

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Киракосян Вазген Валерикович

**Аutomорфизмы групп Шевалле некоторых типов
над коммутативными кольцами**

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Гордиенко Алексей Сергеевич

Москва — 2026

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Предварительные сведения	21
1.1 Системы корней и группы Вейля	21
1.2 Базисы Шевалле и структурные константы	22
1.3 Группы Шевалле над коммутативными кольцами	23
1.4 Стандартные автоморфизмы	26
1.5 Известные результаты	29
1.5.1 Автоморфизмы групп Шевалле над полями	30
1.5.2 Автоморфизмы групп Шевалле над локальными кольцами	30
1.5.3 Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами	31
Глава 2. Автоморфизмы групп Шевалле исключительных типов над локальными кольцами	32
2.1 Формулировки основных теорем	32
2.2 Локальные кольца и редукция по радикалу	34
2.3 Метод линеаризации для локальных колец	34
2.4 Замена автоморфизма изоморфизмом специального вида	36
2.5 Тип F_4 : случай необратимой двойки	39
2.5.1 Образы элементов ω_α и $x_\alpha(1)$	40
2.5.2 Образы элементов $x_\alpha(t)$	43
2.5.3 Доказательство теоремы 2.1	44
2.6 Тип G_2 : случай необратимой тройки	47
2.6.1 Образы элементов ω_α и $x_\alpha(1)$	47
2.6.2 Образы элементов $x_\alpha(t)$	49
2.6.3 Доказательство теоремы 2.3	51
2.7 Завершение доказательства основных теорем	53

Глава 3. Ш-жѐсткость присоединѐнных групп Шевалле

малых рангов над коммутативными кольцами	57
3.1 Локально внутренние эндоморфизмы и множество Шафаревича–Тейта, формулировка основной теоремы	57
3.2 Некоторые структурные факты	59
3.3 Метод локализации	61
3.4 Ш-жѐсткость для типа A_1	62
3.4.1 Подготовка и нормализация	63
3.4.2 Образы корневых элементов	64
3.4.3 Завершение случая A_1	69
3.5 Ш-жѐсткость для типа A_2	70
3.5.1 Подготовка и нормализация	70
3.5.2 Образы корневых элементов, диагональных инволюций и элементов Вейля	71
3.5.3 Завершение случая A_2	89
3.6 Ш-жѐсткость для типа B_2	90
3.6.1 Подготовка и нормализация	90
3.6.2 Образы корневых элементов, диагональных инволюций и элементов Вейля	91
3.6.3 Завершение случая B_2	96
3.7 Ш-жѐсткость для типа G_2	97
3.7.1 Подготовка и нормализация	97
3.7.2 Образы корневых элементов, диагональных инволюций и элементов Вейля	99
3.7.3 Завершение случая G_2	106
Заключение	108
Список литературы	110

Введение

Общая характеристика работы

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Диссертационная работа относится к современной алгебре, в частности, к теории линейных алгебраических групп, теории групп Шевалле над кольцами и связанным с ними вопросам теории колец. Работа посвящена исследованию автоморфизмов групп Шевалле над коммутативными кольцами и изучению свойства Ш-жёсткости присоединённых групп Шевалле малых рангов и их элементарных подгрупп.

Актуальность темы исследования.

Задача об автоморфизмах матричной группы имеет существенно более глубокий смысл, чем формальное вычисление её группы симметрий. В типичной ситуации группа задана как $G(R)$, где R — поле или кольцо, а сама конструкция зависит от размерности модуля, заданной на нём формы, системы корней и решётки весов. Поэтому классификация автоморфизмов фактически отвечает на вопрос о том, насколько эти исходные данные восстанавливаются из абстрактной групповой структуры. Теорема о стандартности утверждает, что произвольный автоморфизм не создаёт скрытой симметрии: он порождается автоморфизмом основного кольца, симметрией системы корней, сопряжением в подходящей линейной группе и, когда это необходимо, центральным множителем. Такое описание одновременно связано с задачами об изоморфизмах, нормализаторах и распознавании групп Лиева типа.

Классические линейные группы стали первым полигоном для этой программы. Над полем геометрия пространства отражается в абстрактном строении группы: трансекции кодируют точки и гиперплоскости, параболические подгруппы — флаги, а централизаторы специальных инволюций позволяют выделять разложения пространства и геометрические структуры, связанные с формой. Именно эта связь лежит в основе ранних результатов Шрайера и ван дер Вардена [57] о проективных линейных

группах, работы Хуа [41] о симплектических группах, а также метода инволюций Рикарта [54] и Дьедонне [39]. В этих работах сложились две дополняющие друг друга стратегии. Геометрическая стратегия восстанавливает пространство и форму из действия группы, после чего применяется фундаментальная теорема проективной геометрии. Групповая стратегия выделяет геометрические объекты посредством внутренних характеристик элементов и их централизаторов. Позднее О’Мира [50; 51] предложил метод вычетов пространств, позволивший проводить подобную реконструкцию без опоры на классификацию инволюций и распространить её на общие линейные и симплектические группы над областями целостности.

Переход от полей к кольцам изменил сам характер задачи. Подмодули свободного модуля уже не обязаны иметь дополнения, элементы могут вести себя по-разному после факторизации по различным идеалам, а нетривиальные идемпотенты раскладывают кольцо и группу на компоненты. Кроме того, исчезает возможность безусловно диагонализировать инволюции или делить возникающие соотношения на 2. Поэтому автоморфизм матричной группы над кольцом должен контролироваться не только геометрией, но и структурой основного кольца. Первые результаты для GL_n над кольцом $\mathbb{Z}$, областями главных идеалов и областями целостности были получены Хуа и Райнером [42], Лэндином и Райнером [47], Ваном [64] и Янем [67]. Затем Помфрэ и Макдональд [49] использовали тот факт, что конечно порождённый проективный модуль над локальным кольцом свободен, а Уотерхауз [66] и Петечук [12; 13] получили результаты для широких классов коммутативных колец, включая случаи, когда двойка необратима. Показательно, что уже для $SL_3(R)$ и $GL_3(R)$ над произвольным коммутативным кольцом возникают дополнительные нестандартные явления [11]: малый ранг и отсутствие обратимости некоторых целых элементов оказываются не техническими неудобствами, а источником реальных исключений. Наряду с поэлементным анализом развивался и функториальный подход, в котором матричная группа рассматривается как группа точек групповой схемы; примером служит смежное исследование Уотерхауза [65] автоморфизмов определителя с точки зрения групповых схем.

Особое место в теории занимает локально-глобальный принцип. Локальное кольцо сохраняет многие черты поля: оно имеет единственный максимальный идеал J , фактор R/J является полем, а конечно порождённый

ные проективные модули свободны. Это позволяет сначала редуцировать автоморфизм по радикалу, применить классификацию над полем, а затем поднять полученные данные на исходное кольцо. Для произвольного коммутативного кольца, напротив, информацию собирают из локализаций R_m по максимальным идеалам. Современные варианты этого метода — локально-глобальный принцип для конгруэнц-подгрупп [18] и универсальная локализация [60] — стали важной частью структурной теории групп Шевалле над кольцами. Именно в локальной задаче особенно ясно проявляется роль малых простых: обратимость 2 обеспечивает разделение собственных подмодулей инволюций, а коэффициенты 2 и 3 входят в коммутаторные формулы для корневых элементов систем с корнями разной длины.

Единый язык для классических и исключительных случаев даёт конструкция Шевалле. Выбор базиса Шевалле обеспечивает целочисленность структурных констант, поэтому корневые унипотенты $x_\alpha(t)$ и соотношения между ними определяются над $\mathbb{Z}$ [14; 59]. Схемная формализация Демажюра и Гротендика [38] связывает с каждой системой корней и допустимой решёткой весов расщепимую редуктивную групповую схему; её группы точек над коммутативными кольцами включают классические группы типов A_ℓ , B_ℓ , C_ℓ , D_ℓ и исключительные группы типов G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 . В таком описании происхождение стандартных автоморфизмов становится прозрачным. Автоморфизм кольца преобразует параметры t в корневых подгруппах; автоморфизм диаграммы переставляет сами корневые подгруппы; сопряжение отражает действие тора и нормализатора; центральный автоморфизм учитывает действие нетривиального центра для выбранной решётки весов. При этом классификация абстрактных автоморфизмов группы $G(R)$ существенно тоньше классификации автоморфизмов соответствующей схемы: абстрактное отображение заранее не обязано быть функториальным по R , и именно это приходится доказывать.

Над полями эта программа была реализована в работах Стейнберга [58] для конечных и Хамфри [44] для бесконечных групп Шевалле. Теорема Бореля–Титса [20] об абстрактных гомоморфизмах простых алгебраических групп поместила эти результаты в более широкий контекст: при естественных условиях абстрактный гомоморфизм вынужден происходить из гомоморфизма полей и морфизма алгебраических групп. Тем самым

над полем в рассматриваемых условиях автоморфизм действительно восстанавливает как корневые данные, так и скалярную структуру.

Над кольцами универсальная картина складывалась по нескольким направлениям. Для областей целостности и алгебр над полями существенные результаты об изоморфизмах и представлениях были получены Ченом [31–33]; для алгебр, содержащих достаточно много обратимых целых, стандартность установил А. А. Клячко [45]. Работа Абе [15] дала важный общий результат для нётеровых колец, но в ней доказательство для присоединённых элементарных групп содержало пробел и не обеспечило полного решения. Последующие исследования потребовали иных способов выделения корневых элементов и анализа нормализатора.

Подробный хронологический обзор классических результатов и обширная библиография содержатся в докторской диссертации Е. И. Буниной [5].

Серия работ Е. И. Буниной реализовала локальную часть программы для большинства систем корней. Были описаны автоморфизмы групп типов A_ℓ , D_ℓ , E_ℓ над локальными кольцами как с обратимой, так и, в соответствующих рангах, с необратимой двойкой [2; 3; 6]; типов B_ℓ и F_4 при $2 \in R^*$ [1; 23]; типа G_2 при $2, 3 \in R^*$ [4]. Совместно с П. А. Верёвкиным был разобран тип G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой [7; 8]. Затем локальные результаты были перенесены на произвольные коммутативные кольца при естественных ограничениях на обратимость 2 и 3 [22; 24].

После этих результатов наиболее чувствительными оставались две исключительные локальные ситуации: тип F_4 , когда 2 не является обратимым элементом, и тип G_2 , когда необратим элемент 3. Закрытие этих случаев требует не формальной модификации известных доказательств, а особого рассмотрения и новой организации вычислений: линеаризации полиномиальных соотношений, точного контроля образов элементов группы Вейля и корневых унипотентов, а затем отдельного анализа автоморфизмов-сопряжений.

Во второй главе диссертации доказана стандартность автоморфизмов $G(F_4, R)$ над коммутативными локальными кольцами с необратимой двойкой и $G(G_2, R)$ над коммутативными локальными кольцами с необратимой тройкой. Эти результаты закрывают два указанных случая в рамках описанной программы локальной классификации и одновременно развивают

методы, применимые именно там, где стандартные приёмы, полагающиеся на обратимость 2 или 3, недоступны. Тем самым актуальность работы определяется не только завершением конкретных случаев, но и исследованием границы применимости общей теории стандартных автоморфизмов.

Проблематика диссертации не ограничивается структурной классификацией автоморфизмов. Она естественно приводит к ещё одному локально-глобальному проявлению групповой жёсткости: достаточно ли того, что отображение на каждом отдельном элементе действует как сопряжение, чтобы оно было внутренним одновременно на всей группе? Всякий внутренний автоморфизм группы G сохраняет классы сопряжённости элементов. Эндоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$, обладающий тем свойством, что $\varphi(x)$ сопряжён с x для любого $x \in G$, называется *локально внутренним* (в литературе встречаются также названия *сохраняющий классы*, *поточечно внутренний*). Заметим, что любой локально внутренний эндоморфизм инъективен.

Вопрос о том, всякий ли локально внутренний эндоморфизм является внутренним, восходит к работам У. Бёрнсайда начала XX века. Уже в 1911 г. во втором издании своей книги [27] Бёрнсайд ввёл соответствующий инвариант (под другим названием), а в 1913 г. в работе [26] построил первый пример конечной группы G с нетривиальной разностью между $\text{Aut}_c(G)$ и $\text{Inn}(G)$, где $\text{Aut}_c(G)$ — группа сохраняющих классы автоморфизмов. Позднее Ч.-Х. Са [55] систематически исследовал сохраняющие классы автоморфизмы конечных групп.

Т. Оно [52; 53] ввёл множество Шафаревича–Тейта $\text{Ш}(G)$ группы G как локально-глобальный когомологический инвариант, обобщающий классическую конструкцию из арифметической геометрии: исторически Ш-множество восходит к 1950-м годам, когда оно появилось в рамках теоретико-числового подхода к диофантовым уравнениям, а именно как множество классов когомологий $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), A(\bar{k}))$ алгебраической группы A над числовым полем k , тривиальных при ограничении на все локальные подгруппы $\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$. В общегрупповой постановке Оно $\text{Ш}(G)$ определяется как подмножество $H^1(G, G)$, состоящее из классов когомологий, тривиальных при ограничении на любую циклическую подгруппу. Подробный обзор результатов о Ш-множестве содержится в работе Б. Э. Кунявского [46].

Группа G называется *III-жесткой*, если $\text{III}(G)$ тривиально, что эквивалентно тому, что всякий локально внутренний эндоморфизм группы G является внутренним. Известно, что условие III-жесткости разлагается на два более слабых условия: A-жесткость — $\text{Inn}(G) = \text{Aut}_c(G)$, и B-жесткость — $\text{Aut}_c(G) = \text{End}_c(G)$ (где $\text{End}_c(G)$ — множество локально внутренних эндоморфизмов); группа является III-жесткой тогда и только тогда, когда она A-жесткая и B-жесткая одновременно.

К числу A-жестких групп относятся, в частности, конечные симметрические группы, конечные простые группы, абсолютная группа Галуа поля $\mathbb{Q}$, неабелевы свободные группы, свободные нильпотентные группы и многие другие классы; примерами B-жестких групп являются конечные группы, разрешимые группы, кохопфовы группы; примерами III-жестких групп являются свободные группы, группы $\text{SL}_n(R)$, $\text{GL}_n(R)$, $\text{PSL}_n(R)$ над евклидовыми областями и другие. В то же время существуют группы, не являющиеся III-жесткими: первый такой пример был построен Бёрнсайдом среди конечных p -групп (наименьший имеет порядок 32).

В работе Е. И. Буниной и Б. Э. Кунявского [25] была сформулирована гипотеза о III-жесткости групп Шевалле и доказан следующий её частный случай: всякая группа Шевалле $G(\Phi, R)$, а также её элементарная подгруппа $E(\Phi, R)$, над локальным кольцом R с неприводимой системой корней ранга > 1 (при $2 \in R^*$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_\ell, \mathbf{C}_\ell, \mathbf{F}_4\}$ и $3 \in R^*$ для $\Phi = \mathbf{G}_2$) является III-жесткой. Однако приведённое в указанной работе доказательство содержит пробел: оно ссылается на структурное описание *автоморфизмов* групп Шевалле, тогда как для локально внутренних эндоморфизмов требуется описание *инъективных эндоморфизмов* (доступного на текущий момент описания такого рода в общем случае не существует).

В третьей главе диссертации этот вопрос решается для присоединённых групп Шевалле типов малых рангов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами без привлечения теоремы о классификации автоморфизмов; тем самым устраняется указанный пробел для рассмотренных типов и одновременно осуществляется переход от локальных колец сразу к произвольным коммутативным кольцам.

Таким образом, актуальность диссертационного исследования определяется двумя взаимосвязанными обстоятельствами. С одной стороны,

оно закрывает два исключительных локальных случая в теории автоморфизмов групп Шевалле, где прежние методы зависели от обратимости определённых малых целых чисел. С другой стороны, в нём развивается независимый подход к сохраняющим классы эндоморфизмам и доказывается Ш-жесткость ряда присоединённых групп Шевалле над произвольными коммутативными кольцами. Оба направления относятся к общей проблеме восстановления глобальной алгебраической симметрии по её локальным проявлениям и способствуют более полному пониманию того, как система корней и основное кольцо отражаются во внутреннем строении группы Шевалле.

Цели и задачи диссертации. Целью работы является описание автоморфизмов групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой, а также исследование свойства Ш-жесткости присоединённых групп Шевалле типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Описать автоморфизмы присоединённой группы Шевалле $G_{\text{ad}}(\mathbf{F}_4, R)$ над коммутативным локальным кольцом R с необратимой двойкой.
2. Описать автоморфизмы присоединённой группы Шевалле $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ над коммутативным локальным кольцом R с необратимой тройкой.
3. Доказать Ш-жесткость присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ при $2 \in R^*$ и для типа $\mathbf{G}_2$ при $2, 3 \in R^*$, где R — произвольное коммутативное кольцо.

Положения, выносимые на защиту.

1. Над коммутативным локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.
2. Над коммутативным локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ стандартен:

он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.

3. Элементарные подгруппы $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$ при $2 \in R^*$ и для $\Phi = \mathbf{G}_2$ при $2, 3 \in R^*$, а также соответствующие присоединённые группы Шевалле $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{G}_2\}$ (при тех же условиях обратимости) и для $\Phi = \mathbf{A}_1$ (при дополнительном предположении нормальности $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$) являются III-жёсткими над произвольным коммутативным кольцом R .

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются группы Шевалле (и их элементарные подгруппы) над коммутативными кольцами. Предметом исследования являются автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и необратимой тройкой соответственно, а также локально внутренние эндоморфизмы и множество Шафаревича–Тейта присоединённых групп Шевалле типов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{G}_2$ над произвольными коммутативными кольцами с условиями обратимости двойки (для всех перечисленных типов) и тройки (для типа $\mathbf{G}_2$).

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором лично. Среди них:

1. Стандартность автоморфизмов группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ над локальными кольцами R с необратимой двойкой.
2. Стандартность автоморфизмов группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ над локальными кольцами R с необратимой тройкой.
3. III-жёсткость присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и для типа $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

Методы исследования. Основными методами исследования являются метод линеаризации полиномиальных систем над локальными кольцами, техника редукции по радикалу, а также метод локализации для перехода от локальных колец к произвольным коммутативным кольцам. В доказательствах также используются структурная теория групп Шевалле, инвариантность следа в присоединённом представлении и вычисление централизаторов специальных элементов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области теории линейных алгебраических групп, теории колец и смежных разделов алгебры. Описание автоморфизмов групп Шевалле типов F_4 и G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой и необратимой тройкой соответственно закрывает два из остававшихся открытыми случаев программы описания автоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами. Результаты по Ш-жесткости предлагают новый подход к изучению сохраняющих классы эндоморфизмов групп Шевалле, не зависящий от структурной классификации автоморфизмов и эндоморфизмов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность всех результатов работы обоснована строгими математическими доказательствами. Результаты других авторов, используемые в диссертации, снабжены соответствующими ссылками.

Автор неоднократно выступал с докладами по основным результатам работы на специальных семинарах «Избранные вопросы алгебры», «Алгебра и теория моделей» и Научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова. Кроме того, автором был сделан доклад по теме диссертации на следующей конференции:

- Международная конференция «Algebraic Geometry and Model Theory of Groups III», Тбилиси, Грузия, 2025 (устный доклад).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 3 работах [68—70], которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 115 страниц. Список литературы содержит 70 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, излагаются научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, методы исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов.

Первая глава имеет вспомогательный характер и содержит предварительные сведения о группах Шевалле над коммутативными кольцами, необходимые в последующих главах.

В разделе 1.1 вводятся системы корней и группы Вейля; приводятся классификация неприводимых систем корней по их диаграммам Дынкина, а также явные описания систем корней исключительных типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ и систем малых рангов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, используемых при доказательстве основных теорем глав 2 и 3.

В разделе 1.2 приводится конструкция базиса Шевалле полупростой комплексной алгебры Ли $\mathcal{L}$ типа Φ . Базисом Шевалле называется базис $\{h_1, \dots, h_\ell\} \cup \{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ алгебры $\mathcal{L}$, согласованный с картановским разложением и такой, что коммутаторы базисных элементов выражаются через них с целочисленными коэффициентами; формулируются соотношения между структурными константами $N_{\alpha,\beta}$ и описывается выбор знаков структурных констант.

В разделе 1.3 вводятся *элементарная группа Шевалле* $E_\pi(\Phi, R)$ (определения 1.6, 1.7) и *группа Шевалле* $G_\pi(\Phi, R)$ типа Φ над коммутативным кольцом R с единицей (определение 1.9), отвечающие выбору точного конечномерного представления $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ и соответствующей решётки весов Λ_π ; крайние случаи $\Lambda_\pi = Q(\Phi)$ и $\Lambda_\pi = P(\Phi)$ дают присоединённую группу Шевалле $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ и универсальную (односвязную) группу Шевалле $G_{\text{sc}}(\Phi, R)$ соответственно. Здесь же приводятся стандартные коммутаторные соотношения Шевалле, формулы для действия элементов Вейля $w_\alpha(t)$ (определение 1.8) и определения подгрупп $T(\Phi, R)$, $H(\Phi, R)$, $U(\Phi, R)$, $V(\Phi, R)$.

В разделе 1.4 вводятся стандартные автоморфизмы групп Шевалле — кольцевые, диаграммные, внутренние и центральные.

Определение 1.12. Каждый автоморфизм $\rho: R \rightarrow R$ кольца R индуцирует автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$, переводящий матрицу (a_{ij}) в $(\rho(a_{ij}))$; его обозначают той же буквой ρ и называют *кольцевым автоморфизмом*. В частности, $x_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(\rho(t))$.

Определение 1.13. Пусть Φ — система корней с корнями одинаковой длины, а $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — автоморфизм этой системы, оставляющий на месте множество простых корней ($\delta\Delta = \Delta$). Ему отвечает однозначно определённый автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$, действующий на элементарных образующих по правилу $x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(\varepsilon(\alpha)t)$ с подходящими знаками $\varepsilon(\alpha) \in \{\pm 1\}$, для которых $\varepsilon(\alpha) = 1$ при $\alpha \in \Delta$; его обозначают той же буквой δ и называют *диаграммным (или графовым) автоморфизмом*.

Для систем корней $\mathbf{B}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2$ с корнями разной длины над совершенными кольцами специальной характеристики дополнительно определяются специальные диаграммные автоморфизмы.

Определение 1.14. Пусть Φ — система корней одного из типов $\mathbf{B}_2, \mathbf{F}_4$ или $\mathbf{G}_2$, p — отношение квадратов длин длинных и коротких корней системы Φ ($p = 2$ для $\mathbf{B}_2, \mathbf{F}_4$; $p = 3$ для $\mathbf{G}_2$), R — совершенное кольцо характеристики p . Положим $\lambda(\alpha) = 1$ для длинных корней и $\lambda(\alpha) = p$ для коротких. Пусть $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — перестановка корней, переставляющая длинные с короткими так, что $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)\delta(\alpha)$ является изоморфизмом систем корней. Тогда отображение $x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)})$ при подходящем выборе знаков структурных констант однозначно определяет автоморфизм группы $G(\Phi, R)$; его (наряду с тождественным автоморфизмом) также называют *диаграммным (или графовым) автоморфизмом*.

Определение 1.16. Пусть кольцо S содержит R , а элемент $g \in G_\pi(\Phi, S)$ нормализует подгруппу $G_\pi(\Phi, R)$. Сопряжение $i_g: x \mapsto gxg^{-1}$ тогда является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$; его называют *внутренним автоморфизмом*, индуцированным

элементом g , а если g лежит в самой группе $G_\pi(\Phi, R)$, то — *строго внутренним*.

Определение 1.17. Пусть $\tau: G_\pi(\Phi, R) \rightarrow C(G_\pi(\Phi, R))$ — гомоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ в свой центр $C(G_\pi(\Phi, R))$. Отображение $x \mapsto \tau(x)x$ задаёт эндоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$; если он является автоморфизмом, то его обозначают тем же символом τ и называют *центральный автоморфизмом*.

Аutomорфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ (или её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$) называют *стандартным*, если он раскладывается в композицию автоморфизмов четырёх перечисленных типов. Наряду с ними удобно ввести ещё один вспомогательный тип.

Определение 1.19. Пусть V — пространство представления группы $G_\pi(\Phi, R)$, а матрица $C \in \text{GL}(V)$ нормализует эту группу, то есть $C G_\pi(\Phi, R) C^{-1} = G_\pi(\Phi, R)$. Сопряжение $x \mapsto Cx C^{-1}$ задаёт тогда автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$; его обозначают i_C и называют *автоморфизмом-сопряжением*, индуцированным матрицей C .

Всякий внутренний автоморфизм является автоморфизмом-сопряжением; обратный вопрос составляет нетривиальную часть описания автоморфизмов.

В разделе 1.5 приведены формулировки ранее известных результатов, на которые опирается изложение. Среди них:

Теорема 1.20 (Стейнберг, Хамфри [44; 58; 59]). Пусть K — поле, Φ — неприводимая система корней. Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $E_\pi(\Phi, K)$ стандартен.

Теоремы 1.21–1.24 (Е. И. Бунина [1–4; 6–8; 23]). Каждый автоморфизм группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, а также её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$, над коммутативным локальным кольцом R стандартен в следующих случаях:

– $\Phi \in \{\mathbf{A}_\ell \ (\ell \geq 2), \mathbf{D}_\ell \ (\ell \geq 4), \mathbf{E}_\ell \ (\ell \in \{6, 7, 8\})\}$ (с дополнительным условием $2 \in R^*$ при $\Phi = \mathbf{A}_2$);

- $\Phi \in \{\mathbf{B}_\ell (\ell \geq 2), \mathbf{F}_4\}$ при $2 \in R^*$;
- $\Phi = \mathbf{G}_2$ при $3 \in R^*$.

В случае присоединённой группы ($\pi = \text{ad}$) внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.

Теорема 1.25 (Е. И. Бунина [22; 24]). Пусть Φ — неприводимая система корней ранга > 1 , R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, причём $2 \in R^*$ при $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_\ell, \mathbf{C}_\ell, \mathbf{F}_4\}$ и $2, 3 \in R^*$ при $\Phi = \mathbf{G}_2$ (для $\Phi \in \{\mathbf{A}_\ell (\ell \geq 3), \mathbf{D}_\ell, \mathbf{E}_\ell\}$ условие обратимости не требуется). Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, а также её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$, стандартен. В случае присоединённой группы ($\pi = \text{ad}$) внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.

Вторая глава закрывает два случая, остававшихся открытыми после серии работ Е. И. Буниной, — автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой.

Для систем корней типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ решётка весов единственна, поэтому группа Шевалле определена однозначно: $G(\Phi, R) = G_{\text{ad}}(\Phi, R)$; над локальными кольцами она совпадает со своей элементарной подгруппой, то есть $G(\Phi, R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

В разделе 2.1 приводятся точные формулировки основных теорем главы:

Теорема 2.5. Над локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и строго внутреннего автоморфизмов.

Теорема 2.6. Над локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и строго внутреннего автоморфизмов.

Доказательство каждой из них распадается на два шага, оформленные отдельными теоремами: сначала автоморфизм приводится к композиции кольцевого, диаграммного автоморфизмов и автоморфизма-сопряжения, а затем устанавливается, что возникающий автоморфизм-сопряжение строго внутренний.

Теорема 2.1. *Пусть R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ представляется в виде композиции кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Теорема 2.2. *Над локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ является строго внутренним.*

Теорема 2.3. *Пусть R — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ представляется в виде композиции кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Теорема 2.4. *Над локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ является строго внутренним.*

В разделе 2.2 излагаются необходимые сведения о локальных кольцах и редукции по радикалу Джекобсона.

Определение 2.7. Коммутативное ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет единственный максимальный идеал. Этот идеал совпадает с радикалом Джекобсона $J = \text{Rad}(R)$ и состоит из всех необратимых элементов кольца R . Факторкольцо $k = R/J$ является полем и называется *полем вычетов*.

В разделе 2.3 приводится теорема о методе линеаризации (теорема 2.10), а также подробный пример её применения (пример 2.11).

Раздел 2.4 содержит общие предложения о замене автоморфизма изоморфизмом специального вида (предложения 2.12–2.17).

Раздел 2.5 посвящён доказательству теоремы 2.1 (тип $\mathbf{F}_4$, необратимая двойка); раздел 2.6 — доказательству теоремы 2.3 (тип $\mathbf{G}_2$, необратимая тройка) по аналогичной схеме. В разделе 2.7 завершается доказательство теорем 2.2 и 2.4 об автоморфизмах-сопряжениях, после чего основные теоремы 2.5 и 2.6 вытекают из совокупности теорем 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

Результаты этой главы основаны на работах автора [68; 69].

Третья глава посвящена исследованию Ш-жёсткости присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

В разделе 3.1 вводятся основные определения главы.

Определение 3.1. Эндоморфизм $\varphi \in \text{End}(G)$ группы G называется *локально внутренним* (или *сохраняющим классы*), если для всякого $g \in G$ элементы g и $\varphi(g)$ сопряжены в G .

Пусть $\text{End}_c(G)$ (соответственно, $\text{Aut}_c(G)$) обозначает множество эндоморфизмов (соответственно, автоморфизмов) $\varphi: G \rightarrow G$, обладающих указанным свойством. Тогда множество Шафаревича–Тейта $\text{Ш}(G)$ (определяемое как подмножество $H^1(G, G)$ классов когомологий, тривиальных при ограничении на любую циклическую подгруппу) тривиально тогда и только тогда, когда $\text{End}_c(G) = \text{Inn}(G)$.

Определение 3.2. Группа G называется *Ш-жёсткой*, если множество $\text{Ш}(G)$ состоит из одного элемента.

Основной результат главы формулируется следующим образом.

Теорема 3.3. Пусть R — коммутативное кольцо.

(1) Предположим, что $2 \in R^*$, и пусть $\Phi \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ является внутренним. Более того, всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ является внутренним при $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$,

а также при $\Phi = \mathbf{A}_1$ при дополнительном предположении, что $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ нормальна в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$.

(2) Предположим, что $2, 3 \in R^*$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним, и всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним.

В частности, все перечисленные выше группы являются Ш-жесткими.

Разделы 3.2 и 3.3 содержат структурные факты о группах Шевалле и изложение метода локализации, используемые далее.

Разделы 3.4–3.7 посвящены доказательству теоремы 3.3 для каждого из типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{G}_2$ по отдельности. Соответствующие частные теоремы формулируются следующим образом.

Теоремы 3.11 и 3.12 (тип $\mathbf{A}_1$). Пусть R — коммутативное кольцо, $2 \in R^*$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ является внутренним; если, кроме того, $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ нормальна в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$, то всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ также является внутренним.

Теоремы 3.16 и 3.17 (тип $\mathbf{A}_2$). Пусть R — коммутативное кольцо, $2 \in R^*$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$, а также всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$, является внутренним.

Теоремы 3.21 и 3.22 (тип $\mathbf{B}_2$). Пусть R — коммутативное кольцо, $2 \in R^*$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$, а также всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$, является внутренним.

Теоремы 3.23 и 3.24 (тип $\mathbf{G}_2$). Пусть R — коммутативное кольцо, $2, 3 \in R^*$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, а также всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$, является внутренним.

В совокупности эти частные теоремы составляют теорему 3.3.

Существенно, что приведённые доказательства не зависят от теоремы о стандартности автоморфизмов и не используют какого-либо структурного описания инъективных эндоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами, что устраняет указанный выше пробел в доказательстве из [25] для рассмотренных типов малых рангов.

Результаты этой главы основаны на работе автора [70].

В **заключении** подведены итоги проведённого исследования и сформулированы основные результаты диссертации.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук Алексею Сергеевичу Гордиенко за постановку задач, внимание к работе и поддержку.

Автор выражает особую благодарность своему первому научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Елене Игоревне Буниной за привлечение интереса к теме исследования, постановку задач и плодотворные обсуждения.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Алексею Георгиевичу Мясникову за ценные обсуждения различных математических вопросов, связанных с работой.

Автор благодарит весь коллектив кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за доброжелательную и творческую атмосферу.

Глава 1. Предварительные сведения

В данной главе приводятся основные определения и факты, используемые в диссертации. В разделе 1.1 вводятся системы корней и группы Вейля. В разделе 1.2 описываются базисы Шевалле и структурные константы. В разделе 1.3 строятся группы Шевалле над коммутативными кольцами. В разделе 1.4 определяются стандартные автоморфизмы групп Шевалле. Наконец, в разделе 1.5 формулируются известные результаты, на которые опирается данная работа.

1.1 Системы корней и группы Вейля

Приведём определения и основные свойства систем корней; подробное изложение можно найти в [21; 43].

Определение 1.1. Подмножество Φ евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется *системой корней* в $\mathbb{E}$, если выполнены следующие условия:

1. множество Φ конечно, порождает $\mathbb{E}$ и не содержит 0;
2. если $\alpha \in \Phi$, то из кратных корня α в Φ содержатся только $\pm\alpha$;
3. если $\alpha \in \Phi$, то *отражение* w_α относительно гиперплоскости, ортогональной α , выражаемое формулой

$$w_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha,$$

сохраняет множество Φ инвариантным; коэффициенты

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

называются *числами Картана*;

4. если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Определение 1.2. Подмножество Δ в Φ называется *базисом* (а входящие в него корни — *простыми*), если

1. Δ является базисом в $\mathbb{E}$;

2. каждый корень $\beta \in \Phi$ представляется в виде

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha} \alpha,$$

где все коэффициенты k_{α} целые и одновременно неотрицательные или неположительные.

Если все $k_{\alpha} \geq 0$ (соответственно $k_{\alpha} \leq 0$), то корень β называется *положительным* (соответственно *отрицательным*). Множество положительных корней обозначается Φ^+ , отрицательных — Φ^- .

Определение 1.3. Подгруппа $W \subset \text{GL}(\mathbb{E})$, порождённая всеми отражениями w_{α} , $\alpha \in \Phi$, называется *группой Вейля* системы корней Φ .

Среди свойств группы Вейля выделим два, которые будут использоваться в дальнейшем: группа Вейля порождается простыми отражениями w_{α} , $\alpha \in \Delta$, и транзитивно действует на множестве всех корней одной длины.

Система корней называется *неприводимой*, если она не может быть разбита на два непустых ортогональных подмножества. Неприводимые системы корней классифицируются диаграммами Дынкина; каждая неприводимая система корней имеет один из следующих типов:

$$\mathbf{A}_{\ell} (\ell \geq 1), \mathbf{B}_{\ell} (\ell \geq 2), \mathbf{C}_{\ell} (\ell \geq 3), \mathbf{D}_{\ell} (\ell \geq 4), \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2.$$

В данной работе нас будут интересовать прежде всего исключительные системы корней типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$, а также $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{B}_2$. Конкретные реализации этих систем корней приведены в соответствующих главах по мере необходимости.

1.2 Базисы Шевалле и структурные константы

Рассмотрим комплексную простую алгебру Ли $\mathcal{L}$ с картановской подалгеброй $\mathcal{H}$ и соответствующей системой корней Φ ранга ℓ (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли, включая их классификацию и связь с системами корней, можно найти в [43]).

В алгебре Ли $\mathcal{L}$ можно выбрать *базис Шевалле*

$$\{x_{\alpha} \mid \alpha \in \Phi; \quad h_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$$

таким образом, что для любых двух элементов базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов того же базиса, а именно:

1. $[h_i, h_j] = 0$, $1 \leq i, j \leq \ell$;
2. $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha$, $1 \leq i \leq \ell$, $\alpha \in \Phi$;
3. $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ является целочисленной линейной комбинацией $h_1, \dots, h_\ell$;
4. если α, β линейно независимы и $\alpha + \beta \notin \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = 0$;
5. если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, причём $N_{\alpha\beta} = \pm(r+1)$, где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$.

Целые числа $N_{\alpha\beta}$ называются *структурными константами*. Существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех структурных констант [28; 35; 40; 56]; подробности для систем корней типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ приведены в приложениях работ [68; 69].

Определение 1.4. Отображение

$$\text{ad}: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{L}), \quad \text{ad}(x)(y) = [x, y]$$

является гомоморфизмом алгебр Ли и называется *присоединённым представлением* алгебры Ли $\mathcal{L}$.

Замечание 1.5. Присоединённое представление полупростой алгебры Ли является *точным* (инъективным), так как его ядро совпадает с центром алгебры Ли, который является абелевым идеалом и потому тривиален.

Введём обозначения для образов элементов базиса Шевалле при присоединённом представлении:

$$X_\alpha = \text{ad } x_\alpha, \quad H_i = \text{ad } h_i.$$

1.3 Группы Шевалле над коммутативными кольцами

Построение групп Шевалле над произвольными коммутативными кольцами восходит к К. Шевалле [14] и Р. Стейнбергу [59]. Приведём это построение для присоединённого представления (см. также [10; 28; 63]).

Относительно базиса Шевалле каждый оператор $X_\alpha^k/k!$ ($\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$) задаётся нильпотентной целочисленной матрицей размера $n \times n$, где $n = \dim \mathcal{L}$. Поскольку матрицу с целыми элементами можно рассматривать над любым коммутативным кольцом R с единицей, все они вкладываются в $M_n(R)$.

Определение 1.6. Каждой паре $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ сопоставим автоморфизм свободного модуля R^n

$$x_\alpha(t) = \exp(tX_\alpha) = 1 + tX_\alpha + \frac{t^2 X_\alpha^2}{2!} + \dots, \quad \alpha \in \Phi, t \in R;$$

ввиду нильпотентности X_α эта сумма конечна. Автоморфизмы такого вида называются *элементарными корневыми элементами*.

