

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертационной работе

Денисова Константина Юрьевича

«Большие нижние локальные отклонения ветвящихся процессов в случайной среде», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 – теории вероятностей и математическая статистика

Диссертация К.Ю. Денисова лежит в русле точной асимптотики вероятностей верхних и нижних больших отклонений ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС), активно разрабатываемой последние 15-20 лет. Исследование диссертанта ограничивается случаем распределением количества потомков одной частицы с дробно-линейной производящей функцией. Она зависит от одного параметра p , который меняется на каждом шаге процесса независимо и с одинаковым распределением. Суперпозиции дробно-линейных функций выписываются в явном виде и это даёт возможность исследовать асимптотику локальных вероятностей процесса.

В теории ВПСС ключевую роль играет вложенное случайное блуждание S_n , называемое сопровождающим. Для ВПСС Z_n с геометрическим распределением числа непосредственных потомков одной частицы это блуждание непосредственно входит в формулу вероятностей $P(Z_n = k)$, причём через две характеристики траектории блуждания $U_n = \exp(-S_n)$ и V_n — суммы U_k по k от 0 до $n-1$, а сама формула представляет собой простое алгебраическое выражение, которое мы обозначим $J_k(U_n, V_n)$. Его усреднение по всем траекториям представляет собой интеграл от $J_k(u, v)$ по совместному распределению вероятностей U_n, V_n . Тем самым, возникает аналитическая задача нахождения асимптотики этого интеграла при n стремящемся к бесконечности и k изменяющимся в различных диапазонах больших отклонений.

Большие отклонения для ВПСС связаны с отклонениями сопровождающего случайного блуждания, исследование которого основано на “перекосе” распределения вероятностей шага блуждания (известного ещё в теории информации), за счёт чего область больших отклонений суммы становится областью нормальных отклонений в преобразованном распределении вероятностной суммы с возможностью применить различные формы центральной предельной теоремы (ЦПТ). В диссертации используется так называемая интегро-локальная форма ЦПТ. Оказывается, что $P(Z_n = k)$ формируется на траекториях блуждания, для которых конечная точка S_n находится в существенно различных точках в зависимости от графика преобразования Лапласа распределения шага

блуждания. Условия на это преобразование в диссертации приводят к разным зонам, в которых ищется асимптотика вероятностей $P(Z_n = k)$.

В так называемой первой зоне больших уклонений вероятность $P(Z_n = k)$, где k имеет порядок n , разбивается на части по S_n в главной области $|S_n - k| < M$, где M берётся сколь угодно большим, и $S_n - k < -M$, и $S_n - k > M$. Оценки соответствующих интегралов $EJ_k(U_n, V_n)$, которые сводятся к математическому ожиданию $EJ_k(U_n^*, V_n^*)$ для преобразованных U_n, V_n . Для величин U_n используется локальная асимптотика для больших уклонений для S_n , а для экспоненциального функционала V_n диссертант доказывает специальную лемму в главе 1. Оценка главной части интеграла $EJ_k(U_n^*, V_n^*; |S_n - k| < M)$ в Теореме 5 раздела 2.2 потребовала деликатной работы в области математического анализа. Похожая техника используется и в Теореме 11 раздела 3.2. Однако, там существенные трудности возникли при оценке остальных интегралов по области $S_n < k - M$. В теоремах разделов 2.3, 2.4 экспоненциальный множитель асимптотики отличается прежде всего тем, что не зависит от k в пределах рассматриваемой зоны уклонений. Здесь разбиение на три области имеет другой характер: $|S_n - m(-1)n| < Mn^{1/2}$, $S_n - m(-1)n < -Mn^{1/2}$, $S_n - m(-1)n > Mn^{1/2}$, а техника оценок усложняется.

Опишем более детальную структуру работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введение приведен подробный анализ известных результатов в данной области, обоснованы актуальность и сформулированы цели работы, описана структура работы и кратко изложены основные результаты. В первой главе рассказываются основы теории больших уклонений для случайных блужданий и приводится авторская лемма о функционале V_n . Во второй главе описаны большие нижние уклонения для ВПСС, исследована асимптотика в первой и второй зонах уклонений и переходные явления на границе. В третьей главе исследованы верхние большие уклонения для ВПСС в первой зоне уклонений. В заключении кратко перечислены основные результаты работы.

К достоинствам работы можно отнести хороший профессиональный уровень, целый ряд новых результатов в теории больших уклонений ВПСС, в том числе замечательный факт об одинаковости асимптотики локальных вероятностей для ВПСС в широкой зоне значений, описанный в теореме 6, прежде не известный в теории ВПСС. Исследование нижних уклонений проведено подробно, тщательно изучены переходные явления. К сожалению, для верхних уклонений подобной подробности в работе нет.

Результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором, являются новыми и обоснованы строгими математическими доказательствами.

Автором доказаны: лемма о предельном распределении экспоненциального функционала при условии интегро-локального события, теоремы об асимптотике вероятностей нижних больших уклонений в первой, второй и на границе первой и второй зон уклонений, а также теорема об асимптотике вероятностей верхних больших уклонений в первой зоне уклонений для ВПСС с геометрическим распределением числа непосредственных потомков одной частицы.

Результаты опубликованы в 4 работах в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных RSCI, SCOPUS, Web of Science. Все работы опубликованы без соавторов.

- Асимптотика вероятностей нижних больших уклонений ВПСС в первой зоне уклонений описана в работе:
Денисов К.Ю. Асимптотика локальных вероятностей нижних уклонений ветвящегося процесса в случайной среде при геометрических распределениях чисел потомков // Дискрет. матем. 2020. Т. 32, № 3. С. 24–37.
- Асимптотика вероятностей верхних больших уклонений ВПСС в первой зоне уклонений описана в работе:
Денисов К.Ю. Асимптотика локальных вероятностей больших уклонений ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков // Дискрет. матем. 2021. Т. 33, № 4. С. 19–31.
- Асимптотика вероятностей нижних больших уклонений ВПСС во второй зоне уклонений описана в работе:
Денисов К.Ю. Локальная асимптотика вероятностей нижних уклонений строго надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическими распределениями чисел потомков // Дискрет. матем. 2022. Т. 34, № 4. С. 14–27.
- Асимптотика вероятностей нижних больших уклонений ВПСС на границе зон уклонений описана в работе:
Денисов К.Ю. Локальная асимптотика вероятностей больших нижних уклонений сильно надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением чисел потомков одной частицы // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21, № 1. С. 1-16.

Результаты диссертации докладывались на российских и международных конференциях, список которых приведен в автореферате и диссертации.

Основные идеи и положения работы изложены в 7 научных работах, в том числе 4 публикациях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Все перечисленные

публикации соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. По форме и содержанию автореферат соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а сама работа соответствует специальности 1.1.4 - теория вероятностей и математическая статистика. В диссертационной работе К.Ю. Денисова «Большие нижние локальные отклонения ветвящихся процессов в случайной среде» решено несколько актуальных и сложных задач теории больших отклонений. Эта работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3.

Доцент кафедры математической статистики
и случайных процессов механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова,
(119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391648
email: matstat@mech.math.msu.su
сайт <http://new.math.msu.su/department/matstat/>)
кандидат физико-математических наук,



М.В. Козлов

27.09.2024
Подпись доцента кафедры математической статистики
и случайных процессов, кандидата физико-математических наук
Козлова М.В. удостоверяю,
декан механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор



А. И. Шафаревич