МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Майоров Павел Александрович

Балансно-характеристический подход к численному моделированию гидродинамических течений со свободной поверхностью в гидростатическом приближении

Специальность 1.2.2.
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Диссертация подготовлена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Соловьев Андрей Валерьевич**
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Шаргатов Владимир Анатольевич,**
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», заведующий кафедрой суперкомпьютерного моделирования инженерно-физических процессов

Яковлев Николай Геннадьевич,
доктор физико-математических наук, доцент, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, ведущий научный сотрудник

Криксин Юрий Анатольевич,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, ведущий научный сотрудник

Защита диссертации состоится «24» декабря 2025 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, ауд. 685.
E-mail: ds@cs.msu.ru
С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3654.
Автореферат разослан «____» ________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.012.1,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН
Ильин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Среди практических вопросов динамики жидкости значительную роль занимает моделирование течений со свободной верхней поверхностью. Под свободной поверхностью понимается граница раздела между жидкостью и другой средой, изменяющаяся под воздействием внешних и внутренних сил. Такие течения встречаются в широком диапазоне масштабов – от лабораторных экспериментов до глобальных океанических процессов.

Разномасштабные явления течения жидкости со свободной поверхностью описываются одними и теми же фундаментальными законами. Будь то лабораторные эксперименты, речные системы или океанические течения, математические модели и численные методы, используемые для их анализа, остаются универсальными. На практике эти уравнения решаются с различными упрощениями, что естественно ограничивает область применимости каждой конкретной методики. Тем не менее общая физическая база позволяет переносить проверенные численные подходы между масштабами, адаптируя их к нужной степени детализации и тем самым охватывая широкий спектр задач — от интерпретации лабораторных опытов до прогноза динамики природных водоёмов.

Существует множество крупных вычислительных комплексов, позволяющих моделировать процессы со свободной поверхностью на различных масштабах. Например, такие системы, как INMOM[1], NEMO[2] или MITgcm[3], охватывают широкий спектр геофизических задач — от моделирования течений в прибрежных зонах и устьях рек до прогнозирования глобальных океанических циркуляций. Данные комплексы учитывают влияние целого ряда физических факторов: переменная температура и соленость, сложный рельеф дна, сила Кориолиса и другие процессы, характерные для реальных течений. При всём многообразии параметризаций и дополнительных модулей, их вычислительное «ядро» сводится к решению систем уравнений движения жидкости со свободной границей. Именно разработкам, связанным с вычислительным «ядром», посвящена данная работа. Рассматриваются модели динамики жидкости со свободной поверхностью, предлагаются и анализируются методы численного моделирования.

Одним из фундаментальных математических описаний движения жидкости является система уравнений Навье–Стокса [4]. Для моделирования течений со свободной поверхностью можно использовать как прямое решение этой системы уравнений [5], так и применение различных моделей [6—8], позволяющих, путем некоторых предположений, упростить получение решения. Настоящая работа относится ко второму классу подходов и нацелена на разработку новых гидростатических алгоритмов. В этом подходе давление в каждый момент времени определяется из условия гидростатического равновесия.

Наиболее простой и робастной моделью является однослойное гидростатическое приближение, когда скорость и плотность вдоль каждой вертикальной линии предполагаются постоянными. Это приводит к системе уравнений Сен-Венана (модель мелкой воды), которая является безусловно гиперболической и для численного решения которой можно использовать широкий набор устойчивых численных методов [6; 9].

К вычислительным алгоритмам решения системы уравнений мелкой воды обычно предъявляют следующие требования: консервативность, заключающуюся в сохранении массы и импульса с учетом сил реакции рельефа дна, сил Кориолиса и действия ветра на свободную поверхность, монотонность и сбалансированность, что предполагает устойчивость состояния покоя однородно стратифицированной жидкости над произвольным рельефом дна.

Использование метода конечных объемов автоматически гарантирует консервативность алгоритма при соответствующей записи разностных соотношений. Существует множество вариантов расчета потоков, например, решением задачи Римана [9], либо методом характеристик [6], либо схемами с центральными разностями [7]. Следует отметить, что методы, основанные на задаче Римана, в случае неплоского рельефа дна сталкиваются с дополнительными трудностями. Однако они были успешно преодолены [10].

Однослойное приближение мелкой воды не позволяет моделировать внутренние волны. Следующим приближением в иерархии гидростатических моделей является модель «двухслойной мелкой воды» [11; 12], описывающая движение двух слоев жидкости, разделенных непроницаемой подвижной поверхностью. Удвоенное число степеней свободы делает эту модель более адекватной физической реальности, однако, как показано в работе Л.В. Овсянникова [13], система соответствующих уравнений перестает быть безусловно гиперболической. Начально-краевая задача становится некорректной, и для ее численного решения приходится использовать какую-либо процедуру регуляризации [14]. Обычно используются искусственная вязкость и диффузия, которые интерпретируются как модели турбулентности.

Помимо потери гиперболичности двухслойные модели, использующие методы конечных объемов, имеют проблему с выбором генераторов потока. Решение задачи Римана в этом случае сталкивается с серьезными математическими трудностями [15], как и решение задачи о приведении соответствующей системы к характеристическому виду [16].

Все эти трудности только нарастают при использовании многослойных гидростатических моделей [8]. Плохая обусловленность задачи, при недостатке искусственной диссипации, приводит к неустойчивости непроницаемых поверхностей раздела между слоями с последующим их «перекрытием». Это делает невозможным продолжение расчета. Естественный способ избежать перекрытий — отказаться от непроницаемости поверхностей между слоями. Поэтому необходим переход к моделям, допускающим обмен массой и импульсом между слоями.

Использование моделей с обменом массой и импульсом между слоями не устраняет плохой обусловленности системы, возникающей из предположения о гидростатике. При недостаточности процедур регуляризации происходит катастрофическая деформация свободной поверхности и неограниченный рост скоростей. Благодаря удачному выбору значений коэффициентов искусственной вязкости и диффузии, зависящих от численного решения, расчет при стандартных ограничениях на шаг по времени становится устойчивым. Однако эти значения неизвестны заранее. Их приходится подбирать эмпирически для каждой задачи или для достаточно небольшого класса задач. Слишком высокие значения приводят к дополнительной диссипации, которая может существенно деформировать решение.

Проблеме избыточности искусственной или схемной диссипации в существующих многослойных гидростатических моделях с обменом массой и импульсом между слоями ранее не уделялось должного внимания. Чрезмерная диссипация может самым негативным образом сказаться на точности расчетов с малыми числами Фруда, характерными для реальных течений.

Все вышеизложенное делает актуальной задачу разработки робастного малодиссипативного численного алгоритма для гидростатической модели динамики стратифицированного течения со свободной поверхностью.

Целью данной работы является построение малодиссипативного балансно-характеристического численного алгоритма расчета динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении и математическое моделирование течений стратифицированной жидкости с помощью построенного численного алгоритма.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

(1) Построение алгоритма моделирования динамики несжимаемой однослойной жидкости со свободной поверхностью и неровным дном с переменной плотностью на основе балансно-характеристического подхода.

(2) Построение алгоритма моделирования динамики несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в приближении «двухслойной мелкой воды» на основе балансно-характеристического подхода с аналитическим нахождением собственных чисел характеристической матрицы.

(3) Проведение процедуры неполной факторизации системы уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью, заключающейся в рассмотрении сил, действующих на границы слоев, как внешних, находящихся в правой части системы уравнений.

(4) Разработка алгоритма численного решения гиперболизированной системы уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью на основе методики КАБАРЕ.

(5) Разработка алгоритма регуляризации численного решения по схеме КАБАРЕ уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью и неровным дном.

(6) Проведение валидации итогового алгоритма на лабораторных экспериментах по исследованию течений в стратифицированной жидкости.

Основные положения, выносимые на защиту:

(1) Балансно-характеристический алгоритм решения системы уравнений динамики несжимаемой однослойной жидкости со свободной поверхностью и неровным дном с переменной плотностью, обладающий свойством сбалансированности, и результаты расчетов приливных течений в Белом море с учетом реальной батиметрии по этому методу.

(2) Балансно-характеристический алгоритм решения системы уравнений «двухслойной мелкой воды» с аналитическим нахождением собственных чисел характеристической матрицы системы и его сравнение с известными алгоритмами на тестовых задачах, в том числе с потерей гиперболичности системы.

(3) Математическая модель динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении и балансно-характеристический метод её решения. Алгоритм регуляризации численного решения, учитывающий обмен массой и импульсом между слоями. Результаты валидации алгоритма на серии лабораторных экспериментов как с двумерными, так и с трехмерными течениями стратифицированных жидкостей, подтверждающие хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными данными.

(4) Комплекс программ для прямого численного моделирования течений жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении.

Научная новизна:

(1) Впервые построена балансно-характеристическая схема класса КАБАРЕ для системы уравнений динамики несжимаемой однослойной жидкости со свободной поверхностью и неровным дном с переменной плотностью.

(2) Впервые построена балансно-характеристическая схема класса КАБАРЕ для системы уравнений динамики несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в приближении «двухслойной мелкой воды» с аналитическим нахождением собственных чисел характеристической матрицы.

(3) Впервые построена балансно-характеристическая схема класса КАБАРЕ для системы уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью и неровным дном, включающая процедуру неполной факторизации исходной системы и алгоритмов регуляризации численного решения.

Практическая значимость работы заключается в возможности дальнейшего использования разработанных балансно-характеристических алгоритмов в качестве вычислительного ядра систем моделирования динамики течения жидкости со свободной поверхностью. Программная реализация алгоритмов имеет потенциал стать «ядром» для вычислительного комплекса, применяемого как в инженерной практике, так и в научно-исследовательской деятельности.

Достоверность полученных результатов обеспечивается достаточным количеством проведенных тестовых и модельных расчетов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

(1) Научная конференция «Мировой океан: модели, данные и оперативная океанология» (Севастополь, 26-30 сентября 2016г.),
(2) Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (Москва, 28-30 июня 2016г.),
(3) Научная конференция «Тихоновские Чтения 2017» (Москва, 23-27 октября 2017г.),
(4) IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'19) (Москва, 19-21 июня 2019),
(5) Научная конференция «Тихоновские чтения 2019» (Москва, 28 октября – 1 ноября 2019г.),
(6) Международная конференция «Многомасштабные Методы и Высокопроизводительные Научные Вычисления» (Сочи, 8-13 сентября 2020г.),
(7) Научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, 26-31 октября 2020г.),

(8) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, 20-29 апреля 2021 г.),

(9) XIX Всероссийская научная конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» (Пос. Дюрсо, Краснодарский край, 13-18 сентября 2021 г.),

(10) Всероссийская научная конференция «Моря России: Год науки и технологий в РФ – Десятилетие наук об океане ООН» (Севастополь, 21-24 сентября 2021 г.),

(11) Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2021» (МНЧ-2021) (Новосибирск, Академгородок, 4-8 октября 2021 г.),

(12) V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'22) (Москва, 27-30 июня 2022 г.).

(13) VI Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'25), (Москва, 15-19 июля 2025 г.),

(14) Научно-исследовательский семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством к.ф.-м.н. А. В. Соловьева при консультациях д.ф.-м.н., проф. В.М. Головизнина. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, изданных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 129 страниц с 47 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 106 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена балансно-характеристической численной модели для системы уравнений мелкой воды с переменной плотностью, учитывающей внешнее давление и донный рельеф. Разработанный алгоритм не только представляет самостоятельный интерес с точки зрения численного моделирования, но и служит основой для послойного решения многослойной гидростатической модели.

Раздел начинается с вывода варианта системы уравнений мелкой воды с учетом переменной плотности. Выписаны интегральные законы сохранения (баланса) площади, массы и импульса в случае одного пространственного измерения для произвольной подобласти. Из интегральных уравнений следуют соответствующие законы сохранения в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho hu}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \rho uh}{\partial t} + \frac{\partial \rho hu^2}{\partial x} + \frac{g}{2}\frac{\partial \rho h^2}{\partial x} + \frac{\partial P_T h}{\partial x} = P_T\frac{\partial H}{\partial x} - P_B\frac{\partial B}{\partial x},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $H(x,t)$ - свободная поверхность, $B(x)$ - рельеф дна, $h(x,t) = H(x,t) - B(x)$- толщина, $\rho(x,t)$ - плотность и $u(x,t)$ - горизонтальная компонента скорости жидкости, P_T - давление на свободной поверхности, $P_B = P_T + \rho gh$ - давление на дне.

Далее, рассматривая достаточно малую область C, получен вид локальных инвариантов Римана [17]:

$$I_1 = u + \left(\frac{c}{h}\right)_c h + \left(\frac{gh}{2\rho c}\right)_c \rho, I_2 = u - \left(\frac{c}{h}\right)_c h - \left(\frac{gh}{2\rho c}\right)_c \rho, I_3 = \rho \tag{2}$$

Характеристическое представление систем уравнений в частных производных гиперболического типа служит основой для "характеристических"

[18] и “сеточно-характеристических” [11] методов численного решения этих уравнений.

Для численного решения полученной системы уравнений (1) строится алгоритм на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ[17; 19], хорошо зарекомендовавший себя в применении к уравнениям мелкой воды [6]. Алгоритм оперирует двумя типами переменных: консервативными (в центрах ячеек) и потоковыми (на гранях). Расчёт проводится в два этапа: вычисление потоковых переменных с использованием локальных инвариантов Римана(2) и их коррекцией по принципу максимума, а затем консервативных переменных, используя конечно-объёмный подход.

Для итогового алгоритма показано свойство сбалансированности, а также способность сохранять стационарное решение при переменной плотности.

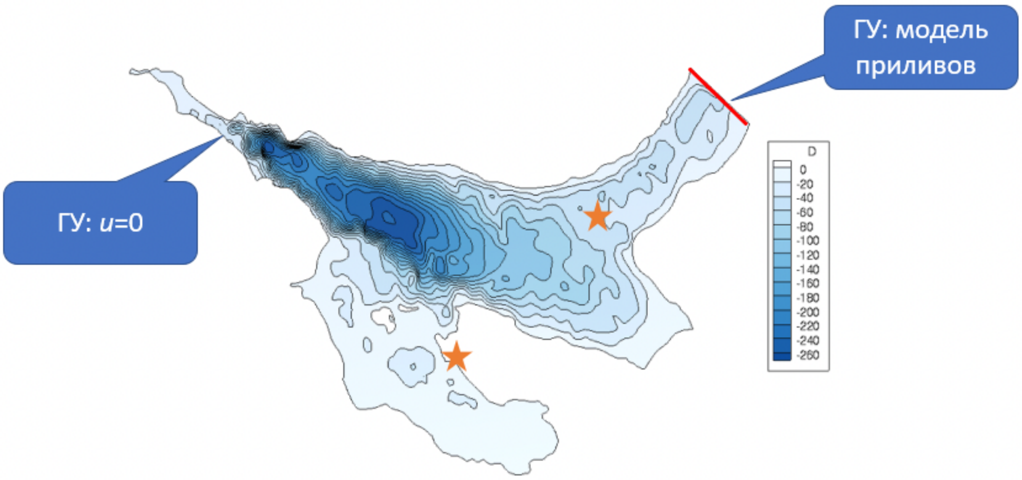


Рис. 1 — Расчетная область – границы, глубины. Оранжевые звезды – положение точек амфидромии.

Работоспособность предложенной численной модели была показана на задаче о приливной динамике в Белом море. В качестве расчетной области была выбрана акватория Белого моря с характерной сложной береговой линией и переменной глубиной. В проливе (Горло), соединяющем Белое и Баренцево моря, были заданы периодические граничные условия, взятые из модели приливов [20]. На остальных границах области задаются условия “прилипания”. Глубины (рис. 1) взяты из данных базы TOPO1 [21], которая обладает разрешением $1/12$ градуса.

Для моделирования использовалась неструктурированная четырехугольная расчетная сетка. В качестве начальных данных брались нулевые скорости и невозмущенная свободная поверхность. Рассчитывалось 8 суток.

На рис. 2 приведены численные результаты расчета уровней свободной поверхности в различные моменты времени. Благодаря учету приливной динамики в Горле, на 5-6 сутки решение выходит на периодический режим и сравнимо с другими численными расчетами [22; 23]. Одной из характеристик приливного движения Белого моря является наличие точек амфидромии, уровень поверхности в которых остается постоянным. Анализ динамики свободной поверхности за восьмые сутки показал хорошее совпадение положения точек амфидромии с данными наблюдений.

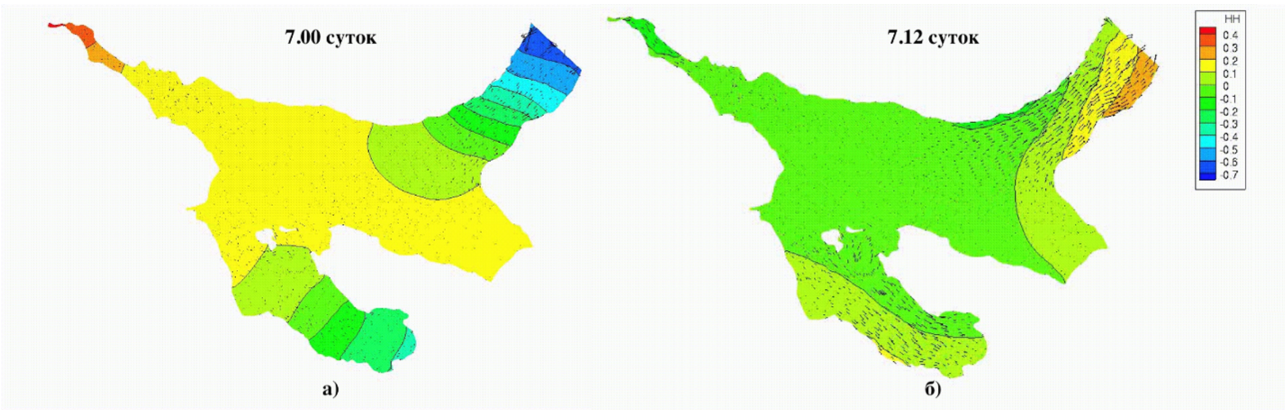


Рис. 2 — Уровень свободной поверхности из расчетов по модели КАБАРЕ на моменты времени а) 7 суток, б) 7.12 суток

Вторая глава посвящена как самой модели двухслойной мелкой воды, описывающей движение двух слоев жидкости, разделенных непроницаемой подвижной поверхностью, так и алгоритму на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ для ее численного решения. Важной составляющей этой главы является изучение проблемы потери гиперболичности многослойных систем на примере двух слоев.