Для элементарных корневых элементов выполнено аддитивное соотношение

$$x_\alpha(t) x_\alpha(u) = x_\alpha(t + u). \quad (1.1)$$

Определение 1.7. Подгруппу группы $\text{Aut}(R^n)$, порождённую всеми элементарными корневыми элементами $x_\alpha(t)$ ($\alpha \in \Phi$, $t \in R$), называют *элементарной присоединённой группой Шевалле* и обозначают $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

Определение 1.8. Внутри элементарной группы Шевалле нам понадобятся следующие элементы:

$$\begin{aligned} - w_\alpha(t) &= x_\alpha(t) x_{-\alpha}(-t^{-1}) x_\alpha(t), \quad \alpha \in \Phi, t \in R^*; \quad \omega_\alpha = w_\alpha(1); \\ - h_\alpha(t) &= w_\alpha(t) w_\alpha(1)^{-1}, \quad \alpha \in \Phi, t \in R^*. \end{aligned}$$

Помимо аддитивного соотношения (1.1) в группе Шевалле выполняется ряд других важных соотношений; мы будем использовать прежде всего *формулу Шевалле* (или *формулу коммутирования*):

$$[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta \in \Phi \\ i,j \in \mathbb{N}}} x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij\alpha\beta} t^i u^j), \quad (\alpha + \beta \neq 0), \quad (1.2)$$

где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ — групповой коммутатор, произведение берётся в фиксированном порядке и $c_{ij\alpha\beta}$ — целые числа, зависящие только от α , β и от выбранного порядка корней (и не зависящие от t, u), причём $c_{11\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}$, если $\alpha + \beta \in \Phi$. Используется также *формула сопряжения*:

$$\omega_\alpha x_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha(\beta)}(\pm t), \quad (1.3)$$

где знак зависит только от корней α, β и совпадает для пар α, β и $\alpha, -\beta$. Если в каком-то соотношении стоит знак минус, то достаточно обратить полученную матрицу, поскольку $x_\alpha(-t) = (x_\alpha(t))^{-1}$ и $\omega_\alpha^{-1} = w_\alpha(-1)$. Применяя (1.3) к $\omega_\beta = x_\beta(1)x_{-\beta}(-1)x_\beta(1)$, получаем соотношение

$$\omega_\alpha \cdot \omega_\beta \cdot \omega_\alpha^{-1} = \omega_{w_\alpha(\beta)}^{\pm 1}. \quad (1.4)$$

Изложенная конструкция переносится с присоединённого на любое точное конечномерное представление $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ алгебры $\mathcal{L}$; положим $n = \dim V$. Функционал $\lambda \in \mathcal{H}^*$ называется *весом* представления π , если для некоторого ненулевого вектора $v \in V$ (*векторного вектора*) выполнено $\pi(h)v = \lambda(h)v$ при всех $h \in \mathcal{H}$. В V можно выбрать базис из весовых векторов, в котором все операторы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ ($\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$) записываются целочисленными нильпотентными матрицами; такой базис называется *базисом Шевалле* представления π . Как и прежде, эти матрицы определены над любым коммутативным кольцом R с единицей, а порождённая элементарными корневыми элементами $x_\alpha(t) = \exp(t\pi(x_\alpha))$ ($\alpha \in \Phi$, $t \in R$) подгруппа называется *элементарной группой Шевалле* $E_\pi(\Phi, R)$.

Веса представления π порождают по сложению решётку $\Lambda_\pi \subset \mathcal{H}^*$, называемую *решёткой весов*. С точностью до абстрактного изоморфизма группа $E_\pi(\Phi, R)$ определяется тройкой данных: системой корней Φ , кольцом R и решёткой Λ_π . Особо выделяются две решётки: порождённая корнями Λ_{ad} отвечает *присоединённому* представлению, а порождённая всеми фундаментальными весами Λ_{sc} — *универсальному*.

Определение 1.9. *Группа Шевалле* $G_\pi(\Phi, R)$ типа Φ над коммутативным кольцом R с единицей определяется следующим образом. Над алгебраически замкнутым полем K элементарная группа $E_\pi(\Phi, K)$ есть группа решений системы полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами, задающих её как алгебраическую подгруппу в $\text{SL}_n(K)$ (см. [14; 28; 59]). Пусть $p_1(a_{ij}), \dots, p_m(a_{ij})$ — фиксированный набор полиномов, определяющий соответствующую целочисленную групповую схему Шевалле–Демазюра. Тогда для произвольного коммутативного кольца R с единицей полагаем

$$G_\pi(\Phi, R) = \{(a_{ij}) \in \text{SL}_n(R) \mid \tilde{p}_1(a_{ij}) = 0, \dots, \tilde{p}_m(a_{ij}) = 0\},$$

где $\tilde{p}_i$ — полиномы с теми же коэффициентами, что и p_i , но рассматриваемые над R . Полученная группа содержит элементарную подгруппу: $E_\pi(\Phi, R) \subseteq G_\pi(\Phi, R)$.

Замечание 1.10. Для алгебраически замкнутого поля K имеет место равенство $G_\pi(\Phi, K) = E_\pi(\Phi, K)$; однако уже над произвольным полем, и тем более над кольцом, это равенство может не выполняться. Связь между G_π и E_π задаётся *стандартным максимальным тором*

$$T_\pi(\Phi, R) = \{h(\chi) \mid \chi \in \text{Hom}(\Lambda_\pi, R^*)\},$$

состоящим из диагональных в базисе Шевалле матриц; в частности, $h_\alpha(u) = h(\chi_{\alpha,u})$, где $\chi_{\alpha,u}: \lambda \mapsto u^{\langle \lambda, \alpha \rangle}$ (см. [3]). Над полулокальным кольцом имеет место $G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R) T_\pi(\Phi, R)$.

В данной работе рассматриваются преимущественно *присоединённые* группы Шевалле ($\pi = \text{ad}$); мы обозначаем $G_{\text{ad}}(\Phi, R) = G_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\text{ad}}(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)$ при $\pi = \text{ad}$.

Замечание 1.11. У систем корней типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ решётка весов единственна: присоединённая и универсальная решётки совпадают. Поэтому группа Шевалле такого типа над любым кольцом R определена однозначно; более того, над локальными кольцами она совпадает со своей элементарной подгруппой [16], и в этом случае мы пишем $G(R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

Для систем корней типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ присоединённая и универсальная решётки весов различаются. В главе 3 мы будем рассматривать как элементарные подгруппы $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, так и полные присоединённые группы $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

1.4 Стандартные автоморфизмы

Определим четыре типа автоморфизмов групп Шевалле, называемых *стандартными*: кольцевые, диаграммные (графовые), внутренние и центральные. Изложение следует [3; 28; 59].

Определение 1.12. Каждый автоморфизм $\rho: R \rightarrow R$ кольца R индуцирует автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$:

$$(a_{ij}) \mapsto (\rho(a_{ij})).$$

Его обозначают той же буквой ρ и называют *кольцевым автоморфизмом*. В частности, $x_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(\rho(t))$.

Перейдём к определению диаграммных (графовых) автоморфизмов. Сначала приведём общее определение для систем корней с равными длинами корней; затем рассмотрим специальные случаи систем корней $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$, в которых длины корней различны и диаграммный автоморфизм определяется только над кольцами специальной характеристики.

Определение 1.13. Пусть Φ — система корней с корнями одинаковой длины, а $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — автоморфизм этой системы, оставляющий на месте множество простых корней ($\delta\Delta = \Delta$). Ему отвечает однозначно определённый автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$, действующий на элементарных образующих по правилу

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(\varepsilon(\alpha)t)$$

с подходящими знаками $\varepsilon(\alpha) \in \{\pm 1\}$, для которых $\varepsilon(\alpha) = 1$ при $\alpha \in \Delta$; его обозначают той же буквой δ и называют *диаграммным* (или *графовым*) *автоморфизмом*.

Нетривиальные диаграммные автоморфизмы в смысле определения 1.13 существуют для систем корней с нетривиальной симметрией диаграммы Дынкина: $\mathbf{A}_\ell$ ($\ell \geq 2$), $\mathbf{D}_\ell$ ($\ell \geq 4$) и $\mathbf{E}_6$.

В системах корней с корнями двух различных длин, таких как $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$, симметрии диаграммы Дынкина переставляют длинные и короткие корни, и отображение $\alpha \mapsto \delta(\alpha)$ уже не является изоморфизмом систем корней. Однако в специальных характеристиках эти симметрии всё же индуцируют автоморфизмы соответствующих групп Шевалле, определяемые с помощью эндоморфизма Фробениуса.

Определение 1.14. Пусть Φ — система корней одного из типов $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{F}_4$ или $\mathbf{G}_2$, p — отношение квадратов длин длинных и коротких корней системы Φ ($p = 2$ для типов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{F}_4$; $p = 3$ для типа $\mathbf{G}_2$). Пусть R — совершенное

кольцо характеристики p , то есть $p = 0$ в R и эндоморфизм Фробениуса $F(t) = t^p$ является автоморфизмом R . Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ положим

$$\lambda(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \text{ — длинный корень,} \\ p, & \text{если } \alpha \text{ — короткий корень.} \end{cases}$$

Пусть $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — перестановка системы корней Φ , которая переставляет длинные корни с короткими таким образом, что отображение $\alpha \mapsto \lambda(\alpha) \delta(\alpha)$ является изоморфизмом систем корней; такая δ определена однозначно, при этом $\delta^2 = 1$ и δ действует на множестве простых корней следующим образом:

- для типа $\mathbf{B}_2$: $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$;
- для типа $\mathbf{F}_4$: $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_4$, $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3$;
- для типа $\mathbf{G}_2$: $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$.

Тогда при подходящем выборе знаков структурных констант $N_{\alpha\beta}$ отображение

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)}), \quad \alpha \in \Phi, t \in R$$

однозначно определяет автоморфизм группы $G(\Phi, R)$, который обозначается той же буквой δ и (наряду с тождественным автоморфизмом) называется *диаграммным* (или *графовым*) *автоморфизмом* группы $G(\Phi, R)$ (см. [28; 59]). При этом $\delta^2 = F$ — кольцевой автоморфизм, индуцированный автоморфизмом Фробениуса.

Замечание 1.15. Кольцевой и диаграммный автоморфизмы коммутируют между собой.

Определение 1.16. Пусть кольцо S содержит R , а элемент $g \in G_\pi(\Phi, S)$ нормализует подгруппу $G_\pi(\Phi, R)$. Сопряжение

$$i_g: x \mapsto gxg^{-1}$$

тогда является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$; его называют *внутренним автоморфизмом*, индуцированным элементом g , а если g лежит в самой группе $G_\pi(\Phi, R)$, то — *строго внутренним*.

Определение 1.17. Пусть $\tau: G_\pi(\Phi, R) \rightarrow C(G_\pi(\Phi, R))$ — гомоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ в свой центр $C(G_\pi(\Phi, R))$. Отображение

$$x \mapsto \tau(x) x$$

задаёт эндоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$; если он является автоморфизмом, то его обозначают тем же символом τ и называют *центральным автоморфизмом*.

Замечание 1.18. Для систем корней типов F_4 и G_2 нетривиальных центральных автоморфизмов нет, так как соответствующие присоединённые группы Шевалле имеют тривиальный центр.

Аutomорфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ (или её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$) называют *стандартным*, если он раскладывается в композицию автоморфизмов четырёх перечисленных типов. Наряду с ними удобно ввести ещё один вспомогательный тип.

Определение 1.19. Пусть V — пространство представления группы $G_\pi(\Phi, R)$, а матрица $C \in GL(V)$ нормализует эту группу, то есть

$$C G_\pi(\Phi, R) C^{-1} = G_\pi(\Phi, R).$$

Сопряжение $x \mapsto Cx C^{-1}$ задаёт тогда автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$; его обозначают i_C и называют *автоморфизмом-сопряжением*, индуцированным матрицей C .

Всякий внутренний автоморфизм является автоморфизмом-сопряжением. Обратный вопрос — является ли всякий автоморфизм-сопряжение внутренним — составляет нетривиальную часть описания автоморфизмов.

1.5 Известные результаты

Сформулируем основные известные результаты, на которые опираются доказательства в главах 2 и 3.

1.5.1 Автоморфизмы групп Шевалле над полями

Описание автоморфизмов групп Шевалле над полями было получено Р. Стейнбергом для конечных полей [58] и Дж. Хамфри для бесконечных [44].

Теорема 1.20 (Стейнберг, Хамфри). *Пусть K — поле, Φ — неприводимая система корней. Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $E_\pi(\Phi, K)$ стандартен.*

1.5.2 Автоморфизмы групп Шевалле над локальными кольцами

Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами посвящены работы многих авторов [15; 20; 29—34; 45]. Для локальных колец основные результаты были получены Е. И. Буниной в серии работ.

Теорема 1.21 (Бунина, [2; 3; 6]). *Пусть Φ — система корней одного из типов $\mathbf{A}_\ell$ ($\ell \geq 2$), $\mathbf{D}_\ell$ ($\ell \geq 4$), $\mathbf{E}_\ell$ ($\ell \in \{6, 7, 8\}$); R — коммутативное локальное кольцо. В случае $\Phi = \mathbf{A}_2$ дополнительно предполагается, что $2 \in R^*$. Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, а также её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$, стандартен. В случае присоединённой группы ($\pi = \text{ad}$) внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.*

Теорема 1.22 (Бунина, [1; 4]). *Пусть R — коммутативное локальное кольцо с $2 \in R^*$, и пусть Φ — система корней типа $\mathbf{B}_\ell$ ($\ell \geq 2$). Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, а также её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$, стандартен. Аналогичное утверждение справедливо, если $\Phi = \mathbf{G}_2$ и $2, 3 \in R^*$. В случае присоединённой группы ($\pi = \text{ad}$) внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.*

Теорема 1.23 (Бунина, Верёвкин, [7; 8]). Пусть R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой (тогда $3 \in R^*$ автоматически по замечанию 2.8). Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R) = E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ стандартен. Внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.

Теорема 1.24 (Бунина, [23]). Пусть R — коммутативное локальное кольцо с $2 \in R^*$. Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R) = E_{\text{ad}}(\mathbf{F}_4, R)$ стандартен. Внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.

1.5.3 Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами

С помощью метода локализации перечисленные результаты переносятся с локальных колец на произвольные коммутативные кольца с единицей.

Теорема 1.25 (Бунина, [22; 24]). Пусть Φ — неприводимая система корней ранга > 1 , R — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_\ell (\ell \geq 2), \mathbf{C}_\ell (\ell \geq 3), \mathbf{F}_4\}$ и $2 \in R^*$;
- $\Phi = \mathbf{G}_2$ и $2, 3 \in R^*$;
- $\Phi \in \{\mathbf{A}_\ell (\ell \geq 3), \mathbf{D}_\ell (\ell \geq 4), \mathbf{E}_\ell (\ell \in \{6, 7, 8\})\}$ (без условий обратимости).

Тогда каждый автоморфизм группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, а также её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$, стандартен. В случае присоединённой группы ($\pi = \text{ad}$) внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.

Таким образом, к началу данной работы описание автоморфизмов оставалось неполным, в частности, в следующих случаях:

- для типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой;
- для типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой.

Именно этим случаям посвящена глава 2 настоящей диссертации.

Глава 2. Автоморфизмы групп Шевалле исключительных типов над локальными кольцами

В данной главе описываются автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ над коммутативными локальными кольцами без предположений об обратимости характеристических простых чисел. Результаты для типа $\mathbf{F}_4$ (необратимая двойка) получены автором в работе [68], результаты для типа $\mathbf{G}_2$ (необратимая тройка) получены в [69].

Изложение для обоих типов следует единой схеме, основанной на работах Е. И. Буниной [3; 7; 23]. В разделе 2.1 приведены формулировки основных теорем главы; разделы 2.2–2.4 содержат подготовительный материал и общие методы. В разделах 2.5 и 2.6 приведены доказательства для типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ соответственно, а в разделе 2.7 завершается доказательство теорем об автоморфизмах-сопряжениях, из чего вытекают основные теоремы главы.

2.1 Формулировки основных теорем

Напомним (замечание 1.11), что для систем корней типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ решётка весов единственна (она одновременно универсальная и присоединённая), поэтому для каждого кольца R группа Шевалле определена однозначно:

$$G(\Phi, R) = G_{\text{ad}}(\Phi, R),$$

более того, над локальными кольцами универсальная группа Шевалле совпадает со своей элементарной подгруппой, то есть $G(\Phi, R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

Далее мы работаем с присоединённым представлением, реализующим группу как подгруппу в $\text{GL}_n(R)$, где $n = \dim \mathcal{L}$: для типа $\mathbf{F}_4$ имеем $n = 52$, для типа $\mathbf{G}_2$ имеем $n = 14$.

Главными результатами данной главы являются теоремы 2.5 и 2.6 о стандартности всех автоморфизмов групп Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ и $G(\mathbf{G}_2, R)$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и необратимой тройкой соответственно. Они получаются объединением следующих четырёх теорем,

описывающих структуру произвольных автоморфизмов и автоморфизмов-сопряжений данных групп.

Теорема 2.1. Пусть R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ представляется в виде композиции кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.

Теорема 2.2. Над локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ является строго внутренним.

Теорема 2.3. Пусть R — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ представляется в виде композиции кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.

Теорема 2.4. Над локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ является строго внутренним.

Объединяя теоремы 2.1 и 2.2, получаем основной результат для группы $G(\mathbf{F}_4, R)$.

Теорема 2.5. Над локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и строго внутреннего автоморфизмов.

Аналогично, из теорем 2.3 и 2.4 вытекает основной результат для группы $G(\mathbf{G}_2, R)$.

Теорема 2.6. Над локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и строго внутреннего автоморфизмов.

2.2 Локальные кольца и редукция по радикалу

Определение 2.7. Коммутативное ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет единственный максимальный идеал. Этот идеал совпадает с радикалом Джекобсона $J = \text{Rad}(R)$ и состоит из всех необратимых элементов кольца R . Факторкольцо $k = R/J$ является полем и называется *полем вычетов*.

Замечание 2.8. Если R — локальное кольцо и $2 \in J$ (двойка необратима в R), то $3 \in R^*$ (тройка обратима в R): в самом деле, если $3 \in J$, то и $3 - 2 = 1 \in J$, что невозможно. Аналогично, если $3 \in J$, то $2 \in R^*$.

Ключевым свойством групп Шевалле над локальными кольцами является существование наибольшей нормальной собственной подгруппы.

Определение 2.9. Обозначим через $E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ нормальную подгруппу в $G(R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$, порождённую всеми элементами $x_{\alpha}(t)$ для $\alpha \in \Phi$, $t \in J$. Она называется *относительной элементарной подгруппой* уровня J .

При определённых условиях на систему корней и кольцо подгруппа $E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ является наибольшей нормальной собственной подгруппой в $G(R)$ (см. [9; 16; 17; 37]). В частности, это верно для систем корней типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ над любыми локальными кольцами.

Таким образом, автоморфизм φ группы $G(R)$ переводит подгруппу $E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ в себя и индуцирует автоморфизм

$$\bar{\varphi}: G(R)/E_{\text{ad}}(\Phi, R, J) \cong G(k) \rightarrow G(k),$$

где $k = R/J$ — поле вычетов. Автоморфизмы групп Шевалле над полями описаны (см. раздел 1.5), и этот переход от кольца к полю вычетов лежит в основе метода редукции по радикалу.

2.3 Метод линеаризации для локальных колец

Ключевым техническим инструментом доказательств служит метод линеаризации, позволяющий устанавливать, что система полиномиальных

уравнений с коэффициентами в локальном кольце R не имеет в радикале ненулевых решений. Этот метод применялся во многих аналогичных работах (см., например, [3; 7; 23]).

Теорема 2.10 (метод линеаризации). Пусть R — локальное кольцо с радикалом $J = \text{Rad}(R)$, и пусть задана система полиномиальных уравнений $P_i(x_1, \dots, x_m) = 0$, в которой все $P_i \in R[x_1, \dots, x_m]$ не имеют свободного члена, то есть $P_i(0, \dots, 0) = 0$. Обозначим через $\bar{P}_i$ линейную часть полинома P_i , приведённую по модулю радикала J (она состоит из мономов первой степени полинома P_i с коэффициентами, взятыми по модулю J). Если линейная система $\bar{P}_i = 0$ имеет только нулевое решение, то и исходная система не имеет в радикале J решений, отличных от нулевого.

Проиллюстрируем применение метода на простом примере.

Пример 2.11. Пусть R — локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда система

$$\begin{cases} x + 3y - xy = 0, \\ x - y + xy = 0 \end{cases}$$

имеет единственное нулевое решение в радикале J .

Доказательство. Приведённая по модулю радикала линеаризация имеет вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

так как $3 \in J$. Определитель матрицы этой системы равен -1 и обратим, поэтому по теореме 2.10 исходная система имеет лишь нулевое решение в радикале.

Проверим это также непосредственно. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x + (3 - x)y = 0, \\ (1 + y)x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = (1 + y)^{-1}y$ (обратимость $1 + y$ следует из $y \in J$). Подставляя в первое уравнение и приводя подобные члены, получаем

$$((1 + y)^{-1} + (3 - x))y = 0.$$

Коэффициент при y является суммой обратимого элемента $(1 + y)^{-1}$ и необратимого $(3 - x) \in J$, поэтому он обратим. Следовательно, $y = 0$, откуда $x = 0$. □

2.4 Замена автоморфизма изоморфизмом специального вида

Пусть Φ — система корней типа $\mathbf{F}_4$ или $\mathbf{G}_2$, R — коммутативное локальное кольцо, $J = \text{Rad}(R)$, $k = R/J$ — поле вычетов, $n = \dim \mathcal{L}$, $G(R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ и φ — автоморфизм группы $G(R)$. Данный раздел основан на соображениях из [12], используемых также в [3; 7].

Пусть $E_J = E_{\text{ad}}(\Phi, R, J)$ — относительная элементарная подгруппа (определение 2.9). Из результатов [9; 16; 17] (для типа $\mathbf{F}_4$) и [16; 17; 37] (для типа $\mathbf{G}_2$) следует, что E_J является наибольшей собственной нормальной подгруппой в $G(R)$. В частности, всякий автоморфизм группы $G(R)$ сохраняет E_J ; это относится и к рассматриваемому автоморфизму φ .

Поэтому φ корректно определяет автоморфизм $\bar{\varphi}$ факторгруппы $G(R)/E_J$, отождествляемой с $G(k)$:

$$\bar{\varphi}: G(R)/E_J = G(k) \rightarrow G(k).$$

Здесь $G(k)$ — присоединённая группа Шевалле над полем k , поэтому к её автоморфизму $\bar{\varphi}$ применима теорема Стейнберга (теорема 1.20): он раскладывается в композицию

$$\bar{\varphi} = i_{\bar{g}} \circ \bar{\delta}^\varepsilon \circ \bar{\rho},$$

в которой $\bar{g} \in N(G(k))$ нормализует $G(k)$, автоморфизм $\bar{\delta}$ диаграммный, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, а $\bar{\rho}$ отвечает некоторому автоморфизму поля k .

Поднимем $\bar{g}$ до некоторой матрицы $g \in \text{GL}_n(R)$, переходящей в $\bar{g}$ при редукции R по модулю J ; включение $g \in N(G(R))$ при этом, вообще говоря, не гарантировано. Положим

$$\varphi' = i_{g^{-1}} \circ \varphi.$$

Отображение φ' есть изоморфизм группы $G(R) \subset \text{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу в $\text{GL}_n(R)$, который по модулю J редуцируется ровно к автоморфизму $\bar{\delta}^\varepsilon \circ \bar{\rho}$.

До конца этого раздела будем временно считать, что диаграммная компонента отсутствует, то есть $\varepsilon = 0$; тогда редукция φ' по модулю J совпадает с $\bar{\rho}$. При этом предположении изложенные соображения дают следующее утверждение.

Предложение 2.12. Если элементы матрицы $A \in G(R)$ содержатся в подкольце $R_1 \subseteq R$, порождённом единицей, то её образ $\varphi'(A)$ лежит в множестве

$$A \cdot \mathrm{GL}_n(R, J) = \{B \in \mathrm{GL}_n(R) \mid A - B \in M_n(J)\},$$

иными словами, он является сдвигом исходной матрицы на некоторую матрицу с элементами из радикала J .

Нам потребуются два варианта конструкции поднятия идемпотентов: для элементов порядка 3 (используется для типа $\mathbf{F}_4$, где двойка необратима и тройка обратима) и для элементов порядка 2 (используется для типа $\mathbf{G}_2$, где тройка необратима и двойка обратима).

Элементы порядка 3. Пусть $a \in G(R)$, $a^3 = 1$. Тогда элемент

$$e = \frac{1}{3}(1 + a + a^2)$$

является идемпотентом в кольце $M_n(R)$:

$$e^2 = \frac{1}{9}(1 + a^2 + a^4 + 2a + 2a^2 + 2a^3) = \frac{1}{9}(3 + 3a + 3a^2) = e.$$

Этот идемпотент определяет разложение свободного R -модуля $V \cong R^n$ в прямую сумму

$$V = eV \oplus (1 - e)V = V_0 \oplus V_1,$$

где модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [48].

Предложение 2.13. Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ — разложение k -пространства $\bar{V} \cong k^n$ относительно $\bar{a}$ и $\bar{e} = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2)$. Тогда $\bar{V}_0$ и $\bar{V}_1$ являются образами модулей V_0 и V_1 при факторизации по J .

Доказательство. Обозначим образы модулей V_0, V_1 при факторизации по J через $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1$ соответственно. Так как $V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}$ и $V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\}$, то для любого $x \in V$

$$\bar{e}(\bar{x}) = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2)(\bar{x}) = \frac{1}{3}(\bar{x} + \overline{a(x)} + \overline{a^2(x)}) = \overline{e(x)}.$$

Если $x \in V_0$, то $e(x) = x$, значит, $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{x}$, то есть $\bar{x} \in \bar{V}_0$. Аналогично, если $x \in V_1$, то $\bar{x} \in \bar{V}_1$. Таким образом, $\tilde{V}_0 \subseteq \bar{V}_0$ и $\tilde{V}_1 \subseteq \bar{V}_1$.

Обратно, пусть $\bar{x} \in \bar{V}_0$ и $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in V_0$, $x_1 \in V_1$. Тогда $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{e}(\bar{x}_0 + \bar{x}_1) = \bar{x}_0$. Но $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{x}$, значит, $\bar{x} = \bar{x}_0 \in \bar{V}_0$. Следовательно, $\tilde{V}_0 = \bar{V}_0$ и $\tilde{V}_1 = \bar{V}_1$. $\square$

Предложение 2.14. Пусть $a \in G(R)$, $b \in \text{GL}_n(R)$, $a^3 = b^3 = 1$, a — матрица с элементами из подкольца R_1 , порождённого единицей, $b \equiv a \pmod{J}$. Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение V относительно a и $V = V'_0 \oplus V'_1$ — разложение V относительно b . Тогда $\dim V'_0 = \dim V_0$ и $\dim V'_1 = \dim V_1$.

Доказательство. Выберем R -базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ модуля V так, что $\{e_1, \dots, e_s\} \subset V_0$ и $\{e_{s+1}, \dots, e_n\} \subset V_1$. Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ и $\bar{V} = \bar{V}'_0 \oplus \bar{V}'_1$ — разложения k -пространства $\bar{V}$ относительно $\bar{a}$ и $\bar{b}$ соответственно. Так как $\bar{a} = \bar{b}$ (ибо $a \equiv b \pmod{J}$), имеем $\bar{V}_0 = \bar{V}'_0$ и $\bar{V}_1 = \bar{V}'_1$.

По предложению 2.13 образы модулей V_0 и V'_0 , а также V_1 и V'_1 , при факторизации по J совпадают. Выберем $\{f_1, \dots, f_s\} \subset V'_0$ и $\{f_{s+1}, \dots, f_n\} \subset V'_1$ так, что $\bar{f}_i = \bar{e}_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{f_i\}$ сравнима с единичной по модулю J и, следовательно, обратима. Значит, $\{f_1, \dots, f_n\}$ — R -базис модуля V , при этом $\{f_1, \dots, f_s\}$ — R -базис в V'_0 , а $\{f_{s+1}, \dots, f_n\}$ — R -базис в V'_1 . В частности, $\dim V'_0 = s = \dim V_0$ и $\dim V'_1 = n - s = \dim V_1$. $\square$

Следствие 2.15. В условиях предложения 2.14 для матрицы b существует базис модуля V , в котором b имеет тот же вид, что и матрица a в исходном базисе. Таким образом, матрицы a и b сопряжены в $\text{GL}_n(R)$.

Элементы порядка 2. Пусть $a \in G(R)$, $a^2 = 1$. Тогда элемент

$$e = \frac{1}{2}(1 + a)$$

является идемпотентом в кольце $M_n(R)$:

$$e^2 = \frac{1}{4}(1 + 2a + a^2) = \frac{1}{4}(2 + 2a) = e.$$

Он определяет разложение $V = eV \oplus (1 - e)V = V_0 \oplus V_1$ со свободными модулями V_0 , V_1 .

Предложение 2.16. Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ — разложение k -пространства $\bar{V}$ относительно $\bar{a}$ и $\bar{e} = \frac{1}{2}(1 + \bar{a})$. Тогда $\bar{V}_0$ и $\bar{V}_1$ являются образами V_0 и V_1 при факторизации по J .

Доказательство. Рассуждение дословно повторяет доказательство предложения 2.13 с заменой $e = \frac{1}{3}(1 + a + a^2)$ на $e = \frac{1}{2}(1 + a)$. $\square$

Предложение 2.17. Пусть $a \in G(R)$, $b \in \mathrm{GL}_n(R)$, $a^2 = b^2 = 1$, a — матрица с целыми элементами, $b \equiv a \pmod{J}$. Тогда размерности подпространств в разложениях V относительно a и b совпадают, и матрицы a и b сопряжены в $\mathrm{GL}_n(R)$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 2.14 и следствия 2.15 с использованием предложения 2.16. $\square$

2.5 Тип F_4 : случай необратимой двойки

В данном разделе Φ — система корней типа F_4 , R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой (и обратимой тройкой), $J = \mathrm{Rad}(R)$, $k = R/J$ — поле характеристики 2, $n = 52$.

Зафиксируем реализацию системы корней F_4 . Она имеет ранг 4, состоит из 24 положительных и 24 отрицательных корней; в ней встречаются корни двух различных длин. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — стандартный ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^4$. Пронумеруем положительные корни системы F_4 следующим образом (первые четыре корня являются простыми):

$$\alpha_1 = e_2 - e_3,$$

$$\alpha_2 = e_3 - e_4,$$

$$\alpha_3 = e_4,$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4);$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 = e_2 - e_4,$$

$$\alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_3 = e_3,$$

$$\alpha_7 = \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4),$$

$$\alpha_8 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = e_2,$$

$$\alpha_9 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \alpha_2 + 2\alpha_3 = e_3 + e_4, \\
\alpha_{11} &= \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4), \\
\alpha_{12} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4), \\
\alpha_{13} &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = e_2 + e_4, \\
\alpha_{14} &= \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 - e_2, \\
\alpha_{15} &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4), \\
\alpha_{16} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = e_2 + e_3, \\
\alpha_{17} &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 - e_3, \\
\alpha_{18} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4), \\
\alpha_{19} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 - e_4, \\
\alpha_{20} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \\
\alpha_{21} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1, \\
\alpha_{22} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 + e_4, \\
\alpha_{23} &= \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 + e_3, \\
\alpha_{24} &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = e_1 + e_2.
\end{aligned}$$

Корни α_1, α_2 и их образы при действии группы Вейля длинные, остальные корни (включая α_3, α_4) короткие.

2.5.1 Образы элементов ω_α и $x_\alpha(1)$

Введём матрицы

$$Q_\alpha = \omega_\alpha \cdot x_\alpha(1), \quad \alpha \in \Phi.$$

Для простых корней α_i , $i = 1, \dots, 4$, матрицы Q_{α_i} имеют целые элементы и удовлетворяют $Q_{\alpha_i}^3 = 1$. По предложению 2.12 образ $\varphi'(Q_{\alpha_i})$ сравним по модулю J с Q_{α_i} (при $\varepsilon = 0$) или с $Q_{\delta(\alpha_i)}$ (при $\varepsilon = 1$). Куб образа также равен единице. Следовательно, по следствию 2.15 образ Q_{α_i} сопряжён матрице $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_i)}$ в $\mathrm{GL}_n(R)$.

Заметим, что матрицы Q_{α_1} и Q_{α_3} коммутируют между собой. Также коммутируют $Q_{\delta(\alpha_1)} = Q_{\alpha_4}$ и $Q_{\delta(\alpha_3)} = Q_{\alpha_2}$.

Лемма 2.18. *Образы коммутирующих между собой матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} можно сопряжением одновременно привести к $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$ и $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$ соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\varepsilon = 0$ (случай $\varepsilon = 1$ полностью аналогичен). Если бы в кольце R существовал элемент $\xi \neq 1$ с $\xi^3 = 1$, то коммутирующие матрицы Q_{α_1} и Q_{α_3} порядка 3 можно было бы одновременно привести к диагональному виду (с собственными значениями из $\{1, \xi, \xi^2\}$). Присоединим при необходимости такой элемент ξ к кольцу R и рассмотрим кольцо $\bar{R} = R[\xi]$.

Образы матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} также коммутируют и имеют порядок 3. Применяя рассуждение следствия 2.15 к каждой из матриц Q_{α_1} , Q_{α_3} , $Q_{\alpha_1}Q_{\alpha_3}$, $Q_{\alpha_1}Q_{\alpha_3}^{-1}$ и используя спектральные идемпотенты, отвечающие собственным значениям 1, ξ , ξ^2 , получаем, что ранги всех девяти совместных собственных подмодулей образов совпадают с рангами соответствующих подмодулей для исходной пары. Следовательно, можно привести образы Q_{α_1} и Q_{α_3} к диагональному виду, а затем сопряжением матрицей перестановки расположить на диагонали пары собственных значений так же, как у Q_{α_1} и Q_{α_3} . Возвращаясь к исходному базису, получаем сопряжение, одновременно переводящее образы Q_{α_1} и Q_{α_3} в Q_{α_1} и Q_{α_3} соответственно. $\square$

Заменим изоморфизм φ' композицией с найденным сопряжением. После замены $\varphi'(Q_{\alpha_1}) = Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$ и $\varphi'(Q_{\alpha_3}) = Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$.

Лемма 2.19. *Все матрицы $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$, выражаются через набор*

$$\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}, \omega_{\alpha_4}, Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_3}.$$

Доказательство. Группа Вейля системы корней типа F_4 порождается простыми отражениями $w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, w_{\alpha_3}, w_{\alpha_4}$ и транзитивно действует на множестве корней одинаковой длины. Следовательно, имея матрицы $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}, \omega_{\alpha_4}$ и используя соотношения (1.4), можно последовательно выразить все матрицы ω_α , $\alpha \in \Phi$.

Далее, $x_{\alpha_1}(1) = \omega_{\alpha_1}^{-1} \cdot Q_{\alpha_1}$ и $x_{\alpha_3}(1) = \omega_{\alpha_3}^{-1} \cdot Q_{\alpha_3}$. Корни α_1 и α_3 имеют различные длины (α_1 — длинный, α_3 — короткий). Благодаря транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины, из соотношений (1.3) при $t = 1$ можно выразить все матрицы $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$, через $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_3}(1)$ и матрицы ω_β . $\square$

Таким образом, если произвести сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}_n(R, J)$ (то есть сравнимой с единичной по модулю J), которое сохранит текущие образы $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$ и $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$ матриц Q_{α_1} и Q_{α_3} и при этом переведёт образы матриц $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_3}, \omega_{\alpha_4}$ в матрицы $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_4)}$ соответственно, то по лемме 2.19 композиция изоморфизма с этим сопряжением будет переводить все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$ для всех $\alpha \in \Phi$, причём при факторизации R по J она по-прежнему будет переходить в автоморфизм $\bar{\delta}^\varepsilon \circ \bar{\rho}$.

Лемма 2.20. *Указанное сопряжение существует.*

Доказательство. Пользуясь предложением 2.12, обозначим образы матриц ω_{α_i} через $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_i)} + M_i$, $i = 1, \dots, 4$, где $M_i \in M_n(J)$ — неизвестные матрицы.

Для системы корней типа F_4 произведение в правой части коммутаторного соотношения (1.2) содержит не более двух сомножителей, и все коэффициенты c_{ij} принимают значения ± 1 или ± 2 . Благодаря целочисленности c_{ij} все участвующие корневые элементы выражаются через $x_\alpha(1)$ с помощью свойства $x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u)$.

Рассмотрим набор образов всех соотношений вида (1.3), (1.4), (1.2) при $t = u = 1$. Подстановка образов матриц ω_{α_i} и $x_\alpha(1)$ (которые по лемме 2.19 выражаются через $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_i)}$ и $Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_3}$) даёт систему полиномиальных уравнений относительно элементов матриц M_1, M_2, M_3, M_4 , то есть относительно $4n^2 = 4 \cdot 52^2 = 10816$ переменных из радикала.

Попытаемся решить эту систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю радикала J линеаризация данной системы (в которой все коэффициенты равны 0 или 1, так как $2 \in J$) имеет ранг 10492 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$), что меньше числа неизвестных 10816. Это означает, что система допускает ненулевые решения, то есть непосредственное применение метода линеаризации не позволяет заключить, что $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0$. Действительно, требуется нетривиальное сопряжение.

С помощью компьютерного вычисления можно убедиться, что существует сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}_n(R, J)$, сохраняющее $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$ и $Q_{\delta^\varepsilon(\alpha_3)}$, после которого ровно 324 элемента матриц-образов совпадают с элементами требуемых матриц (то есть соответствующие 324 переменные обнуляются). После выполнения этого сопряжения получаем систему уравнений

относительно $10816 - 324 = 10492$ оставшихся переменных. Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю радикала линеаризация этой новой системы является системой полного ранга 10492. По теореме 2.10 заключаем, что все оставшиеся переменные равны нулю, то есть $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0$, и найденное сопряжение является искомым. $\square$

После этого сопряжения изоморфизм переводит все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$.

2.5.2 Образы элементов $x_\alpha(t)$

Следствие 2.21. *Если $\varepsilon = 1$, то кольцо R имеет характеристику 2.*

Доказательство. Рассмотрим корни $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_{10} = \alpha_2 + 2\alpha_3$ и следующие соотношения вида (1.2):

$$[x_{\alpha_2}(1), x_{\alpha_{10}}(1)] = 1,$$

$$[x_{\alpha_3}(1), x_{\alpha_6}(1)] = x_{\alpha_{10}}(\pm 2).$$

Поскольку $\delta(\alpha_2) = \alpha_3, \delta(\alpha_{10}) = \alpha_6$, отсюда сразу следует $\pm 2 = 0$ в R . $\square$

Изучим образы $x_\alpha(t)$, а именно, докажем, что эти матрицы переходят в некоторые $x_\alpha(t')$ в случае $\varepsilon = 0$ или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ в случае $\varepsilon = 1$, где $t \mapsto t'$ — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [59]). Значит, в нашем случае они переходят в $x_\alpha(t') + T$ ($\varepsilon = 0$) или $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)}) + T$ ($\varepsilon = 1$), где $T \in M_n(J)$. Нужно доказать, что во всех случаях $T = 0$. Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать t' и, соответственно, T . Правильный выбор будет описан ниже.

Замечание 2.22. На этом этапе мы ничего не говорим об отображении $t \mapsto t'$. Утверждается лишь, что существует такой элемент t' , что матрицы отображаются указанным образом.

Лемма 2.23. *Все матрицы $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц:*

$$\omega_\alpha, \alpha \in \Phi; \quad x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_3}(t).$$

Доказательство. По аналогии с леммой 2.19, данное утверждение сразу следует из соотношений (1.3), транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины и того факта, что α_1, α_3 — это корни двух возможных различных длин. $\square$

Рассмотрим матрицы $x_{\alpha_1}(t)$ и $x_{\alpha_3}(t)$. Пользуясь рассуждением выше, обозначим их образы при изоморфизме через $x_{\alpha_1}(t') + S$ и $x_{\alpha_3}(t') + T$ соответственно ($\varepsilon = 0$) или через $x_{\alpha_4}(t') + S$ и $x_{\alpha_2}((t')^2) + T$ соответственно ($\varepsilon = 1$), где $S, T \in M_n(J)$ — неизвестные матрицы с элементами из радикала J . Выберем S и T так, чтобы выполнялось $T_{8,5} = 0$. Как выяснится далее при компьютерном вычислении, это даст правильный выбор представителя. В силу леммы 2.23 достаточно доказать, что $S = T = 0$.

Возьмём набор образов тех соотношений вида (1.3) и (1.2), в которые входят только элементы (и их степени) вида $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц S и T , то есть (с учётом условия $T_{8,5} = 0$) относительно $2n^2 - 1 = 2 \cdot 52^2 - 1 = 5407$ переменных из радикала. Решим полученную систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю радикала J линеаризация системы является системой полного ранга, равного 5407 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$), и поэтому имеет только нулевое решение. Отсюда по теореме 2.10 заключаем, что $S = T = 0$.

2.5.3 Доказательство теоремы 2.1

Таким образом, на данном этапе изоморфизм переводит матрицы $x_\alpha(t)$ в некоторые $x_\alpha(t')$ ($\varepsilon = 0$) или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ ($\varepsilon = 1$). Обозначим отображение $t \mapsto t'$ через $\rho: R \rightarrow R$.

Лемма 2.24. *Отображение ρ инъективно, аддитивно и мультипликативно; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также инъективен.*

Доказательство. Инъективность отображения ρ , а также эндоморфизма F при $\varepsilon = 1$, очевидна, так как у нас изоморфизм групп и при этом $x_\alpha(0) = 1$.

Аддитивность ρ сразу следует из соотношения (1.1).

Мультипликативность ρ следует, например, из соотношения (1.2) для корней α_1 и α_2 :

$$[x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_2}(u)] = x_{\alpha_1+\alpha_2}(tu) = x_{\alpha_5}(tu)$$

(это рассуждение остаётся в силе и при $\varepsilon = 1$, так как участвующие в соотношении корни длинные). $\square$

Следствие 2.25. *Отображение ρ является изоморфизмом кольца R на некоторое его подкольцо R' ; в случае $\varepsilon = 1$ то же верно и для эндоморфизма Фробениуса F .*

Теперь докажем сюръективность полученных эндоморфизмов кольца R . Заметим, что мы находимся в ситуации, в которой для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ выполнено

$$i_C \varphi(G(\Phi, R)) = C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} \subseteq G(\Phi, R')$$

(причём при $\varepsilon = 0$ имеет место равенство). Покажем, что $R' = R$.

Лемма 2.26. *Если для некоторого $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ имеет место включение $C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} \subseteq G(\Phi, R')$, где R' — подкольцо в R , то $R' = R$.*

Доказательство. Обозначим матричные единицы через E_{ij} . Можно проверить, что

$$\begin{aligned} ((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_2}(1) - 1))^2 &= E_{5,29}, \\ \omega_{\alpha_5}((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_2}(1) - 1))^2 \omega_{\alpha_5}^{-1} &= E_{29,5}. \end{aligned}$$

Произведение этих матричных единиц даёт матричную единицу $E_{5,5}$. В матрице $h_{\alpha_1}(t)$ элемент на позиции $(5, 5)$ равен t . Таким образом, с помощью нашей группы $G(\Phi, R)$ сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу вида $tE_{5,5}$, где $t \in R^*$.

Предположим теперь, что R' — собственное подкольцо в R . Так как $C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} \subseteq G(\Phi, R')$, то подкольцо кольца $M_n(R)$, порождённое всеми элементами группы $G(\Phi, R)$, должно переходить в подкольцо кольца $M_n(R')$, порождённое элементами группы $G(\Phi, R')$. Следовательно, все элементы матриц $C(tE_{5,5})C^{-1}$ при $t \in R^*$ должны лежать в подкольце R' .

Очевидно, в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, полностью состоящего из необратимых элементов.

Значит, существует такая пара индексов i, j , что элементы $C_{i,5}$ и $(C^{-1})_{5,j}$ обратимы. Отсюда заключаем, что при $t \in R^*$

$$C_{i,5} t (C^{-1})_{5,j} = (C(tE_{5,5})C^{-1})_{i,j} \in R',$$

то есть

$$C_{i,5} R^* (C^{-1})_{5,j} = R^* \subseteq R'.$$

Но локальное кольцо R аддитивно порождается множеством R^* , поэтому в действительности $R \subseteq R'$, что даёт требуемое равенство $R' = R$. $\square$

Следствие 2.27. *Отображение ρ является автоморфизмом кольца R ; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также является автоморфизмом кольца R , то есть в этом случае R — совершенное кольцо характеристики 2. При этом выполнено $C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} = G(\Phi, R)$.*

Доказательство. По лемме 2.26 имеем $\rho(R) = R$. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда группа $H = C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1}$ порождена короткими корневыми элементами с параметрами из R и длинными корневыми элементами с параметрами из $F(R)$.

Рассмотрим фактор присоединённого модуля по инвариантному подмодулю, порождённому корневыми векторами и картановскими элементами, отвечающими коротким корням. В характеристике 2 действие короткого корневого элемента $x_\beta(t)$ на этом факторе зависит от t только через t^2 . Следовательно, кольцо матриц, порождённое группой H , действует на данном факторе матрицами над $F(R)$.

Учитывая, что α_5 — длинный корень, и повторяя рассуждение из доказательства леммы 2.26 для действия на указанном факторе, получаем $R^* \subseteq F(R)$, откуда $F(R) = R$. $\square$

Таким образом, показано, что композиция $i_C \circ \varphi$ исходного автоморфизма φ группы Шевалле и некоторого сопряжения (замены базиса) с помощью матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$, нормализующей данную группу, является композицией $\delta^\varepsilon \circ \rho$, где δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — кольцевой автоморфизм. Это завершает доказательство теоремы 2.1.

2.6 Тип G_2 : случай необратимой тройки

В данном разделе Φ — система корней типа G_2 , R — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой (и обратимой двойкой), $J = \text{Rad}(R)$, $k = R/J$ — поле характеристики 3, $n = 14$.

Зафиксируем реализацию системы корней G_2 . Она имеет ранг 2, состоит из 6 положительных и 6 отрицательных корней; в ней встречаются корни двух различных длин. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — стандартный ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. Пронумеруем положительные корни системы G_2 следующим образом (первые два корня являются простыми):

$$\alpha_1 = -2e_1 + e_2 + e_3,$$

$$\alpha_2 = e_1 - e_2;$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = -e_1 + e_3,$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 = -e_2 + e_3,$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2 = e_1 - 2e_2 + e_3,$$

$$\alpha_6 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3.$$

Корень α_1 длинный, α_2 короткий.

2.6.1 Образы элементов ω_α и $x_\alpha(1)$

В отличие от случая F_4 , где тройка обратима и мы использовали матрицы Q_α порядка 3, здесь тройка необратима, но двойка обратима. Поэтому вместо Q_α мы рассматриваем диагональные матрицы

$$h_\alpha(-1) = \omega_\alpha^2, \quad \alpha \in \Phi.$$

Это диагональные матрицы порядка 2 с элементами ± 1 на диагонали, причём все $h_{\alpha_i}(-1)$ содержат одинаковое число элементов -1 .

По предложению 2.12 образ $\varphi'(h_{\alpha_i}(-1))$ сравним по модулю J с $h_{\alpha_i}(-1)$ (при $\varepsilon = 0$) или с $h_{\delta(\alpha_i)}(-1)$ (при $\varepsilon = 1$). Квадрат образа равен единице. По предложению 2.17 образ $h_{\alpha_i}(-1)$ сопряжён матрице $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_i)}(-1)$.

Лемма 2.28. *Образы $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ можно сопряжением одновременно привести к $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\varepsilon = 0$ (случай $\varepsilon = 1$ аналогичен). Матрицы $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ коммутируют (они диагональны в исходном базисе), поэтому их образы $\varphi'(h_{\alpha_1}(-1))$ и $\varphi'(h_{\alpha_2}(-1))$ также коммутируют. Обе матрицы имеют порядок 2 и элементы ± 1 на диагонали. Применяя предложение 2.17 к каждой из инволюций $h_{\alpha_1}(-1)$, $h_{\alpha_2}(-1)$ и их произведению $h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_2}(-1)$, получаем, что ранги всех четырёх совместных собственных подмодулей образов совпадают с рангами соответствующих подмодулей для исходной пары. Следовательно, можно привести образы к диагональному виду, а затем сопряжением матрицей перестановки расположить на диагонали пары собственных значений так же, как у $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$. Возвращаясь к исходному базису, получаем сопряжение, одновременно переводящее образы $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ в $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ соответственно. $\square$

Заменим изоморфизм так, чтобы $h_{\alpha_1}(-1) \mapsto h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1) \mapsto h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.

Лемма 2.29. *Все матрицы $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$, выражаются через*

$$x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}.$$

Доказательство. Группа Вейля типа $\mathbf{G}_2$ порождается простыми отражениями $w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}$ и транзитивно действует на корнях одной длины. Из соотношений (1.4) при помощи ω_{α_1} и ω_{α_2} можно выразить все ω_α .

Корни α_1 (длинный) и α_2 (короткий) представляют оба класса длин. Из соотношений (1.3) при $t = 1$ можно из $x_{\alpha_1}(1)$ получить $x_\alpha(1)$ для всех длинных корней α , и из $x_{\alpha_2}(1)$ получить $x_\alpha(1)$ для всех коротких корней α . $\square$

Таким образом, достаточно подобрать сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}_n(R, J)$, переводящее образы $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_2}(1)$, ω_{α_1} , ω_{α_2} в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1)$, $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1)$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}$ соответственно.

Лемма 2.30. *Указанное сопряжение существует.*

Доказательство. Обозначим образы матриц $x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$ через $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1) + A, x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1) + B, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)} + C, \omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)} + D$, где $A, B, C, D \in M_n(J)$.

