

**ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Бровкина Вадима Вадимовича
на тему «О разрешимости второй краевой задачи для
 p -лапласиана на римановых многообразиях»
по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика**

В диссертации В.В. Бровкина изучаются решения дифференциального уравнения

$$\Delta_p u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

удовлетворяющие второму краевому условию

$$|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = h \quad (2)$$

и условию конечности интеграла Дирихле

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dV < \infty.$$

где

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad p > 1,$$

– оператор p -Лапласа, Ω – липшицева область на римановом многообразии M с краем (возможно пустым), а f и h – обобщенные функции из $\mathcal{D}'(M)$ такие, что $\operatorname{supp} f \subset \bar{\Omega}$ и $\operatorname{supp} h \subset \partial \Omega$.

Интерес к дифференциальным уравнениям на римановых многообразиях восходит к работам L. Cheng, D. Sullivan и S.T. Yau, в которых исследовались свойства гармонических функций. В нашей стране и, в частности, в Московском университете дифференциальными уравнениями на римановых многообразиях занимались ученики В.А. Кондратьева и Е.М. Ландиса.

Решения задачи (1), (2), изучению которых посвящена диссертация, понимаются в обобщенном смысле. Именно, функция $u \in W_{p,loc}^1(\Omega)$ называется решением задачи (1), (2), если

$$-\int_M |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dV = (f - h, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\text{supp } \varphi \subset \Omega$, где dV – элемент объема многообразия M .

При этом в случае $\partial\Omega = \emptyset$, что возможно, если $\Omega = M$ и $\partial M = \emptyset$, условие (2) предполагается выполненным автоматически. В этом случае также предполагается, что $h = 0$.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

Во введении автор подробно останавливается на истории вопроса, даёт обоснование актуальности проведённого им исследования и приводит сводку основных результатов, полученных в диссертации.

В первой главе исследуется случай общих римановых многообразий. Результаты этой главы используются в остальных главах диссертации. Основными утверждениями главы 1 являются теоремы 1.1–1.6, в которых приведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2). В теоремах 1.1, 1.3 и 1.5 рассматривается случай гиперболических областей, а в теоремах 1.2, 1.4 и 1.6 — параболических.

Отдельно исследован случай, когда носитель функционала $F = f - h$ — компактное множество. В этом случае критерий разрешимости задачи (1), (2) выглядит особенно изящно (теоремы 1.1, 1.2 и следствия 1.1, 1.2).

Большое внимание в первой главе диссертации уделяется неравенствам Харди, которые используются в различных утверждениях главы 1 и вытекающих из них следствиях в главах 2 и 3. Приводятся точные достаточные условия справедливости этих неравенств на римановых многообразиях.

Во второй главе исследуется важный частый случай римановых многооб-

разий с модельными концами. К этим многообразиям, в частности, относятся поверхности вращения и внешние области в $\mathbb{R}^n$.

Основными результатами главы 2 являются теоремы 2.1–2.4, содержащие необходимые и достаточные условия существования решений задачи (1), (2) на многообразиях с модельными концами. Отдельно исследованы случаи модельных концов гиперболического и параболического типов.

В третьей главе рассматривается вторая краевая задача для p -лапласиана в областях, полученных вращением в $\mathbb{R}^n$ липшицевой кривой. Опираясь на результаты главы 1, автор приводит необходимые и достаточные условия существования решения этой задачи.

Диссертация написана понятным языком. Результаты диссертации являются интересными и новыми. Они могут найти применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также в дифференциальной геометрии и ее приложениях.

Диссертация содержит большое количество примеров, демонстрирующих применение результатов диссертации к римановым многообразиям конкретного вида.

Все полученные в диссертации результаты сформулированы в виде теорем и обоснованы подробными доказательствами. Результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 4 — в научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ. Автореферат соответствует требованиям и правильно отражает содержание диссертации. Результаты исследований докладывались на международных научных конференциях и научных семинарах.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуж-

дении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Таким образом, соискатель Бровкин Вадим Вадимович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры «Физико-математическое образование и информационные технологии» ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Алхутов Юрий Александрович

«26» марта 2026 г.

Контактные данные:

тел.:

e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения.

Адрес места работы:

600024, г. Владимир, пр. Строителей 11, корпус 7, ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» (ВлГУ), Педагогический институт, кафедра «Физико-математическое образование и информационные технологии»

тел.: +7 (904) 039-39-08, e-mail: yevseeva@vlsu.ru

Подпись сотрудника ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» Алхутова Ю.А. удостоверяю: