач (21).

При $m \notin \mathbb{Q}$ рассматриваются вспомогательные задачи

$$\begin{cases} y^m \eta_k'' + c(y) \eta_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) \eta_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ \eta_k(0) = 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

$$\begin{cases} y^m \mathring{\varphi}_k'' + c(y) \mathring{\varphi}_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) \mathring{\varphi}_k = 0, \quad 0 < y < b, \\ \mathring{\varphi}_k(0) = 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

Рассматривается класс $\mathcal{A}_\gamma$ всех функций $\chi(y) \in A(U \setminus \{0\})$, допускающих представление в виде рядов

$$\chi(y) = y^\gamma \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cdot y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cdot y^{n+\gamma}, \quad y \in U,$$

вводится оператор $\mathcal{R}$: $\mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_{\gamma+2-m}$, обращающий дифференциальный оператор $\mathcal{L} : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_{\gamma+m-2}$:

$$(\mathcal{L}\chi)(y) \equiv y^m \cdot \chi''(y).$$

С его помощью строятся решения задач (22) и (23) следующим образом.

$$\begin{aligned} \eta_{k,0}(y) &= \mathcal{R}(f_k)(y), & \mathring{\varphi}_{k,0}(y) &= y, \\ \eta_{k,n}(y) &= \mathcal{R}(d_k \cdot \eta_{k,n-1} - c \cdot \eta'_{k,n-1})(y), & \mathring{\varphi}_{k,n}(y) &= \mathcal{R}(d_k \cdot \mathring{\varphi}_{k,n-1} - c \cdot \mathring{\varphi}'_{k,n-1})(y), \end{aligned} \tag{24}$$

$$k, n \in \mathbb{N}, \quad d_k(y) \equiv a(y) + \pi^2 k^2,$$

$$\eta_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n}(y), \quad \mathring{\varphi}_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathring{\varphi}_{k,n}(y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in U. \tag{25}$$

Теорема 3.1. *Пусть $m \in (0, 2)$, $m \notin \mathbb{Q}$. Тогда соотношения (24) корректны и определяют функции $\eta_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{n(2-m)}$ и $\mathring{\varphi}_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{1+n(2-m)}$, а ряды (25) сходятся в пространствах $A(U \setminus \{0\})$ и $C[0, b]$ к частным решениям задач (22) и (23) соответственно.*

Таким образом доказывается, что при иррациональных m решения задач (21) имеют вид

$$Y_k(y) = \eta_k(y) - \frac{\eta_k(b)}{\mathring{\varphi}_k(b)} \mathring{\varphi}_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)} \psi_{k,n}(y), \quad y \in U, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\psi_{k,n}(y) \in A(U)$, $n \in \mathbb{N}_0$, а при рациональных m

$$Y_k(y) = \eta_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q} \cdot \eta_{k,n}(y) + \chi_k(y) \cdot \ln y, \quad y \in U, \quad k \in \mathbb{N},$$

функции $\eta_{k,n}(y)$, $\chi_k(y)$ аналитичны в U, $n = 0, 1, ..., q - 1$.

Таким образом были выделены особенности решений задач (21).

Функции $\mathring{\varphi}_k(y)$, определённые в (25) определены корректно независимо от рациональности m. Далее обозначается $Y_k^0(y) \equiv \mathring{\varphi}_k(y)$.

В **разделе 3** приводятся оценки элементов ФСР уравнения (7), аналогичные таковым из **разделов 5 и 6 главы 2**.

Теорема 3.2. *Существуют не зависящие от $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot y \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \cdot y \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}},$$

$$Y_k^{0\prime}(y) \leqslant C_2 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}},$$

при всех $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^{0\prime}(y),$$

при всех $y \in [b_0, b]$ и $k \geqslant k_0$, $0 < b_0 < b$.

Теорема 3.3. *Существует не зависящая от $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянная C_2 такая, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать постоянную $C_3(\varepsilon) > 0$ такую, что при всех $y \in [\varepsilon, b - \varepsilon]$ и $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$C_3(\varepsilon) \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}} \leqslant Y_k^b(y).$$

В **разделе 4** приводятся оценки определителей Вронского $w_k(y)$ ФСР уравнений (7) и средних функций Грина $G_k(y, \eta)$ задач (21), аналогичные таковым из **раздела 7 главы 2**. В **разделе 5** по аналогии с **разделом 8 главы 2** получена асимптотика функций $Y_k(y)$.

Раздел 6 завершает основную часть **главы 3**, представляя основные результаты главы.

Теорема 3.7. *Пусть* $0 < m < 2$, $m \notin \mathbb{Q}$ *и правая часть* $f(x,y)$ *задачи* (5) *непрерывна в* $\bar{\Omega}$ *вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном* $x \in (0,1)$ *функция* $f(x,y) \in A(U)$ *как функция аргумента* y*. Тогда существует классическое решение задачи* (5)*, представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)} \psi_{k,n}(y) \right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ *и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω*, функции* $\psi_{k,n}(y)$*,* $n \in \mathbb{N}_0$ *аналитичны в области* U*.*

Теорема 3.8. *Пусть* $0 < m < 2$, $m = p/q \in \mathbb{Q}$, $m \neq 1$ *и правая часть* $f(x,y)$ *задачи* (5) *непрерывна в* $\bar{\Omega}$ *вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном* $x \in (0,1)$ *функция* $f(x,y) \in A(U)$ *как функция аргумента* y*. Тогда существует классическое решение задачи* (5)*, представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q} \cdot \eta_{k,n}(y) + \chi_k(y) \cdot \ln y \right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ *и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω*, функции* $\eta_{k,n}(y)$*,* $n = 0, 1, ..., q-1$ *и* $\chi_k(y)$ *аналитичны в области* U*.*

Раздел 7 демонстрирует пример построения решения задачи (5). Рассматривается задача

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^{\sqrt{2}} u''_{yy} - \pi^2 u = f \equiv const, \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0. \end{cases}$$

С использованием теоремы 3.7 получено решение этой задачи:

$$u(x,y) = \frac{4f}{\pi k} \sum_{k=1, k/2 \notin \mathbb{N}}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right)^{1-\alpha}} \cdot J_{1-\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right) - \right.$$

$$
-\frac{\sqrt{y}\cdot\Gamma(1-\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)^{1-\alpha}}\cdot\frac{J_{1-\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)}{J_{\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)}\cdot J_{\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\cdot y^{1/(2\alpha)}\right)\Bigg]\times
$$

$$
\times\sin\pi kx,\quad \alpha=\frac{1}{2-\sqrt{2}},
$$

ряд сходится равномерно в $\bar{\Omega}$.

Результаты **главы 3** были опубликованы в работах [85], [93], [90], [88].

В **заключении** диссертационной работы подводятся итоги полученных в **главах 1, 2 и 3** результатов и устанавливаются возможные дальнейшие направления исследования.

Глава 1

Краевая задача E для эллиптического уравнения с квадратичным вырождением

При работе над данной главой диссертации использованы следующие публикации автора, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [87], [86], [91], [89], [92].

1.1. Общие постановки задач и некоторые свойства решений

На протяжении всей работы, мы будем рассматривать в прямоугольнике $\Omega \equiv (0,1) \times (0,b)$, $b > 0$ следующие две задачи: краевую задачу D в терминологии М.В. Келдыша [29], [28, с. 299-301]:

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

и краевую задачу E:

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = 0, & |u(x,0)| < +\infty, \end{cases} \tag{1.2}$$

где показатель вырождения $m > 0$.

Мы будем полагать, что коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ и правая часть задач $f(x,y)$ являются аналитическими функциями переменного y в комплексном круге $U \equiv \{y \in \mathbb{C} : |y| < R\}$, где $R > b$ — некоторое число. Также будем считать, что правая часть $f(x,y)$ принадлежит классу $C(\bar{\Omega})$.

Также мы, следуя [29], [28, с. 299-301], будем требовать, чтобы $a(y) \geqslant 0$ при всех $y \in [0,b]$.

В дальнейшем, важную роль в исследовании задач (1.1) и (1.2) будет играть уравнение

$$y^m Y''(y) + c(y)Y'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = 0, \quad 0 < y < b, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Приведём и докажем ряд известных свойств решений таких уравнений.

Лемма 1.1. *Любое решение уравнения* (1.3) *из класса* $C^2(0,b)$ *на любом отрезке* $T \subset [0,b]$ *не может иметь положительного максимума или отрицательного минимума где-либо, кроме граничных точек отрезка* T.

Доказательство. Мы докажем это утверждение для положительного максимума, так как случай минимума доказывается заменой функции $Z(y) = -Y(y)$ и сведением к случаю положительного максимума. Итак, пусть $\xi \in T \setminus \partial T$ — точка положительного максимума. Так как решение Y дважды гладкое в точке ξ, то выполняются необходимые условия максимума [23, с. 301-304, теоремы 9.1 и 9.2]: $Y'(\xi) = 0, Y''(\xi) \leq 0$. Рассмотрим уравнение в точке ξ:

$$\xi^m Y''(\xi) = (a(\xi) + \pi^2 k^2)Y(\xi) > 0,$$

следовательно, так как $\xi^m > 0$, $Y''(\xi) > 0$, то получаем противоречие, а значит, ξ не является положительным максимумом. Лемма доказана. □

Лемма 1.2. *Любое нетривиальное аналитическое на* $(0,b)$ *решение уравнения* (1.3) *на* $[0,b]$ *имеет не более одного нуля. Если этот нуль отличен от точки* $y = 0$*, то этот нуль простой.*

Доказательство. Предположим, что решение Y обращается в нуль в точках ξ_1 и $\xi_2 \in [0,b]$. Рассмотрим его на $T = [\xi_1, \xi_2]$. В силу леммы 1.1, $Y \equiv 0$ на T, а в силу теоремы единственности аналитических функций [44, с. 174], и на $[0,b]$, что противоречит условию леммы. Таким образом, произвольное решение Y обращается в 0 не более чем в одной точке. Пусть $Y(\xi) = 0, \xi \neq 0$. Если кратность данного нуля больше единицы, то в силу теоремы единственности решения задачи Коши [30, с. 30-31], $Y \equiv 0$. Лемма доказана. □

Лемма 1.3. *Существует номер* $k_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что для любого* $k \geqslant k_0$ *всякое аналитическое на* $(0, b)$ *решение уравнения* (1.3), *обращающееся в нуль на одном из концов отрезка* $[0, b]$, *будет строго монотонным.*

Доказательство. Используя уравнение (1.3), выразим решение Y через его производные.

$$Y = \frac{y^m Y'' + c(y)Y'}{a(y) + \pi^2 k^2} \equiv A_k(y)Y'' + C_k(y)Y'. \tag{1.4}$$

Отметим, что так как $k > 0$, то функции $a(y), c(y), A_k(y), C_k(y)$ являются ограниченными функциями в следующем смысле:

$$||a||_{C^1[0,b]}, ||c||_{C^1[0,b]}, ||A_k||_{C[0,b]}, ||C_k||_{C[0,b]} \leq M = const, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Дифференцируя уравнение (1.3) по y, получим

$$y^m Y''' + my^{m-1}Y'' + c(y)Y'' + c'(y)Y' - [a(y) + \pi^2 k^2]Y' - a'(y)Y = 0, \tag{1.5}$$

подставим выражение $Y(y)$ из формулы (1.4) в уравнение (1.5), получим дифференциальное соотношение для $Y'(y)$:

$$y^m(Y')'' + [my^{m-1} + c(y) - a'(y)A_k(y)](Y')' - [a(y) - c'(y) + a'(y)C_k(y) + \pi^2 k^2](Y') = 0.$$

Исходя из равномерной ограниченности коэффициентов последнего уравнения, выберем номер k_0 таким, чтобы имело место неравенство $a(y) - c'(y) + a'(y)C_k(y) + \pi^2 k^2 > 0, y \in [0, b], k \geq k_0$. Тогда для последнего уравнения выполнены все условия леммы 1.2, следовательно, Y' может обращаться в нуль на $[0, b]$ не более, чем в одной точке. Если это граничная точка, то Y' не обращается в нуль и сохраняет знак на $(0, b)$, из чего следует строгая монотонность решения Y.

Положим $Y'(\xi) = 0, \xi \in (0, b)$. Не ограничивая общности, пусть $Y(\xi) > 0$ (иначе, опять же, рассмотрим функцию $-Y(\xi)$). Если $Y''(\xi) < 0$, то ξ — точка локального положительного максимума функции $Y(y)$, что противоречит лемме 1.1. Следовательно, $Y''(\xi) > 0$ и ξ — точка локального положительного строгого минимума функции $Y(y)$. По условию леммы, $Y(\eta) = 0$ при $\eta = 0$ или $\eta = b$, а значит, в силу леммы 1.1, $Y(y) \leqslant Y(\xi)$, $y \in (\xi, \eta)$, но последнее противоречит тому факту, что ξ — точка строгого экстремума, следовательно $Y'(y) \neq 0, y \in (0, b)$. Но тогда $Y'(y)$ сохраняет знак, а значит, $Y(y)$ строго монотонна. Лемма доказана. □

1.2. Постановка задачи E для квадратичного вырождения

Далее в данной главе мы будем рассматривать краевую задачу E (1.2) с квадратичным вырождением $m = 2$:

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, b) = 0, \quad |u(x, 0)| < +\infty. \end{cases} \tag{1.6}$$

Коэффициенты уравнения — аналитические в U функции, а значит, их можно разложить в ряды Тейлора:

$$a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot y^n, \quad c(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot y^n, \quad |y| < R. \tag{1.7}$$

К уже имеющимся требованиям на коэффициенты ($a(y) \geqslant 0$), мы добавим требования $c(y) \geqslant 0$ при $y \in [0, b]$ [29] и $c(0) = 0$. Последнее условие — условие регулярности вырождения [20, с. 214, 221]. В совокупности из этих условий следуют свойства коэффициентов Тейлора функции $c(y)$: $c_0 = c(0) = 0, c_1 = c'(0) \geqslant 0$. Мы будем искать классическое решение данной задачи в классе $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

1.3. Регуляризация задачи. Формальное решение

Для выделения особенностей решения мы разделим переменные в однородном уравнении

$$u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = 0,$$

полагая $u(x,y) = X(x)Y(y)$. После подстановки, поделив уравнение на $X(x)Y(y)$, получим

$$\frac{y^2 Y''}{Y} + \frac{c(y)Y'}{Y} - a(y) = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

Таким образом, для функции $X(x)$ мы получаем следующую задачу

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0,1), \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Её решения имеют вид

$$X(x) \equiv \psi_k(x) = \sin \pi k x, \quad \lambda_k = \pi^2 k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для выделения особенности функции $Y(y)$ рассмотрим задачу

$$y^2 Y'' + c(y)Y' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = 0, \quad |Y(0)| < +\infty.$$

Определяющее уравнение [20, с. 217] для этой задачи имеет вид

$$r(r-1) + c_1 r - a_0 - \pi^2 k^2 = 0$$

и имеет два корня

$$r_k = \frac{1 - c_1 + \sqrt{(1-c_1)^2 + 4\pi^2 k^2 + 4a_0}}{2} > 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$r_k^- = \frac{1 - c_1 - \sqrt{(1-c_1)^2 + 4\pi^2 k^2 + 4a_0}}{2} < 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

где знаки чисел r_k и r_k^- таковы в силу условий $c_1 \geqslant 0$ и $a_0 \geqslant 0$. Тогда числа r_k определяют характер особенностей $g_k(y) \equiv (y/b)^{r_k}$ функций $Y(y)$ в окрестности точки $y = 0$.

Следует отдельно отметить, что при $r_k \in \mathbb{N}$ функция $g_k(y)$ не имеет особенностей в точке $y = 0$. Этот случай приводит нас к исследованию логарифмических особенностей, которые могут быть описаны функцией $g_0(y) = \ln(y/b)$.

Таким образом, мы будем искать решение задачи (1.6) в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(g_k(y)\varphi_k(y) + g_0(y)\chi_k(y) + \eta_k(y)\right)\psi_k(x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{1.8}$$

где функции $\varphi_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\eta_k(y)$ полагаются аналитическими в круге U.

Для получения регуляризованной задачи, введём счётное число новых переменных $\tau_0, \tau_1, ..., \tau_k, ...$ или вектор-переменную $\tau = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_k, ...)$ так, что $\tau_0 \leqslant 0$, $0 \leqslant \tau_{k+1} \leqslant \tau_k \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию

$$v(x,y,\tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\tau_k\varphi_k(y) + \tau_0\chi_k(y) + \eta_k(y)\right)\psi_k(x). \tag{1.9}$$

Функция $v(x,y,\tau)$ формально является аналитической функцией переменных y и τ_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Установим условия, при которых сужение $v(x,y,\tau)\Big|_{\tau_k = g_k(y)}$ является решением задачи (1.6) $u(x,y)$. Заметим, что

$$u''_{xx} = v''_{xx}, \quad u'_y = v'_y + \frac{v'_{\tau_0}}{y} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v'_{\tau_k}\tau_k}{y},$$

$$u''_{yy} = v''_{yy} + \frac{v''_{y\tau_0}}{y} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v''_{y\tau_k}\tau_k}{y} - \frac{v'_{\tau_0}}{y^2} + \frac{v''_{\tau_0 y}}{y} + \frac{v''_{\tau_0\tau_0}}{y^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v''_{\tau_0\tau_k}\tau_k}{y^2} -$$
$$- \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v'_{\tau_k}\tau_k}{y^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k^2 v'_{\tau_k}\tau_k}{y^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v''_{\tau_k y}\tau_k}{y} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v''_{\tau_k\tau_0}\tau_k}{y^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{r_k^2 v''_{\tau_k\tau_m}\tau_k\tau_m}{y^2}.$$

Так как ряд (1.9) зависит от τ_k, $k \in \mathbb{N}_0$ линейно, то $v''_{\tau_k\tau_m} = 0$, $k, m \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$u''_{yy} = v''_{yy} + \frac{2v''_{y\tau_0}}{y} - \frac{v'_{\tau_0}}{y^2} + \frac{2}{y}\sum_{k=1}^{+\infty} r_k v''_{y\tau_k}\tau_k + \frac{1}{y^2}\sum_{k=1}^{+\infty} r_k(r_k-1)v'_{\tau_k}\tau_k.$$

Подставляя полученные соотношения в задачу (1.6), получим регуляризованную задачу

$$\begin{cases} v''_{xx} + y^2 v''_{yy} + 2y v''_{y\tau_0} - v'_{\tau_0} + 2y \sum\limits_{k=1}^{+\infty} r_k v''_{y\tau_k} \tau_k + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} r_k (r_k - 1) v'_{\tau_k} \tau_k + \\ \qquad + c(y) v'_y + c(y) \frac{v'_{\tau_0}}{y} + c(y) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{r_k v'_{\tau_k} \tau_k}{y} - a(y) v = f(x, y), \\ v(0, y, \tau) = v(1, y, \tau) = v(x, b, \{0, 1, 1, ...\}) = 0, \quad |v(x, 0, 0)| < +\infty, \\ (x, y) \in \Omega, \quad \tau_0 < 0, \quad 0 < \tau_k < 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Формальное решение задачи (1.10) будем искать в виде (1.9). Построенная система функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ является базисом Риса в $\mathcal{L}_2(0,1)$. Разложим по ней в ряд правую часть $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \psi_k(x), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{1.11}$$

причём коэффициенты $f_k(y)$ являются аналитическими в круге U, если $f(x, y)$ аналитична в U по y и непрерывна в $C(\bar{\Omega})$. Подставим ряды (1.11) и (1.9) в уравнение (1.10) и, приравнивая коэффициенты при функциях $\psi_k(x)$, $\tau_0 \psi_k(x)$ и $\tau_k \psi_k(x)$, получим задачи для нахождения функций $\varphi_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\eta_k(y)$.

$$y^2 \eta''_k(y) + c(y) \eta'_k(y) - (\pi^2 k^2 + a(y)) \eta_k(y) + 2y \chi'_k(y) + \frac{c(y)}{y} \chi_k(y) - \chi_k(y) = f_k(y),$$

$$y^2 \chi''_k(y) + c(y) \chi'_k(y) - (\pi^2 k^2 + a(y)) \chi_k(y) = 0,$$

$$y^2 \varphi''_k(y) + c(y) \varphi'_k(y) + 2y r_k \varphi'_k(y) +$$

$$+ r_k (r_k - 1) \varphi_k(y) + r_k \frac{c(y)}{y} \varphi_k(y) - (\pi^2 k^2 + a(y)) \varphi_k(y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

$$\eta_k(b) = -\varphi_k(b), \quad \eta_k, \chi_k, \varphi_k \in A(U), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В следующем разделе мы докажем разрешимость поставленных задач на функции $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$, а в последующих займёмся установлением достаточных условий, при которых ряды (1.8) и (1.9) сходятся к решениям задач (1.6) и (1.10) соответственно.

1.4. Разрешимость задач для функций $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$

Будем искать в классе $A(U)$ решение $\mathring{\varphi}_k(y)$ задачи

$$\begin{cases} y^2\mathring{\varphi}''_k(y) + c(y)\mathring{\varphi}'_k(y) + 2yr_k\mathring{\varphi}'_k(y) + r_k(r_k-1)\mathring{\varphi}_k(y) + \\ \qquad + r_k\frac{c(y)}{y}\mathring{\varphi}_k(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\mathring{\varphi}_k(y) = 0, & 0 < y < b, \\ \mathring{\varphi}_k(0) = 1, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Теорема 1.1. *В условиях задачи (1.6) при каждом $k \in \mathbb{N}$ существует единственное решение $\mathring{\varphi}_k(y)$ задачи (1.12).*

Доказательство. Так как решение ищется в классе аналитических функций, будем искать функцию $\mathring{\varphi}_k(y)$ в виде ряда Тейлора:

$$\mathring{\varphi}_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{kn} y^n. \tag{1.13}$$

Подставим этот ряд и ряды (1.7) в уравнение (1.12). Получим

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\varphi_{kn}y^n + \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty} n\varphi_{kn}y^n \left[\sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m + 2yr_k\right] +$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{kn}y^n \left[r_k(r_k-1) + \frac{r_k}{y}\sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m - \sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m - \pi^2k^2\right] = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot n(n-1)\varphi_{kn} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n} m\varphi_{km}c_{n-m+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot 2r_kn\varphi_{kn} +$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n} \varphi_{km}\left(r_kc_{n-m+1} - a_{n-m}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot r_k(r_k-1)\varphi_{kn} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \pi^2k^2\varphi_{kn}.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях y, получим рекуррентные формулы для φ_{kn}:

$$n(n-1)\varphi_{kn} + \sum_{m=0}^{n-1} m\varphi_{km}c_{n-m+1} + n\varphi_{kn}c_1 + 2r_kn\varphi_{kn} +$$

$$+\sum_{m=0}^{n-1} \varphi_{km}\left(r_kc_{n-m+1} - a_{n-m}\right) + \varphi_{kn}\left(r_kc_1 - a_0\right) + r_k(r_k-1)\varphi_{kn} = \pi^2k^2\varphi_{kn},$$

$$\varphi_{kn} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \varphi_{km} \left(a_{n-m} - (r_k + m) c_{n-m+1}\right)}{nc_1 + n(n-1) + 2r_k n + r_k c_1 - a_0 + r_k(r_k - 1) - \pi^2 k^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \varphi_{km} \left(a_{n-m} - (r_k + m) c_{n-m+1}\right)}{n(n-1) + 2r_k n + nc_1 + r_k(r_k + c_1 - 1) - \pi^2 k^2 - a_0} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \varphi_{km} \left(a_{n-m} - (r_k + m) c_{n-m+1}\right)}{n(n-1) + 2r_k n + nc_1 - r_k r_k^- - \pi^2 k^2 - a_0} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \varphi_{km} \left(a_{n-m} - (r_k + m) c_{n-m+1}\right)}{n(n-1) + 2r_k n + nc_1}, \quad n > 0,$$

$$\varphi_{k,0} = 1,$$

таким образом, все коэффициенты разложения функции $\mathring{\varphi}_k(y)$ определяются однозначно, из чего следует единственность решения задачи (1.12).

Чтобы доказать существование решения задачи (1.12), покажем, что построенный ряд Тейлора сходится в некоторой окрестности точки $y = 0$. Функции $a(y)$ и $c(y)/y$ аналитичны в U, а значит, для их коэффициентов Тейлора выполнены неравенства Коши [20, с. 18]:

$$|a_n|, |c_{n+1}| \leqslant \frac{M}{R_1^n}, \quad b < R_1 < R,$$

где $M > 0$ зависит только от выбора R_1. Для произвольного $M_1 \geqslant 1$ и данного M существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $n(n-1)+2r_k n+nc_1 > nMM_1$, $1+r_k \leqslant n$ при $n \geqslant n_0$. Выберем $p > 1$ таким, чтобы

$$|\varphi_{k,n}| \leqslant \frac{p^n}{R_1^n}, \quad n = \overline{0, n_0 - 1}.$$

Методом математической индукции покажем, что данное неравенство верно для всех $n \in \mathbb{N}_0$ при некотором выборе M_1. Полагая оценку верной для $n = 0, 1, ..., N-1$ покажем, что она верна для индекса $N > n_0$, используя рекуррентную формулу.

$$|\varphi_{kN}| = \left| \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \varphi_{km} \left(a_{N-m} - (r_k + m) c_{N-m+1} \right)}{N(N-1) + 2r_k N + N c_1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \frac{p^m}{R_1^m} \left(\frac{M}{R_1^{N-m}} + (r_k + N) \frac{M}{R_1^{N-m}} \right)}{N M M_1} \leqslant \frac{1}{R_1^N} \cdot \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} p^m \left(1 + r_k + N \right)}{N M_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{N-1} p^m \cdot \frac{1}{R_1^N} \cdot \frac{2}{M_1} = \frac{1 - p^N}{1 - p} \cdot \frac{1}{R_1^N} \cdot \frac{2}{M_1} < \frac{p^N}{R_1^N},$$

если выбрать $M_1 = 2/(p-1)$. Таким образом, в силу теоремы Коши-Адамара, ряд (1.13) сходится при $|y| < R_1/p$.

Заметим, что уравнение (1.12) не имеет в круге U иных особых точек, кроме точки $y = 0$. Из этого следует, что функция (1.13), определённая и являющаяся решением уравнения (1.12) при $|y| < R_1/p$ не имеет особых точек в области U [30, с. 102], а значит, ряд (1.13) сходится в $|y| < R$ к решению задачи (1.12) по построению. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь задачу нахождения функций $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y)$ из класса $A(U)$ таких, что

$$\begin{cases} y^2 \eta_k''(y) + c(y) \eta_k'(y) - (\pi^2 k^2 + a(y)) \eta_k(y) + 2y \chi_k'(y) + \frac{c(y)}{y} \chi_k(y) - \chi_k(y) = f_k(y), \\ y^2 \chi_k''(y) + c(y) \chi_k'(y) - (\pi^2 k^2 + a(y)) \chi_k(y) = 0, \\ \eta_k, \chi_k \in A(U). \end{cases} \tag{1.14}$$

Теорема 1.2. *В условиях задачи (1.6) пусть $f_k \in A(U)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Тогда решение $(\eta_k(y), \chi_k(y))$ задачи (1.14) существует. Если $r_k \notin \mathbb{N}$, то решение единственно и $\chi_k(y) \equiv 0$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1. Будем искать решение в виде

$$\eta_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{kn} y^n, \quad \chi_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{kn} y^n. \tag{1.15}$$

Пользуясь аналитичностью правой части, мы также разложим её в ряд Тейлора:

$$f_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{kn} y^n, \quad |y| < R. \tag{1.16}$$

Подставим ряды в дифференциальные уравнения (1.14).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\eta_{kn} y^n + \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty} n\eta_{kn} y^n \sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m - \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{kn} y^n \left[\sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m + \pi^2 k^2\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f_{kn} y^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{kn} y^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n\chi_{kn} y^n - \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{kn} y^n \sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\chi_{kn} y^n + \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty} n\chi_{kn} y^n \sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m - \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{kn} y^n \left[\sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m + \pi^2 k^2\right] = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot n(n-1)\eta_{kn} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n} m\eta_{km} c_{n-m+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \pi^2 k^2 \eta_{kn} - \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n} \eta_{km} a_{n-m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot f_{kn} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \chi_{kn} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot n\chi_{kn} - \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n} \chi_{km} c_{n-m+1},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot n(n-1)\chi_{kn} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n} m\chi_{km} c_{n-m+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \pi^2 k^2 \chi_{kn} -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n} \chi_{km} a_{n-m} = 0,$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, получим

$$\nu(n,k)\eta_{kn} + \sum_{m=0}^{n-1} m\eta_{km} c_{n-m+1} - \sum_{m=0}^{n-1} \eta_{km} a_{n-m} =$$

$$= f_{kn} + (1-2n)\chi_{kn} - \sum_{m=0}^{n} \chi_{km} c_{n-m+1},$$

$$\nu(n,k)\chi_{kn}+\sum_{m=0}^{n-1} m\chi_{km}c_{n-m+1}-\sum_{m=0}^{n-1}\chi_{km}a_{n-m}=0,$$
$$\nu(n,k)=n(n+c_1-1)-\pi^2k^2-a_0.$$

Вид рекуррентных формул будет зависеть от того, обращается ли $\nu(n,k)$ в нуль. Так как $\nu(n,k)$ строго возрастает по n при фиксированном k, то индекс $n_0\in\mathbb{N}_0$ такой, что $\nu(n_0,k)=0$ может быть только один:

$$0=\nu(n_0,k)=n_0(n_0+c_1-1)-\pi^2k^2-a_0=n_0(n_0-r_k-r_k^-)+r_kr_k^-=$$

$$=n_0(n_0-r_k+r_k+c_1-1)-r_k(r_k+c_1-1)=n_0^2+n_0(c_1-1)-r_k^2-r_k(c_1-1),$$
$$r_k=\frac{c_1-1-\sqrt{(c_1-1)^2+4n_0^2+4n_0(c_1-1)}}{-2}=\frac{c_1-1-(c_1-1+2n_0)}{-2}=n_0.$$

Таким образом, $\nu(n,k)=0$ тогда и только тогда, когда $r_k=n$.

Пусть $r_k\notin\mathbb{N}$. Тогда $\nu(n,k)\neq 0$ и мы получаем рекуррентные формулы:

$$\chi_{kn}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\chi_{km}(a_{n-m}-mc_{n-m+1})}{\nu(n,k)},\quad n\in\mathbb{N},\quad \chi_{k,0}=0, \tag{1.17}$$

из чего следует, что $\chi_{kn}\equiv 0$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Соответственно,

$$\eta_{kn}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\eta_{km}(a_{n-m}-mc_{n-m+1})+f_{kn}}{\nu(n,k)},\quad n\in\mathbb{N},\quad \eta_{k,0}=\frac{f_{k,0}}{\nu(0,k)}. \tag{1.18}$$

Формулы (1.17) и (1.18) определяют функции $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y)\equiv 0$ однозначно, если $r_k\notin\mathbb{N}$.

Рассмотрим случай $r_k\in\mathbb{N}$. Тогда формулы (1.17) и (1.18) верны лишь при $n=0,1,...,r_k-1$. При $n=r_k$ мы получим:

$$0\cdot\eta_{kn}+\sum_{m=0}^{n-1} m\eta_{km}c_{n-m+1}-\sum_{m=0}^{n-1}\eta_{km}a_{n-m}=f_{kn}+(1-c_1-2n)\chi_{kn},$$
$$0\cdot\chi_{kn}=0,$$

Множитель $1-c_1-2n=r_k+r_k^- -2r_k=r_k^- -r_k<0$, а значит, мы можем выбрать

$$\eta_{k,r_k}=0,\quad \chi_{k,r_k}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{r_k-1}\eta_{km}(mc_{r_k-m+1}-a_{r_k-m})-f_{k,r_k}}{1-c_1-2r_k}.$$

Тогда

$$\chi_{kn}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\chi_{km}(a_{n-m}-mc_{n-m+1})}{\nu(n,k)},\quad n>r_k, \tag{1.19}$$

$$\eta_{kn}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\eta_{km}(a_{n-m}-mc_{n-m+1})+f_{kn}+(1-2n)\chi_{kn}-\sum\limits_{m=0}^{n}\chi_{km}c_{n-m+1}}{\nu(n,k)},\quad n>r_k. \tag{1.20}$$

Полученные формулы позволяют определить все коэффициенты η_{kn} и χ_{kn}, но уже не однозначно.

Покажем, что ряды (1.15) сходятся при $|y|<R$. Для произвольного $R_1\in(b,R)$ найдём $M>1$ такой, что

$$|a_n|,|c_{n+1}|,|f_{kn}|\leqslant\frac{M}{R_1^n},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Для произвольного $M_1\geqslant 1$ выберем n_0 такое, что $\nu(n,k)\geqslant nMM_1$ и $n>r_k$ при $n\geqslant n_0$. Выберем также число $p>2$ таким образом, чтобы

$$|\eta_{kn}|,|\chi_{kn}|\leqslant\frac{p^n}{R_1^n},\quad n=\overline{0,n_0}.$$

Методом математической индукции покажем, что последняя оценка верна для любого n. Воспользуемся формулами (1.19) и (1.20).

$$|\chi_{kn}|=\left|\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\chi_{km}(a_{n-m}-mc_{n-m+1})}{\nu(n,k)}\right|\leqslant\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\frac{p^m}{R_1^m}\left(\frac{M}{R_1^{n-m}}+n\frac{M}{R_1^{n-m}}\right)}{nMM_1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{R_1^n}\cdot\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}p^m}{M_1}=\frac{1}{R_1^n}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}\cdot\frac{2}{M_1}<\frac{p^n}{R_1^n},$$

если выбрать $M_1 \geqslant 2$.

$$|\eta_{kn}| = \left| \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \eta_{km}(a_{n-m} - mc_{n-m+1}) + f_{kn} + (1-2n)\chi_{kn} - \sum\limits_{m=0}^{n} \chi_{km} c_{n-m+1}}{\nu(n,k)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{p^m}{R_1^m}\left(\frac{M}{R_1^{n-m}} + n\frac{M}{R_1^{n-m}}\right) + \frac{M}{R_1^n} + (1+2n)\frac{p^n}{R_1^n} + \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{p^m}{R_1^m}\frac{M}{R_1^{n-m}}}{nMM_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{p^m}{R_1^m}\left(\frac{M}{R_1^{n-m}} + \frac{M}{R_1^{n-m}}\right) + \frac{M}{R_1^n} + (1+2+M)\frac{p^n}{R_1^n} + \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{p^m}{R_1^m}\frac{M}{R_1^{n-m}}}{MM_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R_1^n} \cdot \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} 2p^m + 1 + 4p^n + \sum\limits_{m=0}^{n-1} p^m}{M_1} \leqslant \frac{1}{R_1^n} \cdot \frac{3 \cdot \frac{p^n - 1}{p-1} + 5p^n}{M_1} < \frac{p^n}{R_1^n} \cdot \frac{8}{M_1} \leqslant \frac{p^n}{R_1^n},$$

если $M_1 = 8$.

Из полученных оценок заключаем, что ряды (1.15) сходятся при $|y| < R_1/p$. Так как уравнения (1.14) не имеют иных, кроме $y = 0$, особых точек в U, то по аналогии с доказательством теоремы 1.1 мы заключаем, что ряды (1.15) сходятся при $|y| < R$ к решению задачи (1.14). Теорема доказана. □

Лемма 1.4. *При всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathring{\varphi}_k(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in [0, b]$.*

Доказательство. Заметим, что функция $\hat{\varphi}_k(y) = g_k(y) \cdot \mathring{\varphi}_k(y)$ является решением уравнения (1.3) при $m = 2$, при этом $\hat{\varphi}_k(0) = 0$. Следовательно, в силу леммы 1.2, $\hat{\varphi}_k(\xi) \neq 0$, если $\xi \in (0, b]$. При этом

$$\mathring{\varphi}_k(\xi) = \frac{\hat{\varphi}_k(\xi)}{g_k(\xi)} \neq 0.$$

Для $\xi = 0$ утверждение очевидно из построения $\mathring{\varphi}_k(y)$. Лемма доказана. □

Пользуясь теоремами 1.1, 1.2 и леммой 1.4, мы можем построить аналитическую функцию $\varphi_k \in A(U)$, удовлетворяющую условию $\eta_k(b) = -\varphi_k(b)$, как

$$\varphi_k(y) = -\frac{\eta_k(b)}{\mathring{\varphi}_k(b)} \cdot \mathring{\varphi}_k(y), \quad y \in U. \tag{1.21}$$

Таким образом, были построены все функции $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$.

1.5. Свойства и асимптотика функций $\varphi_k(y)$

Лемма 1.5. *Решения* $\mathring{\varphi}_k(y)$ *задач* (1.12) *равномерно ограничены в классе* $C^2[0,b]$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем лемму методом мажорантных функций [20, с. 16]. В ходе доказательства теоремы 1.1 были получены формулы

$$\varphi_{kn} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \varphi_{km} \left(a_{n-m} - (r_k+m)c_{n-m+1}\right)}{n(n-1) + 2r_k n + nc_1}, \quad n > 0, \quad \varphi_{k,0} = 1$$

для коэффициентов рядов Тейлора функций $\mathring{\varphi}_k(y)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \vartheta' = d(y)\vartheta, \quad y \in (0,b), \\ \vartheta(0) = 1, \end{cases}$$

где функция $d(y)$ определена рядом

$$d(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(|c_{n+2}| + |a_{n+1}|\right) y^n.$$

Заданная таким образом функция $d(y)$ аналитична при $|y| < R$. Следовательно, существует решение задачи Коши $\vartheta(y)$, также аналитическое при $|y| < R$. Найдём выражения для коэффициентов Тейлора функции $\vartheta(y)$.

$$\vartheta(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \vartheta_n y^n, \quad |y| < R,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\vartheta_n y^n = y \sum_{n=0}^{+\infty} \vartheta_n y^n \sum_{m=0}^{+\infty} \left(|c_{m+2}| + |a_{m+1}|\right) y^m =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} y^n \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \vartheta_m \left(|c_{n-m+1}| + |a_{n-m}|\right),$$

$$\vartheta_n = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} \vartheta_m \left(|c_{n-m+1}| + |a_{n-m}|\right)}{n}, \quad n > 0, \quad \vartheta_0 = 1.$$

По построению $\vartheta_0 = \varphi_{k,0}$. Пусть $|\varphi_{k,n}| \leqslant \vartheta_n$ при $n = 0, 1, ..., N-1$. Тогда при $n = N$ мы получим

$$|\varphi_{kN}| = \left| \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \varphi_{km} \left(a_{N-m} - (r_k + m) c_{N-m+1}\right)}{N(N-1) + 2r_k N + N c_1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \vartheta_m \left(|a_{N-m}| + (r_k + N)|c_{N-m+1}|\right)}{N(N + 2r_k - 1)} \leqslant \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \vartheta_m \left(|a_{N-m}| + |c_{N-m+1}|\right)}{N} = \vartheta_N.$$

Таким образом, $|\varphi_{k,n}| \leqslant \vartheta_n$ при $n \in \mathbb{N}_0$, а значит,

$$|\mathring{\varphi}_k(y)| \leqslant \vartheta(b), \quad |\mathring{\varphi}_k'(y)| \leqslant \vartheta'(b), \quad |\mathring{\varphi}_k''(y)| \leqslant \vartheta''(b).$$

Величины в правых частях неравенств не зависят от $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 1.3.

$$\mathring{\varphi}_k(y) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathring{\varphi}(y) \equiv \exp\left(-\int\limits_0^y \frac{\bar{c}(\xi)}{2\xi^2}\, d\xi\right),$$

где $\bar{c}(y) = c(y) - y c_1$, *сходимость в пространстве* $C^1[0, b]$.

Доказательство. В силу леммы 1.5, функции $\mathring{\varphi}_k(y)$ и $\mathring{\varphi}_k'(y)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Следовательно, в силу теоремы Арцела [24, с. 37, теорема 1.12], [24, с. 40, замечание 3], существует подпоследовательность $\mathring{\varphi}_{k_n}(y) \to \mathring{\varphi}(y)$ при $n \to +\infty$, сходимость в $C^1[0, b]$.

Функции $\mathring{\varphi}_k(y)$ являются решениями задач (1.12):

$$\begin{cases} \frac{y^2}{r_k}\mathring{\varphi}_k''(y) + \frac{\bar{c}(y)}{r_k}\mathring{\varphi}_k'(y) + y\left(\frac{c_1}{r_k} + 2\right)\mathring{\varphi}_k'(y) + \\ \qquad\qquad + \frac{\bar{c}(y)}{y}\mathring{\varphi}_k(y) - \frac{\bar{a}(y)}{r_k}\mathring{\varphi}_k(y) = 0, & 0 < y < b, \\ \mathring{\varphi}_k(0) = 1, & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где $\bar{a}(y) = a(y) - a_0$. Данная задача допускает предельный переход на подпоследовательности $\mathring{\varphi}_{k_n}(y)$ при $n \to +\infty$. Предельная задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} 2\mathring{\varphi}'(y) + \dfrac{\bar{c}(y)}{y^2}\mathring{\varphi}(y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ \mathring{\varphi}(0) = 1. \end{cases}$$

$$\bar{c}(y) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n y^n \sim y^2, \quad y \to 0,$$

следовательно, предельная задача Коши имеет единственное решение

$$\mathring{\varphi}(y) = \exp\left(-\int\limits_0^y \frac{\bar{c}(\xi)}{2\xi^2}\, d\xi \right).$$

Таким образом, множество функций $\{\mathring{\varphi}_k(y)\}_{k=1}^{+\infty}$ имеет в $C^1[0,b]$ единственную предельную точку $\mathring{\varphi}(y)$. Покажем, что данная последовательность сходится к ней от противного, то есть пусть найдутся $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\mathring{\varphi}_{k_n}(y)$ такие, что

$$||\mathring{\varphi}_{k_n} - \mathring{\varphi}||_{C^1[0,b]} \geqslant \varepsilon.$$

Подпоследовательность $\mathring{\varphi}_{k_n}(y)$ по-прежнему обладает свойством предкомпактности, а значит, существует её подпоследовательность $\mathring{\varphi}_{k_{n_m}}(y) \to \mathring{\varphi}(y)$ при $m \to +\infty$ в $C^1[0,b]$, то есть при $m \geqslant m_0(\varepsilon)$

$$\left|\left|\mathring{\varphi}_{k_{n_m}} - \mathring{\varphi}\right|\right|_{C^1[0,b]} < \varepsilon,$$

что противоречит предположению об отсутствии сходимости. Теорема доказана.

□

Рассмотрим далее функцию

$$Y_k^0(y) = g_k(y) \cdot \mathring{\varphi}_k(y), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Эта функция является решением дифференциального уравнения (1.3), удовлетворяющим краевому условию $Y_k^0(0) = 0$.

Теорема 1.4. *Существуют постоянные* $0 < C_1 < C_2$, *не зависящие от* $k \in \mathbb{N}$, *такие, что при всех* $k \geqslant k_0$

$$C_1 \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k}, \quad y \in [0, b],$$

$$C_1 \frac{r_k}{y} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant \frac{dY_k^0}{dy}(y) \leqslant C_2 \frac{r_k}{y} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k}, \quad y \in (0, b].$$

Доказательство.

$$\frac{dY_k^0}{dy}(y) = \frac{r_k}{y} \cdot g_k(y) \cdot \mathring{\varphi}_k(y) + g_k(y) \cdot \mathring{\varphi}_k'(y) = \frac{r_k}{y} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \left(\mathring{\varphi}_k(y) + \frac{y \mathring{\varphi}_k'(y)}{r_k}\right),$$

из чего следует

$$\frac{dY_k^0}{dy}(y) \leqslant \frac{r_k}{y} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \left(||\mathring{\varphi}_k||_{C[0,b]} + b||\mathring{\varphi}_k'||_{C[0,b]}\right),$$

$$Y_k^0(y) \leqslant \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} ||\mathring{\varphi}_k||_{C[0,b]},$$

то есть в качестве C_2 можно выбрать число $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}}(||\mathring{\varphi}_k||_{C[0,b]} + b||\mathring{\varphi}_k'||_{C[0,b]})$, которое конечно в силу леммы 1.5.

Для проведения оценки снизу заметим, что

$$\frac{dY_k^0}{dy}(y) \geqslant \frac{r_k}{y} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \left(\min_{y \in [0,b]} \mathring{\varphi}_k(y) - \frac{b}{r_k}||\mathring{\varphi}_k'||_{C[0,b]}\right),$$

$$Y_k^0(y) \geqslant \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \min_{y \in [0,b]} \mathring{\varphi}_k(y),$$

В силу леммы 1.4, $\min\limits_{y \in [0,b]} \mathring{\varphi}_k(y) > 0$. Предположим, что $\min\limits_{y \in [0,b]} \mathring{\varphi}_k(y) \to 0$ при $k \to +\infty$. Но тогда $\min\limits_{y \in [0,b]} \mathring{\varphi}(y) = 0$, а это противоречит явному виду функции $\mathring{\varphi}(y)$ (теорема 1.3), следовательно, $\min\limits_{y \in [0,b]} \mathring{\varphi}_k(y) \geqslant \delta > 0$.

Так как $b||\mathring{\varphi}_k'||_{C[0,b]}/r_k \to 0$ при $k \to +\infty$ в силу леммы 1.5, то существует номер k_0 такой, что при всех $k \geqslant k_0$ величины $b||\mathring{\varphi}_k'||_{C[0,b]}/r_k < \delta/2$, но тогда $\min\limits_{y \in [0,b]} \mathring{\varphi}_k(y) - b||\mathring{\varphi}_k'||_{C[0,b]}/r_k \geqslant C_1 \equiv \delta/2 > 0$. Теорема доказана. □

1.6. Проблема малых знаменателей в коэффициентах $\eta_k(y)$

Докажем существование решения расширенной задачи (1.10) в случае отсутствия логарифмических особенностей ($\chi_k(y) \equiv 0$). Так как переменные τ_k являются независимыми друг от друга, то достаточно доказать по отдельности сходимость следующих рядов:

$$v(x, y, \tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tau_k \varphi_k(y) \psi_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \psi_k(x).$$

В данном разделе мы установим достаточные условия сходимости второго из указанных рядов. В случае отсутствия логарифмических особенностей $r_k \notin \mathbb{N}$, функции $\eta_k(y)$ однозначно определяются формулами (1.15) и (1.18). Получению эффективных оценок препятствуют знаменатели $\nu(n, k)$, которые могут быть малы. Введём обозначения:

$$J_k \equiv \underset{n \in \mathbb{N}_0}{\operatorname{argmin}} |\nu(n, k)|, \quad \delta_k \equiv \nu(J_k, k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1.6. *Пусть $r_k \notin \mathbb{N}$. Тогда найдётся номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $k \geqslant k_0$ выполнено*

$$|\nu(n, k)| \geqslant \begin{cases} J_k^2/2, & n \leqslant J_k/2 - 2 - c_1, \\ J_k(J_k - n - 2 - c_1), & J_k/2 - 2 - c_1 < n < J_k - 3 - c_1, \\ J_k, & J_k - 3 - c_1 \leqslant n < J_k, \\ J_k, & J_k < n \leqslant J_k + 3 + c_1, \\ (n - J_k - 2 - c_1)(n + J_k - 1), & J_k + 3 + c_1 < n. \end{cases}$$

Доказательство.

$$|\nu(J_k, k) - \nu(J_k \pm 1, k)| = |J_k(J_k + c_1 - 1) - (J_k \pm 1)(J_k \pm 1 + c_1 - 1)| =$$

$$= |J_k^2 + J_k(c_1 - 1) - J_k^2 - J_k(c_1 - 1 \pm 1) \mp (J_k \pm 1 + c_1 - 1)| =$$

$$= |2J_k + c_1 - 1 \pm 1|,$$

из чего следует $|\delta_k| \leqslant J_k + c_1/2$, а $|\nu(n,k)| \geqslant J_k$, если $n \neq J_k$, так как иное противоречило бы выбору J_k.

Из определения δ_k имеем:

$$\pi^2 k^2 + a_0 = J_k(J_k + c_1 - 1) - \delta_k,$$

$$|\nu(n,k)| = |n(n + c_1 - 1) - a_0 - \pi^2 k^2| = |n(n + c_1 - 1) - J_k(J_k + c_1 - 1) + \delta_k| \geqslant$$

$$\geqslant |J_k - n| \cdot (J_k + n + c_1 - 1) - (J_k + c_1/2).$$

Если $n \leqslant J_k/2 - 2 - c_1$, то

$$|\nu(n,k)| \geqslant |J_k - J_k/2 + 2 + c_1| \cdot (J_k + n + c_1 - 1) - (J_k + c_1/2) >$$

$$> (J_k/2 + c_1) \cdot (J_k + n + c_1 - 1) - (J_k + c_1/2) = (J_k/2 + c_1) \cdot (J_k + n + c_1 - 3) \geqslant$$

$$\geqslant J_k^2/2, \quad n \geqslant 4.$$

Далее, если $J_k/2 - 2 - c_1 < n < J_k - 3 - c_1$, то

$$|\nu(n,k)| \geqslant |J_k - n| \cdot (J_k + n + c_1 - 1) - (J_k + n + c_1 - 1) \geqslant$$

$$\geqslant (J_k - n - 1) \cdot (J_k + n + c_1 - 1) > J_k(J_k - n - 2 - c_1), \quad n \geqslant 1.$$

Наконец, при $J_k + 3 + c_1 < n$ мы получим

$$|\nu(n,k)| \geqslant (n - J_k) \cdot (J_k + n + c_1 - 1) - (J_k + n + c_1 - 1) =$$

$$= (n - J_k - 1) \cdot (J_k + n + c_1 - 1) > (n - J_k - 2 - c_1)(n + J_k - 1).$$

Осталось заметить, что при $n < 4$

$$|\nu(n,k)| \geqslant (J_k - n) \cdot (J_k + n + c_1 - 1) - (J_k + c_1/2) >$$

$$> (J_k - 4) \cdot (J_k + c_1 - 1) - (J_k + c_1/2) = J_k^2 + C_1 \cdot J_k + C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Тогда $|\nu(n,k)| \geqslant J_k^2/2$ при достаточно больших k. Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.7. *Пусть $r_k \notin \mathbb{N}$ и для любого $R_1 \in (b, R)$ найдётся постоянная $M > 0$, не зависящая от номера k, такая, что*

$$|f_{kn}| \leqslant \frac{M}{R_1^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда найдётся номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $k \geqslant k_0$ выполнено

$$R_1^n |\eta_{kn}| \leqslant \begin{cases} \frac{2M}{J_k^2} \cdot \left(1 + \frac{4M}{J_k}\right)^n, & n \leqslant J_k/2 - 2 - c_1, \\ \frac{M}{\ln J_k} \cdot \mathcal{M}_{kn} \left(1 + \frac{4M}{\ln J_k}\right)^n, & J_k/2 - 2 - c_1 < n, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{M}_{kn} = \begin{cases} \exp\left(2 \ln J_k \cdot \ln \ln J_k\right), & n < J_k, \\ J_k \ln J_k \max\left(1, \frac{1}{|\delta_k|}\right) \cdot \exp\left(4 \ln J_k \cdot \ln(2 \ln J_k)\right), & n \geqslant J_k. \end{cases}$$

Доказательство. Пользуясь условием и неравенствами Коши для коэффициентов $a(y)$ и $c(y)$, найдём для фиксированного $R_1 \in (b, R)$ число $M > 0$ такое, что

$$|a_n|, |c_{n+1}|, |f_{kn}| \leqslant \frac{M}{R_1^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем индекс $k \geqslant k_0$, где k_0 выбирается из леммы 1.6 и докажем требуемые неравенства методом математической индукции. Воспользуемся соотношениями (1.18).

$$|\eta_{k,0}| \leqslant \frac{2M}{J_k^2}.$$

Рассмотрим $0 < n \leqslant J_k/2 - 2 - c_1$. Тогда

$$|\eta_{kn}| \leqslant \frac{2}{J_k^2} \cdot \left[\sum_{m=0}^{n-1} |\eta_{km}| \left(\frac{M}{R_1^{n-m}} + m\frac{M}{R_1^{n-m}}\right) + \frac{M}{R_1^n}\right],$$

из чего мы получаем, имея в виду, что $m + 1 \leqslant n < J_k$, оценки

$$R_1^n \cdot |\eta_{kn}| \leqslant \frac{2M}{J_k^2} \cdot \left[1 + \sum_{m=0}^{n-1} R_1^m \cdot |\eta_{km}| \left(1 + m\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{J_k} \left[\frac{1}{J_k} + 2 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{2M}{J_k^2} \cdot \left(1 + \frac{4M}{J_k}\right)^m\right] =$$

$$= \frac{2M}{J_k}\left[\frac{1}{J_k} + \frac{4M}{J_k^2}\cdot\frac{1-(1+4M/J_k)^n}{1-(1+4M/J_k)}\right] = \frac{2M}{J_k}\left[\frac{1}{J_k} + \frac{(1+4M/J_k)^n - 1}{J_k}\right] =$$
$$= \frac{2M}{J_k^2}\cdot(1+4M/J_k)^n.$$

Так как при достаточно больших k имеют место соотношения $\ln J_k < J_k$ и $\ln J_k < J_k^2/2$, то также можно записать, что

$$|\eta_{kn}| \leqslant \frac{M}{\ln J_k}\cdot\mathcal{F}_{kn}\left(1+\frac{4M}{\ln J_k}\right)^n, \quad 0 \leqslant n \leqslant J_k/2 - 2 - c_1,$$

где $\mathcal{F}_{kn} \equiv 1$ при $0 \leqslant n \leqslant J_k/2 - 2 - c_1$.

Тогда для всех остальных индексов n справедливо

$$R_1^n \cdot |\eta_{kn}| \leqslant \frac{M(n-1)}{|\nu(n,k)|}\cdot\left[1 + 2\sum_{m=0}^{n-1}\frac{M}{\ln J_k}\cdot\mathcal{F}_{km}\left(1+\frac{4M}{\ln J_k}\right)^m\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\ln J_k}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ln J_k\cdot\mathcal{F}_{k,n-1}}{|\nu(n,k)|}\cdot\left[1+\frac{2M}{\ln J_k}\sum_{m=0}^{n-1}\left(1+\frac{4M}{\ln J_k}\right)^m\right] =$$
$$= \frac{M}{\ln J_k}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ln J_k\cdot\mathcal{F}_{k,n-1}}{|\nu(n,k)|}\cdot\left[1+\frac{2M}{\ln J_k}\cdot\frac{1-(1+4M/\ln J_k)^n}{1-(1+4M/\ln J_k)}\right] <$$
$$< \frac{M}{\ln J_k}\cdot\frac{(n-1)\cdot\ln J_k\cdot\mathcal{F}_{k,n-1}}{|\nu(n,k)|}\cdot\left(1+\frac{4M}{\ln J_k}\right)^n,$$

данные выкладки верны, если определить

$$\mathcal{F}_{kn} = \max\left[\frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{|\nu(n,k)|}, 1\right]\cdot\mathcal{F}_{k,n-1} \geqslant \mathcal{F}_{k,n-1}, \quad n > J_k/2 - 2 - c_1.$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство леммы, достаточно установить соотношения $\mathcal{F}_{kn} \leqslant \mathcal{M}_{kn}$ при $n > J_k/2 - 2 - c_1$ и $k \geqslant k_0$.

Пусть $n < J_k$. Тогда из леммы 1.6 следует, что

$$\frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{|\nu(n,k)|} \leqslant \frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{J_k\max(J_k-n-2-c_1,1)} \leqslant \frac{\ln J_k}{\max(J_k-n-2-c_1,1)}.$$

Отсюда мы можем заключить, что

$$\mathcal{F}_{k,J_k-1} \leqslant (\ln J_k)^L,$$

где L это количество индексов $n < J_k$, для которых

$$\frac{\ln J_k}{\max(J_k - n - 2 - c_1, 1)} > 1.$$

Данное неравенство выполнено, если выполнено $J_k - n - 2 - c_1 < \ln J_k$. Из последнего мы получаем, что $L \leqslant J_k - n < \ln J_k + 2 + c_1 < 2\ln J_k$ при достаточно больших k. Тогда

$$\mathcal{F}_{kn} \leqslant \mathcal{F}_{k,J_k-1} \leqslant (\ln J_k)^{2\ln J_k} \equiv \exp\left(2\ln J_k \cdot \ln\ln J_k\right) \equiv \mathcal{M}_{kn}, \quad n < J_k.$$

Оценим $\mathcal{F}_{k,J_k}$.

$$\mathcal{F}_{k,J_k} = \max\left[\frac{(J_k-1)\cdot\ln J_k}{|\delta_k|}, 1\right] \cdot \mathcal{M}_{k,J_k-1} < J_k \ln J_k \max\left(\frac{1}{|\delta_k|}, 1\right) \cdot \mathcal{M}_{k,J_k-1}.$$

При $n > J_k$, применяя лемму 1.6, получим

$$\frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{|\nu(n,k)|} \leqslant \frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{\max((n-J_k-2-c_1)(n+J_k-1), J_k)}.$$

Пусть номер $N > J_k + 3 + c_1$. Тогда при $n \geqslant N$

$$\frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{|\nu(n,k)|} \leqslant \frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{(n-J_k-2-c_1)(n+J_k-1)} \leqslant \frac{\ln J_k}{n-J_k-2-c_1} \leqslant 1,$$

если также $N - J_k - 2 - c_1 \geqslant \ln J_k$. Тогда

$$\mathcal{F}_{kn} \leqslant \mathcal{F}_{kN}, \quad n \geqslant J_k.$$

$$\frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{|\nu(n,k)|} \leqslant \begin{cases} \frac{\ln J_k\cdot(J_k+3+c_1-1)}{J_k}, & J_k < n \leqslant J_k+3+c_1 \\ \frac{\ln J_k}{n-J_k-2-c_1}\cdot\frac{n-1}{n+J_k-1}, & J_k+3+c_1 < n, \end{cases}$$

и при достаточно больших номерах k имеет место

$$\frac{(n-1)\cdot\ln J_k}{|\nu(n,k)|} \leqslant 2\ln J_k,$$

но тогда при $n \geqslant J_k$, используя оценку $N - J_k \leqslant \ln J_k + 3 + c_1$, получим при достаточно больших k

$$\mathcal{F}_{kn} \leqslant \mathcal{F}_{kN} \leqslant \mathcal{F}_{k,J_K}\cdot(2\ln J_k)^{N-J_k} \leqslant \mathcal{F}_{k,J_K}\cdot(2\ln J_k)^{\ln J_k+3+c_1} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{F}_{k,J_K} \cdot \exp\left(2 \ln J_k \cdot \ln(2 \ln J_k)\right) \leqslant$$
$$\leqslant J_k \ln J_k \max\left(\frac{1}{|\delta_k|}, 1\right) \cdot \mathcal{M}_{k,J_k-1} \cdot \exp\left(2 \ln J_k \cdot \ln(2 \ln J_k)\right) \leqslant$$
$$\leqslant J_k \ln J_k \max\left(\frac{1}{|\delta_k|}, 1\right) \cdot \exp\left(4 \ln J_k \cdot \ln(2 \ln J_k)\right) \equiv \mathcal{M}_{kn}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.8. *Пусть выполнены все условия леммы 1.7. Тогда для любых* $q \in (b/R, 1)$ *и* $N \in \mathbb{N}_0$ *найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$|\eta_k^{(N)}(y)| \leqslant C\left(\frac{1}{J_k^2} + q^{J_k}\mathcal{N}_k\right), \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{N}_k = J_k \max\left(1, \frac{1}{|\delta_k|}\right) \cdot \exp\left(4 \ln J_k \cdot \ln(2 \ln J_k)\right).$$

Доказательство. Зафиксируем $q_1 \in (b/R_1, q)$ и введём обозначения $R_2 = qR_1$, $b < R_2 < R_1 < R$.

$$|\eta_k^{(N)}(y)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |n(n-1)...(n-N+1)| \cdot |\eta_{kn}| \cdot R_2^{n-N} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} n^N \cdot |\eta_{kn}| \cdot \frac{R_2^n}{R_2^N}, \quad y \in [-R_2, R_2], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Выберем $\alpha > 1$ и $C_1 > 0$ такие, что $q_2 = \alpha R_2/R_1 < q < 1$ и $n^N \cdot R_2^{-N} \leqslant C_1 \cdot q_2^n$. Тогда

$$|\eta_k^{(N)}(y)| \leqslant C_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cdot |\eta_{kn}| \cdot R_2^n, \quad y \in [-R_2, R_2], \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу леммы 1.7, при фиксированном $k \geqslant k_0$ имеет место оценка:

$$|\eta_k^{(N)}(y)| \leqslant C_1 \left[\sum_{n=N}^{\lfloor J_k/2-2-c_1 \rfloor} \left(\frac{\alpha R_2}{R_1}\right)^n \frac{2M}{J_k^2} \left(1 + \frac{4M}{J_k}\right)^n + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=\lfloor J_k/2-2-c_1 \rfloor}^{+\infty} \left(\frac{\alpha R_2}{R_1}\right)^n \frac{M}{\ln J_k} \mathcal{M}_{kn} \left(1 + \frac{4M}{\ln J_k}\right)^n \right]$$

Пусть k_0 также настолько велико, что при $k \geqslant k_0$ выполнено $q_2(1 + 4M/J_k) < q_2(1 + 4M/\ln J_k) < q$. Тогда

$$\sum_{n=N}^{\lfloor J_k/2-2-c_1\rfloor} \left(\frac{\alpha R_2}{R_1}\right)^n \frac{2M}{J_k^2}\left(1+\frac{4M}{J_k}\right)^n \leqslant \frac{2M}{J_k^2}\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{C_2}{J_k^2},$$

$$|\eta_k^{(N)}(y)| \leqslant C_1 \left[\frac{C_2}{J_k^2} + \frac{M\mathcal{M}_{k,J_k-1}}{\ln J_k}\sum_{n=\lfloor J_k/2-2-c_1\rfloor}^{J_k-1} q^n + \frac{M\mathcal{M}_{k,J_k}}{\ln J_k}\sum_{J_k}^{+\infty} q^n\right],$$

$$\frac{M\mathcal{M}_{k,J_k-1}}{\ln J_k}\sum_{n=\lfloor J_k/2-2-c_1\rfloor}^{J_k-1} q^n \leqslant \frac{M\exp(2\ln J_k \ln\ln J_k)}{\ln J_k}\sum_{n=\lfloor J_k/2-2-c_1\rfloor}^{+\infty} q^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\exp(2\ln J_k \ln\ln J_k)}{\ln J_k}\cdot\frac{q^{\lfloor J_k/2-2-c_1\rfloor}}{1-q} \leqslant \frac{Mq^{2\ln J_k \ln\ln J_k \log_q e + J_k/2}}{q^{3+c_1}(1-q)}.$$

При некоторых ограничениях на k_0 мы можем полагать, что $2\ln J_k \ln\ln J_k \log_q e > -J_k/4$. Тогда

$$\frac{M\mathcal{M}_{k,J_k-1}}{\ln J_k}\sum_{n=\lfloor J_k/2-2-c_1\rfloor}^{J_k-1} q^n \leqslant \frac{Mq^{J_k/4}}{q^{3+c_1}(1-q)}.$$

Наконец, выберем k_0 таким, чтобы при $k \geqslant k_0$ было выполнено $q^{J_k/4} < 1/J_k^2$. Тогда

$$\frac{M\mathcal{M}_{k,J_k-1}}{\ln J_k}\sum_{n=\lfloor J_k/2-2-c_1\rfloor}^{J_k-1} q^n \leqslant \frac{M}{q^{3+c_1}(1-q)}\cdot\frac{1}{J_k^2} \equiv \frac{C_3}{J_k^2}.$$

Таким образом, было доказано, что

$$|\eta_k^{(N)}(y)| \leqslant C_1\left[\frac{C_2}{J_k^2} + \frac{C_3}{J_k^2} + \frac{M\mathcal{M}_{k,J_k}}{\ln J_k}\sum_{J_k}^{+\infty} q^n\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left[\frac{C_2+C_3}{J_k^2} + \frac{M}{(1-q)\cdot\ln J_k}\cdot\mathcal{M}_{k,J_k}\cdot q^{J_k}\right] = C_1\left[\frac{C_2+C_3}{J_k^2} + C_4\mathcal{N}_k q^{J_k}\right],$$

где $C_4 = M/(1-q)$. Наконец, обозначив $M_k = \max\limits_{y\in[0,b]} |\eta_k^{(N)}(y)|$, $k = 1, 2, ..., k_0$, положим $M = \max(J_1^2 M_1, J_2^2 M_2, ..., J_{k_0}^2 M_{k_0}, C_1 \max(C_2 + C_3, C_4))$. Тогда

$$|\eta_k^{(N)}(y)| \leqslant M\left[\frac{1}{J_k^2} + \mathcal{N}_k q^{J_k}\right], \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма доказана. $\square$

Сформулируем на основе лемм 1.6, 1.7 и 1.8 достаточные условия получения эффективных оценок функций $|\eta_k(y)|$.

$$\begin{gathered}\forall\, k\in\mathbb{N}: r_k\notin\mathbb{N},\\ \forall\, R_1\in(b,R)\,\exists\, M>0: |f_{kn}|\leqslant \tfrac{M}{R_1^n},\quad n\in\mathbb{N}_0,\quad k\in\mathbb{N},\\ \exists\, C_\delta>0, q_0>\tfrac{b}{R}: \forall\, k\in\mathbb{N}: |\delta_k|\geqslant C_\delta q_0^{J_k}.\end{gathered} \tag{1.23}$$

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия* (1.23). *Тогда найдётся такая постоянная $A>0$, что при всех $k\in\mathbb{N}$ и $y\in[0,b]$ выполнено*

$$|\eta_k^{(N)}(y)|\leqslant \frac{A}{J_k^2},\quad N=0,1,2.$$

Доказательство. Для фиксированного $N=0,1,2$ применим оценку леммы 1.8 и третье из условий (1.23).

$$|\eta_k^{(N)}(y)|\leqslant C_N\left(\frac{1}{J_k^2}+J_k\frac{1}{C_\delta q_0^{J_k}}\cdot\exp\left(4\ln J_k\cdot\ln(2\ln J_k)\right)\cdot q^{J_k}\right)=$$

$$=C_N\left(\frac{1}{J_k^2}+\frac{1}{C_\delta}\cdot e^{J_k\ln\alpha+4\ln J_k\cdot\ln(2\ln J_k)+\ln J_k}\right),$$

где $\alpha=q/q_0<1$ при выборе $q\in(b/R,q_0)$. Тогда существует постоянная $B_N>0$ такая, что

$$e^{J_k\ln\alpha+4\ln J_k\cdot\ln(2\ln J_k)+\ln J_k}<\frac{B_N}{J_k^2},\quad k\in\mathbb{N},$$

$$|\eta_k^{(N)}(y)|\leqslant C_N\left(\frac{1}{J_k^2}+\frac{B_N}{C_\delta J_k^2}\right)=\frac{A_N}{J_k^2},\quad k\in\mathbb{N},$$

если выбрать $A_N=C_N+C_NB_N/C_\delta$. Для завершения доказательства леммы достаточно выбрать $A=\max(A_0,A_1,A_2)$. □

Теорема 1.6. *Пусть выполнены условия* (1.23). *Тогда равномерно по $y\in[0,b]$ выполнено*

$$\eta_k^{(N)}(y)=-\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2k^2}+O\left(\frac{1}{k^4}\right),\quad k\in\mathbb{N},\quad N=0,1,2.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$R_k(y)=\eta_k(y)+\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2},\quad k\in\mathbb{N},\quad y\in U.$$

Подставим эту функцию в левую часть первого дифференциального уравнения (1.14) и, используя тот факт, что данная $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y) \equiv 0$, получим

$$y^2 R_k''(y) + c(y) R_k'(y) - (\pi^2 k^2 + a(y)) R_k(y) =$$
$$= \frac{1}{\pi^2 k^2} \left[y^2 f_k''(y) + c(y) f_k'(y) - a(y) f_k(y) \right] \equiv \frac{F_k(y)}{\pi^2 k^2}.$$

Новая правая часть $F_k(y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.5, следовательно,

$$|\pi^2 k^2 \cdot R_k^{(N)}(y)| \leqslant \frac{A}{J_k^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b], \quad N = 0, 1, 2.$$

При $k \to +\infty$ величина J_k асимптотически эквивалентна πk. Таким образом, окончательно получаем

$$R_k^{(N)}(y) = O\left(\frac{1}{k^4}\right), \quad k \to +\infty, \quad y \in [0, b], \quad N = 0, 1, 2.$$

Лемма доказана. □

Теорема 1.7. *Пусть выполнены условия* (1.23) *и ряд Фурье* (1.11) *сходится равномерно по* $x \in [c, d] \subset (0, 1)$ *для любого фиксированного* $y \in [0, b]$. *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, *определяет в нём непрерывную функцию и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω.