Течение несжимаемой жидкости, состоящей из двух несмешивающихся слоев с разной плотностью, над неровным дном под действием силы тяжести может быть описано моделью двухслойной мелкой воды:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1 u_1}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial h_2 u_2}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial h_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1 u_1^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h_1^2}{\partial x} = -g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - g h_1 \frac{\partial B}{\partial x}\\
&\frac{\partial h_2 u_2}{\partial t} + \frac{\partial h_2 u_2^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h_2^2}{\partial x} = r g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - r g \frac{\partial h_1 h_2}{\partial x} - g h_2 \frac{\partial B}{\partial x},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где h_1,u_1 - толщина и скорость верхнего слоя, h_2,u_2 - нижнего слоя, B(x) - рельеф дна, $r = \rho_1/\rho_2 \leq 1$ - отношение плотностей слоев.

Для численного решения системы уравнений (3) строится алгоритм на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ [17; 19]. Нахождение локальных инвариантов Римана свелось к решению уравнения четвертой степени методом Декарта — Эйлера и вычислению с помощью метода Фадеева [24] левых собственных векторов матрицы характеристической формы уравнений.

Приводится апробация итогового алгоритма на модельных задачах о перепаде высот и внутренней волне с последующим сравнением результатов с данными, полученными в работе Холодова [11]. Посчитанные скорости распространения волн, свободная поверхность и поверхность между слоями схожи с результатами из статьи для обоих соотношений плотностей. Также, при плотностях слоев, близких друг к другу, наблюдается хорошее соответствие с аналитическими решениями для однослойной мелкой воды.

При проведении тестовых расчетов на данных из работы Холодова[11] параметры двухслойной жидкости оставались в области гиперболичности. Однако в отличие от однослойной мелкой воды, система уравнений двухслойной мелкой воды (3) при некоторых условиях может стать не гиперболичной. В физическом смысле потеря гиперболичности соответствует неустойчивости Кельвина - Гельмгольца, т.е. неустойчивости из-за сильного разрыва скоростей между слоями жидкости. Существует геометрическая интерпретация, предложенная в работе Овсянникова Л.В [13], помогающая в определении областей с потерей гиперболичности.

Возникновение неустойчивости численного решения уравнений двухслойной мелкой воды при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями были рассмотрены на задаче динамики жидкости из статьи А. Курганова [12]. Начальные данные (рис. 3 а) описывают встречное движение двух слоев жидкости, граница раздела которых имеет локальное синусоидальное возмущение. Рельеф дна постоянен.

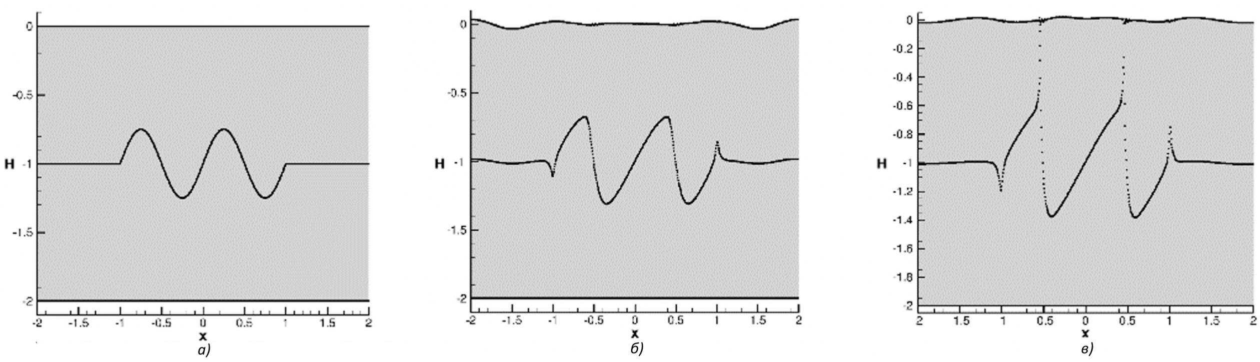


Рис. 3 — Границы слоев на разные моменты времени: а) начальные данные, результаты расчета по методике КАБАРЕ на сетке в 800 ячеек б) t=0.5, в) t=0.65

Положение границ раздела слоев на момент времени t=0.5 расчета по методике КАБАРЕ на сетке в 800 ячеек(рис. 3 б) хорошо согласуется с результатами, опубликованными в работе А. Курганова [12]. В указанной статье отсутствует информация о поведении расчета свыше времени t=0.5. В данной работе исследовано дальнейшее развитие: при t=0.65 наблюдается вырождение толщин слоёв (рис. 3 в), что приводит к остановке расчёта.

При расчёте на сетке с 1600 ячейками нарушение устойчивости возникает уже на ранних этапах, тогда как на менее детализированной (200 ячеек) оно развивается заметно медленнее. Тем не менее, конфигурация задачи неизбежно приводит к аварийному прекращению расчета. Анализ механизмов этой неустойчивости стал основой для разработки устойчивого численного алгоритма многослойной модели, где перестройка сетки и сопутствующий межслоевой обмен массой и импульсом обеспечивают регуляризацию задачи.

Третья глава включает в себя описание нового численного алгоритма для многослойной гидростатической модели в случае двух пространственных переменных. Рассматривается подход к решению проблем, связанных как с характеристической формой дифференциальной системы, так и устойчивостью численного алгоритма для не безусловно гиперболической системы. Предлагаемая вычислительная модель также основана на подходе, сочетающем методы характеристик и конечного объема. В разработке алгоритма можно выделить два этапа, на каждом из которых осуществляется контроль диссипации.

На первом этапе с использованием первых принципов - законов сохранения массы и импульса была выведена система дифференциальных уравнений для многослойной жидкости в предположении непроницаемости слоев. В каждом слое горизонтальные составляющие скорости и плотности постоянны, а давление в вертикальном направлении изменяется линейно. Полученная система (4) аппроксимирует уравнения Эйлера.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial (hu)_{k+1/2}}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial (\rho h)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho h u)_{k+1/2}}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial (\rho h u)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho h u^2\right)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{g}{2} \quad \frac{\partial \left(\rho h^2\right)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial (hP)_{k+1/2}}{\partial x} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = -P_{k+1}\frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x} + P_k \frac{\partial Z_k}{\partial x},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для приближенного вычисления собственных значений и левых собственных векторов многослойной модели используется алгоритм гиперболической декомпозиции задачи. Его суть заключается в предоставлении многослойной структуры в виде отдельных слоев, взаимодействующих через границы раздела. Члены системы дифференциальных уравнений, описывающих эти силы, переносятся в правую часть и не учитываются при поиске локальных инвариантов. Система (4) рассматривается как набор систем уравнений мелкой воды с переменной плотностью и ненулевой правой частью.