Доказательство. Из теоремы 1.5 мы имеем оценки

$$|\eta_k(y)| \leqslant \frac{A}{J_k^2}, \quad |\eta_k'(y)| \leqslant \frac{A}{J_k^2}, \quad |\eta_k''(y)| \leqslant \frac{A}{J_k^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b].$$

Так как $|\psi_k(x)| \leqslant 1$ при $k \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$, то ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \psi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k'(y) \psi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k''(y) \psi_k(x)$$

сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$ согласно признаку Вейерштрасса. Из этого, в частности, следует непрерывность суммы исходного ряда в $\bar{\Omega}$.

Рассмотрим произвольный компакт $K \subset [c, d] \times [0, b] \subset (0, 1) \times [0, b]$. Рассмотрим на K ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y)\psi_k'(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y)\psi_k''(x).$$

В силу теоремы 1.6

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y)\psi_k''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{f_k(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) \cdot (-\pi^2 k^2 \sin \pi k x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \cdot \sin \pi k x + \sum_{k=1}^{+\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \cdot \sin \pi k x.$$

Первый ряд сходится равномерно на K по условию теоремы, второй — в силу признака Вейерштрасса.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\eta_k(y)\psi_k'(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\pi k \left(-\frac{f_k(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) \cos \pi k x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} (f_k(y))^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Здесь первое слагаемое сходится равномерно при фиксированном y в силу тождества Парсеваля, остальные слагаемые являются сходящимися числовыми рядами.

Таким образом, выполнены все достаточные условия [24, с. 29, теорема 1.9] для возможности дифференцирования исходного ряда под знаком суммы два раза по x и по y внутри области Ω. Теорема доказана. $\square$

1.7. Теорема сходимости формального решения расширенной задачи

Для доказательства разрешимости расширенной задачи (1.10) докажем следующую теорему.

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия* (1.23) *и ряд Фурье* (1.11) *сходится равномерно по* $x \in [c, d] \subset (0, 1)$ *для любого фиксированного* $y \in [0, b]$. *Тогда равномерно по* $y \in [0, b]$ *выполнено*

$$\varphi_k^{(N)}(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad N = 0, 1, 2,$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tau_k \varphi_k(y) \psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ *и определяет в нём непрерывную функцию, а ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(y) \varphi_k(y) \psi_k(x)$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, *определяет в нём непрерывную функцию и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω.

Доказательство.

$$\varphi_k(y) = -\frac{\eta_k(b)}{\mathring{\varphi}_k(b)} \cdot \mathring{\varphi}_k(y),$$

где функции $\mathring{\varphi}_k(y)$ в силу теоремы 1.3 и лемм 1.4, 1.5 равномерно ограничены вместе со своими первой и второй производными и равномерно отделены от нуля. Тогда, пользуясь также теоремой 1.6, получим

$$\varphi_k^{(N)}(y) = -\left(-\frac{f_k(b)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) \cdot \frac{\mathring{\varphi}(y) + o(1)}{\mathring{\varphi}(b) + o(1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tau_k \varphi_k(y) \psi_k(x)$$

сходится равномерно в $\bar{\Omega}$ в силу признака Вейерштрасса, так как $|\tau_k \varphi_k(y)\psi_k(x)| \leqslant const/k^2$. Так как каждое его слагаемое непрерывно, то и сумма ряда также будет непрерывной функцией.

Аналогично доказывается равномерная сходимость и непрерывность суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(y)\varphi_k(y)\psi_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{\eta_k(b)}{\mathring{\varphi}_k(b)} \cdot Y_k^0(y)\psi_k(x)$$

при $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

Фиксируем любой компакт $K \subset [c, d] \times [\varepsilon, b - \varepsilon] \subset \Omega$. Из теоремы 1.4 и уравнения (1.3) следует оценка

$$\left|Y_k^0{}''(y)\right| \leqslant C_3 \frac{r_k^2}{y^2} \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k},$$

где $C_3 > 0$, не зависит от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in (0, b]$.

Тогда при $(x, y) \in K$, $0 \leqslant i, j$, $i + j \leqslant 2$ имеют место оценки

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (Y_k^0(y)\psi_k(x)) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C \cdot k^{i+j}}{\varepsilon^2 k^2} \left(\frac{b - \varepsilon}{b}\right)^{r_k},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от постановки исходной задачи. Число $(b - \varepsilon)/b \in (0, 1)$, следовательно найдётся постоянная $B > 0$ такая, что $((b - \varepsilon)/b)^{r_k} \leqslant B/k^2$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (Y_k^0(y)\psi_k(x)) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{CB}{\varepsilon^2 k^2} < +\infty.$$

Таким образом, ряды, полученные почленным дифференцированием ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(y)\varphi_k(y)\psi_k(x)$$

по x и y до 2 раз сходятся равномерно на любом $K \subset \Omega$, а значит, в силу [24, с. 29, теорема 1.9], допускают двукратное дифференцирование под знаком суммы внутри области Ω. Теорема полностью доказана. □

Следствие 1.8.1. *В условиях теоремы 1.8, формальное решение* (1.9) *расширенной задачи* (1.10) *определено и сходится к непрерывной функции, а формальное решение* (1.8) *исходной задачи* (1.6) *определено и является её классическим решением.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно применить теоремы 1.1, 1.2, 1.7 и 1.8. □

Условия, заданные теоремами 1.7 и 1.8, не являются очевидными. В следующей теореме мы установим более легко проверяемые достаточные условия, при которых утверждение следствия остаётся в силе.

Теорема 1.9. *Пусть $a(0)$ и $c'(0)$ — рациональные числа, а правая часть $f(x, y)$ является аналитической функцией по совокупности переменных (x, y) в области $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)\times U$, $\varepsilon > 0$. Тогда формальное решение* (1.9) *расширенной задачи* (1.10) *определено и сходится к непрерывной функции, а формальное решение* (1.8) *исходной задачи* (1.6) *определено и является её классическим решением.*

Доказательство. Согласно условию, функция $f(x, y)$ принадлежит классу Гёльдера по $x \in [0, 1]$ при каждом фиксированном $y \in [0, b]$, так как является непрерывно дифференцируемой. В силу [24, с. 352, теорема 10.17], ряд Фурье (1.11) функции $f(x, y)$, нечётно продолженной на $x \in (-1, 0)$, сходится равномерно на любом отрезке $x \in [c, d] \in (0, 1)$ при любом фиксированном $y \in [0, b]$. Таким образом, остаётся проверить выполнение условий (1.23).

При любом фиксированном $x \in [0, 1]$ и $R_1 \in (b, R)$ имеет место $|f(x, y)| \leqslant \max\limits_{|y|=R_1} |f(x, y)| \equiv M(x)$ в силу принципа максимума аналитических функций [44, с. 284]. Тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$f_k(y) = 2\int\limits_0^1 f(x, y)\cdot \sin \pi k x\, dx,$$

$$\max_{|y|=R_1} |f_k(y)| \leqslant 2\int\limits_0^1 \max_{|y|=R_1} |f(x, y)| dx = 2\int\limits_0^1 M(x)dx \equiv M.$$

Тогда для функций $f_k(y)$ в силу [20, с. 17] имеет место условие 2 из (1.23):

$$|f_{kn}| \leqslant \frac{M}{R_1^n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Установим выполнение третьего из условий (1.23).

$$\delta_k = J_k(J_k + c'(0) - 1) - \pi^2 k^2 - a(0),$$

следовательно,

$$\pi^2 - q_k = -\frac{\delta_k}{k^2}, \quad q_k = \frac{J_k(J_k + c'(0) - 1) - a(0)}{k^2} \equiv \frac{P_k}{Q_k} \in \mathbb{Q}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где P_k и Q_k — попарно простые целые числа. Очевидно, что $Q_k \leqslant Q \cdot k^2$, где $Q > 0$ зависит от $a(0)$ и $c'(0)$. Применяя оценку меры иррациональности числа π^2 из [71, с. 38], получим

$$\left|\frac{\delta_k}{k^2}\right| = |\pi^2 - q_k| \equiv \left|\pi^2 - \frac{P_k}{Q_k}\right| \geqslant \frac{1}{Q_k^{20}} \geqslant \frac{1}{k^{40}Q^{20}}, \quad k \geqslant k_0.$$

Тогда для любого $q_0 \in (b/R, 1)$ найдётся $\hat{C}_\delta > 0$ такая, что

$$|\delta_k| \geqslant \frac{1}{k^{38}Q^{20}} \geqslant \hat{C}_\delta \cdot q_0^{J_k}, \quad k \geqslant k_0.$$

В силу иррациональности числа π^2, $|\delta_k| \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, следовательно, можно выбрать $C_\delta > 0$ так, чтобы

$$|\delta_k| \geqslant C_\delta \cdot q_0^{J_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

то есть выполнено третье из условий (1.23).

Наконец, так как $|\delta_k| \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $r_k \notin \mathbb{N}$ в силу доказанного нами ранее (см. доказательство теоремы 1.2). Теорема полностью доказана. $\square$

Установленные условия на рациональность чисел $a(0)$ и $c'(0)$ не являются физичными. В оставшихся разделах данной главы мы покажем методом функции Грина, что ряд (1.8) сходится к классическому решению задачи (1.6) при существенно более слабых ограничениях, чем условия (1.23).

1.8. Оценки неограниченного элемента фундаментальной системы решений

Заметим, что коэффициенты $\eta_k(y) + g_0(y)\chi_k(y) + g_k(y)\varphi_k(y)$ ряда (1.8) являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} y^2 Y''(y) + c(y)Y'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2)Y = f_k(y), \quad 0 < y < b, \quad k \in \mathbb{N}, \\ |Y(0)| < +\infty, \quad Y(b) = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Ранее (1.22) мы построили функции $Y_k^0(y)$, которые являются решениями однородных уравнений (1.24), удовлетворяющими краевому условию задач на конце $y = 0$. В этом разделе мы построим вторые решения $Y_k^b(y)$, удовлетворяющие краевому условию задач на конце $y = b$.

Для их построения мы воспользуемся следствием из формулы Остроградского-Лиувилля [30, с. 95], [57, с. 154]:

$$Y_k^b(y) \equiv -Y_k^0(y) \int\limits_b^y \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right) d\xi, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Легко видеть, что $Y_k^b(b) = 0$. Представим функцию $Y_k^b(y)$ как

$$Y_k^b(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \vartheta_k(y).$$

Получим представление функции $\vartheta_k(y)$:

$$\vartheta_k(y) = -\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} \mathring{\varphi}_k(y) \int\limits_b^y \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k} \frac{1}{(\mathring{\varphi}_k(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right) d\xi,$$

$$\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = \int\limits_b^\xi \frac{\bar{c}(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \int\limits_b^\xi \frac{c_1}{\zeta} d\zeta.$$

Так как функция $\bar{c}(y)/y^2$ является аналитической в U, то

$$\vartheta_k(y) = -\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} \mathring{\varphi}_k(y) \int\limits_b^y \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k - c_1} \theta_k(\xi) d\xi,$$

где функции $\theta_k(y)$ аналитичны в U, равномерно ограничены и равномерно отделены от нуля на $[0,b]$ в силу теоремы 1.3,

$$\theta_k(y) = \frac{1}{(\mathring{\varphi}_k(y))^2} \exp\left(-\int\limits_b^y \frac{\bar{c}(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta\right).$$

Получим оценки построенных функций.

Теорема 1.10. *Существуют* $\Theta_2 > \Theta_1 > 0$, *не зависящие от* $k \in \mathbb{N}$ *и* $y \in [0,b]$ *такие, что*

$$|\vartheta_k(y)| \leqslant \frac{\Theta_2}{k}, \quad |\vartheta_k'(y)| \leqslant \frac{\Theta_2}{y}, \quad y \in (0,b],$$

$$|\vartheta_k(y)| \geqslant \frac{\Theta_1}{k}, \quad y \in (0, 3b/4].$$

Доказательство. Используя свойства функций $\vartheta_k(y)$, заключаем

$$|\vartheta_k(y)| \leqslant C\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} \int\limits_y^b \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k - c_1} d\xi \leqslant \frac{C}{k}\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-}\left[\frac{1}{b} + b\left(\frac{y}{b}\right)^{1-2r_k-c_1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{k}\left(\frac{1}{b} + b\right) \equiv \frac{\Theta_3}{k}, \quad y \in [0,b].$$

Символ C здесь обозначает некоторые положительные константы, не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0,b]$, но различные в различных частях цепочки неравенств.

Аналогично

$$|\vartheta_k(y)| \geqslant C\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} \int\limits_y^b \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k - c_1} d\xi \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C}{k}\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} b^{2r_k + c_1}(x^{1-2r_k-c_1} - b^{1-2r_k-c_1}) =$$

$$= \frac{C}{k}\left(b - b\frac{y^{r_k - r_k^-}}{b^{r_k - r_k^-}}\right) \geqslant \frac{C}{k}\left(b - b\left(\frac{3}{4}\right)^{r_1 - r_1^-}\right) \equiv \frac{\Theta_1}{k}, \quad y \in \left(0, \frac{3b}{4}\right].$$

Наконец,

$$\vartheta_k'(y) = -\frac{r_k - r_k^-}{y} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} \mathring{\varphi}_k(y) \int\limits_b^y \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k - c_1} \theta_k(\xi) d\xi -$$

$$-\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} \mathring{\varphi}_k'(y) \int\limits_b^y \left(\frac{\xi}{b}\right)^{-2r_k - c_1} \theta_k(\xi) d\xi - \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k - r_k^-} \mathring{\varphi}_k(y) \left(\frac{y}{b}\right)^{-2r_k - c_1} \theta_k(y),$$

соответственно,

$$|\vartheta_k'(y)| \leqslant \frac{r_k - r_k^-}{y} \cdot |\vartheta_k(y)| + \left|\frac{\mathring{\varphi}_k'(y)}{\mathring{\varphi}_k(y)}\right| \cdot |\vartheta_k(y)| + \left(\frac{y}{b}\right)^{-r_k - r_k^- - c_1} \cdot |\mathring{\varphi}_k(y)| \cdot |\theta_k(y)| \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \frac{k}{y} \cdot \frac{\Theta_3}{k} + C \cdot \frac{\Theta_3}{k} + \frac{C}{y} \leqslant \frac{C}{y} \equiv \frac{\Theta_4}{y}, \quad y \in [0, b].$$

Для завершения доказательства выберем $\Theta_2 = \max(\Theta_3, \Theta_4)$. □

Теорема 1.11. *Существуют $C_4 > C_3 > 0$, не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0, b]$, такие, что*

$$Y_k^b(y) \leqslant \frac{C_4}{k} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, b],$$

$$Y_k^b(y) \geqslant \frac{C_3}{k} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, 3b/4],$$

$$\left|\frac{dY_k^b}{dy}(y)\right| \leqslant \frac{C_4}{y} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, b].$$

Доказательство. Первые две оценки непосредственно следуют из теоремы 1.10 и соотношения

$$Y_k^b(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \vartheta_k(y).$$

Для доказательства третьей оценки заметим, что

$$\frac{dY_k^b}{dy}(y) = \frac{r_k^-}{y} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \vartheta_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \vartheta_k'(y),$$

тогда

$$\left|\frac{dY_k^b}{dy}(y)\right| \leqslant \left|\frac{r_k^-}{y} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \vartheta_k(y)\right| + \left|\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \vartheta_k'(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{Ck}{y} \cdot \frac{\Theta_2}{k} + \frac{\Theta_2}{y}\right] \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \equiv \frac{C_4}{y} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-}, \quad y \in (0, b].$$

Теорема доказана. □

Имея оценки теорем 1.4 и 1.11, получим оценки определителей Вронского систем $\{Y_k^0(y), Y_k^b(y)\}$, являющихся фундаментальными системами решений однородных уравнений (1.24):

$$w_k(y) = \det \begin{pmatrix} Y_k^0(y) & Y_k^b(y) \\ \frac{dY_k^0}{dy}(y) & \frac{dY_k^b}{dy}(y) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in (0, b). \tag{1.26}$$

Теорема 1.12. *Существуют постоянная $W > 0$ и номер $k_0 \in \mathbb{N}$, не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in (0, b]$, такие, что*

$$w_k(y) \leqslant -W y^{-c_1} < 0, \quad k \geqslant k_0.$$

Доказательство. I. Оценим $w_k(\xi)$, где $\xi = b/2$. В силу леммы 1.3, при достаточно больших номерах k имеет место

$$Y_k^0(\xi) > 0, \quad Y_k^0{}'(\xi) > 0, \quad Y_k^b(\xi) > 0, \quad Y_k^b{}'(\xi) < 0,$$

$$w_k(\xi) = Y_k^0(\xi) Y_k^b{}'(\xi) - Y_k^0{}'(\xi) Y_k^b(\xi) \leqslant -Y_k^0{}'(\xi) Y_k^b(\xi) \leqslant -\frac{C_3}{\xi} \left(\frac{\xi}{b}\right)^{r_k^-} \cdot C_1 \left(\frac{\xi}{b}\right)^{r_k} =$$

$$= -\frac{C_1 C_3}{\xi} \left(\frac{\xi}{b}\right)^{1-c_1} \equiv -V, \quad k \geqslant k_0,$$

оценки верны в силу теорем 1.4 и 1.11, постоянная $V > 0$ не зависит от k.

II. Для произвольной точки $y \in (0, b]$, воспользуемся формулой Остроградского-Лиувилля:

$$w_k(y) = w_k(\xi) \exp\left(-\int\limits_{\xi}^{y} \frac{c(\xi)}{\xi^2} d\xi\right) \leqslant w_k(\xi) \cdot y^{-c_1} \cdot P,$$

где $P > 0$ — минимальное значение функции

$$\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{y} \frac{\bar{c}(\xi)}{\xi^2} d\xi\right), \quad y \in [0, b],$$

которое существует, так как функция $\bar{c}(y)/y^2$ аналитична на $[0, b]$.

Окончательно получаем

$$w_k(y) \leqslant w_k(\xi) \cdot y^{-c_1} \cdot P \leqslant -VP \cdot y^{-c_1}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда $W = VP > 0$. Теорема доказана. $\square$

1.9. Оценки функции Грина и асимптотика коэффициентов ряда

Построим функции Грина [21, с. 193] краевых задач (1.24).

$$G_k(y,\eta) = \begin{cases} \frac{Y_k^0(y)Y_k^b(\eta)}{\eta^2 w_k(\eta)}, & y < \eta, \\ \frac{Y_k^0(\eta)Y_k^b(y)}{\eta^2 w_k(\eta)}, & y > \eta, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.27}$$

Теорема 1.13. *Существует постоянная $M > 0$ такая, что*

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\, d\eta \leqslant \frac{M}{k^2}$$

при всех $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, для любого компакта $K \subset (0,b)$ найдётся постоянная $M_K > 0$ такая, что

$$\int\limits_0^b \left|\frac{\partial G_k}{\partial y}(y,\eta)\right| d\eta \leqslant \frac{M_K}{k}$$

при всех $y \in K$ и $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Применим оценки теорем 1.4, 1.11 и 1.12, формулу (1.27) и асимптотику $r_k, -r_k^- \sim \pi k$ при $k \to +\infty$.

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\, d\eta = \int\limits_0^y \left|\frac{Y_k^0(\eta)Y_k^b(y)}{\eta^2 w_k(\eta)}\right| d\eta + \int\limits_y^b \left|\frac{Y_k^0(y)Y_k^b(\eta)}{\eta^2 w_k(\eta)}\right| d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^y C_2\left(\frac{\eta}{b}\right)^{r_k} \frac{C_4}{k}\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k^-} \cdot \frac{1}{W\eta^2\eta^{-c_1}} d\eta + \int\limits_y^b C_2\left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \frac{C_4}{k}\left(\frac{\eta}{b}\right)^{r_k^-} \cdot \frac{1}{W\eta^2\eta^{-c_1}} d\eta =$$

$$= \frac{C_2C_4}{Wk} \cdot \frac{y^{r_k^-}}{b^{1-c_1}} \int\limits_0^y \frac{\eta^{r_k}}{\eta^2\eta^{-c_1}} d\eta + \frac{C_2C_4}{Wk} \cdot \frac{y^{r_k}}{b^{1-c_1}} \int\limits_y^b \frac{\eta^{r_k^-}}{\eta^2\eta^{-c_1}} d\eta =$$

$$= \frac{C_2C_4}{Wk} \cdot \frac{y^{r_k^-}}{b^{1-c_1}} \cdot \frac{y^{r_k+c_1-1}}{r_k+c_1-1} + \frac{C_2C_4}{Wk} \cdot \frac{y^{r_k}}{b^{1-c_1}} \cdot \frac{b^{r_k^-+c_1-1} - y^{r_k^-+c_1-1}}{r_k^-+c_1-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_5}{k^2} \cdot \frac{y^{r_k^-}}{b^{1-c_1}} \cdot y^{r_k+c_1-1} + \frac{2C_5}{k^2} \cdot \frac{y^{r_k}}{b^{1-c_1}} \cdot y^{r_k^-+c_1-1} = \frac{3C_5}{k^2} \cdot \frac{1}{b^{1-c_1}} \equiv \frac{M}{k^2},$$

что верно при $k \in \mathbb{N}$, $y \in [0, b]$, постоянные $C_5, M > 0$.

Аналогично

$$\int\limits_0^b \left| \frac{\partial G_k}{\partial y}(y, \eta) \right| d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2 C_4}{Wk} \cdot \frac{y^{r_k^-}}{b^{1-c_1}} \int\limits_0^y \frac{k}{y} \cdot \frac{\eta^{r_k}}{\eta^2 \eta^{-c_1}} d\eta + \frac{C_2 C_4}{Wk} \cdot \frac{y^{r_k}}{b^{1-c_1}} \int\limits_y^b \frac{r_k}{y} \cdot \frac{\eta^{r_k^-}}{\eta^2 \eta^{-c_1}} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{k^2} \cdot \frac{\max(k, r_k)}{y}.$$

Пусть $y \in K \subset (0, b)$. Тогда найдётся $\varepsilon > 0$ такой, что $\varepsilon < y < b - \varepsilon$ и

$$\int\limits_0^b \left| \frac{\partial G_k}{\partial y}(y, \eta) \right| d\eta \leqslant \frac{M}{k^2} \cdot \frac{\max(k, r_k)}{\varepsilon} \leqslant \frac{M_K}{k}, \quad M_K = \frac{M \cdot \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{r_k}{k} \right) + M}{\varepsilon},$$

оценка верна для $k \in \mathbb{N}$ и $y \in K$. Теорема доказана. □

Используя полученные результаты, мы теперь можем доказать аналог теорем 1.6 и 1.3 при минимальных требованиях к задаче (1.6). Введём обозначение

$$Y_k(y) \equiv \eta_k(y) + g_0(y)\chi_k(y) + g_k(y)\varphi_k(y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b].$$

Функции $Y_k(y)$ являются решениями краевых задач (1.24), а значит, для них имеет место представление

$$Y_k(y) = \int\limits_0^b f_k(\eta) \cdot G_k(y, \eta)\, d\eta, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b].$$

Теорема 1.14. *Пусть функции $f_k(y)$ являются равномерно ограниченными вместе с первыми и вторыми производными при $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0, b]$. Тогда равномерно по $y \in [0, b]$ имеет место асимптотика*

$$Y_k(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Кроме того, на любом компакте $K \subset (0,b)$ равномерно по $y \in K$ справедлива асимптотическая формула

$$Y_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-N}}\right), \quad N = 0,1,2.$$

Доказательство. Применим первую из оценок теоремы 1.13:

$$|Y_k(y)| \leqslant \int\limits_0^b |f_k(\eta) \cdot G_k(y,\eta)|\, d\eta \leqslant \frac{MM_f}{k^2},$$

где $M_f > 0$ — супремум $|f_k(y)|$ по всем $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$, таким образом, первая асимптотика доказана.

Далее рассмотрим функцию

$$R_k(y) \equiv Y_k(y) + \frac{f_k(y)}{\pi^2 k^2},$$

и подставим её в уравнение задачи (1.24). Тогда

$$\begin{cases} y^2 R_k'' + c(y) R_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) R_k = F_k(y) \equiv \frac{y^2 f_k''(y) + c(y) f_k' - a(y) f_k(y)}{\pi^2 k^2}, \\ R_k(0) = \frac{f_k(0)}{\pi^2 k^2} - \frac{f_k(0)}{a_0 + \pi^2 k^2}, \quad R_k(b) = \frac{f_k(b)}{\pi^2 k^2}, \end{cases}$$

где $y \in (0,b)$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что в силу равномерной ограниченности функций $f_k(y)$ с их производными и коэффициентов задачи существует постоянная $M_F > 0$ такая, что $|F_k(y)| \leqslant M_F/k^2$. Тогда имеет место представление

$$R_k(y) = \int\limits_0^b F_k(\eta) \cdot G_k(y,\eta)\, d\eta + \frac{f_k(b)}{\pi^2 k^2} \cdot \frac{Y_k^0(y)}{Y_k^0(b)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0,b],$$

при $y \in K$, $k \in \mathbb{N}$ и $N = 0,1$ имеет место оценка

$$\left|R_k^{(N)}(y)\right| \leqslant \frac{M_F}{k^2} \int\limits_0^b \left|\frac{\partial^N G_k}{\partial y^N}(y,\eta)\right| d\eta + \frac{M_f}{\pi^2 k^2} \cdot \left(\frac{r_k}{y}\right)^N \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_F}{k^2} \cdot \frac{M_K}{y^{2-N}} + \frac{M_f}{\pi^2 k^2} \cdot \left(\frac{r_k}{y}\right)^N \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{r_k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_F}{k^2} \cdot \frac{M_K}{y^{2-N}} + \frac{M_f}{\pi^2 k^2} \cdot \left(\frac{r_k}{\varepsilon}\right)^N \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \mu^{r_k}, \quad \mu = \frac{b-\varepsilon}{\varepsilon} < 1.$$

Найдём постоянную $C > 0$ такую, что $r_k \cdot \mu^{r_k} \leqslant C/k^3$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left|R_k^{(N)}(y)\right| \leqslant \frac{M_F}{k^2} \cdot \frac{M_K}{y^{2-N}} + \frac{CC_2 M_f}{C_1 \pi^2 k^5 \varepsilon} \leqslant \frac{1}{k^{4-N}} \left(M_K M_F + \frac{CC_2 M_f}{C_1 \pi^2 \varepsilon}\right) \equiv \frac{B}{k^{4-N}}.$$

Докажем оценку при $N = 2$.

$$R_k''(y) = \frac{F_k(y) + (a(y) + \pi^2 k^2) R_k(y) - c(y) R_k'(y)}{y^2},$$

тогда при $y \in K$ и $k \in \mathbb{N}$ мы получаем

$$|R_k''(y)| \leqslant \frac{M_F + (M_A + \pi^2 k^2) B/k^4 + M_C B/k^3}{\varepsilon^2},$$

где M_A и M_C — наибольшие значения $|a(y)|$ и $|c(y)|$ на отрезке $[0, b]$ соответственно. Тогда окончательно получаем

$$|R_k''(y)| \leqslant \frac{1}{k^2} \cdot \frac{M_F + (M_A + \pi^2) B + M_C B}{\varepsilon^2} \equiv \frac{B_1}{k^2}.$$

Теорема доказана. $\square$

1.10. Теорема существования решения основной задачи

Лемма 1.9. *Пусть функции $Y_k(y)$ таковы, что имеют место следующие асимптотики равномерно по y:*

$$Y_k(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, b],$$

$$Y_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-N}}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in K \subset (0, b), \quad N = 0, 1, 2,$$

где функции $f_k(y)$ — коэффициенты Фурье разложения функции $f(x, y)$ по системе $\{\sin \pi k x\}_{k=1}^{+\infty}$, функция $f \in C^2(\bar{\Omega})$. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \sin \pi k x$$

сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω и определяет в нём функцию из $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно по аналогии с теоремой 1.7 установить равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \sin \pi k x$$

и рядов, полученных его почленным дифференцированием.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |Y_k(y) \sin \pi k x| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C}{k^2}, \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\partial^N Y_k}{\partial y^N}(y) \sin \pi k x \right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C}{k^2}, \quad (x, y) \in K \subset \Omega, \quad N = 1, 2,$$

из чего следует равномерная сходимость соответствующих рядов на $\bar{\Omega}$ и на любом компакте $K \subset \Omega$ соответственно.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \pi k x = -\sum_{k=1}^{+\infty} \pi^2 k^2 Y_k(y) \sin \pi k x =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \sin \pi k x + \sum_{k=1}^{+\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right) \sin \pi k x,$$

первый ряд сходится равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$ в силу равномерной гёльдеровости функции $f(x, y)$ по x, которая следует из равномерной ограниченности $f'_x(x, y)$ в $\bar{\Omega}$. Второй ряд сходится равномерно в силу признака Вейерштрасса.

При $N = 0, 1$ имеет место

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\partial^N}{\partial y^N} Y_k(y) \frac{\partial}{\partial x} \sin \pi k x \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \pi k \frac{\partial^N}{\partial y^N} Y_k(y) \cos \pi k x \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left| f_k^{(N)}(y) \cdot \frac{1}{\pi k} \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f_k^{(N)}(y) \right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C}{k^2}, \quad (x, y) \in K.$$

Так как $f''_{xy}(x,y)$ и $f'_x(x,y)$ равномерно ограничены в $\bar{\Omega}$, то $f'_y(x,y)$ и $f(x,y)$ равномерно гёльдеровы по x в $\bar{\Omega}$, а значит их ряды Фурье сходятся равномерно внутри Ω, из чего следует равномерная сходимость первого ряда в силу тождества Парсеваля. Второй и третий ряды сходятся равномерно в силу признака Вейерштрасса.

Теорема доказана. □

Теперь сформулируем и докажем теорему существования классического решения задачи (1.6).

Теорема 1.15. *Пусть правая часть $f(x,y)$ задачи (1.6) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y.*

Тогда существует классическое решение задачи (1.6), представимое рядом (1.8), который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ аналитичны в области U.

Если при некотором $k \in \mathbb{N}$ число $r_k \notin \mathbb{N}$, то $\chi_k(y) \equiv 0$.

Доказательство. Исходя из условий, наложенных на функцию $f(x,y)$, мы можем заключить, что функции $f_k(y)$ аналитичны в U и равномерно ограничены на $y \in [0,b]$ при $k \in \mathbb{N}$ вместе с первыми и вторыми производными. Таким образом, выполнены все условия теорем 1.2 и 1.1 и функции $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ определены и аналитичны в области U, причём если $r_k \notin \mathbb{N}$, то $\chi_k(y) \equiv 0$.

Выполнены все условия теоремы 1.14, а значит, в силу леммы 1.9, ряд (1.8) сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω и определяет в нём функцию из $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Так как данный ряд построен как формальное решение задачи (1.6), то он является её классическим решением по построению. Теорема доказана. □

1.11. Пример

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + y u'_y - y u = f \equiv const, \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,1) = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty. \end{cases} \tag{1.28}$$

Разложим правую часть в ряд Фурье по функциям $\{\sin \pi k x\}$.

$$f_k = 2\int\limits_0^1 f \cdot \sin \pi k x \, dx = \begin{cases} 0, & k = 2l, \\ \dfrac{4f}{\pi k}, & k = 2l-1. \end{cases} \quad l \in \mathbb{N},$$

Таким образом, при чётных k $\eta_k(y) \equiv \varphi_k(y) \equiv \chi_k(y) \equiv 0$. При нечётных k мы получим

$$r_k = \frac{1 - c_1 + \sqrt{(1-c_1)^2 + 4\pi^2 k^2 + 4a_0}}{2} = \pi k \notin \mathbb{Q},$$

из чего следует, что $\chi_k(y) \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Найдём коэффициенты ряда (1.8).

$$\eta_{k,0} = -\frac{f_k}{\pi^2 k^2} = -\frac{4f}{\pi^3 k^3}, \quad \eta_{k,n} = \frac{\eta_{k,n-1}}{n^2 - \pi^2 k^2} = -\frac{4f}{\pi^3 k^3} \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\eta_k(y) = \frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2}, \quad y \in [0,b], \quad k = 2l-1,$$

$$\varphi_{k,0} = 1, \quad \varphi_{k,n} = \frac{\varphi_{k,n-1}}{n^2 + 2n r_k} = \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2 + 2\pi k m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_k(y) = -\frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2} \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{y}{m^2 + 2\pi k m}\right) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2 + 2\pi k m}\right)^{-1},$$

$$y \in [0,b], \quad k = 2l-1.$$

Теперь построим решение задачи (1.28) в виде ряда (1.8).

$$u(x,y) = 4f \sum_{k=1, k/2\notin\mathbb{N}}^{+\infty} \left[\frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2} - y^{\pi k} \frac{4f}{\pi k} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{m^2 - \pi^2 k^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{y}{m^2 + 2\pi k m}\right) \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2 + 2\pi k m}\right)^{-1} \right] \cdot \frac{\sin \pi k x}{\pi k}.$$

Ряд сходится равномерно в $[0,1]^2$ в силу теорем 1.9 (так как $c_1 = 1, a_0 = 0 \in \mathbb{Q}$) и 1.15 к классическому решению задачи (1.28). Его можно дифференцировать под знаком суммы по x и по y внутри $(0,1)^2$ два раза.

Глава 2

Краевые задачи D и E для эллиптического уравнения с линейным вырождением

При работе над данной главой диссертации использованы следующие публикации автора, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [84], [89].

2.1. Постановки задач D и E для линейного вырождения

В этой главе мы будем рассматривать две краевые задачи (1.1) и (1.2) в прямоугольнике $\Omega \equiv (0,1) \times (0,b)$, $b > 0$ с линейным вырождением $m = 1$: краевую задачу D

$$\begin{cases} u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

и краевую задачу E

$$\begin{cases} u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

На коэффициенты и правую часть мы будем накладывать те же ограничения, что и в разделе 1 главы 1. Также мы полагаем, что в обеих задачах $a(y) \geqslant 0$, в задаче (2.2) $c(0) \geqslant 1$, а в задаче (2.1) $c(0) < 1$. Решения обеих задач мы будем искать в классе $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

2.2. Формальные решения задач

По аналогии с первой главой, разложим правые части задач и их решения в ряды Фурье

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2.3}$$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2.4}$$

где функции $Y_k(y)$ являются в случае задачи (2.1) решениями краевых задач

$$\begin{cases} yY_k'' + c(y)Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

и в случае задачи (2.2) решениями краевых задач

$$\begin{cases} yY_k'' + c(y)Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(b) = 0, \quad |Y_k(0)| < +\infty. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

Определяющее уравнение [20, с. 217] для этих задач имеет вид $r(r-1) + c_0 r = 0$. Его решениями являются числа $r_0 = 0$ и $r_1 = 1 - c_0$. Из данных соотношений следует, что однородные уравнения (2.5) и (2.6) всегда имеют нетривиальное аналитическое в U решение.

В случае задачи (2.2), число $r_1 = 1 - c_0 \leqslant 0$, из чего следует, что второй элемент ФСР однородных уравнений (2.6) не является ограниченным в окрестности точки $y = 0$, а само решение задачи (2.6) может быть найдено в классе аналитических в U функций.

В случае же задачи (2.1), число $r_1 = 1 - c_0 > 0$, а значит, второй элемент ФСР однородных уравнений (2.5) в точке $y = 0$ имеет особенность вида y^{1-c_0} или $\ln y$.

Указанные факты будут строго доказаны в следующем разделе.

Таким образом, будем искать решения задач (2.6) в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y),$$

а решения задач (2.5) в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k(y),$$

где функции $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ являются аналитическими в круге U.

Соответственно, формальное решение задачи (2.2) будет иметь вид

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\eta_k(y)\cdot\sin\pi kx, \quad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{2.7}$$

а формальное решение задачи (2.1) —

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\eta_k(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k(y)\right]\cdot\sin\pi kx, \quad (x,y)\in\bar{\Omega}. \tag{2.8}$$

В случае задачи (2.2), функции $\eta_k(y)$ являются решениями задач (2.6). В случае задачи (2.1), мы, по аналогии с разделом 3 главы 1, получаем:

$$Y_k'(y) = \eta_k'(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k'(y) + \frac{1}{y}\cdot\chi_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k'(y) + \frac{r_1}{y}\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k(y),$$

$$Y_k''(y) = \eta_k''(y) - \frac{1}{y^2}\cdot\chi_k(y) + \frac{2}{y}\cdot\chi_k'(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right)\chi_k''(y) +$$
$$+\frac{r_1(r_1-1)}{y^2}\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k(y) + \frac{2r_1}{y}\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k'(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1}\varphi_k''(y),$$

откуда

$$y\eta_k''(y) + c(y)\eta_k'(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\eta_k(y) + 2\chi_k'(y) + \frac{c(y)}{y}\chi_k(y) - \frac{\chi_k(y)}{y} = f_k(y),$$

$$y\chi_k''(y) + c(y)\chi_k'(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\chi_k(y) = 0,$$

$$y\varphi_k''(y) + c(y)\varphi_k'(y) + 2r_1\varphi_k'(y) +$$
$$+\frac{r_1(r_1-1)}{y}\varphi_k(y) + r_1\frac{c(y)}{y}\varphi_k(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\varphi_k(y) = 0, \quad 0<y<b,$$

$$\eta_k(b) = -\varphi_k(b), \quad \eta_k,\chi_k,\varphi_k\in A(U), \quad k\in\mathbb{N},$$

в случае задачи (2.1) также

$$\eta_k(0) = 0, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Далее мы покажем, что поставленные задачи на функции $\eta_k(y), \chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ имеют решения.

2.3. Разрешимость задач для коэффициентов Фурье решения

Рассмотрим при фиксированном $k \in (0, +\infty)$ задачу нахождения аналитических в U функций $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} y\eta_k''(y) + c(y)\eta_k'(y) - (\pi^2 k^2 + a(y))\eta_k(y) + 2\chi_k'(y) + \frac{c(y)}{y}\chi_k(y) - \frac{\chi_k(y)}{y} = f_k(y), \\ y\chi_k''(y) + c(y)\chi_k'(y) - (\pi^2 k^2 + a(y))\chi_k(y) = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

с условиями

$$\eta_k(b) = 0, \quad \chi_k(0) = 0 \tag{2.10}$$

в случае $c(0) \geqslant 1$, условиями

$$\eta_k(0) = 0, \quad \chi_k(0) = 0 \tag{2.11}$$

в случае $c(0) < 1$, $c(0) \neq 0, -1, -2, ...$ и условиями

$$\eta_k(0) = \eta_k(b) = 0, \quad \chi_k(0) = 0 \tag{2.12}$$

в случае $c(0) = 0, -1, -2, ...$

Теорема 2.1. *В условиях задач* (2.2) *и* (2.1) *пусть* $f_k(y) \in A(U)$ *при каждом* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда решения* $(\eta_k(y), \chi_k(y))$ *уравнения* (2.9) *с условиями* (2.10), (2.11) *и* (2.12) *существуют, причём если* $c(0) \neq 0, -1, -2, ...$, *то* $\chi_k(y) \equiv 0$.

Доказательство. I. Покажем, что дифференциальные уравнения (2.9) имеют аналитические решения при любой аналитической правой части. Доказательство данного утверждения в целом аналогично доказательству теоремы 1.2, поэтому будет достаточно указать рекуррентные формулы построения коэффициентов рядов Тейлора функций $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y)$.

Подставим разложения в ряды Тейлора коэффициентов, правой части и функций $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y)$ в уравнения (2.9).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\eta_{k,n+1}y^n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\eta_{k,n+1}y^n + c_0 \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\eta_{k,n+1}y^n -$$

$$-\sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n} y^n - \pi^2 k^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n} y^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\chi_{k,n+1} y^n +$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty} c_m y^m \sum_{n=-1}^{+\infty} \chi_{k,n+1} y^n - \sum_{n=-1}^{+\infty} \chi_{k,n+1} y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{kn} y^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\chi_{k,n+1} y^n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\chi_{k,n+1} y^n + c_0 \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\chi_{k,n+1} y^n -$$

$$-\sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{k,n} y^n - \pi^2 k^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{k,n} y^n = 0,$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, получим

$$(n+c_0)(n+1)\chi_{k,n+1} + \sum_{m=0}^{n}(mc_{n-m+1} - a_{n-m})\chi_{k,m} - \pi^2 k^2 \chi_{k,n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$(n+c_0)(n+1)\eta_{k,n+1} + \sum_{m=0}^{n}(mc_{n-m+1} - a_{n-m})\eta_{k,m} - \pi^2 k^2 \eta_{k,n} +$$

$$+(2(n+1) - 1 + c_0)\chi_{k,n+1} + \sum_{m=1}^{n} c_{n-m+1}\chi_{k,m} = f_{kn}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

при этом $\eta_{k,0}$ и $\chi_{k,0}$ могут быть выбраны произвольным образом. Так как функция $\chi_k(y)$ соответствует логарифмической особенности в решениях задач (2.5) и (2.6), то естественным будет выбрать $\chi_{k,0} = 0$.

Пусть $c_0 \neq 0, -1, -2, ...$ Тогда

$$\eta_{k,n+1} = \frac{f_{kn} - \sum\limits_{m=0}^{n}(mc_{n-m+1} - a_{n-m})\eta_{k,m} + \pi^2 k^2 \eta_{k,n}}{(n+c_0)(n+1)}, \quad \chi_{k,n+1} \equiv 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

то есть $\chi_k(y) \equiv 0$.

В противном случае, если $c_0 = -N$, $N \in \mathbb{N}_0$, то

$$\eta_{k,n+1} = \frac{f_{kn} - \sum\limits_{m=0}^{n}(mc_{n-m+1} - a_{n-m})\eta_{k,m} + \pi^2 k^2 \eta_{k,n}}{(n+c_0)(n+1)}, \ \chi_{k,n+1} \equiv 0, \ n = \overline{0, N-1},$$

при индексе $n = N$ получаем

$$\sum_{m=0}^{N}(mc_{N-m+1} - a_{N-m})\eta_{k,m} - \pi^2 k^2 \eta_{k,N} + (N+1)\chi_{k,N+1} = f_{kN},$$

что позволяет выбрать $\eta_{k,N+1}$ произвольным образом, если

$$\chi_{k,N+1} = \frac{f_{kN} - \sum\limits_{m=0}^{N}(mc_{N-m+1} - a_{N-m})\eta_{k,m} + \pi^2k^2\eta_{k,N}}{N+1}.$$

Наконец, при $n > N$ мы получим

$$\chi_{k,n+1} = \frac{\pi^2k^2\chi_{k,n} - \sum\limits_{m=0}^{n}(mc_{n-m+1} - a_{n-m})\chi_{k,m}}{(n+c_0)(n+1)}$$

$$\eta_{k,n+1} = \frac{f_{kn} - \sum\limits_{m=0}^{n}(mc_{n-m+1} - a_{n-m})\eta_{k,m} + \pi^2k^2\eta_{k,n}}{(n+c_0)(n+1)} -$$
$$-\frac{(2(n+1) - 1 + c_0)\chi_{k,n+1} + \sum\limits_{m=1}^{n}c_{n-m+1}\chi_{k,m}}{(n+c_0)(n+1)}.$$

Таким образом, при некотором выборе коэффициентов $\eta_{k,0}$ и $\eta_{k,N+1}$, все остальные коэффициенты рядов определяются однозначно. Доказательство сходимости полученных рядов в круге U производится по аналогии с доказательством сходимости рядов в теоремах 1.1 и 1.2.

II. Покажем, что за счёт некоторого выбора коэффициентов $\eta_{k,0}$ и $\eta_{k,N+1}$, можно удовлетворить условиям (2.10), (2.11) и (2.12).

Построенное указанным способом решение уравнений (2.9) при $\eta_{k,0} = 0$ и $\eta_{k,N+1} = 0$ [1] обозначим $\eta_k^0(y)$, $\chi_k^0(y)$.

Заметим, что в случае (2.11) данная функция $\eta_k^0(y)$ уже удовлетворяет всем необходимым условиям.

Рассмотрим случай (2.12). Положим правую часть $f_k(y) \equiv 0$. Построим при такой правой части решение, выбирая $\eta_{k,0} = 0$ и $\eta_{k,N+1} = 1$. Это решение мы обозначим $\eta_k^1(y)$, $\chi_k^1(y)$. Заметим, что функция $\eta_k^1(y) + \ln(y/b)\chi_k^1(y)$ является решением уравнения (1.3). В силу леммы 1.2 и его построения, $\eta_k^1(b) \neq 0$ (так как $\eta_k^1(0) = 0$), и тогда решение $(\eta_k(y), \chi_k(y))$, построенное с исходной правой

[1] В случае (2.12).

частью $f_k(y)$ и $\eta_{k,0} = 0$, $\eta_{k,N+1} = -\eta_k^0(b)/\eta_k^1(b)$ удовлетворяет условию (2.12) в силу линейности.

Наконец, рассмотрим случай (2.10). Построим функцию $\eta_k^2(y)$, положив $f_k(y) \equiv 0$ и $\eta_{k,0} = 1$. Функция $\eta_k^2(0) = 1$, покажем, что $\eta_k^2(y) > 0$ при $y \in [0, b]$. Предположим, что существует точка $\xi \in (0, b]$ такая, что $\eta_k^2(\xi) = 0$ (такая точка ξ если существует, то единственна в силу леммы 1.2). Существует второе решение $\eta_k^3(y)$ уравнения (1.3), удовлетворяющее условию $\eta_k^3(\xi) = 1$.

В силу следствия из формулы Остроградского-Лиувилля,

$$\eta_k^3(y) = C_1\eta_k^2(y) + \eta_k^2(y)\int\limits_{\xi/2}^{y} \frac{w(\eta)}{(\eta_k^2(\eta))^2}d\eta,$$

где

$$w(y) = C_2 \exp\left(-\int\limits_{\xi}^{y} \frac{c(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right) \sim C_2 y^{-c(0)} \longrightarrow +\infty, \quad y \to 0+0,$$

так как $C_2 > 0$ (при $C_2 = 0$ решения $\eta_k^2(y)$ и $\eta_k^3(y)$ линейно зависимы, а при $C_2 < 0$, $1 \neq \eta_k^3(\xi) < 0$). Следовательно,

$$\eta_k^3(y) \longrightarrow +\infty, \quad y \to 0+0.$$

Заметим, что $\eta_k^3(y) \neq 0$ при $y \in (0, \xi)$. Действительно, пусть $\eta_k^3(\eta) = 0$, $\eta \in (0, \xi)$. Если $\eta_k^3(y)$ меняет знак в точке η, то существует другая $\zeta \neq \eta$, $\zeta \in (0, \xi)$ такая, что $\eta_k^3(\zeta) = 0$. Если же $\eta_k^3(y)$ сохраняет знак в точке η, то η является нулём функции $\eta_k^3(y)$ кратности выше 1. В любом случае, мы получаем, что функция $\eta_k^3(y)$ имеет более 1 нуля на интервале $(0, \xi)$ с учётом кратности, что противоречит лемме 1.2. Таким образом, $\eta_k^3(y) \neq 0$ при $y \in (0, \xi)$.

Наконец, рассмотрим следующий интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{\xi} \left(\frac{\eta_k^2(\eta)}{\eta_k^3(\eta)}\right)' d\eta = \left(\frac{\eta_k^2(\xi)}{\eta_k^3(\xi)}\right) - \left(\frac{\eta_k^2(0)}{\eta_k^3(0)}\right) = 0 - 0 = 0.$$

Но с другой стороны,

$$I = \int\limits_0^\xi \frac{\eta_k^2{}'(\eta)\eta_k^3(\eta) - \eta_k^3{}'(\eta)\eta_k^2(\eta)}{(\eta_k^3(\eta))^2}\, d\eta = \int\limits_0^\xi \frac{w(\eta)}{(\eta_k^3(\eta))^2}\, d\eta \neq 0,$$

так как $w(y)$ знакопостоянен.

Полученное противоречие доказывает, что $\eta_k^2(y) \neq 0$ при $y \in [0, b]$, в частности, $\eta_k^2(b) \neq 0$. Тогда решение $\eta_k(y)$, построенное с исходной правой частью $f_k(y)$ и $\eta_{k,0} = -\eta_k^0(b)/\eta_k^2(b)$ удовлетворяет условию (2.10). Теорема доказана. □

Заметим, что в случаях $c(0) \geqslant 1$ и $c(0) = 0, -1, -2, ...$ построенные решения $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y) \equiv 0$ удовлетворяют всем условиям раздела 2 настоящей главы. Покажем, что в остальных случаях также можно выбрать функцию $\varphi_k(y)$, при которой данные условия будут выполнены.

Теорема 2.2. *В условиях задачи* (2.1) *пусть* $c(0) < 1$. *Тогда существует аналитическое в* U *нетривиальное решение* $\mathring{\varphi}_k(y)$ *уравнения*

$$y\varphi_k''(y) + c(y)\varphi_k'(y) + 2r_1\varphi_k'(y) +$$

$$+ \frac{r_1(r_1-1)}{y}\varphi_k(y) + r_1\frac{c(y)}{y}\varphi_k(y) - (\pi^2k^2 + a(y))\varphi_k(y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

причём $\mathring{\varphi}_k(b) \neq 0$.

Доказательство. Доказательство данного утверждения проводится по аналогии с доказательствами теорем 2.1, 1.1 и леммы 1.4. Подставим ряды Тейлора функции $\mathring{\varphi}_k(y)$ и коэффициентов задачи в уравнение.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n + r_1 + 1)(n+1)\varphi_{k,n+1}y^n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varphi_{k,n+1}y^n +$$

$$+ r_1\sum_{m=1}^{+\infty} c_m y^m \sum_{n=-1}^{+\infty} \varphi_{k,n+1}y^n - \pi^2k^2\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_{k,n}y^n - \sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_{k,n}y^n = 0,$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, получим

$$(n + r_1 + 1)(n+1)\varphi_{k,n+1} + \sum_{m=1}^{n} m c_{n-m+1}\varphi_{k,m} +$$

$$+r_1\sum_{m=0}^{n} c_{n-m+1}\varphi_{k,m} - \pi^2k^2\varphi_{k,n} - \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\varphi_{k,m} = 0,$$

$$\varphi_{k,n+1} = \frac{\pi^2k^2\varphi_{k,n} + \sum\limits_{m=0}^{n}(a_{n-m} - (m+r_1)c_{n-m+1})\varphi_{k,m}}{(n+r_1+1)(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

и выберем

$$\varphi_{k,0} = 1.$$

Таким образом, мы можем найти все коэффициенты $\varphi_{k,n}$ по данной рекуррентной формуле и построить функцию

$$\mathring{\varphi}_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_{k,n}y^n.$$

Сходимость последнего ряда в U доказывается по аналогии с доказательством теоремы 1.1.

Предположим, что $\mathring{\varphi}_k(b) = 0$. Рассмотрим функцию

$$\vartheta_k(y) = y^{r_1}\cdot\mathring{\varphi}_k(y).$$

Выполнено $\vartheta_k(0) = \vartheta_k(b) = 0$, а значит, так как функция $\vartheta_k(y)$ является решением уравнения (1.3), то в силу леммы 1.1 $\vartheta_k(y) \equiv 0$. А это значит, что $\mathring{\varphi}_k(y) \equiv 0$, что не есть так по построению. Полученное противоречие доказывает второе утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Мы доказали, что в случае $c(0) < 1$, $c(0) \neq 0, -1, -2, \ldots$ функции $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$, выбранные в соответствии с теоремой 2.1, и функция

$$\varphi_k(y) = -\frac{\eta_k(b)}{\mathring{\varphi}_k(b)}\cdot\mathring{\varphi}_k(y)$$

также удовлетворяют всем условиям раздела 2. Таким образом, все функции $\eta_k(y)$, $\chi_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ определены при $k \in \mathbb{N}$ и ряд (2.4) является формальным решением задач (2.1) и (2.2) соответственно.

В следующих главах будет показано, что данный ряд является решением и в классическом смысле.

2.4. Специальное уравнение с малым параметром и асимптотика его решения

В данном разделе мы, предполагая, что $c(0) \geqslant 1$, будем рассматривать следующую задачу

$$\begin{cases} yY_k'' + c(y)Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)Y_k = 0, & y \in (0, b), \\ Y(0) = 1. \end{cases} \quad k > 0, \tag{2.13}$$

В предыдущем разделе мы показали при доказательстве теоремы 2.1, что данная задача имеет единственное аналитическое в U решение при всех $k > 0$. Задачей данного раздела будет установление равномерной асимптотики функции $Y_k(y)$ при $y \to +\infty$.

Рассмотрим также следующую упрощённую задачу

$$\begin{cases} y\bar{Y}_k'' + c(0)\bar{Y}_k' - \pi^2 k^2 \bar{Y}_k = 0, & y \in (0, b), \\ \bar{Y}(0) = 1. \end{cases} \quad k > 0, \tag{2.14}$$

Решение последней задачи (2.14) может быть найдено явно по рекуррентным формулам из доказательства теоремы 2.1. Для его коэффициентов ряда Тейлора $\bar{Y}_{k,n}$ имеют место соотношения

$$\bar{Y}_{k,n+1} = \frac{\pi^2 k^2 \bar{Y}_{k,n}}{(n + c_0)(n + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \bar{Y}_{k,0} = 0,$$

$$\bar{Y}_{k,n} = (\pi k)^{2n} \cdot \frac{\bar{Y}_{k,0}}{n!} \cdot \frac{\Gamma(c_0)}{\Gamma(c_0 + n)} = \frac{(\pi k)^{2n}}{n!} \cdot \frac{\Gamma(c_0)}{\Gamma(c_0 + n)},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Для получения выражения функции $\bar{Y}_k(y)$ воспользуемся известными соотношениями из [83], обозначая $\alpha = c_0 - 1 \geqslant 0$.

$$\bar{Y}_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pi k)^{2n}}{n!} \cdot \frac{\Gamma(c_0)}{\Gamma(c_0 + n)} \cdot y^n = \Gamma(c_0) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(c_0 + n) \cdot n!} \cdot (\pi k i \sqrt{y})^{2n} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\pi k i \sqrt{y})^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i \sqrt{y}), \quad y \in (0, b), \quad k > 0,$$

здесь i — мнимая единица, а J_α — функция Бесселя I рода порядка α.

Решение исходной задачи (2.13) мы будем искать в виде

$$Y_k(y) = \bar{Y}_k(y) \cdot z_k(y),$$

где $z_k(y)$ — новая неизвестная функция. Получим уравнение для $z_k(x)$.

$$y\left[\bar{Y}_k(y) \cdot z_k''(y) + 2\bar{Y}_k'(y) \cdot z_k'(y) + \bar{Y}_k''(y) \cdot z_k(y)\right] +$$

$$+c(y)\left[\bar{Y}_k(y) \cdot z_k'(y) + \bar{Y}_k'(y) \cdot z_k(y)\right] - (\pi^2 k^2 + a(y))\bar{Y}_k(y) \cdot z_k(y) = 0,$$

в силу того, что $\bar{Y}_k(y)$ — решение задачи (2.14), получаем

$$yz_k''(y) + 2y\tilde{R}_k(y) \cdot z_k'(y) + c(y)z_k'(y) + \tilde{c}(y)\tilde{R}_k(y) \cdot z_k(y) - a(y)z_k(y) = 0,$$

где $\tilde{c}(y) = c(y) - c(0)$, $\tilde{R}_k(y) = \bar{Y}_k'(y)/\bar{Y}_k(y)$. Пользуясь формулами дифференцирования функций Бесселя из [83], получим

$$\bar{Y}_k'(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^\alpha}J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y})\right) =$$

$$= 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\frac{d}{d(2\pi k i\sqrt{y})}\left(\frac{1}{(2\pi k i\sqrt{y})^\alpha}J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y})\right)\frac{d(2\pi k i\sqrt{y})}{dy} =$$

$$= \frac{-2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi k i\sqrt{y})^\alpha}J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y})\frac{\pi k i}{\sqrt{y}} = -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^\alpha}J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y})\frac{\pi k i}{\sqrt{y}}.$$

Введём обозначение $R_k(y) = -iJ_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y})/J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y})$. Тогда

$$\tilde{R}_k(y) = \frac{\bar{Y}_k'(y)}{\bar{Y}_k(y)} = -\frac{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^\alpha}J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y})\pi k i}{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^\alpha}J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y})\sqrt{y}} = \frac{\pi k}{\sqrt{y}} \cdot R_k(y).$$

Таким образом, уравнение для $z_k(x)$ примет вид

$$yz_k''(y) + 2\pi k\sqrt{y}R_k(y)z_k'(y) + c(y)z_k'(y) + \pi k\sqrt{y}\bar{c}(y)R_k(y)z_k(y) - a(y)z_k(y) = 0.$$

где $\bar{c}(y) = (c(y) - c(0))/y$.

Введём малый параметр $\mu \equiv 1/(\pi k) > 0$ и переобозначим $R_\mu(y) \equiv R_k(y)$, $z(y,\mu) \equiv z(y) \equiv z_k(y)$. Наконец, получим задачу для функции $z_k(x)$:

$$\begin{cases} y\mu z''(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y)z'(y) + \mu c(y)z'(y) + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)z(y) - \mu a(y)z(y) = 0, \\ z(0) = 1, \quad y \in (0,b), \quad \mu > 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Отметим следующие свойства коэффициентов задачи (2.15):

1. Функции $a(y), c(y)$ и $\bar{c}(y)$ аналитичны в круге U.

2. Функция $R_\mu(y) \sim const \cdot \sqrt{y}/\mu, y \to 0+0$ при $\mu > 0$, также $R_\mu(y) \leqslant 1$, $y \in [0, b]$, $\mu > 0$.

3. В силу асимптотик функций Бесселя чисто мнимого аргумента [83], $\lim\limits_{\mu \to 0+0} R_\mu(y) = 1$, $y \in (0, b]$.

4. $R'_\mu(y) = \frac{1}{\mu\sqrt{y}}\Big(1 - \mu\frac{2\alpha+1}{2\sqrt{y}}R_\mu(y) - R^2_\mu(y)\Big)$, а значит, в силу свойства 2, $|R'_\mu(y)| \leq const/(\mu\sqrt{y})$.

5. Исходя из свойств 2 и 3 и [83], можно выбрать постоянные $p > 0$, $\bar{p} > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что $R_\mu(y) \geqslant py$ и $R_\mu(y) \geqslant \bar{p}\sqrt{y}/\mu$ при $y \in [0, b]$ и $0 < \mu < \mu_0$.

Также мы будем рассматривать формально-предельную задачу

$$\begin{cases} 2\bar{z}'(y) + \bar{c}(y)\bar{z}(y) = 0, \quad y \in (0, b), \\ \bar{z}(0) = 1, \end{cases} \tag{2.16}$$

полученное из уравнения (2.15) формальной подстановкой $\mu = 0$.

Далее мы получим важный результат, являющийся некоторым обобщением теоремы Тихонова [70], [7, § 7] на рассматриваемый нами случай уравнения с вырождением.

Теорема 2.3. *Пусть коэффициенты $a(y)$, $\sqrt{y} \cdot a'(y)$, $c(y)$ и $c'(y)$ принадлежат классу $C[0, b]$, а функция $\bar{c}'(y)$ непрерывна на $(0, b]$ и имеет интегрируемую особенность при $y = 0$. Тогда, если решение задачи (2.13) существует, то:*

1. Существует постоянная $M > 0$ такая, что имеют место оценки $|z(y, \mu)| \leqslant M$, $|z'_y(y, \mu)| \leqslant M/\sqrt{y}$ равномерно по $y \in (0, b]$.

2. $z(y, \mu) \to \bar{z}(y)$ при $\mu \to 0+0$ равномерно по $y \in [0, b]$,

3. Для любого $\varepsilon \in (0, b)$ выполнено $z'_y(y, \mu) \to \bar{z}'_y(y)$ при $\mu \to 0+0$ равномерно по $y \in [\varepsilon, b]$.

Здесь $z(y, \mu)$ и $\bar{z}(y)$ — решения задач (2.15) и (2.16) соответственно.

Доказательство. Сведём задачу (2.15) к системе, полагая $w(y,\mu) = z'_y(y,\mu)$.

$$\begin{cases} y\mu w' + 2\sqrt{y}R_\mu(y)w + \mu c(y)w + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)z - \mu a(y)z = 0, \\ z' = w, \quad y \in (0,b), \\ z(0) = 1, \quad w(0) = \varphi(0,\mu), \quad \mu > 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

где

$$\varphi(y,\mu) = \frac{\mu a(y) - \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)}{\mu c(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y)}.$$

Второе начальное условие $w(0) = \varphi(0,\mu)$ индуцировано вырождением и получается из уравнения (2.15) при $y = 0$.

При достаточно малых $0 < \mu < \mu_0$, знаменатель $\mu c(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y) > 0$. Выберем $y_0 > 0$ таким, что $c(y) \geqslant c(0)/2$ при $y \in [0, y_0]$. Тогда если $\mu c(y) \geqslant \sqrt{y}R_\mu(y)$, то $y \leqslant y_0$ и

$$|\varphi(y,\mu)| \leqslant \left|\frac{\mu a(y) - \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)}{\mu c(y)}\right| \leqslant \left|\frac{\mu a(y)}{\mu c(y)}\right| + \left|\frac{\sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)}{\mu c(y)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{a(y)}{c(y)}\right| + \left|\frac{\sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)}{\sqrt{y}R_\mu(y)}\right| \leqslant \left|\frac{a(y)}{c(y)}\right| + |\bar{c}(y)|,$$

иначе, если $|\mu c(y)| < \sqrt{y}R_\mu(y)$ и $y \leqslant y_0$, то

$$|\varphi(y,\mu)| \leqslant \left|\frac{\mu a(y) - \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)}{\sqrt{y}R_\mu(y)}\right| \leqslant \left|\frac{\mu a(y)}{\sqrt{y}R_\mu(y)}\right| + \left|\frac{\sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)}{\sqrt{y}R_\mu(y)}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\mu a(y)}{\mu c(y)}\right| + \left|\frac{\sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)}{\sqrt{y}R_\mu(y)}\right| \leqslant \left|\frac{a(y)}{c(y)}\right| + |\bar{c}(y)|,$$

наконец, при $|\mu c(y)| < \sqrt{y}R_\mu(y)$ и $y > y_0$

$$|\varphi(y,\mu)| \leqslant \left|\frac{\mu a(y)}{\sqrt{y_0}R_\mu(y_0)}\right| + |\bar{c}(y)|.$$

В любом случае мы показали, что функция $\varphi(y,\mu)$ ограничена в прямоугольнике $[0,b] \times [0,\mu_0]$. Она также непрерывна в этом прямоугольнике всюду, кроме точки $(0,0)$, и $\lim\limits_{\mu\to 0+0} \varphi(y,\mu) = \varphi(y,0)$ равномерно при $y \in [\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$.

Аналогично, принимая во внимание свойства 2–5, легко доказать, что функция $y\varphi'_y(y,\mu)$ тоже является ограниченной в прямоугольнике $[0,b] \times [0,\mu_0]$.

Нормализуем начальные данные задачи (2.17). Произведём следующую замену:

$$z = \hat{z} + 1, \quad w = \varphi(y,\mu) + \varphi(y,0)\hat{z} + \hat{w}.$$

Относительно неизвестных $\hat{z}$ и $\hat{w}$ система примет вид

$$\begin{cases} \mu y\hat{w}' + \mu y\varphi'_y(y,\mu) + \mu y\varphi'_y(y,0)\hat{z} + \mu y\varphi(y,0)\hat{z}' + 2\sqrt{y}R_\mu(y)\hat{w} + \mu c(y)\hat{w} + \\ \qquad + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)\hat{z} - \mu a(y)\hat{z} + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y) - \mu a(y) + \\ \qquad\qquad + (\varphi(y,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z})\left(2\sqrt{y}R_\mu(y) + \mu c(y)\right) = 0, \\ \hat{z}' = \varphi(y,\mu) + \varphi(y,0)\hat{z} + \hat{w}, \\ \hat{z}(0) = \hat{w}(0) = 0. \end{cases}$$

Подставим $\hat{z}'$ из второго уравнения в первое, принимая во внимание, что $\varphi(y,0) = -\bar{c}(y)/2$.

$$\begin{cases} \mu y\hat{w}' + \mu y\varphi'_y(y,\mu) - \mu y\dfrac{\bar{c}'(y)}{2}\hat{z} - \mu y\dfrac{\bar{c}(y)}{2}\left(\varphi(y,\mu) - \dfrac{\bar{c}(y)}{2}\hat{z} + \hat{w}\right) + \\ \quad + 2\sqrt{y}R_\mu(y)\hat{w} + \mu c(y)\hat{w} + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y)\hat{z} - \mu a(y)\hat{z} + \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y) - \mu a(y) + \\ \qquad + \left(\varphi(y,\mu) - \dfrac{\bar{c}(y)}{2}\hat{z}\right)\left(2\sqrt{y}R_\mu(y) + \mu c(y)\right) = 0, \\ \hat{z}' = \varphi(y,\mu) - \dfrac{\bar{c}(y)}{2}\hat{z} + \hat{w}, \\ \hat{z}(0) = \hat{w}(0) = 0. \end{cases}$$

Для сокращения объёма выкладок, введём обозначения

$$A(y) = -y\frac{\bar{c}(y)}{2} + c(y), \quad D(y) = -\frac{\bar{c}(y)}{2},$$

$$B(y) = -y\frac{\bar{c}'(y)}{2} + y\frac{\bar{c}^2(y)}{4} - a(y) - \frac{\bar{c}(y)c(y)}{2},$$

$$\Phi(y,\mu) = -y\varphi'_y(y,\mu) + y\frac{\bar{c}(y)}{2}\varphi(y,\mu) + a(y) - \varphi(y,\mu)c(y) -$$
$$-R_\mu(y)\cdot\frac{\bar{c}(y) + 2\varphi(y,\mu)}{\mu}.$$

В новых обозначениях система примет окончательный вид

$$\begin{cases} \mu y\hat{w}' + 2\sqrt{y}R_\mu(y)\hat{w} + \mu A(y)\hat{w} + \mu B(y)\hat{z} = \mu\Phi(y,\mu), \\ \hat{z}' = D(y)\hat{z} + \hat{w} + \varphi(y,\mu), \\ \hat{z}(0) = \hat{w}(0) = 0. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Функции $A(x), B(x), D(x)$ — непрерывные на $[0,b]$, $A(0) = c(0)$, функции $\Phi(y,\mu)$ и $\phi(y,\mu)$ — интегрируемые по y при всех $\mu \in [0,\mu_0]$.

$$R_\mu(y)\cdot\frac{\bar{c}(y) + 2\varphi(y,\mu)}{\mu} =$$
$$= R_\mu(y)\cdot\frac{\bar{c}(y)(\mu c(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y)) + 2(\mu a(y) - \sqrt{y}\bar{c}(y)R_\mu(y))}{\mu(\mu c(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y))} =$$
$$= R_\mu(y)\cdot\frac{c(y)\bar{c}(y) + 2a(y)}{\mu c(y) + 2\sqrt{y}R_\mu(y)} = \frac{c(y)\bar{c}(y) + 2a(y)}{\mu c(y)/R_\mu(y) + 2\sqrt{y}}.$$

Из последнего выражения следует, что функция $\sqrt{y}\cdot\Phi(y,\mu)$ равномерно ограничена по $\mu \in [0,\mu_0]$ и $y \in [0,b]$.

Лемма 2.1. *Пусть семейство непрерывных функций $v_\mu(y)$ таково, что для всех функций семейства выполнено неравенство*

$$0 \leqslant v_\mu(y) \leqslant \text{Æ} + \text{æ}\int\limits_0^y \ln\frac{y}{\xi}v_\mu(\xi)d\xi, \quad y \in [0,b] \qquad (2.19)$$

при некоторых постоянных Æ > 0 и æ > 0, не зависящих от μ. Тогда существует постоянная $C > 0$, не зависящая от μ и y, такая, что при всех $y \in [0,b]$ и μ выполнено

$$0 \leqslant v_\mu(y) \leqslant C.$$

Доказательство. Из неравенства (2.19) следует, что

$$0 \leqslant v_\mu(y) \leqslant Æ + æ \int\limits_0^y \ln\frac{b}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi, \quad y \in [0, b].$$

Введём обозначение

$$V_\mu(y) = \int\limits_0^y \ln\frac{b}{\xi} v_\mu(\xi)d\xi \geqslant 0, \quad V'_\mu(y) = \ln\frac{b}{y} v_\mu(y), \quad V_\mu(0) = 0.$$

Тогда неравенство примет вид

$$0 \leqslant \frac{V'_\mu(y)}{\ln(b/y)} \leqslant Æ + æ V_\mu(y),$$

$$0 \leqslant V'_\mu(y) \leqslant Æ \cdot \ln\frac{b}{y} + æ V_\mu(y) \cdot \ln\frac{b}{y}. \tag{2.20}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \bar{V}'(y) = Æ \cdot \ln\dfrac{b}{y} + æ\bar{V}(y) \cdot \ln\dfrac{b}{y}, \quad y \in (0, b), \\ \bar{V}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Единственное решение задачи (2.21) выписывается в квадратурах:

$$\bar{V}(y) = \bar{V}_0(y) \int\limits_0^y \frac{Æ \ln(b/\xi)}{\bar{V}_0(\xi)} d\xi, \quad \bar{V}_0(y) = e^{bæy} \left(\frac{y}{b}\right)^{-æy}.$$

Заметим, что

$$1 \leqslant \bar{V}_0(y) \leqslant \exp\left(æb^2 + \frac{æb}{e}\right), \quad y \in [0, b].$$

Тогда получим, что

$$0 \leqslant \bar{V}(y) \leqslant Æ \exp\left(æb^2 + \frac{æb}{e}\right) \cdot \int\limits_0^b \ln(b/\xi)d\xi \equiv \bar{C}, \quad y \in [0, b],$$

то есть функция $\bar{V}(y)$ ограничена на отрезке $[0, b]$ постоянной $\bar{C} > 0$. Покажем, что $\bar{V}(y)$ мажорирует все функции $V_\mu(y)$. Рассмотрим $F_\mu(y) \equiv \bar{V}(y) - V_\mu(y)$.

Известно, что $F_\mu(0) = 0$. Существует непрерывная функция $\rho_\mu(y)$ такая, что $0 \leqslant \rho_\mu(y) \leqslant 1$ при $y \in [0, b]$ и

$$0 \leqslant V'_\mu(y) = Æ \cdot \rho_\mu(y) \ln \frac{b}{y} + æ\rho_\mu(y) V_\mu(y) \cdot \ln \frac{b}{y},$$

$$F'_\mu(y) = \bar{V}'(y) - V'_\mu(y) = Æ \cdot \ln \frac{b}{y} + æ\bar{V}(y) \cdot \ln \frac{b}{y} - Æ \cdot \rho_\mu(y) \ln \frac{b}{y} - æ\rho_\mu(y) V_\mu(y) \cdot \ln \frac{b}{y} =$$

$$= Æ \cdot \ln \frac{b}{y} + æ\bar{V}(y) \cdot \ln \frac{b}{y} - Æ \cdot \rho_\mu(y) \ln \frac{b}{y} - æ\rho_\mu(y)\bar{V}(y) \cdot \ln \frac{b}{y} +$$

$$+ Æ \cdot \rho_\mu(y) \ln \frac{b}{y} + æ\rho_\mu(y)\bar{V}(y) \cdot \ln \frac{b}{y} - Æ \cdot \rho_\mu(y) \ln \frac{b}{y} - æ\rho_\mu(y) V_\mu(y) \cdot \ln \frac{b}{y} =$$

$$= (1 - \rho_\mu(y)) \left(Æ \cdot \ln \frac{b}{y} + æ\bar{V}(y) \cdot \ln \frac{b}{y} \right) + \rho_\mu(y) \cdot æF_\mu(y) \cdot \ln \frac{b}{y}.$$

В последнем выражении величины $\rho_\mu(y)$, $(1 - \rho_\mu(y))$ и выражение в большой скобке неотрицательные. Полученные соотношения являются задачей Коши для функции $F_\mu(y)$. По аналогии со случаем функции $\bar{V}(y)$ мы можем заключить, что $F_\mu(y) \geqslant 0$ при всех μ и $y \in [0, b]$, а следовательно,

$$0 \leqslant V_\mu(y) \leqslant \bar{V}(y) \leqslant \bar{C}.$$

Наконец, в силу определения $V_\mu(y)$ и (2.20), при всех μ и $y \in [0, b]$

$$v_\mu(y) = \frac{V'_\mu(y)}{\ln(b/y)} \leqslant \frac{Æ \cdot \ln(b/y) + æV_\mu(y) \cdot \ln(b/y)}{\ln(b/y)} = Æ + æV_\mu(y) \leqslant C \equiv Æ + æ\bar{C}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Для решения $\hat{z}(y, \mu)$, $\hat{w}(y, \mu)$ системы (2.18) имеют место оценки*

$$|\hat{w}(y)| \leqslant \frac{W_1}{\sqrt{y}} + W_2 \max_{\xi \in [0, y]} |\hat{z}(\xi)|, \quad y \in [0, b], \quad \mu > 0, \tag{2.22}$$

$$|\hat{w}(y)| \leqslant \frac{W_1}{\sqrt{y}} + \frac{W_2}{y} \int\limits_0^y |\hat{z}(\xi)| d\xi, \quad y \in [0, b], \quad \mu > 0, \tag{2.23}$$

причём постоянные W_1, $W_2 > 0$ не зависят от y, μ и функции $\hat{z}(y)$.

Доказательство. Перепишем часть системы в виде:

$$\begin{cases} \mu y\hat{w}' + 2\sqrt{y}R_\mu(y)\hat{w} + \mu A(y)\hat{w} = \mu\Phi(y,\mu) - \mu B(y)\hat{z}, \\ \hat{w}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

I. Найдём общее решение однородного уравнения

$$\mu y\mathring{w}' + 2\sqrt{y}R_\mu(y)\mathring{w} + \mu A(y)\mathring{w} = 0.$$

$$\mathring{w} = \exp\left(-\int\limits_b^y \frac{2R_\mu(\xi)}{\mu\sqrt{\xi}}d\xi\right)\exp\left(-\int\limits_b^y \frac{A(\xi)}{\xi}d\xi\right).$$

Обозначим первый интеграл:

$$P(y,\mu) = -\int\limits_b^y \frac{2R_\mu(\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi.$$

Из свойств функции $R_\mu(y)$ мы можем заключить, что $P(y,\mu)$ по y — непрерывная и монотонно убывающая функция на отрезке $[0,b]$.

Пользуясь известными свойствами функции $A(y)$, мы можем написать разложение

$$\frac{A(y)}{y} = \frac{c_0}{y} + \bar{A}(y),$$

в котором функция $\bar{A}(y)$ является интегрируемой. Тогда

$$\mathring{w} = \exp\left(\frac{P(y,\mu)}{\mu}\right)\exp\left(-\int\limits_b^y \frac{c_0}{\xi}d\xi\right)\exp\left(-\int\limits_b^y \bar{A}(\xi)d\xi\right) =$$

$$= y^{-c_0}\hat{A}(y)\cdot\exp\left(\frac{P(y,\mu)}{\mu}\right),$$

$$0 < C_1 \leqslant \hat{A}(y) = b^{c_0}\cdot\exp\left(-\int\limits_b^y \bar{A}(\xi)d\xi\right) \leqslant C_2.$$

Таким образом,

$$0 < C_1 y^{-c_0}\cdot\exp\left(\frac{P(y,\mu)}{\mu}\right) \leqslant \mathring{w} \leqslant C_2 y^{-c_0}\cdot\exp\left(\frac{P(y,\mu)}{\mu}\right).$$

II. Найдём решение задачи Коши (2.24) методом вариации постоянной

$$\hat{w}(y) = \mathring{w}(y) \int\limits_0^y \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi \mathring{w}(\xi)} d\xi.$$

Получим оценку (2.22).

$$|\hat{w}(y)| \leqslant \mathring{w}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{\Phi(\xi,\mu)}{\xi \mathring{w}(\xi)} \right| d\xi + \mathring{w}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi \mathring{w}(\xi)} \right| d\xi.$$

Имеет место оценка

$$\mathring{w}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{\Phi(\xi,\mu)}{\xi \mathring{w}(\xi)} \right| d\xi = \int\limits_0^y |\Phi(\xi,\mu)| \frac{\mathring{w}(y)}{\xi \mathring{w}(\xi)} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^y |\Phi(\xi,\mu)| \frac{1}{\xi} \left[C_2 y^{-c_0} \cdot \exp\left(\frac{P(y,\mu)}{\mu} \right) \right] \Big/ \left[C_1 \xi^{-c_0} \cdot \exp\left(\frac{P(\xi,\mu)}{\mu} \right) \right] d\xi =$$

$$= \frac{C_2}{C_1} \int\limits_0^y |\Phi(\xi,\mu)| \frac{y^{-c_0}}{\xi^{1-c_0}} \exp\left(\frac{P(y,\mu) - P(\xi,\mu)}{\mu} \right) d\xi \leqslant \frac{C_2}{C_1} \int\limits_0^y |\Phi(\xi,\mu)| \frac{y^{-c_0}}{\xi^{1-c_0}} d\xi.$$

Последнее неравенство имеет место в силу того факта, что аргумент экспоненты неположительный.

Далее воспользуемся выше упомянутым свойством о том, что существует постоянная $\bar{\Phi} > 0$ такая, что $|\sqrt{\xi} \cdot \Phi(\xi,\mu)| < \bar{\Phi}$. Тогда

$$\mathring{w}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{\Phi(\xi,\mu)}{\xi \mathring{w}(\xi)} \right| d\xi \leqslant \frac{C_2 \bar{\Phi}}{C_1} \int\limits_0^y \frac{y^{-c_0}}{\xi^{3/2-c_0}} d\xi \leqslant \frac{C_2 \bar{\Phi}}{C_1 \sqrt{y}}.$$

Аналогично,

$$\mathring{w}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi \mathring{w}(\xi)} \right| d\xi \leqslant \max_{y \in [0,b]} |B(y)| \cdot \max_{y \in [0,b]} |\hat{z}(y)| \cdot \frac{C_2}{C_1}.$$

Обозначая $W_1 = C_2 \bar{\Phi} / C_1$ и $\bar{W}_2 = C_2 \max\limits_{y \in [0,b]} |B(y)| / C_1$, получаем

$$|\hat{w}(y)| \leqslant \frac{W_1}{\sqrt{y}} + \bar{W}_2 \cdot \max_{y \in [0,b]} |\hat{z}(y)|, \quad y \in (0,b].$$

Также мы получаем оценку

$$|\hat{w}(y)| \leqslant \frac{W_1}{\sqrt{y}} + \mathring{w}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi \mathring{w}(\xi)} \right| d\xi \leqslant \frac{W_1}{\sqrt{y}} + \frac{C_2}{C_1} \cdot \max_{y\in[0,b]} |B(y)| \cdot \frac{b}{y} \int\limits_0^y |\hat{z}(\xi)|\, d\xi.$$

Для завершения доказательства леммы достаточно выбрать

$$W_2 = \frac{C_2}{C_1} \cdot (b+1) \cdot \max_{y\in[0,b]} |B(y)|\,.$$

□

Лемма 2.3. *Для решения $\hat{z}(y,\mu)$, $\hat{w}(y,\mu)$ системы* (2.18) *имеет место оценка*

$$|\hat{z}(y)| \leqslant Z_1 + Z_2 \int\limits_0^y |\hat{w}(\xi)| d\xi, \quad y \in [0,b], \quad \mu > 0, \tag{2.25}$$

причём постоянные Z_1, $Z_2 > 0$ не зависят от y, μ и функции $\hat{w}(y)$.

Доказательство. Перепишем часть задачи (2.18) в виде

$$\begin{cases} \hat{z}' - D(y)\hat{z} = \hat{w} + \varphi(y,\mu), \quad y \in (0,b), \\ \hat{z}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

I. Аналогично доказательству леммы 2.2, найдём решение однородного уравнения

$$\mathring{z}' - D(y)\mathring{z} = 0, \quad y \in (0,b),$$

$$0 < C_1 \leqslant \mathring{z}(y) = \exp\left(\int\limits_0^y D(\xi) d\xi \right) \leqslant C_2.$$

II. Методом вариации постоянной найдём решение задачи Коши (2.26).

$$\hat{z}(y) = \mathring{z}(y) \int\limits_0^y \frac{\hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)}{\mathring{z}(\xi)} d\xi,$$

$$|\hat{z}(y)| \leqslant \mathring{z}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{\hat{w}(\xi)}{\mathring{z}(\xi)} \right| d\xi + \mathring{z}(y) \int\limits_0^y \left| \frac{\varphi(\xi,\mu)}{\mathring{z}(\xi)} \right| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{bC_2}{C_1} \cdot \max_{y\in[0,b]} |\varphi(y,\mu)| + \frac{C_2}{C_1} \int\limits_0^y |\hat{w}(\xi)|\, d\xi \leqslant Z_1 + Z_2 \int\limits_0^y |\hat{w}(\xi)|\, d\xi, \quad y \in [0,b],$$

здесь

$$Z_1 = \frac{bC_2}{C_1} \cdot \sup_{y\in[0,b],\mu\in[0,\mu_0]} |\varphi(y,\mu)|\,, \quad Z_2 = \frac{C_2}{C_1}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.4. *Функции $\hat{z}(y,\mu)$, $\sqrt{y}\cdot\hat{w}(y,\mu)$ равномерно ограничены по $y \in [0,b]$ и $\mu \in [0,\mu_0]$.*

Доказательство. Мы применим одновременно оценки (2.23) и (2.25) лемм 2.2 и 2.3:

$$0 \leqslant |\hat{z}(y)| \leqslant Z_1 + Z_2 \int\limits_0^y \left[\frac{W_1}{\sqrt{\xi}} + \frac{W_2}{\xi} \int\limits_0^\xi |\hat{z}(\zeta)| d\zeta \right] d\xi \leqslant$$

$$\leqslant Z_1 + 2Z_2W_1\sqrt{b} + Z_2W_2 \int\limits_0^y \int\limits_0^\xi \frac{1}{\xi} |\hat{z}(\zeta)| d\zeta d\xi =$$

$$= Z_1 + 2Z_2W_1\sqrt{b} + Z_2W_2 \int\limits_0^y |\hat{z}(\zeta)| \int\limits_\xi^y \frac{1}{\xi}\, d\xi d\zeta =$$

$$= Z_1 + 2Z_2W_1\sqrt{b} + Z_2W_2 \int\limits_0^y |\hat{z}(\zeta)| \cdot \ln\left(\frac{y}{\zeta}\right) d\zeta.$$

Применяя лемму 2.1 к полученной цепочке неравенств, находим постоянную $C > 0$ такую, что

$$0 \leqslant |\hat{z}(y)| \leqslant C, \quad y \in [0,b], \quad \mu \in [0,\mu_0].$$

Далее, в силу оценки (2.22) леммы 2.2, имеет место неравенство

$$\sqrt{y}\cdot|\hat{w}(y)| \leqslant W_1 + W_2\sqrt{y}\cdot \max_{\xi\in[0,y]} |\hat{z}(\xi)| \leqslant W_1 + CW_2\sqrt{b} \equiv \bar{C}, \quad y \in [0,b], \quad \mu \in [0,\mu_0].$$

Лемма доказана. □

Вернёмся к исходным переменным задачи.

$$z(y) = \hat{z}(y) + 1, \quad z'(y) = \varphi(y,\mu) + \varphi(y,0)\hat{z}(y) + \hat{w}(y),$$

следовательно, в силу леммы 2.4, функции $z(y)$ и $\sqrt{y} \cdot z'(y)$ равномерно ограничены по $y \in [0,b]$ и $\mu \in [0,\mu_0]$, то есть первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства сходимости воспользуемся полученным при доказательстве леммы 2.2 представлением

$$\hat{w}(y) = \mathring{w}(y) \int\limits_0^y \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi \mathring{w}(\xi)} d\xi.$$

В силу уже доказанных фактов о $\Phi(y,\mu)$, $B(y)$ и $\hat{z}(y)$, имеет место оценка модуля числителя величиной $C/\sqrt{\xi}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от $\xi \in [0,b]$ и $\mu \in (0,\mu_0]$. Совмещая данную оценку с оценками функции $\mathring{w}(y)$, получим

$$|\hat{w}(y)| \leqslant C \cdot \int\limits_0^y \frac{\mathring{w}(y)}{\xi^{3/2}\mathring{w}(\xi)} d\xi \leqslant \frac{CC_2}{C_1} \int\limits_0^y \frac{y^{-c_0}}{\xi^{3/2-c_0}} \cdot \exp\left(\frac{P(y,\mu) - P(\xi,\mu)}{\mu}\right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{CC_2}{C_1} \int\limits_0^y \frac{y^{-c_0}}{\xi^{3/2-c_0}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{\mu} \int\limits_\xi^y \frac{2R_\mu(\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta\right) d\xi.$$

При $\mu \in (0,\mu_0]$ имеет место оценка $2R_\mu(y) \geqslant p\sqrt{y}$ с некоторым $p > 0$. Тогда

$$|\hat{w}(y)| \leqslant \frac{CC_2}{C_1} \int\limits_0^y \frac{y^{-c_0}}{\xi^{3/2-c_0}} \cdot \exp\left(\frac{p(\xi - y)}{\mu}\right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{CC_2}{C_1} \int\limits_0^y \frac{y^{-c_0}}{\xi^{3/2-c_0}} \cdot \left(\frac{p(y-\xi)}{\mu} + 1\right)^{-1/4} d\xi \leqslant \frac{CC_2\mu^{1/4}}{C_1 p^{1/4}} \int\limits_0^y \frac{y^{-c_0}}{\xi^{3/2-c_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{y-\xi}} d\xi.$$

Введём новую переменную интегрирования $t = \xi/y$.

$$|\hat{w}(y)| \leqslant \frac{CC_2\mu^{1/4}}{C_1 p^{1/4}} \frac{1}{y^{1/2+1/4}} \int\limits_0^1 \frac{1}{t^{3/2-c_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1-t}} dt = \frac{CC_2\mu^{1/4}}{C_1 p^{1/4}} \frac{1}{y^{3/4}} \cdot B(c_0 - 1/2, 3/4),$$

где $B(\alpha,\beta)$ — бета-функция Эйлера. Обозначая множители, не зависящие от y и μ, как $C_3>0$, получим оценку

$$|\hat{w}(y)|\leqslant\frac{C_3\sqrt[4]{\mu}}{\sqrt[4]{y^3}},\quad y\in(0,b],\quad \mu\in(0,\mu_0].$$

Последнее соотношение позволяет установить, что

I. Для любого $\varepsilon\in(0,b)$ на отрезке $[\varepsilon,b]$ функция $\hat{w}(y)$ равномерно стремится к нулю при $\mu\to 0+0$.

II. Для любых $y',y''\in[0,b]$, $y'\leqslant y''$ интеграл

$$\int\limits_{y'}^{y''}|\hat{w}(y)|\,dy\leqslant\int\limits_{0}^{b}|\hat{w}(y)|\,dy\leqslant C_3\sqrt[4]{b\mu}\underset{\mu\to 0+0}{\longrightarrow}0.$$

Так как имеет место соотношение

$$\hat{z}'(y)=\varphi(y,\mu)+\varphi(y,0)\hat{z}(y)+\hat{w}(y),\quad y\in[0,b],\quad \mu\in(0,\mu_0],$$

то из полученного свойства II следует, что для любых $y',y''\in[0,b]$, $y'\leqslant y''$

$$\int\limits_{y'}^{y''}|\hat{z}'(y)|\,dy\leqslant const\cdot\sqrt[4]{\mu},$$

причём постоянная в этом неравенстве не зависит от y',y'' и μ. Но тогда

$$|\hat{z}(y'')-\hat{z}(y')|=\left|\int\limits_{y'}^{y''}\hat{z}'(y)dy\right|\leqslant const\cdot\sqrt[4]{\mu},$$

то есть функции аргумента y: $\hat{z}(y,\mu)$ являются равностепенно непрерывными по $\mu\in(0,\mu_0]$ и равномерно ограниченными (последнее — в силу леммы 2.4). Следовательно, в силу теоремы Арцела, эти функции имеют при $\mu\to 0+0$ хотя бы один равномерный частичный предел $\tilde{z}(y)$.

Рассмотрим последовательность $\mu_n\to 0+0$ такую, что $\hat{z}(y,\mu_n)\to\tilde{z}(y)$ равномерно на $[0,b]$. Соответственно, $\hat{w}(y,\mu_n)\to 0$ в среднем и поточечно на $[0,b]$.

Подставим эту последовательность решений в систему (2.18) и проинтегрируем её по y от 0 до $y_0 \in [0, b]$:

$$\mu_n \int\limits_0^{y_0} y\hat{w}'(y)\,dy = \mu_n y_0 \hat{w}(y_0) - \mu_n \int\limits_0^{y_0} \hat{w}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{y_0} \left[\mu_n \Phi(y, \mu_n) - 2\sqrt{y} R_{\mu_n}(y)\hat{w}(y) - \mu_n A(y)\hat{w}(y) - \mu_n B(y)\hat{z}(y)\right] dy,$$

$$\hat{z}(y_0) = \int\limits_0^{y_0} \left[D(y)\hat{z}(y) + \hat{w}(y) + \varphi(y, \mu_n)\right] dy.$$

Устремим μ_n к 0. Тогда, в силу доказанных свойств $\hat{z}(y, \mu_n)$ и $\hat{w}(y, \mu_n)$, первое уравнение распадается в тождество $0 = 0$, а второе принимает вид

$$\tilde{z}(y_0) = \int\limits_0^{y_0} \left[D(y)\tilde{z}(y) + \varphi(y, 0)\right] dy.$$

Продифференцируем его по y_0 и подставим выражения для $D(y)$ и $\varphi(y, 0)$:

$$\begin{cases} \tilde{z}'(y) = -\dfrac{\bar{c}(y)}{2} \cdot \left(\tilde{z}(y) + 1\right), \quad y \in (0, b), \\ \tilde{z}(0) = 0. \end{cases}$$

Решение последней задачи Коши единственно и имеет вид $\tilde{z}(y) = \bar{z}(y) - 1$, где $\bar{z}(y)$ — решение формально-предельной задачи (2.16). Таким образом, система функций $\hat{z}(y, \mu)$ имеет единственную предельную точку $\bar{z}(y) - 1$ при $\mu \to 0 + 0$. По аналогии с доказательством теоремы 1.3, из этого и предкомпактности $\hat{z}(y, \mu)$ следует, что $\hat{z}(y, \mu) \to \bar{z}(y) - 1$ равномерно по $y \in [0, b]$ при $\mu \to 0 + 0$ или что $z(y, \mu) \to \bar{z}(y)$. Второе утверждение теоремы доказано.

Найдём предел производных $z'(y, \mu)$.

$$z'(y, \mu) = \varphi(y, \mu) + \varphi(y, 0)\hat{z}(y, \mu) + \hat{w}(y, \mu), \quad y \in [0, b], \quad \mu \in (0, \mu_0].$$

Для любого $\varepsilon \in (0, b)$ правая часть равенства имеет равномерный предел при $y \in [\varepsilon, b]$. Обозначим его символом $\check{z}(y)$. Тогда на любом $[\varepsilon, b]$ функция $z'(y, \mu)$

стремится к $\check{z}(y)$ равномерно при $\mu \to 0+0$ и

$$\check{z}(y) = -\frac{\bar{c}(y)}{2} - \frac{\bar{c}(y)}{2}(\bar{z}(y) - 1) = -\frac{\bar{c}(y)}{2} \cdot \bar{z}(y) = \bar{z}'(y).$$

Теорема полностью доказана. □

Следствие 2.3.1. *Для решения задачи* (2.13) *при* $k \to +\infty$ *имеет место равномерная по* $y \in [0, b]$ *асимптотика*

$$Y_k(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot \left(\exp\left(\int_0^y -\frac{\bar{c}(\xi)}{2}\,d\xi\right) + \bar{o}(1)\right),$$

$$y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. В силу теоремы (2.3), имеет место асимптотика

$$Y_k(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{y})^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot (\bar{z}(y) + \bar{o}(1)), \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Найдём $\bar{z}(y)$. Из (2.16)

$$\frac{d\bar{z}}{\bar{z}} = -\frac{\bar{c}(y)}{2}\,dy, \quad \bar{z}(y) = \exp\left(\int_0^y -\frac{\bar{c}(\xi)}{2}\,d\xi\right).$$

Утверждение доказано. □

2.5. Фундаментальная система решений в случае задачи E

Для доказательства сходимости ряда (2.4) мы, повторяя логику главы I, получим двусторонние оценки элементов ФСР уравнения (1.3). В данном разделе такие оценки будут получены для случая краевой задачи E (2.2) при $c(0) \geqslant 1$.

Будем обозначать символом $Y_k^0(y)$ в случае $c(0) \geqslant 1$ единственное решение задачи (2.13).

Теорема 2.4. *Существуют не зависящие от* $y \in [0, b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}, \tag{2.27}$$

$$Y_k^{0\prime}(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{k}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}, \tag{2.28}$$

при всех $y \in [0,b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^{0\prime}(y), \tag{2.29}$$

при всех $y \in [b/4,b]$ *и* $k \geqslant k_0$, $\alpha = c(0)-1$.

Доказательство. Воспользуемся разложением

$$Y_k^0(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot \left(\exp\left(\int\limits_0^y -\frac{\bar{c}(\xi)}{2}\,d\xi\right) + \bar{o}(1)\right)$$

следствия 2.3.1. При доказательстве теоремы 2.1 было установлено, что $Y_k^0(y) \neq 0$ при $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$, а значит, равномерно отделено от нуля. В силу теоремы 2.3, выражение в скобках равномерно ограничено по $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, существуют постоянные A_1 и $A_2 > 0$ такие, что

$$A_1 \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \leqslant Y_k^0(y) \leqslant A_2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}).$$

Рассмотрим

$$F(k\sqrt{y}) \equiv \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \Bigg/ \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}.$$

Функция $F(k\sqrt{y})$ является непрерывной и не обращается в нуль при $k\sqrt{y} \in (0,+\infty)$. В силу [83]

$$\lim_{k\sqrt{y}\to 0+0} F(k\sqrt{y}) = 1, \quad \lim_{k\sqrt{y}\to+\infty} F(k\sqrt{y}) = \lim_{k\sqrt{y}\to+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k\sqrt{y})^{-1/2}} \cdot \frac{J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y})}{i^\alpha \cdot e^{2\pi k\sqrt{y}}} =$$

$$= \lim_{k\sqrt{y}\to+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k\sqrt{y})^{-1/2}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{\sqrt{2\pi k\sqrt{y}} \cdot e^{2\pi k\sqrt{y}}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2}} > 0.$$

Таким образом, существуют B_1, $B_2 > 0$ такие, что $B_1 \leqslant F(k\sqrt{y}) \leqslant B_2$, $k\sqrt{y} \in [0,+\infty)$. Возвращаясь к оценке функций $Y_k^0(y)$, получим

$$A_1B_1 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant A_2B_2 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}.$$

Обозначая $C_1 \equiv A_1B_1$ и $C_2 \equiv A_2B_2$, получим оценки (2.27).

Получим оценки производных.

$$Y_k^{0\prime}(y) = \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y})\right)' \cdot z_k(y) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot z_k'(y) =$$

$$= -\frac{\pi k i}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot z_k(y) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot z_k'(y).$$

В силу теоремы (2.3), найдётся постоянная $M > 0$ такая, что

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot z_k'(y)\right| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \cdot \frac{M}{\sqrt{y}}.$$

По аналогии с доказательством первой части теоремы найдём $D_2 > 0$ такое, что

$$\left|-\frac{\pi k i}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y})\right| \leqslant D_2 \cdot \frac{\pi k}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{y}) \leqslant D_2 \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}.$$

Тогда

$$Y_k^{0\prime}(y) \leqslant D_2 M \cdot \frac{\pi k}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} + D_2 M \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \cdot \frac{k}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}, \quad C_2 = 2\pi D_2 M,$$

что доказывает оценки (2.28).

С другой стороны, существует $D_1 > 0$ такой, что

$$\left|-\frac{\pi k i}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y})\right| \geqslant D_1 \cdot \frac{\pi^2 k^2\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+3/2}}.$$

Если $\pi k\sqrt{y} \geqslant 1$, то

$$\left|-\frac{\pi k i}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{y}\right)^{\alpha}} \cdot J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{y})\right| \geqslant D_1 \cdot \frac{\pi k}{\sqrt{b}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},$$

иначе

$$\left|-\frac{\pi ki}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi ki\sqrt{y}\right)^{\alpha}}\cdot J_{\alpha+1}(2\pi ki\sqrt{y})\right|\geqslant D_1\cdot\pi k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}.$$

Тогда, если выбрать $D_3=D_1\pi(1+1/\sqrt{b})$, то

$$\left|-\frac{\pi ki}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi ki\sqrt{y}\right)^{\alpha}}\cdot J_{\alpha+1}(2\pi ki\sqrt{y})\right|\geqslant D_3\cdot k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},\quad k\sqrt{y}\geqslant 0.$$

Имеем при $y\geqslant b/4$ оценки

$$Y_k^{0\prime}(y)\geqslant D_3A_1\cdot k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}-D_2\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}\cdot\frac{M}{\sqrt{y}}\geqslant$$

$$\geqslant D_3A_1\cdot k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}-D_2\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}\cdot\frac{2M}{\sqrt{b}}=$$

$$=\left(D_3A_1k-\frac{2D_2M}{\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}.$$

Выберем $k_0\in\mathbb{N}$ таким образом, чтобы было выполнено $D_3A_1\cdot k_0\geqslant 4D_2M/\sqrt{b}$. Тогда при $k\geqslant k_0$

$$D_3A_1k-\frac{2D_2M}{\sqrt{b}}\geqslant D_3A_1\left(\frac{k}{2}+\frac{k_0}{2}-\frac{2D_2M}{D_3A_1\sqrt{b}}\right)\geqslant\frac{D_3A_1}{2}\cdot k.$$

Тогда

$$Y_k^{0\prime}(y)\geqslant C_1\cdot k\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}},\quad C_1\equiv\frac{D_3A_1}{2},$$

что доказывает неравенства (2.29). Теорема доказана. □

Построим решения уравнений (1.3), удовлетворяющие краевому условию задач (2.6) на конце $y=b$:

$$Y_k^b(y)\equiv -Y_k^0(y)\int\limits_b^y\frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2}\exp\left(-\int\limits_b^{\xi}\frac{c(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right)d\xi,\quad y\in(0,b],\quad k\in\mathbb{N}. \quad (2.30)$$

Функции $Y_k^0(y)$ и $Y_k^b(y)$ — линейно независимые, образуют ФСР уравнения (1.3). Получим оценки функций $Y_k^b(y)$.

Теорема 2.5. *Существуют не зависящие от $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{y^{-c_0+1/2}}{k} \cdot \frac{1 + (\pi k \sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.31}$$

$$C_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + (\pi k \sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \leqslant Y_k^b(y), \quad y \in \left[\frac{b}{4}, \frac{3b}{4}\right], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.32}$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot y^{-c_0} \cdot \frac{1 + (\pi k \sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Доказательство. Заметим, что из (2.30) следует

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^b(y) = \int\limits_y^b \left(\frac{Y_k^0(y)}{Y_k^0(\xi)}\right)^2 \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) d\xi.$$

Будем писать $F(y) \asymp G(y)$, если существуют не зависящие от $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$ числа $A_2 > A_1 > 0$ такие, что $A_1 G(y) \leqslant F(y) \leqslant A_2 G(y)$ при $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$. Функция

$$\exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) = \exp\left(-\int\limits_b^\xi \left(\frac{c(0)}{\zeta} + \bar{c}(\zeta)\right) d\zeta\right) =$$

$$= e^{(c(0)\cdot(\ln b - \ln \xi))} \cdot \exp\left(-\int\limits_b^\xi \bar{c}(\zeta) d\zeta\right) = \xi^{-c_0} \cdot b^{c_0} \cdot \exp\left(-\int\limits_b^\xi \bar{c}(\zeta) d\zeta\right) \asymp \xi^{-c_0},$$
$$\xi \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Применим оценки (2.27) и (2.28) теоремы 2.4 в полученном тождестве:

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^b(y) \asymp \int\limits_y^b \left(\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k \sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1 + (\pi k \sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}\right)^2 \xi^{-c_0} \, d\xi.$$

Введём новые переменные $k\sqrt{\xi} = \tau$, $k\sqrt{y} = t$, $k\sqrt{b} = z$, $\nu = \tau - t$:

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^b(y) \asymp 2k^{2c_0-2} \int\limits_t^z \left(\frac{e^{2\pi t}}{1 + (\pi t)^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1 + (\pi \tau)^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi\tau}}\right)^2 \tau^{1-2c_0} \, d\tau \asymp$$

$$\asymp k^{2c_0-2}\int\limits_t^z \frac{e^{4\pi t}}{(t+1)^{2\alpha+1}}\cdot\frac{(\tau+1)^{2\alpha+1}}{e^{4\pi\tau}}\cdot\tau^{1-2c_0}\,d\tau,$$

$$\frac{e^{4\pi t}}{(t+1)^{2\alpha+1}}\cdot\frac{(\tau+1)^{2\alpha+1}}{e^{4\pi\tau}} = e^{-4\pi(\tau-t)}\cdot\left(\frac{1+t-(t-\tau)}{1+t}\right)^{2\alpha+1} =$$

$$= e^{-4\pi(\tau-t)}\cdot\left(1+\frac{(\tau-t)}{1+t}\right)^{2\alpha+1} \leqslant e^{-4\pi\nu}\cdot(1+\nu)^{2\alpha+1}.$$

Тогда

$$Y_k^0(y)\cdot Y_k^b(y)\leqslant const\cdot k^{2c_0-2}\int\limits_0^{z-t} e^{-4\pi\nu}\cdot(1+\nu)^{2\alpha+1}\cdot(t+\nu)^{1-2c_0}\,d\nu.$$

Отметим, что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-4\pi\nu}\cdot(1+\nu)^{2\alpha+1}\cdot(t+\nu)^{1-2c_0}\,d\nu$$

сходится равномерно по $t>0$, а значит, можно выбрать $\nu_0>1$, не зависящее от t, такое, что

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-4\pi\nu}\cdot(1+\nu)^{2\alpha+1}\cdot(t+\nu)^{1-2c_0}\,d\nu \leqslant 10\int\limits_1^{\nu_0} e^{-4\pi\nu}\cdot(1+\nu)^{2\alpha+1}\cdot(t+\nu)^{1-2c_0}\,d\nu.$$

Значит,

$$Y_k^0(y)\cdot Y_k^b(y)\leqslant const\cdot k^{2c_0-2}\int\limits_0^{\nu_0} e^{-4\pi\nu}\cdot(1+\nu)^{2\alpha+1}\cdot(t+\nu)^{1-2c_0}\,d\nu \leqslant$$

$$\leqslant const\cdot k^{2c_0-2}\int\limits_0^{\nu_0}(t+\nu)^{1-2c_0}\,d\nu \leqslant const\cdot k^{2c_0-2}\cdot t^{1-2c_0} =$$

$$= const\cdot k^{2c_0-2}\cdot k^{1-2c_0}\cdot y^{1/2-c_0} = const\cdot\frac{y^{-c_0+1/2}}{k},$$

из чего следуют первые оценки (2.31).

Аналогично, мы можем оценить

$$Y_k^0(y)\cdot Y_k^b(y)\asymp k^{2c_0-2}\int\limits_t^z \frac{e^{4\pi t}}{(t+1)^{2\alpha+1}}\cdot\frac{(\tau+1)^{2\alpha+1}}{e^{4\pi\tau}}\cdot\tau^{1-2c_0}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant const \cdot k^{2c_0-2} \int\limits_0^{z-t} e^{-4\pi\nu} \cdot (t+\nu)^{1-2c_0}\, d\nu.$$

Если $b/4 < y < 3b/4$, то $z - t = k(\sqrt{b} - \sqrt{y}) \geqslant \sqrt{b}(2-\sqrt{3})/2 \equiv \nu_0 > 0$. Тогда

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^b(y) \geqslant const \cdot k^{2c_0-2} \int\limits_0^{\nu_0} e^{-4\pi\nu} \cdot (t+\nu)^{1-2c_0}\, d\nu \geqslant$$

$$\geqslant const \cdot k^{2c_0-2} \cdot (t+\nu_0)^{1-2c_0} = const \cdot k^{2c_0-2} \cdot (k\sqrt{y}+\nu_0)^{1-2c_0} \geqslant$$

$$\geqslant const \cdot k^{2c_0-2} \cdot (k\sqrt{y})^{1-2c_0} \geqslant const \cdot \frac{1}{k},$$

таким образом, оценки (2.32) доказаны.

Оценим производные.

$$Y_k^{b\prime}(y) = -\int\limits_b^y \frac{Y_k^{0\prime}(y)}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) d\xi -$$

$$-\frac{Y_k^0(y)}{(Y_k^0(y))^2} \exp\left(-\int\limits_b^y \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right).$$

Применяя все оценки (2.27), (2.28) и (2.29) теоремы 2.4, мы можем оценить

$$\left|Y_k^{b\prime}(y) \cdot Y_k^0(y)\right| \leqslant \int\limits_y^b \frac{Y_k^{0\prime}(y) \cdot Y_k^0(y)}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) d\xi +$$

$$+\left(\frac{Y_k^0(y)}{Y_k^0(y)}\right)^2 \exp\left(-\int\limits_b^y \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{kC_2}{C_1\sqrt{y}} \int\limits_y^b \left(\frac{Y_k^0(y)}{Y_k^0(\xi)}\right)^2 \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) d\xi + \exp\left(-\int\limits_b^y \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right).$$

Оценки на оба слагаемых были получены в первой половине этого доказательства. Применяя их, мы можем написать, что

$$\left|Y_k^{b\prime}(y) \cdot Y_k^0(y)\right| \leqslant const \cdot \left[\frac{k}{\sqrt{y}} \cdot \frac{y^{-c_0+1/2}}{k} + y^{-c_0}\right] \leqslant const \cdot y^{-c_0},$$

что доказывает оценки (2.33). Теорема доказана. $\square$

2.6. Фундаментальная система решений в случае задачи D

В данном разделе мы получим аналоги двусторонних оценок раздела 5 для случая краевой задачи D (2.1) (т.е. при $c(0) < 1$).

Будем искать одно из решений уравнения (1.3) в виде $Y_k^0(y) \equiv y^{1-c(0)}\hat{Y}_k(y)$, где $\hat{Y}_k(y)$ — новая неизвестная функция, ограниченная в окрестности нуля. Подставим это представление в уравнение (1.3).

$$y\left(y^{1-c(0)}\hat{Y}_k''(y) + 2(1-c(0))y^{-c(0)}\hat{Y}_k'(y) - c(0)(1-c(0))y^{-1-c(0)}\hat{Y}_k(y)\right) +$$

$$+c(y)\left(y^{1-c(0)}\hat{Y}_k'(y) + (1-c(0))y^{-c(0)}\hat{Y}_k(y)\right) - (\pi^2k^2 + a(y))y^{1-c(0)}\hat{Y}_k(y) = 0,$$

$$\begin{cases} y\hat{Y}_k''(y) + \hat{c}(y)\hat{Y}_k'(y) - (\pi^2k^2 + \hat{a}(y))\hat{Y}_k(y) = 0, \quad y \in (0,b), \\ \hat{Y}_k(0) = 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (2.34)$$

$$\hat{c}(y) = c(y) + 2(1-c(0)), \quad \hat{a}(y) = a(y) - (1-c(0)) \cdot \bar{c}(y).$$

Задача (2.34) — задача вида (2.13), причём $\hat{c}(0) = c(0) + 2(1-c(0)) = 2-c(0) > 1$. А значит, задача (2.34) имеет единственное решение в силу теоремы 2.1, которое удовлетворяет асимптотике теоремы (2.4) с числом $\alpha = \hat{c}(0) - 1 = 2 - c(0) - 1 = 1 - c(0)$. Договоримся далее в общем случае использовать обозначение $\alpha = |1 - c(0)|$.

Таким образом, в качестве первого элемента ФСР уравнения (1.3) мы выберем функцию $Y_k^0(y) \equiv y^{1-c(0)}\hat{Y}_k(y)$, где $\hat{Y}_k(y)$ — решение задачи (2.34). Заметим, что $Y_k^0(0) = 0$.

Теорема 2.6. *Существуют не зависящие от $y \in [0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot y^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \cdot y^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}, \qquad (2.35)$$

$$Y_k^{0\prime}(y) \leqslant C_2 \cdot ky^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}, \qquad (2.36)$$

при всех $y \in [0, b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k y^{\alpha} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^{0\,\prime}(y), \tag{2.37}$$

при всех $y \in [b/4, b]$ *и* $k \geqslant k_0$, $\alpha = 1 - c(0)$.

Доказательство. Оценки (2.35) непосредственно следуют из теоремы 2.4, применённой к функциям $\hat{Y}_k(y)$.

$$\begin{gathered} Y_k^{0\,\prime}(y) = \alpha y^{\alpha-1}\hat{Y}_k(y) + y^{\alpha}\hat{Y}_k'(y) \leqslant \\ \leqslant \alpha C_2 \cdot y^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} + C_2 \cdot y^{\alpha} \cdot \frac{k}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \leqslant \\ \leqslant C_2\left(\alpha + \sqrt{b}\right) \cdot k y^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}, \end{gathered}$$

что доказывает оценки (2.36).

Наконец, при $y \in [b/4, b]$ и $k \geqslant k_0$ мы получаем оценки (2.37):

$$Y_k^{0\,\prime}(y) \geqslant C_1 \cdot y^{\alpha} \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} - \alpha C_2 \cdot y^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(C_1 k - \frac{4C_2}{b}\right) \cdot y^{\alpha} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \geqslant C \cdot k y^{\alpha} \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}$$

при достаточно больших k. Теорема доказана. □

Аналогично разделу 5, определим второй элемент ФСР уравнения (1.3) согласно формуле (2.30).

Теорема 2.7. *Существуют не зависящие от* $y \in [0, b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{k\sqrt{y}} \cdot \frac{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.38}$$

$$C_1 \cdot \frac{y^{\alpha}}{k} \cdot \frac{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \leqslant Y_k^b(y), \quad y \in \left(0, \frac{3b}{4}\right], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.39}$$

$$\left|Y_k^{b\,\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1 + (\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.40}$$

Доказательство. Данное доказательство, в целом, аналогично доказательству теоремы 2.5. Заметим, что в силу оценок (2.35) теоремы 2.6, справедливо

$$Y_k^0(y)\cdot Y_k^b(y) \asymp \int\limits_y^b \left(y^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \cdot \xi^{-\alpha} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}} \right)^2 \xi^{-c_0}\, d\xi \asymp$$

$$\asymp y^{2\alpha} \int\limits_y^b \left(\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}} \right)^2 \xi^{-1-\alpha}\, d\xi.$$

Для последнего интеграла при доказательстве теоремы 2.5 была получена следующая оценка:

$$Y_k^0(y)\cdot Y_k^b(y) \leqslant const \cdot y^{2\alpha} \cdot \frac{y^{-1-\alpha+1/2}}{k} = const \cdot y^\alpha \cdot \frac{y^{-1/2}}{k},$$

или же

$$Y_k^b(y) \leqslant const \cdot \frac{y^{\alpha-1/2}}{k\cdot Y_k^0(y)} \leqslant const \cdot \frac{y^{\alpha-1/2}}{C_1 k} \cdot y^{-\alpha} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} =$$

$$= const \cdot \frac{1}{k\sqrt{y}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

что доказывает оценки (2.38).

Аналогично, мы получим оценки (2.39), если оценим интеграл снизу:

$$Y_k^0(y)\cdot Y_k^b(y) \geqslant const \cdot \frac{y^{2\alpha}}{k},$$

то

$$Y_k^b(y) \geqslant const \cdot \frac{y^{2\alpha}}{k\cdot Y_k^0(y)} \geqslant const \cdot \frac{y^\alpha}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}},$$

$$y \in \left(0, \frac{3b}{4}\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Наконец, как было показано при доказательстве теоремы 2.5,

$$\left| Y_k^{b\prime}(y) \cdot Y_k^0(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{kC_2}{C_1} \int\limits_y^b \left(\frac{Y_k^0(y)}{Y_k^0(\xi)} \right)^2 \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) d\xi + \exp\left(-\int\limits_b^y \frac{c(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot \left[k \cdot \frac{y^{\alpha-1/2}}{k} + y^{-c_0}\right] \leqslant const \cdot y^{\alpha-1},$$

$$\left|Y_k^b{}'(y)\right| \leqslant const \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана. □

2.7. Оценки определителя Вронского и функции Грина

Далее мы будем рассматривать одновременно как случай задачи D (2.1), так и случай задачи E (2.2). Для начала, мы получим оценку для определителя Вронского системы функций $\{Y_k^0(y), Y_k^b(y)\}$.

$$w_k(y) = \det \begin{pmatrix} Y_k^0(y) & Y_k^b(y) \\ \frac{dY_k^0}{dy}(y) & \frac{dY_k^b}{dy}(y) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in (0,b). \tag{2.41}$$

Теорема 2.8. *Существуют постоянная $W>0$ и номер $k_0 \in \mathbb{N}$, не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in (0,b]$ такие, что*

$$w_k(y) \leqslant -Wy^{-c(0)} < 0, \quad k \geqslant k_0.$$

Доказательство. I. Данное доказательство, в целом, аналогично доказательству теоремы (1.12). Оценим $w_k(\xi)$, где $\xi = b/2$. В силу леммы 1.3, при достаточно больших номерах k в силу теорем 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 имеет место

$$Y_k^0(\xi) > 0, \quad Y_k^0{}'(\xi) > 0, \quad Y_k^b(\xi) > 0, \quad Y_k^b{}'(\xi) < 0,$$

$$w_k(\xi) = Y_k^0(\xi)Y_k^b{}'(\xi) - Y_k^0{}'(\xi)Y_k^b(\xi) \leqslant -Y_k^0{}'(\xi)Y_k^b(\xi) \leqslant$$
$$\leqslant -C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}} \cdot C_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}} = -C_1^2, \quad c(0) \geqslant 1,$$

$$w_k(\xi) \leqslant -C_1 \cdot k\xi^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}} \cdot C_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}} = -C_1^2 \cdot \xi^\alpha, \quad c(0) < 1.$$

В любом случае,

$$w_k(\xi) \leqslant -V, \quad V \equiv C_1^2\left(1+\xi^\alpha\right), \quad k \geqslant k_0.$$

II. В произвольной точке $y \in (0, b]$ мы применим формулу Остроградского-Лиувилля:

$$w_k(y) = w_k(\xi) \exp\left(-\int_{\xi}^{y} \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi\right) \leqslant w_k(\xi) \cdot y^{-c_0} \cdot b^{c_0} \cdot \exp\left(-\int_{b}^{y} \bar{c}(\xi) d\xi\right) \leqslant$$

$$\leqslant -VP \cdot y^{-c_0}, \quad y \in (0, b], \quad k \geqslant k_0,$$

$$P = \min_{y \in [0,b]} b^{c_0} \cdot \exp\left(-\int_{b}^{y} \bar{c}(\xi) d\xi\right) > 0.$$

Обозначая $W \equiv VP > 0$, получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

$\square$

Функции Грина краевых задач (2.5) и (2.6) имеют вид:

$$G_k(y, \eta) = \begin{cases} \frac{Y_k^0(y) Y_k^b(\eta)}{\eta w_k(\eta)}, & y < \eta, \\ \frac{Y_k^0(\eta) Y_k^b(y)}{\eta w_k(\eta)}, & y > \eta, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

Теорема 2.9. *Существует постоянная $M > 0$ такая, что*

$$\int_0^b |G_k(y, \eta)| \, d\eta \leqslant \frac{M}{k^2}$$

при всех $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, для любого компакта $K \subset (0, b)$ найдётся постоянная $M_K > 0$ такая, что

$$\int_0^b \left| \frac{\partial G_k}{\partial y}(y, \eta) \right| d\eta \leqslant \frac{M_K}{k}$$

при всех $y \in K$ и $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство производится по аналогии с доказательством теоремы 1.13. Применим формулу (2.42), теоремы 2.8, 2.4, 2.5, 2.6 и 2.7. В случае краевой задачи E получаем следующие оценки:

$$\int_0^b |G_k(y, \eta)| \, d\eta = \int_0^y \left| \frac{Y_k^0(\eta) Y_k^b(y)}{\eta w_k(\eta)} \right| d\eta + \int_y^b \left| \frac{Y_k^0(y) Y_k^b(\eta)}{\eta w_k(\eta)} \right| d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_2^2 \cdot \int\limits_0^y \frac{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}}{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{y^{-c_0+1/2}}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \cdot \frac{1}{W\eta^{1-c_0}} d\eta +$$

$$+ C_2^2 \cdot \int\limits_y^b \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{\eta^{-c_0+1/2}}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}} \cdot \frac{1}{W\eta^{1-c_0}} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2^2}{kW} \cdot y^{-c_0+1/2} \cdot \int\limits_0^y \frac{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}}{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \cdot \eta^{c_0-1}\, d\eta +$$

$$+ \frac{C_2^2}{kW} \cdot \int\limits_y^b \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}} \cdot \eta^{-1/2}\, d\eta.$$

Оценки второго интеграла были получены при доказательстве теоремы 2.5. Применим их.

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2^2 y^{-c_0+1/2}}{kW} \cdot \int\limits_0^y \frac{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}}{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \cdot \eta^{c_0-1}\, d\eta + const \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{y^0}{k}.$$

Оценим первый интеграл. Выполним замену $k\sqrt{\eta} = \tau$, $k\sqrt{y} = t$, $\nu = t - \tau$. Тогда

$$\int\limits_0^y \frac{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}}{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \cdot \eta^{c_0-1}\, d\eta \asymp$$

$$\asymp k^{-2c_0} \int\limits_0^t \frac{e^{2\pi\tau}}{(1+\tau)^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{(1+t)^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi t}} \cdot \tau^{2c_0-1}\, d\tau \asymp$$

$$\asymp k^{-2c_0} \int\limits_0^t e^{-2\pi(t-\tau)} \cdot \left(\frac{1+t}{1+\tau}\right)^{\alpha+1/2} \cdot \tau^{2c_0-1}\, d\tau \asymp$$

$$\asymp k^{-2c_0} \int\limits_0^t e^{-2\pi(t-\tau)} \cdot \left(1 + \frac{t-\tau}{1+\tau}\right)^{\alpha+1/2} \cdot \tau^{2c_0-1}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant k^{-2c_0} \int\limits_0^t e^{-2\pi\nu} \cdot (1+\nu)^{\alpha+1/2} \cdot (t-\nu)^{2c_0-1}\, d\nu \leqslant$$

$$\leqslant k^{-2c_0} \cdot t^{2c_0-1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\pi\nu} \cdot (1+\nu)^{\alpha+1/2}\, d\nu = const \cdot k^{-2c_0} \cdot k^{2c_0-1} \cdot y^{c_0-1/2}.$$

Тогда, совмещая оценки, мы получим

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\, d\eta \leqslant const \cdot \frac{y^{-c_0+1/2}}{k^2} \cdot y^{c_0-1/2} + const \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{y^0}{k} = const \cdot \frac{1}{k^2},$$

$$y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

В случае краевой задачи D получаем оценки:

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\, d\eta \leqslant C_2^2 \cdot \int\limits_0^y \eta^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}}{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1}{k\sqrt{y}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} \cdot \frac{1}{W\eta^{1-c_0}} d\eta +$$

$$+ C_2^2 \cdot \int\limits_y^b y^\alpha \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1}{k\sqrt{\eta}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}} \cdot \frac{1}{W\eta^{1-c_0}} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2^2}{kW} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \int\limits_0^y \frac{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}}{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}} d\eta +$$

$$+ \frac{C_2^2}{kW} \cdot y^\alpha \cdot \int\limits_y^b \frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\sqrt{\eta})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\eta}}} \cdot \eta^{c_0-3/2} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{y^{1/2}}{k} + const \cdot y^\alpha \cdot \frac{y^{c_0-3/2+1/2}}{k^2} = const \cdot \frac{1}{k^2},$$

$$y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

таким образом, первая оценка доказана.

Отметим, что операция дифференцирования по y, применённая к какой-либо из функций $Y_k^0(y)$ или $Y_k^b(y)$ ухудшает оценки в теоремах 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 не более чем в k/y раз. Тогда произведённые выше выкладки могут быть повторены и для интеграла от $G'_{ky}(y,\eta)$:

$$\int\limits_0^b \left| \frac{\partial G_k}{\partial y}(y,\eta) \right| d\eta \leqslant C \cdot \frac{1}{ky}, \quad y \in (0,b), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Фиксируем произвольный компакт $K \subset (0, b)$ и найдём $\varepsilon > 0$ такое, что $K \subset (\varepsilon, b - \varepsilon) \subset (0, b)$. Тогда при $y \in K$ мы имеем

$$\int_0^b \left|\frac{\partial G_k}{\partial y}(y, \eta)\right| d\eta \leqslant C \cdot \frac{1}{k\varepsilon} = \frac{M_K}{k}, \quad y \in K, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $M_K \equiv C/\varepsilon > 0$ — постоянная, не зависящая от $y \in K$ и $k \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. □

2.8. Асимптотика коэффициентов ряда Фурье решения

Построенные в третьем разделе функции $Y_k(y)$ — решения задач (2.5) и (2.6) — могут быть получены с использованием функции Грина

$$Y_k(y) = \int_0^b G_k(y, \eta) f_k(\eta)\, d\eta, \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Получим асимптотики $Y_k(y)$ с использованием уже доказанных оценок функции Грина.

Теорема 2.10. *Пусть функции $f_k(y)$ являются равномерно ограниченными вместе с первыми и вторыми производными при $k \in \mathbb{N}$ и $y \in [0, b]$. Тогда равномерно по $y \in [0, b]$ имеет место асимптотика*

$$Y_k(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Кроме того, на любом компакте $K \subset (0, b)$ равномерно по $y \in K$ справедлива асимптотическая формула

$$Y_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-N}}\right), \quad N = 0, 1, 2.$$

Доказательство. В силу первой из оценок теоремы 2.9,

$$|Y_k(y)| \leqslant \int_0^b |f_k(\eta) \cdot G_k(y, \eta)|\, d\eta \leqslant \frac{M M_f}{k^2},$$

$$M_f = \sup |f_k(y)|, \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

таким образом, первая асимптотика доказана.

Рассмотрим функцию

$$R_k(y) \equiv Y_k(y) + \frac{f_k(y)}{\pi^2 k^2}.$$

Подставляя $R_k(y)$ в уравнения задач (2.5) или (2.6), получаем краевые задачи для функции $R_k(y)$:

$$\begin{cases} yR_k'' + c(y)R_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)R_k = F_k(y) \equiv \frac{yf_k''(y) + c(y)f_k' - a(y)f_k(y)}{\pi^2 k^2}, \\ R_k(0) = \frac{f_k(0)}{\pi^2 k^2}, \quad R_k(b) = \frac{f_k(b)}{\pi^2 k^2}, \end{cases}$$

в случае краевой задачи D, и

$$\begin{cases} yR_k'' + c(y)R_k' - (a(y) + \pi^2 k^2)R_k = F_k(y), \\ c(0)R_k'(0) - (a(0) + \pi^2 k^2)R_k(0) = \frac{c(0)}{\pi^2 k^2} \cdot f_k'(0) - \left(\frac{a(0)}{\pi^2 k^2} + 1\right) f_k(0) + f_k(0), \\ R_k(b) = \frac{f_k(b)}{\pi^2 k^2}, \end{cases}$$

в случае краевой задачи E. Соответственно, для функции $R_k(y)$ имеет место одно из следующих представлений:

$$R_k(y) = \int\limits_0^b G_k(y,\eta)F_k(\eta)\,d\eta + C_{1,k} \cdot Y_k^0(y) + C_{2,k} \cdot Y_k^b(y),$$

$$R_k(y) = \int\limits_0^b G_k(y,\eta)F_k(\eta)\,d\eta + C_{1,k} \cdot Y_k^0(y),$$

причём

$$\left|C_{1,k} \cdot Y_k^0(b)\right|, \left|C_{2,k} \cdot Y_k^b(0)\right|, |F_k(y)| \leqslant \frac{M_F}{k^2}, \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$M_F = \max(\sup\left|y^2 f_k''(y) + c(y)f_k' - a(y)f_k(y)\right|, MM_f)$$

в силу первой асимптотики данной теоремы.

В силу принципа максимума (лемма 1.1) также верно

$$\left|C_{1,k}\cdot Y_k^0(b-\varepsilon)\right|, \left|C_{2,k}\cdot Y_k^b(\varepsilon)\right| \leqslant \frac{M_F}{k^2}, \quad k\in\mathbb{N},$$

где $\varepsilon>0$ таков, что $K\subset(\varepsilon,b-\varepsilon)$.