Для аппроксимации каждой из таких подзадач используется малодиссипативная схема КАБАРЕ, в которой нелинейная процедура лимитирования инвариантов вносит диссипацию только в областях с не гладким решением.

Математическая некорректность исходной задачи, если она имеет место, при этом сохраняется и выражается в катастрофическом развитии особенностей в форме границ раздела между слоями, что приводит к невозможности продолжения расчета.

Поэтому был разработан второй этап алгоритма, в котором используются процедуры регуляризации для сглаживания границ раздела слоев. После нахождения консервативных переменных производится пересчет вертикальных координат узлов сетки по заданному правилу. В работе были рассмотрены несколько вариантов перестройки вертикальной сетки, однако во всех расчётах, приведенных в диссертации, использовалась идея σ-сетки: новые границы раздела слоев смещаются так, чтобы в каждом вертикальном столбце сохранялись исходные пропорции толщин слоёв. При этом перестроении часть объема ячейки может переходить в соседнюю, что учитывается введением соответствующих перераспределений массы и импульса. Это приводит к возникновению дополнительной сеточной вязкости.

Кроме того, в вычислительный алгоритм была добавлена фильтрация потоковых переменных и связанной с давлением составляющей потока, демпфирующая высокочастотную компоненту решения. Данный механизм не нарушает консервативности схемы, однако гасит высокочастотные пульсации, внося управляемую численную диссипацию.

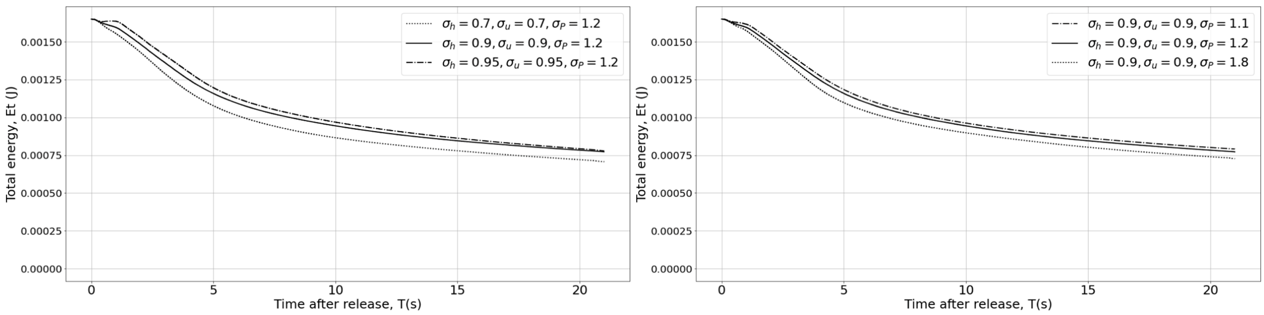
Итоговый алгоритм получил название CABARET-MFSH. Было доказано свойство сбалансированности: сохранение состояния покоя однородно стратифицированной жидкости над произвольным рельефом дна. Сравнение однослойной и многослойной численных моделей показало, что при равных параметрах слоёв получаемые решения практически совпадают.

Валидация многослойной вычислительной модели проводилась на лабораторных экспериментах, исследовавших динамику течений страцифицированной жидкости [25; 26]. Статья Gladstone [25] была выбрана из-за подробного описания динамики потоков при проведении четырех серий экспериментов. В этой работе уделено большое внимание особенностям динамики стратифицированных гравитационных придонных течений при различных условиях. Полученное качественное и количественное совпадение результатов численного моделирования и экспериментальных данных свидетельствует о применимости разработанного алгоритма для расчета течений стратифицированной по плотности жидкости.

Понимание источников численной диссипации играет ключевую роль в точности расчётов. Поскольку в модели отсутствует донное трение и турбулентная вязкость, все потери энергии обусловлены исключительно численной диссипацией, которая имеет три источника. Первый источник является непосредственной частью схемы КАБАРЕ - процесс монотонизации значений инвариантов Римана.

Второй источник связан с интерполяцией консервативных переменных в процессе перестройки расчетной сетки. Величина диссипации при этом зависит от порядка аппроксимации, частоты и «глубины» изменений. Перестройка сетки играет ключевую роль в обеспечении устойчивости многослойного алгоритма, выполняя функцию регуляризации. Необходимость её применения особенно ясно проявляется на примере задачи Курганова, где без дополнительных мер возникает вырождение слоёв и срыв расчёта.

Третий источник численной диссипации — фильтрации потоковых переменных и составляющей потока, связанной с давлением, которые необходимо дополнительно вводить для обеспечения корректности счета. Для оценки влияния фильтраций на диссипацию проведены численные расчеты одного эксперимента при разных параметрах. Получены зависимости полной энергии от времени при варьировании коэффициентов фильтрации скорости потока и толщины слоя $\sigma_h = \sigma_u$, при фиксированном значении σ_P (рис. 4а), а так же при изменении σ_P при фиксированных $\sigma_h = \sigma_u$ (рис. 4б).



а) б)

Рис. 4 — Изменение полной энергии расчета эксперимента D1 по CABARET-MFSH при различных параметрах фильтрации а) потоковых переменных, б) составляющей потока, связанного с давлением.

Важно отметить, что расчёт при полном отсутствии фильтраций ($\sigma_h = \sigma_u = \sigma_P = 1$) невозможен из-за развития неустойчивости. Однако по мере приближения параметров фильтрации к единице (рис. 4) сеточная диссипация снижается: график полной энергии поднимается выше, а различия между кривыми становятся минимальными. Таким образом, выбранные значения $\sigma_h = \sigma_u = 0.9$, $\sigma_P = 1.2$ обеспечивают устойчивость расчёта и вносят лишь незначительный вклад в диссипацию.

Второй валидационный тест основан на лабораторных экспериментах, представленных в работе Sutherland [26], в котором исследуется не придонное течение более плотной жидкости, а распространение струи промежуточной плотности вдоль границы раздела слоёв двухслойной среды. Рассматривался резервуар, разделенный перегородкой. Правая большая часть резервуара содержит два слоя жидкости разных плотностей ρ_1 и ρ_0. Слева, за перегородкой, заливается жидкость промежуточной плотности $\rho_2 = (\rho_1 + \rho_0)/2$. В рамках эксперимента выполнен цифровой анализ изображений, позволяющий количественно оценить характеристики возникающих волн.

Были произведены численные расчёты данного эксперимента с использованием моделей CABARET-MFSH и явной негидростатической модели динамики жидкости CABARET–NH [27], а также выполнено сравнение полученных результатов на различных моментах времени (рис. 5). Анализ показал лучшее совпадение фронта струи с экспериментальными данными у модели CABARET-MFSH.

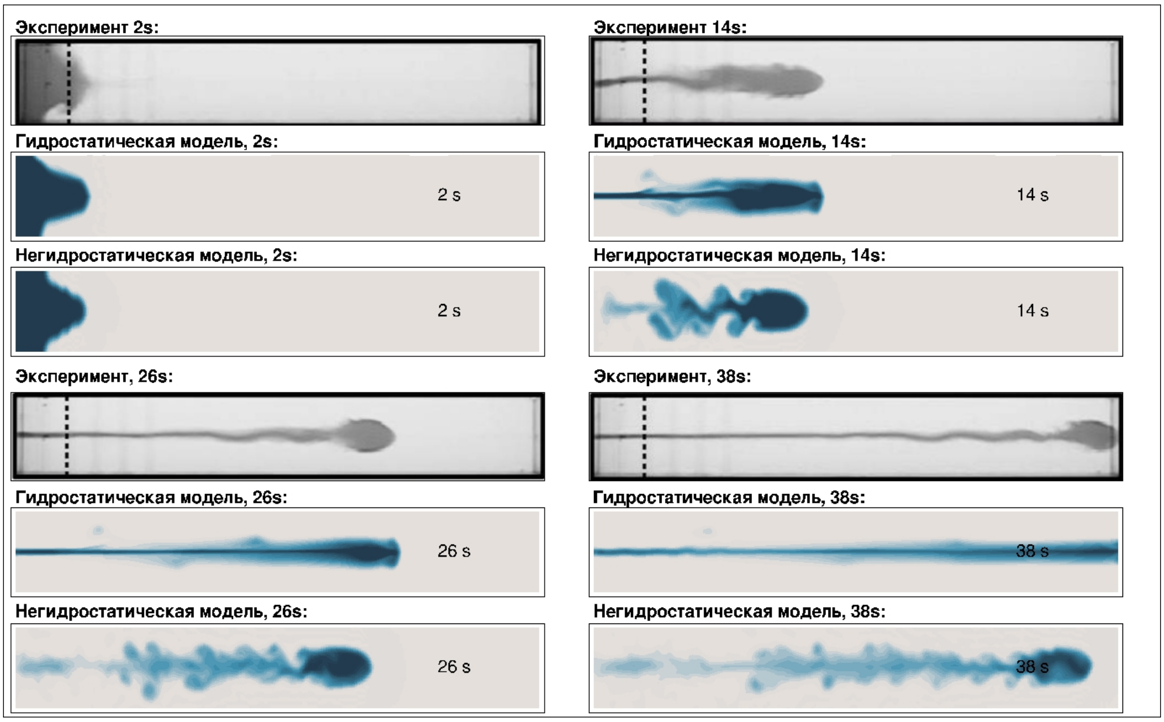
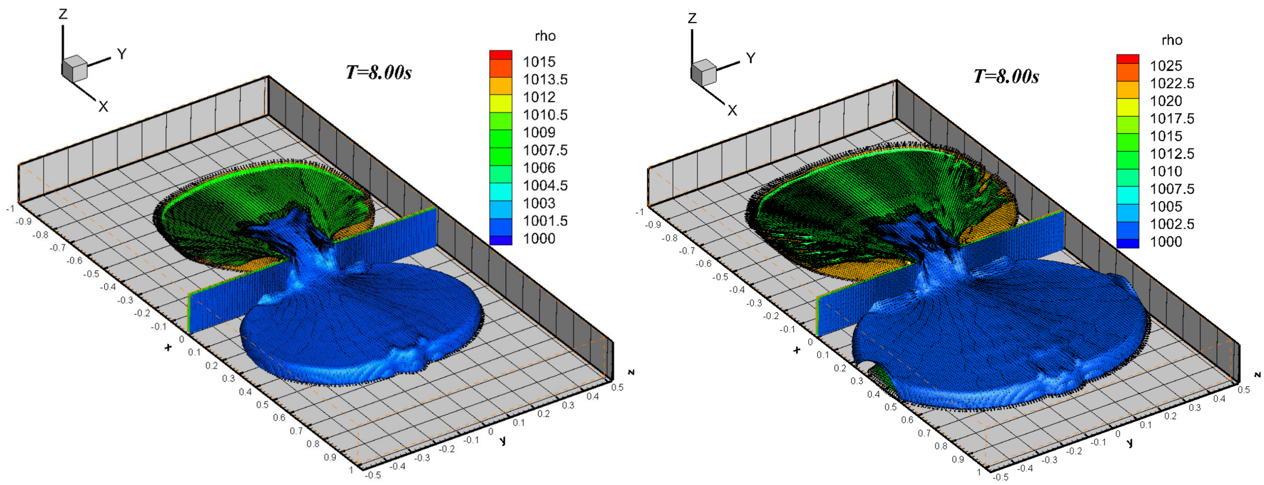


Рис. 5 — Сравнение результатов численных моделей CABARET-MFSH и CABARET-NH с экспериментальными данными в разные моменты времени (2с, 14с, 26с, 38с).

Четвертая глава посвящена обобщению многослойной гидростатической модели CABARET-MFSH на случай трех пространственных переменных. Особое внимание уделяется характеристической форме решаемых уравнений. Она используется в схеме КАБАРЕ для нахождения локальных инвариантов Римана. Полученные локальные инварианты для каждого из направлений позволяют говорить о сохранении свойства сбалансированности численного алгоритма в случае трех пространственных переменных.

Двумерные гравитационные течения были тщательно исследованы в экспериментальных и теоретических работах [25; 26; 28; 29]. Исследований трехмерных гравитационных течений меньше. В них включаются и осесимметричные гравитационные течения [30], которые также можно моделировать в двумерной постановке. Для валидации трехмерной версии алгоритма была выбрана серия экспериментов, описанных в статье La Rocca M. b et al. [31]. Рассматривался прямоугольный резервуар, разделенный жесткой стенкой на две части квадратного сечения. В центре разделяющей стенки были откатные ворота шириной меньше самой стенки. Два резервуара заполнялись на одинаковую высоту 0.15 м, один пресной водой ($\rho_2 = 1000$ кг/м^3), а другой соленой водой ($\rho_1 > \rho_2$).



а) б)

Рис. 6 — Результаты расчетов по модели CABARET-MFSH а) первого и б) второго экспериментов на момент времени t=8с

Рассматривались два эксперимента отличающиеся плотностью солевого раствора. В первом эксперименте плотность соленой воды $\rho_1 = 1015$ кг/м^3, во втором — $\rho_1 = 1025$ кг/м^3. Расчеты проводились на сетке 200x100 с 30 вертикальными слоями (рис. 6).

С целью детального анализа полученных результатов были построены поверхности фронта потока и максимальное распространение фронта (рис. 7) по каждому из направлений на моменты времени (2с, 4с, 6с, 8с, 10с). Проведенное количественное сравнение показывает хорошее соответствие полученных с помощью численной модели данных с экспериментом. Небольшие расхождения на начальном этапе, скорее всего, связаны с тем, что в численной модели не было учтено плавное изъятие перегородки, которое имеет место в реальных экспериментах.

Стоит отметить, что использовались те же параметры фильтрации, что и при расчетах плоскопараллельных течений. Таким образом, хоть настроечные параметры фильтрации и присутствуют в алгоритме, но их варьирование не требуется на широком классе задач.

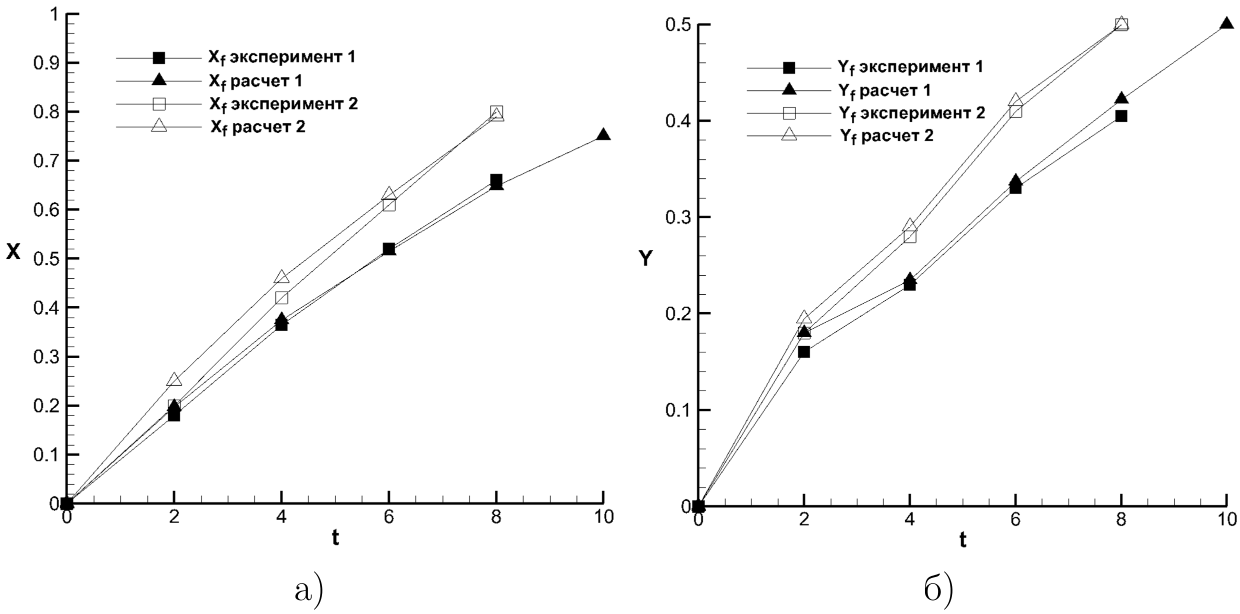


Рис. 7 — Максимальное распространение фронта а) по оси x и б) по оси y в расчетах по CABARET-MFSH (треугольные метки) и экспериментах (квадратные метки)

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

(1) Построен численный алгоритм на основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ для решения системы уравнений мелкой воды с переменной плотностью, описывающей движение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью над неровным дном. Алгоритм обладает свойством сбалансированности. Проведено моделирование приливных течений в Белом море с использованием реальной батиметрии.

(2) Разработан балансно-характеристический алгоритм для системы уравнений двухслойной мелкой воды, включающий аналитическое нахождение собственных чисел характеристической матрицы. Проведено сравнение с существующими алгоритмами на ряде тестовых задач, включая случаи потери гиперболичности, соответствующей физическим условиям возникновения неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.
(3) Предложена математическая модель динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении. Разработан балансно-характеристический метод решения данной модели и алгоритм регуляризации численного решения, учитывающий обмен массой и импульсом между слоями. Проведена валидация модели на серии лабораторных экспериментов по двумерным и трёхмерным гравитационным течениям. Полученные численные данные демонстрируют хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными результатами.
(4) Создан программный комплекс для прямого численного моделирования течений жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении, включающий модули построения расчетной сетки, подготовки и загрузки начальных данных, численного решения задач и формирования выходных данных.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук

1 Новый численный алгоритм для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // Морской гидрофизический журнал.

– 2019. – Т. 35, № 6(210). – С. 600-620. EDN: XDAFQF. Импакт-фактор 1,011 (РИНЦ) [1.5 / 1.35]

Перевод: New Numerical Algorithm for the Multi-Layer Shallow Water Equations Based on the Hyperbolic Decomposition and the CABARET Scheme / V. M. Goloviznin, Pavel A. Maiorov, Petr A. Maiorov, A. V. Solovjev // Physical Oceanography. – 2019. – Vol. 26, No. 6. – P. 528-546. EDN: BRCEVQ. Импакт-фактор 0,960 (РИНЦ) [1.5 / 1.35]

Автором описана новая методика численного решения уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости со свободной границей и переменной плотностью в гидростатическом приближении CABARET-MFSH, выполнена программная реализация в случае двух пространственных переменных и проведено тестирование алгоритма на верификационной задаче.

2 Hyperbolic decomposition for hydrostatic approximation of free surface flow problems / V. M. Goloviznin, P. A. Mayorov, P. A. Mayorov // Journal of Physics: Conference Series – 2019. – Vol. 1392. - P. 012035. EDN: KNSKUP. Импакт-фактор 0,18 (SJR) [0.5 / 0.45]

Автором проведено тестирование численного алгоритма CABARET-MFSH на задаче с возникновением неустойчивости, предложена идея регуляризации численного решения.

3 Validation of the low dissipation computational algorithm CABARET-MFSH for multilayer hydrostatic flows with a free surface on the lock-release experiments / V.M. Goloviznin, Pavel A. Maiorov, Petr A. Maiorov, A.V. Solovjev // Journal of Computational Physics. – 2022. – Vol. 463. – P. 111239. EDN: HBMDYD. Импакт-фактор 3,8 (JIF) [0.9 / 0.8]

Автором добавлена перестройка сетки в численный алгоритм CABARET-MFSH, доказано свойство сбалансированности итогового алгоритма и проведена валидация модели на лабораторных экспериментах течений стратифицированной жидкости.

4 Моделирование трехмерных течений неоднородной жидкости по многослойной гидростатической модели на основе схемы

КАБАРЕ / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 3. – С. 79-92. EDN: HBLIJG. Импакт-фактор 0,678 (РИНЦ) [1.0 / 0.9]

Перевод: Numerical Modeling of Three-Dimensional Variable-Density Flows by the Multilayer Hydrostatic Model Based on the CABARET Scheme / V. M. Goloviznin, Pavel A. Mayorov, Petr A. Mayorov, A. V. Solovjev // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2023. – Vol. 15, No. 5. – P. 832-841. EDN:BLTOOG. Импакт-фактор 0,724 (РИНЦ) [1.0 / 0.9]

Автором выполнена программная реализация численного алгоритма CABARET-MFSH в случае трех пространственных переменных, проведена валидация модели на существенно трехмерных лабораторных экспериментах течений стратифицированной жидкости.

Список литературы

1. *Gusev A.*, *Diansky N.* Numerical simulation of the world ocean circulation and its climatic variability for 1948–2007 using the INMOM // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. — 2014. — Vol. 50. — P. 1–12.
2. NEMO Ocean Engine Reference Manual / G. Madec [et al.]. — Version v4.2.1. — 07/2023.
3. MITgcm documentation / A. Adcroft [et al.] // Release checkpoint67a-12-gbf23121. — 2018. — Vol. 19.
4. *Марчук Г. И.*, *Дымников В. П.*, *Залесный В. Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. — Гидрометеоиздат, 1987.
5. *Olshanskii M. A.*, *Terekhov K. M.*, *Vassilevski Y. V.* An octree-based solver for the incompressible Navier–Stokes equations with enhanced stability and low dissipation // Computers & Fluids. — 2013. — Vol. 84. — P. 231–246.

6. *Goloviznin V.*, *Solovjov A.*, *Zalesny V.* A new algorithm for solving the shallow water equations on the sphere based on the cabaret scheme // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1128. — IOP Publishing. 2018. — P. 012091.

7. *Kurganov A.*, *Tadmor E.* New high-resolution semi-discrete central schemes for Hamilton–Jacobi equations // Journal of Computational Physics. — 2000. — Vol. 160, no. 2. — P. 720–742.

8. *Guerrero Fernandez E.*, *Castro-Diaz M. J.*, *Morales de Luna T.* A second-order well-balanced finite volume scheme for the multilayer shallow water model with variable density // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 5. — P. 848.

9. *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. — Springer Science & Business Media, 2013.

10. Comparison of solvers for the generalized Riemann problem for hyperbolic systems with source terms / G. Montecinos [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2012. — Vol. 231, no. 19. — P. 6472–6494.

11. *Ведерников А. Б.*, *Холодов А. С.* Численное моделирование течений двух-и трехслойной жидкости в рамках модели мелкой воды // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 6. — С. 9—18.

12. *Kurganov A.*, *Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — P. 1742–1773.

13. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной “мелкой воды” // Прикладная механика и техническая физика. — 1979. — Т. 20, № 2. — С. 3—14.

14. *Kabanikhin S. I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. — 2008.

15. Discussion on different numerical treatments on the loss of hyperbolicity for the two-layer shallow water system / M. C. Díaz [et al.] // Advances in Water Resources. — 2023. — Vol. 182. — P. 104587.

16. *Lawrence G. A.* On the hydraulics of Boussinesq and non-Boussinesq two-layer flows // Journal of Fluid Mechanics. — 1990. — Vol. 215. — P. 457–480.

17. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. Головизнин [и др.]. — 2013.

18. *Куликовский А. Г.*, *Погорелов Н. В.*, *Семёнов А.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Физматлит, 2012.

19. *Karabasov S. A.*, *Goloviznin V. M.* Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228, no. 19. — P. 7426–7451.

20. *Egbert G. D.*, *Erofeeva S. Y.* Efficient inverse modeling of barotropic ocean tides // Journal of Atmospheric and Oceanic technology. — 2002. — Vol. 19, no. 2. — P. 183–204.

21. *Smith W. H.*, *Sandwell D. T.* Global sea floor topography from satellite altimetry and ship depth soundings // Science. — 1997. — Vol. 277, no. 5334. — P. 1956–1962.

22. Белое море и его водосбор под влиянием климатических и антропогенных факторов / И. А. Барышев [и др.]. — 2007.

23. *Семенов Е.*, *Лунева М.* О совместном эффекте прилива, стратификации и вертикального турбулентного перемешивания на формирование гидрофизических полей в Белом море // Известия АН, ФАО. — 1999. — Т. 35, № 5. — С. 660—678.

24. *Долгополов Д.* Методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц // СПб.: СПбГТИ (ТУ). — 2005. — Т. 39.

25. An experimental investigation of density-stratified inertial gravity currents / C. Gladstone [et al.] // Sedimentology. — 2004. — Vol. 51, no. 4. — P. 767–789.

26. *Sutherland B. R.*, *Kyba P. J.*, *Flynn M. R.* Intrusive gravity currents in two-layer fluids // Journal of Fluid Mechanics. — 2004. — Vol. 514. — P. 327–353.

27. Явный численный алгоритм для уравнений негидростатической динамики жидкости на основе схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин [и др.] // Математическое моделирование. — 2023. — Т. 35, № 5. — С. 62—86.

28. *Huppert H. E.* Gravity currents: a personal perspective // Journal of Fluid Mechanics. — 2006. — Vol. 554. — P. 299–322.

29. Direct numerical simulations of intrusive density-and particle-driven gravity currents / E. Francisco [et al.] // Physics of Fluids. — 2022. — Vol. 34, no. 4.

30. Axisymmetric three-dimensional gravity currents generated by lock exchange / R. Inghilesi [et al.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Vol. 851. — P. 507–544.

31. Experimental and numerical simulation of three-dimensional gravity currents on smooth and rough bottom / M. La Rocca [et al.] // Physics of Fluids. — 2008. — Vol. 20, no. 10.