Применим оценки теорем 2.4, 2.6, 2.7 и 2.9. Фиксируем произвольный компакт $K\subset(0,b)$. При $N=0,1$ и $y\in K$

$$\left|R_k^{(N)}(y)\right| \leqslant \int\limits_0^b \left|\frac{\partial^N G_k}{\partial y^N}(y,\eta)F_k(\eta)\right| d\eta + \left|C_{1,k}\cdot Y_k^{0\,(N)}(y)\right| + \left|C_{2,k}\cdot Y_k^{b\,(N)}(y)\right|^{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_K M_F}{k^{4-N}} + \frac{M_F}{k^2}\left|\frac{C_2 k^N}{C_1 y^N\sqrt{y}}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{y}}}{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}\cdot\frac{1+(\pi k\sqrt{b-\varepsilon})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{b-\varepsilon}}}\right| +$$
$$+\frac{M_F}{k^2}\left|\frac{C_2k^N}{C_1(K)y^N\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1+(\pi k\sqrt{y})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{y}}}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{\varepsilon}}}{1+(\pi k\sqrt{\varepsilon})^{\alpha+1/2}}\right|.$$

Легко заметить, что второе и третье слагаемые убывают экспоненциально при $y\in K$. В силу этого, можно выбрать постоянную $C>0$, зависящую только от компакта K, так, что будут выполнены оценки

$$\left|R_k^{(N)}(y)\right| \leqslant \frac{C}{k^{4-N}}, \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N}, \quad N=0,1,$$

из которых следует вторая асимптотика теоремы при $N=0$ и 1.

$$yR_k'' + c(y)R_k' - (a(y)+\pi^2k^2)R_k = F_k(y),$$
$$R_k''(y) = \frac{F_k(y)+(a(y)+\pi^2k^2)R_k(y)-c(y)R_k'(y)}{y}.$$

При $y\in K$, с применением ранее полученных оценок, получаем

$$\left|R_k^{(2)}(y)\right| \leqslant \frac{C}{k^2}, \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Теорема доказана. □

[2] В случае краевой задачи D.

2.9. Теоремы существования решений

На основании полученных результатов мы можем сформулировать теоремы существования решений краевых задач (2.1) и (2.2).

Теорема 2.11. *Пусть $c(0) \geqslant 1$ и правая часть $f(x,y)$ задачи (2.2) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (2.2), представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ аналитичны в области U.

Теорема 2.12. *Пусть $c(0) < 1$, $c(0) \neq 0, -1, -2, \ldots$ и правая часть $f(x,y)$ задачи (2.1) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (2.1), представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_k(y) + \left(\frac{y}{b}\right)^{r_1} \varphi_k(y) \right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ и $\varphi_k(y)$ аналитичны в области U.

Теорема 2.13. *Пусть $c(0) = 0, -1, -2, \ldots$ и правая часть $f(x,y)$ задачи (2.1) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (2.1), представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_k(y) + \ln\left(\frac{y}{b}\right) \chi_k(y) \right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_k(y)$ и $\chi_k(y)$ аналитичны в области U.

Доказательство. Исходя из условий на функцию $f(x,y)$, мы можем заключить, что функции $f_k(y)$ аналитичны в U и равномерно ограничены на $y \in [0,b]$ при $k \in \mathbb{N}$ вместе с первыми и вторыми производными. Следовательно, справедливы представления функций $Y_k(y)$, доказанные в разделе 3 настоящей главы (см. теоремы 2.1 и 2.2).

Выполнены все условия теоремы 2.10, а значит, в силу леммы 1.9, ряд (2.4) сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω и определяет в нём функцию из $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Так как данный ряд построен как формальное решение задачи (2.1) или (2.2) соответственно, то он является её классическим решением по построению.

Теоремы 2.11, 2.12 и 2.13 доказаны. $\square$

Глава 3

Краевая задача D для эллиптического уравнения с регулярным нецелым вырождением

При работе над данной главой диссертации использованы следующие публикации автора, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [85], [93], [90], [88].

3.1. Постановка задачи и её формальное решение

В этой главе мы рассмотрим краевую задачу D (1.1) в прямоугольнике $\Omega \equiv (0,1) \times (0,b)$, $b > 0$ с вырождением порядка $m \in (0,2)$, $m \neq 1$:

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Коэффициенты задачи $a(y)$, $c(y)$ и правая часть $f(x,y)$ удовлетворяют условиям, указанным в разделе 1 главы 1. Кроме того, мы будем требовать, чтобы $c(0) = 0$. Решение задачи ищется в классе $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Опираясь на опыт глав I и II, мы разложим правую часть в ряд Фурье по системе синусов

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{3.2}$$

и будем искать решение задачи (3.1) в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}. \tag{3.3}$$

Функции $Y_k(y)$ являются решениями соответствующих краевых задач на интервале $(0, b)$:

$$\begin{cases} y^m Y_k'' + c(y) Y_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) Y_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = 0. \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

Так как коэффициенты данных задач в силу того, что m не является целым, вообще говоря, многозначны в круге U, то метод выделения особенностей глав I и II оказывается неприменимым к данным задачам.

В следующем разделе будет рассмотрен новый метод выделения особенностей решений: решения будут представлены в виде рядов по степеням y и y^{2-m}, сходящихся в U. После этого в разделах 3–6 будет доказана сходимость ряда (3.3) к решению задачи (3.1) посредством сведения задачи к случаю линейного вырождения и применения теоремы 2.3.

3.2. Разрешимость задач для коэффициентов Фурье решения

Рассмотрим 2 задачи:

$$\begin{cases} y^m \eta_k'' + c(y) \eta_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) \eta_k = f_k(y), \quad 0 < y < b, \\ \eta_k(0) = 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

и её однородный вариант

$$\begin{cases} y^m \mathring{\varphi}_k'' + c(y) \mathring{\varphi}_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) \mathring{\varphi}_k = 0, \quad 0 < y < b, \\ \mathring{\varphi}_k(0) = 0. \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

Рассмотрим класс $\mathcal{A}_\gamma$ всех функций $\chi(y) \in A(U \setminus \{0\})$, представимых в виде

$$\chi(y) = y^\gamma \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cdot y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cdot y^{n+\gamma}, \quad y \in U.$$

То есть $y^{-\gamma} \chi(y) \in A(U)$.

Отметим следующие тривиальные свойства данного класса.

1. Функции $a(y)$, $f_k(y) \in \mathcal{A}_0$; $c(y) \in \mathcal{A}_1$; $y^\gamma \in \mathcal{A}_\gamma$;.

2. Если $f(y)$ и $g(y) \in \mathcal{A}_\gamma$, то $f(y) \pm g(y) \in \mathcal{A}_\gamma$.

3. Если $f(y) \in \mathcal{A}_\alpha$, а $g(y) \in \mathcal{A}_\beta$, то $f(y)g(y) \in \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$.

4. Если $f(y) \in \mathcal{A}_\gamma$, то $f'(y) \in \mathcal{A}_{\gamma-1}$.

Рассмотрим специальную операцию интегрирования в классе $\mathcal{A}_\gamma$, $\gamma \neq -1, -2, \ldots$. Пусть $\chi(y) \in \mathcal{A}_\gamma$. Тогда

$$\chi^{(-1)}(y) \equiv \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cdot y^{n+\gamma}\right)^{(-1)} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+\gamma+1} \cdot \chi_n \cdot y^{n+\gamma+1}, \quad y \in U,$$

$$\chi^{(-N)}(y) \equiv \left(\chi^{(-N+1)}(y)\right)^{(-1)}, \quad y \in U, \quad N = 2, 3, \ldots.$$

Очевидно, что $\chi^{(-1)}(y)$ — некоторая первообразная функции $\chi(y)$. Кроме того, если $f(y) \in \mathcal{A}_\gamma$ и $-\gamma \notin \mathbb{N}$, то $f^{(-1)}(y) \in \mathcal{A}_{\gamma+1}$.

Наконец, введём дифференциальный оператор $\mathcal{L} : \mathcal{A}_\gamma \to \mathcal{A}_{\gamma+m-2}$:

$$(\mathcal{L}\chi)(y) \equiv y^m \cdot \chi''(y).$$

Символом $\mathcal{R}$ обозначим оператор, обращающий действие $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{R}\chi)(y) \equiv \left(y^{-m} \cdot \chi(y)\right)^{(-2)}.$$

Если $\chi(y) \in \mathcal{A}_\gamma$ и $m - \gamma \notin \mathbb{N}$, то $\mathcal{R}$ определён корректно и действует из пространства $\mathcal{A}_\gamma$ в пространство $\mathcal{A}_{\gamma+2-m}$.

Построим частные решения задач (3.5) и (3.6). Положим

$$\begin{aligned} \eta_{k,0}(y) &= \mathcal{R}(f_k)(y), & \mathring{\varphi}_{k,0}(y) &= y, \\ \eta_{k,n}(y) &= \mathcal{R}(d_k \cdot \eta_{k,n-1} - c \cdot \eta'_{k,n-1})(y), & \mathring{\varphi}_{k,n}(y) &= \mathcal{R}(d_k \cdot \mathring{\varphi}_{k,n-1} - c \cdot \mathring{\varphi}'_{k,n-1})(y), \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$k, n \in \mathbb{N}, \quad d_k(y) \equiv a(y) + \pi^2 k^2,$$

$$\eta_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n}(y), \quad \mathring{\varphi}_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathring{\varphi}_{k,n}(y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in U. \tag{3.8}$$

Теорема 3.1. *Пусть $m \in (0,2)$, $m \notin \mathbb{Q}$. Тогда соотношения (3.7) корректны и определяют функции $\eta_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{n(2-m)}$ и $\mathring{\varphi}_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{1+n(2-m)}$, а ряды (3.8) сходятся в пространствах $A(U \setminus \{0\})$ и $C[0,b]$ к частным решениям задач (3.5) и (3.6) соответственно.*

Доказательство. I. Для начала заметим, что если $\chi(y) \in \mathcal{A}_\gamma$, то $d_k(y) \cdot \chi(y) - c(y) \cdot \chi'(y) \in \mathcal{A}_\gamma$, так как $c(0) = 0$. При этом, если применение оператора $\mathcal{R}$ корректно, то $\mathcal{R}\left(d_k(y) \cdot \chi(y) - c(y) \cdot \chi'(y)\right) \in \mathcal{A}_{\gamma+2-m}$. Таким образом, $\eta_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{n(2-m)}$ и $\mathring{\varphi}_{k,n}(y) \in \mathcal{A}_{1+n(2-m)}$, если определены.

Рассмотрим выражения $m-n(2-m)$ и $m-1-n(2-m)$. Пусть $m-n(2-m) \in \mathbb{N}$ или $m-1-n(2-m) \in \mathbb{N}$ при некотором $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$2 + m - 2 - n(2-m) \in \mathbb{N}, \quad 2 + (1+n)(m-2) \in \mathbb{N}.$$

Так как $m-2 < 0$, то единственным случаем выполнения такого вложения является

$$2 + (1+n)(m-2) = 1, \quad (1+n)(2-m) = 1,$$

из чего следует, что $m \in \mathbb{Q}$. Полученное противоречие доказывает, что соотношения (3.7) корректны.

II. Докажем сходимость первого из рядов (3.8), так как сходимость второго доказывается аналогично. Заметим, что показатель γ класса $\mathcal{A}_\gamma$ функций $\eta_{k,n}(y)$ будет не меньше, чем 2 при $n \geqslant n_0$, где n_0 зависит только от m. Зафиксируем данный n_0.

Будем рассматривать $y \in \{y \in \mathbb{C} : |y| < R_1\}$, где $b < R_1 < R$. Тогда можно выбрать числа $M_{k,n} > 0$ такими, что

$$\eta_{k,n}(y) = y^{n(2-m)} \cdot z_{k,n}(y), \quad |z_{k,n}(y)| \leqslant M_{k,n}, \quad |z'_{k,n}(y)| \leqslant M_{k,n} \cdot \frac{n(2-m)}{|y|},$$

$$|y| < R_1, \quad n \geqslant n_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Найдём $M_k > 0$ такой, что $|d_k(y)|, |\bar{c}(y)| \leqslant M_k$, где $|y| < R_1$, $c(y) = y\bar{c}(y)$;

$R_2 = \max(R_1, 1)$. Тогда имеет место оценка

$$\eta_{k,n+1}(y) = \int\limits_0^y \int\limits_0^\xi \big(d_k(\zeta) \cdot \eta_{k,n}(\zeta) - c(\zeta) \cdot \eta'_{k,n}(\zeta)\big)\, \zeta^{-m}\, d\zeta\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^y \big(d_k(\zeta) \cdot \eta_{k,n}(\zeta) - c(\zeta) \cdot \eta'_{k,n}(\zeta)\big)\, (y-\zeta)\zeta^{-m}\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_0^y \big(d_k(\zeta) \cdot z_{k,n}(\zeta) - c(\zeta) \cdot z'_{k,n}(\zeta) - n(2-m) \cdot \bar{c}(\zeta) \cdot z_{k,n}(\zeta)\big)\, (y-\zeta)\zeta^{n(2-m)-m}\, d\zeta,$$

$$|\eta_{k,n}(y)| \leqslant \int\limits_0^{|y|} (M_k M_{k,n} + 2n(2-m) \cdot M_k M_{k,n})\, (|y| - \zeta)\zeta^{n(2-m)-m}\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant 3n(2-m) \cdot M_k M_{k,n} R_2 \int\limits_0^{|y|} (|y| - \zeta)\zeta^{n(2-m)-m}\, d\zeta =$$

$$= 3n(2-m) \cdot M_k M_{k,n} R_2 \int\limits_0^{|y|} \int\limits_0^\xi \zeta^{n(2-m)-m}\, d\zeta\, d\xi =$$

$$= 3n(2-m) \cdot M_k M_{k,n} R_2 \cdot \frac{|y|^{n(2-m)-m+2}}{(n(2-m)-m+2)(n(2-m)-m+1)} \leqslant$$

$$\leqslant 3n(2-m) \cdot M_k M_{k,n} R_2 \cdot \frac{|y|^{n(2-m)-m+2}}{(n(2-m))(n(2-m)-1)} \leqslant$$

$$\leqslant 6 M_k M_{k,n} R_2 \cdot \frac{|y|^{(n+1)(2-m)}}{n(2-m)},$$

из чего следует, что

$$|z_{k,n+1}| \leqslant \frac{6 M_k M_{k,n} R_2}{n(2-m)} < \frac{18 M_k R_2}{n(2-m)} \cdot M_{k,n}.$$

Аналогично,

$$\eta'_{k,n+1}(y) = \int\limits_0^y \big(d_k(\zeta) \cdot \eta_{k,n}(\zeta) - c(\zeta) \cdot \eta'_{k,n}(\zeta)\big)\, \zeta^{-m}\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_0^y \big(d_k(\zeta)\cdot z_{k,n}(\zeta) - c(\zeta)\cdot z'_{k,n}(\zeta) - n(2-m)\cdot \bar{c}(\zeta)\cdot z_{k,n}(\zeta)\big)\,\zeta^{n(2-m)-m}\,d\zeta,$$

$$\big|\eta'_{k,n}(y)\big| \leqslant \int\limits_0^{|y|} \left(M_k M_{k,n} + 2n(2-m)\cdot M_k M_{k,n}\right)\zeta^{n(2-m)-m}\,d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant 3n(2-m)\cdot M_k M_{k,n} R_2 \int\limits_0^{|y|} \zeta^{n(2-m)-m}\,d\zeta =$$

$$= 3n(2-m)\cdot M_k M_{k,n} R_2 \int\limits_0^{|y|} \zeta^{n(2-m)-m}\,d\zeta =$$

$$= 3n(2-m)\cdot M_k M_{k,n} R_2 \cdot \frac{|y|^{n(2-m)-m+1}}{n(2-m)-m+1} \leqslant 6M_k M_{k,n} R_2 \cdot |y|^{(n+1)(2-m)-1}.$$

Тогда

$$|z'_{k,n+1}(y)| = \left|\left(\frac{\eta_{k,n+1}(y)}{y^{(n+1)(2-m)}}\right)'\right| \leqslant \left|\frac{\eta'_{k,n+1}(y)}{y^{(n+1)(2-m)}}\right| + \frac{(n+1)(2-m)}{|y|}\left|\frac{\eta_{k,n+1}(y)}{y^{(n+1)(2-m)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6M_k M_{k,n} R_2\cdot |y|^{(n+1)(2-m)-1}}{|y|^{(n+1)(2-m)}} + \frac{(n+1)(2-m)}{|y|}\cdot\frac{6M_k M_{k,n} R_2}{n(2-m)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6M_k M_{k,n} R_2}{|y|} + \frac{n+1}{|y|}\cdot\frac{6M_k M_{k,n} R_2}{n} \leqslant \frac{18M_k M_{k,n} R_2}{|y|} = \frac{18M_k R_2}{n(2-m)}\cdot\frac{n(2-m)}{|y|}\cdot M_{k,n},$$

что позволяет выбрать

$$M_{k,n+1} \equiv \frac{18M_k R_2}{n(2-m)}\cdot M_{k,n}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad n\geqslant n_0,$$

$$M_{k,n+1} = M_{k,n_0}\cdot\frac{(18M_k R_2)^{n+1-n_0}}{n_0(2-m)\cdot(n_0+1)(2-m)\cdot\ldots\cdot n(2-m)} =$$

$$= M_{k,n_0}\cdot\frac{n_0!\cdot p^{n+1-n_0}}{n!} = M'_k\cdot\frac{p^n}{n!},$$

$$M'_k \equiv n_0!\cdot M_{k,n_0}\cdot p^{1-n_0}, \quad p\equiv\frac{18M_k R_2}{2-m}.$$

Отсюда

$$|\eta_{k,n+1}(y)| \leqslant |y|^{(n+1)(2-m)}\cdot M'_k\cdot\frac{p^n}{n!} \leqslant |R_1|^{2-m}\cdot M'_k\cdot\frac{\left(pR_1^{2-m}\right)^n}{n!},$$

следовательно, при всех $k \in \mathbb{N}$ в силу признака Вейерштрасса, ряд (3.8) сходится равномерно при $|y| \leqslant R_1$ для любого $R_1 < R$, следовательно сходится в пространствах $C[0,b]$ и $A(U \setminus \{0\})$.

III. Заметим, что $\eta_k(0) = 0$ по построению. В силу доказанной в предыдущей части доказательства сходимости в классе $A(U \setminus \{0\})$, ряд (3.8) дифференцирование под знаком суммы. Тогда

$$\left(y^m \frac{d^2}{dy^2} + c(y)\frac{d}{dy} - (a(y) + \pi^2 k^2)\right) \eta_k(y) =$$

$$= \left(\mathcal{L} + c(y)\frac{d}{dy} - (a(y) + \pi^2 k^2)\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n}(y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}\eta_{k,n}(y) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c(y)\frac{d}{dy} - (a(y) + \pi^2 k^2)\right) \eta_{k,n}(y) =$$

$$= \mathcal{L}\eta_{k,0}(y) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}\eta_{k,n+1}(y) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c(y)\eta'_{k,n}(y) - (a(y) + \pi^2 k^2)\eta_{k,n}(y)\right) =$$

$$= f_k(y) + \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathcal{L}\mathcal{R} - \mathcal{I}) \left((a(y) + \pi^2 k^2)\eta_{k,n}(y) - c(y)\eta'_{k,n}(y)\right) = f_k(y),$$

$$y \in U \setminus \{0\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

символом $\mathcal{I}$ обозначен тождественный оператор. Таким образом, ряд (3.8) является решением задачи (3.5). Теорема доказана. □

Заметим, что построенные функции $\mathring{\varphi}_k(y)$ являются нетривиальными решениями уравнений (1.3), $\mathring{\varphi}_k(0) = 0$. Следовательно, $\mathring{\varphi}_k(b) \neq 0$ в силу леммы 1.2. Тогда решения задач (3.4) можно построить в виде

$$Y_k(y) = \eta_k(y) - \frac{\eta_k(b)}{\mathring{\varphi}_k(b)}\mathring{\varphi}_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)}\psi_{k,n}(y), \quad y \in U, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

где $\psi_{k,n}(y) \in A(U)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Кроме того, переобозначим $Y_k^0(y) \equiv \mathring{\varphi}_k(y)$ — решения уравнений (1.3), удовлетворяющие левому краевому условию задач (3.4).

Пусть теперь $m = p/q \in \mathbb{Q}$. Тогда совершим в задачах (3.4) замену переменной $t = y^{1/q}$. Обозначая $\hat{a}(t) = a(t^q)$, $\hat{c}(t) = c(t^q)$, $\hat{\bar{c}}(t) = \bar{c}(t^q)$, $\hat{f}_k(t) = f_k(t^q)$, получим

$$Y_k'(y) = Y_k'(t) \cdot \frac{y^{1/q-1}}{q},$$

$$Y_k''(y) = Y_k''(t) \cdot \frac{y^{2/q-2}}{q^2} + Y_k'(t) \cdot \frac{y^{1/q-2}}{q^2} \cdot (1-q)\,,$$

$$t^p \left[Y_k''(t) \cdot \frac{y^{2/q-2}}{q^2} + Y_k'(t) \cdot \frac{y^{1/q-2}}{q^2} \cdot (1-q) \right] +$$

$$+\hat{c}(t) Y_k'(t) \cdot \frac{y^{1/q-1}}{q} - (\hat{a}(t) + \pi^2 k^2) Y_k(t) = \hat{f}_k(t),$$

$$t^p \left[Y_k''(t) \cdot t^{2-2q} + Y_k'(t) \cdot t^{1-2q} \cdot (1-q) \right] +$$

$$+q t^q \cdot \hat{\bar{c}}(t) Y_k'(t) \cdot t^{1-q} - q^2 (\hat{a}(t) + \pi^2 k^2) Y_k(t) = q^2 \hat{f}_k(t),$$

$$t Y_k''(t) + (1-q) Y_k'(t) +$$

$$+q t^{2q-p} \cdot \hat{\bar{c}}(t) Y_k'(t) - q^2 t^{2q-p-1} \cdot (\hat{a}(t) + \pi^2 k^2) Y_k(t) = q^2 t^{2q-p-1} \cdot \hat{f}_k(t).$$

Так как $m \in (0, 2)$, то $p < 2q$ или, что тоже самое, $2q - p - 1 \geqslant 0$. Таким образом, последнее уравнение это уравнение с линейным вырождением и аналитическими коэффициентами. Решения таких уравнений уже были нами исследованы в разделе 3 главы II. Так как $1 - q \in \{0, -1, -2, ...\}$, то решение задачи (3.4) существует, единственно и может быть представлено в виде

$$Y_k(t) = \eta_k(t) + \chi_k(t) \ln t,$$

где $\eta_k(t)$ и $\chi_k(t)$ — аналитические в некоторой области функции.

Возвращаясь к исходной переменной y, мы можем получить разложение

$$Y_k(y) = \eta_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q} \cdot \eta_{k,n}(y) + \chi_k(y) \cdot \ln y, \quad y \in U, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (3.10)$$

функции $\eta_{k,n}(y)$, $\chi_k(y)$ аналитичны в U, $n = 0, 1, ..., q-1$.

Аналогичным образом можно получить разложение и для функции $Y_k^0(y)$ — решения однородной задачи (3.6) (см. доказательство теоремы 2.1):

$$Y_k^0(y) = y \cdot \mathring{\varphi}_{k,0}(y) + y \cdot \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q} \cdot \mathring{\varphi}_{k,n}(y), \quad y \in U, \quad k \in \mathbb{N},$$

функции $\mathring{\varphi}_{k,n}(y)$ аналитичны в U, $n = 0, 1, ..., q-1$.

3.3. Оценки фундаментальной системы решений

В предыдущей главе нами были построены функции $Y_k^0(y)$ — нетривиальные решения задач (3.6). Так как решения указанных задач определены с точностью до постоянного сомножителя, то мы можем выбрать $Y_k^0(y) \sim y$ при $y \to 0$.

Используя функции $Y_k^0(y)$, докажем сходимость ряда (3.3) к решению задачи (3.1) стандартным для данной работы методом. В этом разделе мы получим оценки ФСР уравнения (1.3).

Произведём следующую замену переменных:

$$y = ((2-m)t)^\alpha, \quad Y_k^0 = t^\alpha z_k, \quad \alpha = \frac{1}{2-m},$$

тогда

$$(Y_k^0)'_y = (Y_k^0)'_t \cdot y^{1-m} = \left(\alpha t^{\alpha-1} z_k + t^\alpha z_k'\right)((2-m)t)^{\alpha(1-m)},$$

$$(Y_k^0)''_{yy} = (Y_k^0)''_{tt} \cdot y^{2-2m} + (1-m)(Y_k^0)'_t \cdot y^{-m} =$$

$$= \left(\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} z_k + 2\alpha t^{\alpha-1} z_k' + t^\alpha z_k''\right)((2-m)t)^{2\alpha(1-m)} +$$

$$+ (1-m)\left(\alpha t^{\alpha-1} z_k + t^\alpha z_k'\right) \cdot ((2-m)t)^{-\alpha m},$$

подставим данные соотношения в задачи (3.6).

$$(2-m)t z_k'' + \left(3 - m + c(t)((2-m)t)^{\alpha(1-m)}\right) z_k' +$$

$$+ \left(\alpha t^{-1}((2-m)t)^{\alpha(1-m)} c(t) - a(t) - \pi^2 k^2\right) z_k = 0,$$

$$tz_k'' + d(t)z_k' - \left(\bar{a}(t) - \pi^2\left(k\sqrt{\alpha}\right)^2\right)z_k = 0, \quad t \in (0, \bar{b}), \tag{3.11}$$

$$z_k(0) = \alpha^{-\alpha}, \quad \bar{b} = \alpha b^{2-m}.$$

Здесь

$$d(t) \equiv \alpha\left(3 - m + c(t)((2-m)t)^{\alpha(1-m)}\right) =$$

$$= (1+\alpha) + c_1 t + c_2(2-m)^{\alpha(3-m)-1}t^{\alpha(3-m)} + \ldots + c_n(2-m)^{\alpha(1+n-m)-1}t^{\alpha(1+n-m)} + \ldots,$$

$$\bar{a}(t) \equiv \alpha\left(a(t) - \alpha t^{-1}((2-m)t)^{\alpha(1-m)}c(t)\right) =$$

$$= \alpha\left(a_0 + a_1((2-m)t)^{\alpha} + a_2((2-m)t)^{2\alpha} + \ldots\right) -$$

$$-\alpha^2\left(c_1 + c_2((2-m)t)^{\alpha} + c_3((2-m)t)^{2\alpha} + \ldots\right).$$

По этим разложениям мы можем заключить, что функции $\bar{a}(t)$, $\sqrt{y}\cdot\bar{a}'(t) \in C[0, \bar{b}]$, $d(t) \in C^1[0, \bar{b}]$.

$$\bar{d}(t) \equiv \frac{d(t) - d(0)}{t} =$$

$$= c_1 + c_2(2-m)^{\alpha(3-m)-1}t^{\alpha} + \ldots + c_n(2-m)^{\alpha(1+n-m)-1}t^{\alpha(1+n-m)-1} + \ldots,$$

то есть $\bar{d}(t) \in C[0, \bar{b}]$, $\bar{d}'(t) \in C(0, \bar{b}]$ и имеет интегрируемую особенность при $t = 0$. Таким образом, для уравнения (3.11) с начальным условием $z_k(0) = \alpha^{-\alpha}$ выполнены все условия теоремы 2.3.

Следовательно, в силу следствия 2.3.1,

$$z_k(t) = \alpha^{-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\pi k i\sqrt{\alpha t}\right)^{\alpha}}\cdot J_\alpha(2\pi k i\sqrt{\alpha t})\cdot\left(\exp\left(\int\limits_0^t -\frac{\bar{d}(\xi)}{2}\,d\xi\right) + \bar{o}(1)\right),$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, \bar{b}].$$

И, кроме того, в силу теоремы 2.4 имеют место двусторонние оценки

$$0 < C_1\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1 + (\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}} \leqslant z_k(t) \leqslant C_2\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1 + (\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}},$$

$$z_k'(t) \leqslant C_2\cdot\frac{k}{\sqrt{\alpha t}}\cdot\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1 + (\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}},$$

при всех $t \in [0, \bar{b}]$ и $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1 + (\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}} \leqslant z_k'(t),$$

при всех $t \in [\bar{b}/4, \bar{b}]$ и $k \geqslant k_0$, постоянные $C_2 > C_1 > 0$ не зависят от t и k.

Теорема 3.2. *Существуют не зависящие от $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \cdot y \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(y) \leqslant C_2 \cdot y \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}, \quad (3.12)$$

$$Y_k^0{}'(y) \leqslant C_2 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}, \quad (3.13)$$

при всех $y \in [0, b]$ и $k \in \mathbb{N}$,

$$0 < C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0{}'(y), \quad (3.14)$$

при всех $y \in [b_0, b]$ и $k \geqslant k_0$, $0 < b_0 < b$.

Доказательство. Неравенства (3.12) непосредственно следуют из аналогичных оценок функций $z_k(t)$ и обратной замены переменного.

$$Y_k^0{}'(y) = \frac{d}{dt}\left(t^\alpha z_k(t)\right) \cdot \frac{dt}{dy} = \left(\alpha t^{\alpha-1} z_k(t) + t^\alpha z_k'(t)\right) \cdot y^{1-m} =$$
$$= A_1 z_k(t) + A_2 y^{2-m} z_k'(t),$$

где A_1 и A_2 — некоторые положительные постоянные. Тогда, применяя оценки сверху, получим

$$Y_k^0{}'(y) \leqslant A_1 C_2 \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} + A_2 C_2 \cdot \frac{k y^{2-m}}{\alpha y^{1/(2\alpha)}} \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot k \cdot y^{2-m-(2-m)/2} \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}, \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

что доказывает оценку (3.13).

Наконец, аналогично, при $t > \bar{b}/4$ и $k \geqslant k_0$ имеет место

$$Y_k^{0\prime}(y) \geqslant const \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}, \quad \frac{\bar{b}}{4} \leqslant t \leqslant \bar{b}.$$

Неравенству $\bar{b}/4 \leqslant t \leqslant \bar{b}$ относительно переменной y соответствует неравенство $b_0 \leqslant y \leqslant b$ при некотором $0 < b_0 < b$, что доказывает оценку (3.14). Теорема доказана. □

Аналогично главам I и II, мы построим второй элемент ФСР уравнения (1.3) по формуле

$$Y_k^b(y) \equiv -Y_k^0(y) \int\limits_b^y \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^m} d\zeta\right) d\xi, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Лемма 3.1. *Функция*

$$P(\xi) \equiv \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta^m} d\zeta\right)$$

равномерно ограничена и равномерно отделена от нуля при $\xi \in [0, b]$.

Доказательство.

$$P(\xi) = \exp\left(-\int\limits_b^\xi \left(\frac{c_1}{\zeta^{m-1}} + \bar{c}(\zeta)\right) d\zeta\right),$$

где $\bar{c}(\zeta) = (c(\zeta) - c_1\zeta)\zeta^{-m}$ — ограниченная на $[0, b]$ функция. Тогда

$$P(\xi) \asymp \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c_1}{\zeta^{m-1}} d\zeta\right) = \exp\left(-\frac{c_1}{2-m}\left(b^{2-m} - \xi^{2-m}\right)\right) \asymp 1,$$

так как аргумент экспоненты ограничен при $\xi \in [0, b]$. Лемма доказана. □

Теорема 3.3. *Существует не зависящая от* $y \in [0, b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *постоянная* C_2 *такая, что имеют место неравенства:*

$$0 \leqslant Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.16)$$

$$\left|Y_k^{b\prime}(y)\right| \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad y \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать постоянную $C_3(\varepsilon) > 0$ такую, что при всех $y \in [\varepsilon, b-\varepsilon]$ и $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$C_3(\varepsilon) \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}} \leqslant Y_k^b(y). \tag{3.18}$$

Доказательство. По аналогии с доказательствами теорем 2.5 и 2.7, воспользуемся леммой 3.1 и рассмотрим произведение

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^b(y) \asymp \int\limits_y^b \left(\frac{y}{\xi} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha \xi^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha \xi^{1/(2\alpha)}}} \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\right)^2 d\xi.$$

Тогда, применяя метод доказательства теорем 2.5 и 2.7 (замену $\tau = k\xi^{1/(2\alpha)}$, $t = ky^{1/(2\alpha)}$, $d\xi = 2\alpha\tau^{2\alpha-1}d\tau/k^{2\alpha}$), мы получим

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^b(y) \leqslant const \int\limits_y^b \left(\frac{1+(\pi k\alpha \xi^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha \xi^{1/(2\alpha)}}} \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\right)^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{const}{k},$$

из чего в совокупности с неравенствами (3.12) следует, что

$$Y_k^b(y) \leqslant C_2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}, \quad y \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства оценки (3.18) заметим, что

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^b(y) \geqslant const \cdot y^2 \int\limits_y^b \left(\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{e^{2\pi k\alpha \xi^{1/(2\alpha)}}}\right)^2 d\xi \geqslant \frac{const \cdot y^2(b-y)}{k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{const \cdot \varepsilon^3}{k} \equiv \frac{C_3(\varepsilon)}{k}, \quad y \in [\varepsilon, b-\varepsilon], \quad k \in \mathbb{N},$$

что доказывает неравенства (3.18).

Наконец, по аналогии с теоремами 2.5 и 2.7,

$$Y_k^0(y) \cdot Y_k^{b\prime}(y) \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot \left[\int\limits_y^b \frac{k}{y} \left(\frac{y}{\xi} \cdot \frac{1 + (\pi k \alpha \xi^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k \alpha \xi^{1/(2\alpha)}}} \cdot \frac{e^{2\pi k \alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k \alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \right)^2 d\xi + 1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot \left[\frac{k}{y} \cdot \frac{1}{k} + 1 \right] \leqslant \frac{const}{y}, \quad y \in (0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

что доказывает неравенства (3.17). Теорема доказана. □

3.4. Оценки определителя Вронского и функции Грина

По аналогии с главами I и II рассмотрим определители Вронского систем функций $\{Y_k^0(y), Y_k^b(y)\}$

$$w_k(y) = \det \begin{pmatrix} Y_k^0(y) & Y_k^b(y) \\ \frac{dY_k^0}{dy}(y) & \frac{dY_k^b}{dy}(y) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in (0, b),$$

и функции Грина задач (3.4)

$$G_k(y, \eta) = \begin{cases} \frac{Y_k^0(y) Y_k^b(\eta)}{\eta^m w_k(\eta)}, & y < \eta, \\ \frac{Y_k^0(\eta) Y_k^b(y)}{\eta^m w_k(\eta)}, & y > \eta, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.4. *Существуют постоянная $W > 0$ и номер $k_0 \in \mathbb{N}$, не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ и $y \in (0, b]$ такие, что*

$$w_k(y) \leqslant -W < 0, \quad k \geqslant k_0.$$

Доказательство. Выберем $\xi = (b + b_0)/2$, где b_0 — число из теоремы 3.2. Тогда в силу формулы Остроградского-Лиувилля, леммы 3.1 и теорем 3.2 и 3.3

$$w_k(y) = w_k(\xi) \exp \left(- \int\limits_\xi^y \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi \right) \asymp w_k(\xi) =$$

$$= Y_k^0(\xi) {Y_k^b}'(\xi) - {Y_k^0}'(\xi) Y_k^b(\xi) \leqslant -{Y_k^0}'(\xi) Y_k^b(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant -C_1 \cdot k \cdot \frac{e^{2\pi k \alpha \xi^{1/(2\alpha)}}}{1 + (\pi k \alpha \xi^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \cdot C_3 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + (\pi k \alpha \xi^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k \alpha \xi^{1/(2\alpha)}}} = -C_1 C_3.$$

Лемма доказана. □

Теорема 3.5. *Существует постоянная* $M > 0$ *такая, что*

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\,d\eta \leqslant \frac{M}{k^2}$$

при всех $y \in [0,b]$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Кроме того, для любого компакта* $K \subset (0,b)$ *найдётся постоянная* $M_K > 0$ *такая, что*

$$\int\limits_0^b \left|\frac{\partial G_k}{\partial y}(y,\eta)\right| d\eta \leqslant \frac{M_K}{k}$$

при всех $y \in K$ *и* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Применим для оценки функций Грина теоремы 3.2, 3.3 и 3.4. Тогда

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\,d\eta = \int\limits_0^y \left|\frac{Y_k^0(\eta)Y_k^b(y)}{\eta^m w_k(\eta)}\right| d\eta + \int\limits_y^b \left|\frac{Y_k^0(y)Y_k^b(\eta)}{\eta^m w_k(\eta)}\right| d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_2^2 \cdot \int\limits_0^y \eta \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}} \cdot \frac{1}{W\eta^m} d\eta +$$

$$+ C_2^2 \cdot \int\limits_y^b y \cdot \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)}}} \cdot \frac{1}{W\eta^m} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2^2}{kW} \int\limits_0^y \frac{e^{2\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}} \cdot \eta^{1-m}\,d\eta +$$

$$+ \frac{C_2^2}{kW} \int\limits_y^b \frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha\eta^{1/(2\alpha)}}} \cdot \eta^{1-m}\,d\eta.$$

Обозначим $y^{2-m} = z$, $\eta^{2-m} = \zeta$, $b^{2-m} = d$. Тогда

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\,d\eta \leqslant \frac{C_2^2}{k\alpha W} \int\limits_0^z \frac{e^{2\pi k\alpha\sqrt{\zeta}}}{1+(\pi k\alpha\sqrt{\zeta})^{\alpha+1/2}} \cdot \frac{1+(\pi k\alpha\sqrt{z})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha\sqrt{z}}} d\zeta +$$

$$
+\frac{C_2^2}{k\alpha W}\int\limits_z^d \frac{e^{2\pi k\alpha\sqrt{z}}}{1+(\pi k\alpha\sqrt{z})^{\alpha+1/2}}\cdot\frac{1+(\pi k\alpha\sqrt{\zeta})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha\sqrt{\zeta}}}d\zeta.
$$

Полученные интегралы исследовались при доказательстве теоремы 2.9. Для каждого из них была получена оценка сверху величиной C/k с постоянной $C>0$, не зависящей от $y\in[0,b]$ и $k\in\mathbb{N}$. Получаем

$$
\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\,d\eta \leqslant \frac{2CC_2^2}{k^2\alpha W}\equiv\frac{M}{k^2},\quad M\equiv\frac{2CC_2^2}{\alpha W},\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N},
$$

что доказывает первую оценку теоремы.

Вторая оценка теоремы доказывается аналогично с привлечением оценок сверху функций $Y_k^0(y)$ и $Y_k^b(y)$ и их производных сверху из теорем 3.2 и 3.3. Получаем

$$
\int\limits_0^b \left|\frac{\partial G_k}{\partial y}(y,\eta)\right|d\eta \leqslant \frac{M}{yk},\quad y\in(0,b],\quad k\in\mathbb{N}.
$$

Фиксируем произвольный компакт $K\subset(0,b)$ и найдём $\varepsilon>0$ такое, что $K\subset(\varepsilon,b-\varepsilon)\subset(0,b)$. Тогда при $y\in K$ мы имеем

$$
\int\limits_0^b \left|\frac{\partial G_k}{\partial y}(y,\eta)\right|d\eta \leqslant \frac{M}{\varepsilon k}\equiv\frac{M_K}{k},\quad M_K\equiv\frac{M}{\varepsilon},\quad y\in K,\quad k\in\mathbb{N}.
$$

Теорема доказана. □

3.5. Асимптотика коэффициентов ряда Фурье решения

Воспользуемся представлением коэффициентов $Y_k(y)$ ряда (3.3) с помощью функции Грина.

$$
Y_k(y)=\int\limits_0^b G_k(y,\eta)f_k(\eta)\,d\eta,\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N}.
$$

Теорема 3.6. *Пусть функции $f_k(y)$ являются равномерно ограниченными вместе с первыми и вторыми производными при $k\in\mathbb{N}$ и $y\in[0,b]$. Тогда* *равномерно по* $y \in [0, b]$ *имеет место асимптотика*

$$Y_k(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Кроме того, на любом компакте $K \subset (0, b)$ *равномерно по* $y \in K$ *справедлива асимптотическая формула*

$$Y_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-N}}\right), \quad N = 0, 1, 2.$$

Доказательство. Используя первую оценку функции Грина из теоремы 3.5, получим оценки на $Y_k(y)$ на отрезке $[0, b]$:

$$|Y_k(y)| \leqslant \int\limits_0^b |f_k(\eta) \cdot G_k(y, \eta)|\, d\eta \leqslant \frac{MM_f}{k^2},$$

где

$$M_f = \sup |f_k(y)|, \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

то есть $Y_k(y) = O\left(k^{-2}\right)$.

Далее мы рассмотрим функции

$$R_k(y) \equiv Y_k(y) + \frac{f_k(y)}{\pi^2 k^2}.$$

Подставляя функции $R_k(y)$ в уравнения задач (3.4), получим краевые задачи для функций $R_k(y)$

$$\begin{cases} y^m R_k'' + c(y) R_k' - (a(y) + \pi^2 k^2) R_k = F_k(y) \equiv \frac{y^m f_k''(y) + c(y) f_k' - a(y) f_k(y)}{\pi^2 k^2}, \\ R_k(0) = \frac{f_k(0)}{\pi^2 k^2}, \quad R_k(b) = \frac{f_k(b)}{\pi^2 k^2}, \end{cases}$$

следовательно, имеет место представление

$$R_k(y) = \int\limits_0^b G_k(y, \eta) F_k(\eta)\, d\eta + C_{1,k} \cdot Y_k^0(y) + C_{2,k} \cdot Y_k^b(y),$$

где, в силу уже доказанного утверждения данной теоремы,

$$\left|C_{1,k} \cdot Y_k^0(b)\right|, \left|C_{2,k} \cdot Y_k^b(0)\right|, |F_k(y)| \leqslant \frac{M_F}{k^2}, \quad y \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$M_F = \max(\sup\left|y^2 f_k''(y) + c(y) f_k' - a(y) f_k(y)\right|, MM_f).$$

Кроме того, в силу леммы 1.1 также верно

$$\left|C_{1,k}\cdot Y_k^0(b-\varepsilon)\right|, \left|C_{2,k}\cdot Y_k^b(\varepsilon)\right| \leqslant \frac{M_F}{k^2}, \quad k\in\mathbb{N},$$

где $\varepsilon > 0$ таков, что $K \subset (\varepsilon, b-\varepsilon)$.

Зафиксируем произвольный компакт $K \subset (0,b)$, $N = 0,1$ и применим оценки теорем 3.2, 3.3 и 3.5 при $y\in K$ и $k\in\mathbb{N}$:

$$\left|R_k^{(N)}(y)\right| \leqslant \int\limits_0^b \left|\frac{\partial^N G_k}{\partial y^N}(y,\eta)F_k(\eta)\right| d\eta + \left|C_{1,k}\cdot Y_k^{0\,(N)}(y)\right| + \left|C_{2,k}\cdot Y_k^{b\,(N)}(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_K M_F}{k^{4-N}} + \frac{M_F}{k^2}\left|\frac{C_2 k^N}{C_1 y^N}\cdot\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\cdot\frac{1+(\pi k\alpha(b-\varepsilon)^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha(b-\varepsilon)^{1/(2\alpha)}}}\right| +$$

$$+\frac{M_F}{k^2}\left|\frac{C_2 k^N}{C_3(\varepsilon) y^N}\cdot\frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}\cdot\frac{e^{2\pi k\alpha\varepsilon^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha\varepsilon^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\right|.$$

Так как второе и третье слагаемые убывают экспоненциально при $y\in K$, то можно выбрать постоянную $C>0$, зависящую только от компакта K, так, чтобы

$$\left|R_k^{(N)}(y)\right| \leqslant \frac{C}{k^{4-N}}, \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N}, \quad N=0,1,$$

то есть

$$Y_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2k^2} + R_k^{(N)}(y) = -\frac{f_k^{(N)}(y)}{\pi^2k^2} + O\left(\frac{1}{k^{4-N}}\right),$$

$$y\in K, \quad k\in\mathbb{N}, \quad N=0,1.$$

Наконец, при $y\in K$,

$$y^m R_k'' + c(y)R_k' - (a(y)+\pi^2k^2)R_k = F_k(y),$$

$$R_k''(y) = \frac{F_k(y) + (a(y)+\pi^2k^2)R_k(y) - c(y)R_k'(y)}{y^m},$$

то есть,

$$|R_k''(y)| \leqslant \frac{C}{k^2}, \quad y\in K, \quad k\in\mathbb{N},$$

из чего следует, что

$$Y_k''(y) = -\frac{f_k''(y)}{\pi^2 k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad y \in K, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана. □

3.6. Теоремы существования решения

Сформулируем теоремы существования решения задачи (3.1) при рациональных и иррациональных m.

Теорема 3.7. *Пусть $0 < m < 2$, $m \notin \mathbb{Q}$ и правая часть $f(x,y)$ задачи (3.1) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (3.1), представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)} \psi_{k,n}(y)\right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\psi_{k,n}(y)$, $n \in \mathbb{N}_0$ аналитичны в области U.

Теорема 3.8. *Пусть $0 < m < 2$, $m = p/q \in \mathbb{Q}$, $m \neq 1$ и правая часть $f(x,y)$ задачи (3.1) непрерывна в $\bar{\Omega}$ вместе с первыми и вторыми производными, при каждом фиксированном $x \in (0,1)$ функция $f(x,y) \in A(U)$ как функция аргумента y. Тогда существует классическое решение задачи (3.1), представимое рядом*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\eta_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{q-1} y^{n/q} \cdot \eta_{k,n}(y) + \chi_k(y) \cdot \ln y\right) \cdot \sin \pi k x,$$

который сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ и допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω, функции $\eta_{k,n}(y)$, $n = 0, 1, ..., q-1$ и $\chi_k(y)$ аналитичны в области U.

Доказательство. Доказательство данных теорем полностью повторяет доказательства теорем 1.15, 2.11, 2.12 и 2.13.

Исходя из условий на функцию $f(x, y)$ мы можем заключить, что функции $f_k(y)$ аналитичны в U и равномерно ограничены на $y \in [0, b]$ при $k \in \mathbb{N}$ вместе с первыми и вторыми производными. Следовательно, справедливы представления функций $Y_k(y)$, доказанные в разделе 2 настоящей главы (см. теорему 3.1).

Выполнены все условия теоремы 3.6, а значит, в силу леммы 1.9, ряд (3.3) сходится равномерно в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω и определяет в нём функцию из $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Так как данный ряд построен как формальное решение задачи (3.1), то он является её классическим решением по построению.

Теоремы 3.7 и 3.8 доказаны. $\square$

3.7. Пример

Для примера мы рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^{\sqrt{2}} u''_{yy} - \pi^2 u = f \equiv const, \quad (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Сразу отметим, что данная задача удовлетворяет всем условиям теоремы 3.7. Коэффициенты Фурье правой части нами уже были получены в примере к первой главе:

$$f_k = \begin{cases} 0, & k = 2l, \\ \dfrac{4f}{\pi k}, & k = 2l - 1. \end{cases} \qquad l \in \mathbb{N},$$

Найдём функции $\eta_k(y)$ и $\mathring{\varphi}_k(y)$. Обозначим $\alpha = 1/(2 - \sqrt{2})$.

$$\mathring{\varphi}_{k,0}(y) = y, \quad \mathring{\varphi}_{k,n}(y) = \mathcal{R}\left(\pi^2(1 + k^2)\mathring{\varphi}_{k,n-1}(y)\right) =$$

$$= \left(\pi^2(1+k^2)\right)^n \cdot y^{1+2n-n\sqrt{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-j\sqrt{2})(1+2j-j\sqrt{2})} =$$

$$= \left(\pi^2(1+k^2)\right)^n \cdot y^{1+2n-n\sqrt{2}} \cdot \alpha^{2n} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j(\alpha+j)} =$$

$$= \left(\pi^2\alpha^2(1+k^2)\right)^n \cdot y^{1+2n-n\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{n! \cdot \Gamma(n+1+\alpha)},$$

$$\mathring{\varphi}_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathring{\varphi}_{k,n}(y) = y\Gamma(1+\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\pi^2\alpha^2(1+k^2)\right)^n \cdot \frac{y^{n(2-\sqrt{2})}}{n! \cdot \Gamma(n+1+\alpha)} =$$

$$= y\Gamma(1+\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+1+\alpha)} \cdot \left(-\pi^2\alpha^2(1+k^2)y^{2-\sqrt{2}}\right)^n =$$

$$= y\Gamma(1+\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+1+\alpha)} \cdot \left(\frac{2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}}{2}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{y\Gamma(1+\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right)^{\alpha}} \cdot J_\alpha\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right).$$

Аналогично мы находим при $k = 2l-1$:

$$\eta_{k,0}(y) = \mathcal{R}\left(\frac{4f}{\pi k}\right) = \frac{4f}{\pi k} \cdot \frac{y^{2-\sqrt{2}}}{(2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})},$$

$$\eta_{k,n}(y) = \mathcal{R}\left(\pi^2(1+k^2)\eta_{k,n-1}(y)\right) =$$

$$= \frac{4f}{\pi k} \cdot \left(\pi^2(1+k^2)\right)^n \cdot y^{n(2-\sqrt{2})} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(2j-j\sqrt{2})(-1+2j-j\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{4f}{\pi k} \cdot \left(\pi^2(1+k^2)\right)^n \cdot y^{n(2-\sqrt{2})} \cdot \alpha^{2n} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(-\alpha+j)} =$$

$$= \frac{4f}{\pi k} \cdot \left(\pi^2\alpha^2(1+k^2)\right)^n \cdot y^{n(2-\sqrt{2})} \cdot \frac{\Gamma(1-\alpha)}{n! \cdot \Gamma(n+2-\alpha)},$$

$$\eta_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n}(y) = \frac{4f}{\pi k} \cdot \Gamma(1-\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\pi^2\alpha^2(1+k^2)\right)^n \cdot \frac{y^{n(2-\sqrt{2})}}{n! \cdot \Gamma(n+2-\alpha)} =$$

$$= \frac{4f}{\pi k} \cdot \Gamma(1-\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+2-\alpha)} \cdot \left(-\pi^2\alpha^2(1+k^2)y^{2-\sqrt{2}}\right)^n =$$

$$= \frac{4f}{\pi k} \cdot \Gamma(1-\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \Gamma(n+2-\alpha)} \cdot \left(\frac{2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}}{2}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{4f}{\pi k} \cdot \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right)^{1-\alpha}} \cdot J_{1-\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right).$$

Тогда решение задачи (3.19) имеет вид

$$u(x,y) = \frac{4f}{\pi k} \sum_{k=1, k/2 \notin \mathbb{N}}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right)^{1-\alpha}} \cdot J_{1-\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{y} \cdot \Gamma(1-\alpha)}{\left(i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)^{1-\alpha}} \cdot \frac{J_{1-\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)}{J_{\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2}\right)} \cdot J_{\alpha}\left(2i\pi\alpha\sqrt{1+k^2} \cdot y^{1/(2\alpha)}\right) \right] \times$$

$$\times \sin \pi k x,$$

ряд сходится равномерно в $\bar{\Omega}$ к решению задачи (3.19) в силу теоремы 3.7.

Заключение

1. Для краевой задачи E для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения при порядках вырождения $m = 1, 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При $m = 2$ решены проблемы малых знаменателей и логарифмических особенностей.

2. Для краевой задачи D для рассматриваемого эллиптического дифференциального уравнения при порядках вырождения $1 \leqslant m < 2$ установлен общий вид формальных решений в виде рядов, в которых характер неаналитической зависимости решения от переменного y указан явно. Доказаны теоремы о существовании решения задачи из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. При этом в случае иррациональных m установлено разложение решения по целым степеням переменной $\tau = y^{2-m}$ с аналитическими коэффициентами.

3. Исследованы асимптотические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением порядка $m \in [1, 2]$ и большим параметром k при неизвестной функции.

Полученные теоретические результаты имеют значимость в рамках аналитической теории дифференциальных уравнений и при разработке численных методов решения задач математической физики.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Игорю Сергеевичу Ломову за постановку задачи, руководство процессом исследования и ценные советы.

Также автор выражает благодарность коллективу кафедры Общей математики факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку при написании диссертационной работы.

Список литературы

1. Бабенко К. И. К теории уравнений смешанного типа : дис. … д-ра наук. — 1952.
2. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы // *Доклады АН СССР*. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.
3. Бицадзе А. В. К общей задаче смешанного типа // *Доклады АН СССР*. — 1951. — Т. 78, № 4. — С. 621–624.
4. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — С. 448.
5. Бицадзе А. В. О единственности решения общей граничной задачи для уравнения смешанного типа // *Сообщения АН ГрузССР*. — 1950. — Т. XI, № 4.
6. Бицадзе А. В. О некоторых задачах смешанного типа // *Доклады АН СССР*. — 1950. — Т. 70, № 4. — С. 561–565.
7. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. — М. : Наука, 1973. — С. 272.
8. Векуа И. Н. Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными // *Сообщения АН СССР*. — 1940. — Т. 1. — С. 22–34, 181–186, 497–500.
9. Векуа И. Н. О комплексном представлении общего решения уравнений плоской задачи стационарного колебания теории упругости // *Доклады АН СССР*. — 1937. — Т. 16. — С. 155–160.
10. Векуа И. Н. Обобщённые аналитические функции. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1959.
11. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // *Матем. сб.* — 1954. — Т. 35(77), № 3. — С. 513–568.

12. Вишик М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // *Тр. ММО.* — 1952. — Т. 1. — С. 187–246.
13. Волков Е. А. К численному решению задачи Лаврентьева-Бицадзе // *Доклады АН СССР.* — 1955. — Т. 103, № 5. — С. 755–758.
14. Волков Е. А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // *Доклады АН СССР.* — 1962. — Т. 147, № 1. — С. 13–16.
15. Врагов В. Н. Аналитичность решения задачи E для одного вырождающегося эллиптического уравнения // *Дифференциальные уравнения.* — 1974. — Т. 10, № 1. — С. 36–40.
16. Врагов В. Н. О гладкости решений первой краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения // *Дифференциальные уравнения.* — 1970. — Т. 6, № 1. — С. 209–212.
17. Глушко В. П. О вырождающихся эллиптических уравнениях второго порядка в произвольных гладких областях // *Доклады АН СССР.* — 1967. — Т. 173, № 1. — С. 18–21.
18. Глушко В. П. О гладкости решений вырождающихся дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // *Доклады АН СССР.* — 1971. — Т. 198, № 1. — С. 20–22.
19. Глушко В. П. О разрешимости смешанных задач для параболических уравнений второго порядка с вырождением // *Доклады АН СССР.* — 1972. — Т. 207, № 2. — С. 266–269.
20. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — С. 436.
21. Дмитриев В. И. Дифференциальные уравнения. — М. : Аргамак-Медиа, 2016. — С. 284.
22. Ивакин В. М. Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем // *Аналитические методы в теории эллиптических уравнений.* — 1982. — С. 12–21.

23. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I. Курс высшей математики и математической физики. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — С. 648.
24. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II. Курс высшей математики и математической физики. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — С. 464.
25. Кароль И. Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // *Доклады АН СССР.* — 1953. — Т. 88, № 2. — С. 197–200.
26. Качалов В. И. О существовании гладких по параметру решений для сингулярно возмущенных уравнений // *Дифференциальные уравнения.* — 1990. — Т. 26, № 9. — С. 1641–1643.
27. Качалов В. И. Об алгебраических основах теории сингулярных возмущений // *Дифференциальные уравнения.* — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 397–401.
28. Келдыш М. В. Избранные труды. Математика. — М. : Наука, 1985. — С. 448.
29. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // *Доклады АН СССР.* — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.
30. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М. : Издательство иностранной литературы, 1958. — С. 474.
31. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. ММО.* — 1967. — Т. 16. — С. 209–292.
32. Кондратьев В. А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области // *Дифференциальные уравнения.* — 1970. — Т. 6, № 10. — С. 1831–1843.
33. Костин А. Б., Шерстюков В. Б. Базисность системы корневых функций задачи с наклонной производной для оператора Лапласа в круге // *Дифференциальные уравнения.* — 2019. — Т. 55, № 10. — С. 1392–1404.

34. Костин А. Б., Шерстюков В. Б. Метрика Хаусдорфа в задачах математической физики с разрывными данными // *Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 22-ой международной Саратовской зимней школы.* — 2024. — С. 121–124.
35. Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа // *Доклады АН СССР.* — 1950. — Т. 70, № 3. — С. 373–376.
36. Ломов И. С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения.* — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2079–2089.
37. Ломов И. С. Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // *Доклады РАН.* — 2001. — Т. 376, № 5. — С. 593–596.
38. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М. : Наука, 1981. — С. 400.
39. Ломов С. А. Об одном методе регуляризации сингулярных возмущений // *Доклады АН СССР.* — 1967. — Т. 177, № 6. — С. 1273–1276.
40. Ломов С. А. Теорема Тихонова о предельном переходе и метод регуляризации // *Дифференциальные уравнения.* — 1985. — Т. 21, № 10. — С. 1669–1679.
41. Ломов С. А., Качалов В. И. Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру // *Доклады АН СССР.* — 1988. — Т. 299, № 4. — С. 805–808.
42. Ломов С. А., Качалов В. И. Об аналитических свойствах решений дифференциальных уравнений с особыми точками // *Доклады АН СССР.* — 1989. — Т. 304, № 1. — С. 22–24.
43. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М. : Издательство МГУ, 2011.
44. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. — С. 335.

45. Михайлов В. П. Об обобщённой задаче Трикоми // *Доклады АН СССР.* — 1967. — Т. 175, № 5. — С. 1012–1014.
46. Михлин С. Г. К теории вырождающихся эллиптических уравнений // *Доклады АН СССР.* — 1954. — Т. 94. — С. 183–186.
47. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
48. Михлин С. Г. Об интегральном уравнении Трикоми // *Доклады АН СССР.* — 1948. — Т. 99. — С. 1053–1056.
49. Моисеев Е. И. О неполноте системы корневых функций задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // *Дифференциальные уравнения.* — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 170–172.
50. Моисеев Е. И. О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда // *Дифференциальные уравнения.* — 1991. — Т. 27, № 7. — С. 868–874.
51. Моисеев Е. И. О расположении спектра задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // *Дифференциальные уравнения.* — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 77–84.
52. Моисеев Е. И. О решении вырождающихся уравнений с помощью биортогональных рядов // *Дифференциальные уравнения.* — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 75–82.
53. Олейник О. А. О гладкости решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // *Доклады АН СССР.* — 1965. — Т. 163, № 3. — С. 577–580.
54. Олейник О. А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // *Матем. сб.* — 1952. — Т. 30. — С. 695–702.
55. Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области // *Доклады АН СССР.* — 1952. — Т. 87. — С. 885–887.
56. Панков В. В. Об априорной оценке решений одной краевой задачи в поло-

се для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* — 2021. — № 2. — С. 90–101.

57. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М. : Издательство Московского университета, 1984. — С. 296.
58. Петрушко И. М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа // *Труды ордена Ленина Математического института им. В.А. Стеклова.* — 1968. — Т. 103. — С. 181–200.
59. Петрушко И. М. О фредгольмовости некоторых краевых задач для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha(x, y)u_y + \beta(x, y)u_x + \gamma(x, y)u = f(x, y)$ в смешанной области // *Дифференциальные уравнения.* — 1968. — Т. 4, № 1. — С. 123–135.
60. Пономарёв С. М. К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // *Доклады АН СССР.* — 1977. — Т. 233. — С. 39–40.
61. Пономарёв С. М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трёхмерных областях // *Доклады АН СССР.* — 1979. — Т. 246. — С. 1303–1305.
62. Пулькин С. П. Задача Трикоми для обобщённого уравнения Лаврентьева // *Доклады АН СССР.* — 1958. — Т. 118, № 1. — С. 38–41.
63. Пулькин С. П. К вопросу о решении задачи Трикоми для уравнения типа Чаплыгина // *Изв. вузов, Математика.* — 1958. — Т. 2, № 3.
64. Руткаускас С. В. Полные семейства решений систем вырождающихся эллиптических уравнений // *Дифференциальные уравнения.* — 1977. — Т. 13, № 1. — С. 126–132.
65. Смирнов М. М. Обобщённое уравнение Трикоми // *Уч. зап. Белорусского государственного университета.* — 1951. — Т. 12. — С. 3–9.
66. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. — М. : Наука, 1970.
67. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // *Дифференциальные уравнения.* — 1994. — Т. 30, № 11. — С. 2001–2009.
68. Солдатов А. П. О единственности решения одной задачи А. В. Бицадзе //

Дифференциальные уравнения. — 1972. — Т. 8, № 1. — С. 143–146.

69. Солдатов А. П. Эллиптические системы высокого порядка // *Дифференциальные уравнения.* — 1989. — Т. 25, № 1. — С. 136–144.
70. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // *Матем. сб.* — 1952. — Т. 31(73), № 3. — С. 575–586.
71. Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. — М. : Издательство Московского университета, 1982. — С. 312.
72. Франкль Ф. И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // *Изв. АН СССР, Серия математическая.* — 1945. — Т. 9, № 2. — С. 121–142.
73. Франкль Ф. И. Об одной краевой задаче для уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Уч. зап. МГУ.* — 1953. — Т. 152, № III. — С. 33–45.
74. Фурсиков А. В. О глобальной гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // *Успехи математических наук.* — 1971. — Т. 26, № 5. — С. 227–228.
75. Янушаускас А. И. Аналитическая теория эллиптических уравнений. — Новосибирск, 1979.
76. Cibrario M. Sulla reduzione a forma canonica delle equazione lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto // *Rend. Lombardo.* — 1932. — Vol. 65. — P. 889–906.
77. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de tipe mixte : Ph. D. thesis. — Uppsala, 1935.
78. Germain P., Bader R. Sur le problème de Tricomi // *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris.* — 1951. — no. 232. — P. 463.
79. Holmgren E. Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Arkiv f. M. A. o. F.* — 1927. — Vol. 14, no. 19B. — P. 1–3.
80. Tricomi F. G. Ancora sull'equazione $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Rend. Acc. Lincei.* —

1927. — Vol. VI, no. 6.

81. Tricomi F. G. Ulteriori richerche sull'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$ // *Rend. Circolo Math. Palermo.* — 1928. — Vol. 52. — P. 63–90.

82. von Kowalevsky S. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung // *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* — 1875. — Vol. 80. — P. 1–32.

83. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. — Cambridge University Press, 1922.

Основные публикации автора по теме диссертации в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

84. Емельянов Д. П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением // *Дифференциальные уравнения.* — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 607–627. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ: 0,661). Перевод:

Emel'yanov D. P. Elliptic Differential Operators with Analytic Coefficients and Linear Degeneracy // *Differential Equations.* — 2022. — Vol. 58, no. 5. — P. 610–630. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, CiteScore 2022 — 1.2).

Работа опубликована в открытой печати.

85. Емельянов Д. П. Эллиптические дифференциальные операторы с вырождением нецелого порядка // *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика.* — 2023. — № 2. — С. 12–22. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ 2021: 0,077). Перевод:

Emel'yanov D. P. Elliptic Differential Operators with Noninteger Order De-

generation // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2023. — Vol. 47, no. 2. — P. 71–81. — (RSCI).
Работа опубликована в открытой печати.

86. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // *Дифференциальные уравнения*. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 655–672. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ: 0,661). Перевод:
Emel'yanov D. P., Lomov I. S. Using Poisson Series in the Analytic Theory of Irregularly Degenerate Elliptic Differential Operators // *Differential Equations*. — 2021. — Vol. 57, no. 5. — P. 636–653. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, CiteScore 2022 — 1.2).
Работа опубликована в открытой печати. Д.П. Емельянову принадлежат все теоремы.

87. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // *Дифференциальные уравнения*. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 45–58. — (Входит в перечень ВАК РФ, RSCI, импакт-фактор РИНЦ: 0,661). Перевод:
Emel'yanov D. P., Lomov I. S. Construction of Exact Solutions of Irregularly Degenerate Elliptic Equations with Analytic Coefficients // *Differential Equations*. — 2019. — Vol. 55, no. 1. — P. 46–59. — (RSCI, Web of Science, Scopus, Five Year Impact Factor 2022 — 0.6, CiteScore 2022 — 1.2).
Работа опубликована в открытой печати. Д.П. Емельянову принадлежат все теоремы.

Иные публикации автора по теме диссертации

88. Емельянов Д. П. Построение решения задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка меньше еди-

ницы // Ломоносовские чтения-2024: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2024. — «Вычислительная математика и кибернетика». — С. 70–71.

89. Емельянов Д. П. Асимптотика фундаментальной системы решений семейства вырождающихся дифференциальных уравнений // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020». — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2020. — С. 65–66.
90. Емельянов Д. П. Построение решения задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка // СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXXIV. — Воронеж : Изд-во ВГУ. — 2023. — С. 145–146.
91. Емельянов Д. П. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019». — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2019. — Т. 1. — С. 16–17.
92. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Межд. конф.: Воронежская зимняя матем. школа (28 января - 2 февраля 2021 г.) / ВГУ; МГУ им. М.В. Ломоносова; Матем. ин-т им. В.А. Стеклова РАН. - Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2021. - 333 с. — Издательский дом ВГУ Воронеж. — 2021. — С. 118–118.
93. Ломов И. С., Емельянов Д. П. Решение задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка // Ломоносовские чтения-2023: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Москва : ООО "МАКС Пресс". — 2023. — «Вычислительная математика и кибернетика». — С. 134–136.