Для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ произведение в правой части коммутаторного соотношения (1.2) содержит не более четырёх сомножителей, и все коэффициенты c_{ij} принимают значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Рассмотрим набор образов всех соотношений вида (1.3), (1.4), (1.2) при $t = u = 1$, а также соотношений $h_{\alpha_i}(-1) = \omega_{\alpha_i}^2, i = 1, 2$. Подстановка образов даёт систему полиномиальных уравнений относительно элементов матриц A, B, C, D , то есть относительно $4n^2 = 4 \cdot 14^2 = 784$ переменных из радикала.

Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю J линеаризация данной системы (в которой все коэффициенты равны 0 или ± 1 , так как $3 \in J$) имеет ранг 732 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$), что меньше 784. Таким образом, непосредственно метод линеаризации не работает, и требуется нетривиальное сопряжение.

С помощью компьютера можно убедиться, что существует сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}_n(R, J)$, сохраняющее $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$, после которого ровно 52 переменные обнуляются. Получаемая система относительно $784 - 52 = 732$ оставшихся переменных имеет линеаризацию полного ранга 732. По теореме 2.10 заключаем, что $A = B = C = D = 0$, и найденное сопряжение является искомым. $\square$

После сопряжения изоморфизм переводит все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$.

2.6.2 Образы элементов $x_\alpha(t)$

Следствие 2.31. Если $\varepsilon = 1$, то кольцо R имеет характеристику 3.

Доказательство. Рассмотрим корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_6 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ и следующие соотношения вида (1.2):

$$[x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_6}(1)] = 1,$$

$$[x_{\alpha_2}(1), x_{\alpha_4}(1)] = x_{\alpha_5}(\pm 3).$$

Поскольку $\delta(\alpha_1) = \alpha_2, \delta(\alpha_6) = \alpha_4$, отсюда сразу следует $\pm 3 = 0$ в R . $\square$

Изучим образы $x_\alpha(t)$, а именно, докажем, что эти матрицы переходят в некоторые $x_\alpha(t')$ в случае $\varepsilon = 0$ или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ в случае $\varepsilon = 1$, где $t \mapsto t'$ — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [59]). Значит, в нашем случае они переходят в $x_\alpha(t') + T$ ($\varepsilon = 0$) или $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)}) + T$ ($\varepsilon = 1$), где $T \in M_n(J)$. Нужно доказать, что во всех случаях $T = 0$. Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать t' и, соответственно, T . Правильный выбор будет описан ниже.

Замечание 2.32. На этом этапе мы ничего не говорим об отображении $t \mapsto t'$. Утверждается лишь, что существует такой элемент t' , что матрицы отображаются указанным образом.

Лемма 2.33. *Все матрицы $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц:*

$$\omega_\alpha, \alpha \in \Phi; \quad x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_2}(t).$$

Доказательство. По аналогии с леммой 2.29, данное утверждение сразу следует из соотношений (1.3), транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины и того факта, что α_1, α_2 — это корни двух возможных различных длин. $\square$

Рассмотрим матрицы $x_{\alpha_1}(t)$ и $x_{\alpha_2}(t)$. Пользуясь рассуждением выше, обозначим их образы при изоморфизме через $x_{\alpha_1}(t') + S$ и $x_{\alpha_2}(t') + T$ соответственно ($\varepsilon = 0$) или через $x_{\alpha_2}(t') + S$ и $x_{\alpha_1}((t')^3) + T$ соответственно ($\varepsilon = 1$), где $S, T \in M_n(J)$ — неизвестные матрицы с элементами из радикала J . Выберем S и T так, чтобы выполнялось $T_{7,11} = 0$. Как выяснится далее при компьютерном вычислении, это даст правильный выбор представителя. В силу леммы 2.33 достаточно доказать, что $S = T = 0$.

Возьмём набор образов тех соотношений вида (1.3) и (1.2), в которые входят только элементы (и их степени) вида $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(1)$ и ω_α , $\alpha \in \Phi$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц S и T , то есть (с учётом условия $T_{7,11} = 0$) относительно $2n^2 - 1 = 2 \cdot 14^2 - 1 = 391$ переменных из радикала. Решим полученную систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведённая по модулю радикала J линеаризация системы является системой полного ранга, равного 391 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$), и поэтому

имеет только нулевое решение. Отсюда по теореме 2.10 заключаем, что $S = T = 0$.

2.6.3 Доказательство теоремы 2.3

Таким образом, на данном этапе изоморфизм переводит матрицы $x_\alpha(t)$ в некоторые $x_\alpha(t')$ ($\varepsilon = 0$) или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ ($\varepsilon = 1$). Обозначим отображение $t \mapsto t'$ через $\rho: R \rightarrow R$.

Лемма 2.34. *Отображение ρ инъективно, аддитивно и мультипликативно; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также инъективен.*

Доказательство. Инъективность отображения ρ , а также эндоморфизма F при $\varepsilon = 1$, очевидна, так как у нас изоморфизм групп и при этом $x_\alpha(0) = 1$.

Аддитивность ρ сразу следует из соотношения (1.1).

Мультипликативность ρ следует, например, из соотношения (1.2) для корней α_1 и α_5 :

$$[x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_5}(u)] = x_{\alpha_1+\alpha_5}(tu) = x_{\alpha_6}(tu)$$

(это рассуждение остаётся в силе и при $\varepsilon = 1$, так как участвующие в соотношении корни длинные). $\square$

Следствие 2.35. *Отображение ρ является изоморфизмом кольца R на некоторое его подкольцо R' ; в случае $\varepsilon = 1$ то же верно и для эндоморфизма Фробениуса F .*

Теперь докажем сюръективность полученных эндоморфизмов кольца R . Заметим, что мы находимся в ситуации, в которой для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ выполнено

$$i_C \varphi(G(\Phi, R)) = C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} \subseteq G(\Phi, R')$$

(причём при $\varepsilon = 0$ имеет место равенство). Покажем, что $R' = R$.

Лемма 2.36. *Если для некоторого $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ имеет место включение $C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} \subseteq G(\Phi, R')$, где R' — подкольцо в R , то $R' = R$.*

Доказательство. Обозначим матричные единицы через E_{ij} . Можно проверить, что

$$\begin{aligned} ((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2 &= E_{6,12}, \\ \omega_{\alpha_6}((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_5}(1) - 1))^2 \omega_{\alpha_6}^{-1} &= E_{12,6}. \end{aligned}$$

Произведение этих матричных единиц даёт матричную единицу $E_{6,6}$. В матрице $h_{\alpha_1}(t)$ элемент на позиции $(6, 6)$ равен t . Таким образом, с помощью нашей группы $G(\Phi, R)$ сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу вида $tE_{6,6}$, где $t \in R^*$.

Предположим теперь, что R' — собственное подкольцо в R . Так как $C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} \subseteq G(\Phi, R')$, то подкольцо кольца $M_n(R)$, порождённое всеми элементами группы $G(\Phi, R)$, должно переходить в подкольцо кольца $M_n(R')$, порождённое элементами группы $G(\Phi, R')$. Следовательно, все элементы матриц $C(tE_{6,6})C^{-1}$ при $t \in R^*$ должны лежать в подкольце R' .

Очевидно, в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, полностью состоящего из необратимых элементов. Значит, существует такая пара индексов i, j , что элементы $C_{i,6}$ и $(C^{-1})_{6,j}$ обратимы. Отсюда заключаем, что при $t \in R^*$

$$C_{i,6} t (C^{-1})_{6,j} = (C(tE_{6,6})C^{-1})_{i,j} \in R',$$

то есть

$$C_{i,6} R^* (C^{-1})_{6,j} = R^* \subseteq R'.$$

Но локальное кольцо R аддитивно порождается множеством R^* , поэтому в действительности $R \subseteq R'$, что даёт требуемое равенство $R' = R$. $\square$

Следствие 2.37. *Отображение ρ является автоморфизмом кольца R ; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также является автоморфизмом кольца R , то есть в этом случае R — совершенное кольцо характеристики 3. При этом выполнено $C \cdot G(\Phi, R) \cdot C^{-1} = G(\Phi, R)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 2.27. $\square$

Таким образом, показано, что композиция $i_C \circ \varphi$ исходного автоморфизма φ группы Шевалле и некоторого сопряжения (замены базиса) с помощью матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$, нормализующей данную группу, является композицией $\delta^\varepsilon \circ \rho$, где δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — кольцевой автоморфизм. Это завершает доказательство теоремы 2.3.

2.7 Завершение доказательства основных теорем

Для краткости в настоящем разделе под внутренним автоморфизмом понимается именно строго внутренний автоморфизм в смысле определения 1.16.

В данном разделе доказываются теоремы 2.2 и 2.4 о том, что автоморфизмы-сопряжения являются внутренними. Подробное доказательство проводится для типа $\mathbf{G}_2$; для типа $\mathbf{F}_4$ рассуждение полностью аналогично.

Пусть Φ — система корней типа $\mathbf{G}_2$, R — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой, $J = \text{Rad}(R)$, $k = R/J$, $n = 14$. Докажем теорему 2.4. Пусть $C \in \text{GL}_n(R)$ нормализует $G(R)$:

$$C \cdot G(R) \cdot C^{-1} = G(R).$$

Наша цель — показать, что $C \in R^* \cdot G(R)$.

Так как $M_n(J)$ — радикал в $M_n(R)$, имеем $C \cdot M_n(J) \cdot C^{-1} = M_n(J)$, откуда $C \cdot (1 + M_n(J)) \cdot C^{-1} = 1 + M_n(J)$ и

$$C \cdot E_J \cdot C^{-1} = E_J,$$

так как $E_J = G(R) \cap (1 + M_n(J))$. Образ $\bar{C}$ при факторизации по J индуцирует автоморфизм-сопряжение группы $G(k)$ над полем k характеристики 3.

Лемма 2.38. *Любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над полем k характеристики 3 является внутренним.*

Доказательство. Пусть $C \in \text{GL}_n(k)$ нормализует $G(k)$. По теореме Стейнберга $i_C = i_g \circ \delta^\varepsilon \circ \rho$, откуда $i_{g^{-1}} \circ i_C = i_{C'}$ и $i_{C'} = \delta^\varepsilon \circ \rho$ для некоторого $C' \in \text{GL}_n(k)$. Заметим, что $\delta^\varepsilon \circ \rho$ переводит $x_\alpha(1) \mapsto x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ для всех α (так как ρ — полевой автоморфизм, фиксирующий 1).

Допустим, что $\varepsilon = 1$. Тогда $C'x_\alpha(1) = x_{\delta(\alpha)}(1)C'$ для всех $\alpha \in \Phi$. Записав эти соотношения для корней $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$ (положительно порождающих Φ) как систему линейных уравнений относительно $n^2 = 196$ элементов матрицы C' над полем k и решив эту систему, находим, что пространство решений одномерно и порождается матрицей, определитель которой равен нулю. Это противоречит условию $C' \in \text{GL}_n(k)$.

Следовательно, $\varepsilon = 0$ и $i_{C'} = \rho$, то есть $C'x_\alpha(1) = x_\alpha(1)C'$ для всех α . Записав систему и решив её, находим, что пространство решений одномерно, то есть C' — скалярная матрица. Значит, $i_C = i_g \circ i_{C'} = i_g$ — внутренний автоморфизм. $\square$

Из леммы 2.38 следует $i_{\bar{C}} = i_{g'}$ для $g' \in G(k)$ (с точностью до скаляра). Выберем $g \in G(R)$ с $\bar{g} = g'$ и положим $C' = g^{-1} \cdot C$. Тогда C' нормализует $G(R)$ и $\bar{C}' \in k^*$. После домножения на подходящий обратимый скаляр можем считать, что $C' = 1 + Y$, $Y \in M_n(J)$.

Для каждого $\alpha \in \Phi$ выполнено

$$C' \cdot x_\alpha(1) = x_\alpha(1) \cdot g_\alpha \cdot C', \quad (2.1)$$

где $g_\alpha \in E_J$. Каждый элемент g_α раскладывается в произведение (см. [16]):

$$h_{\alpha_1}(1 + a_{\alpha,1}) \cdot h_{\alpha_2}(1 + a_{\alpha,2}) \cdot \prod_{\beta \in \Phi^+} x_\beta(b_{\alpha,\beta}) \cdot \prod_{\beta \in \Phi^+} x_{-\beta}(c_{\alpha,\beta}),$$

где $a_{\alpha,i}, b_{\alpha,\beta}, c_{\alpha,\beta} \in J$.

При умножении C' на элементы из E_J и скаляры из $1 + J$ получается матрица, по-прежнему нормализующая $G(R)$ и сравнимая с единичной по модулю J .

Лемма 2.39. *Существует набор элементов $d \in 1 + J$, $a_1, a_2 \in 1 + J$, $b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6 \in J$ такой, что для матрицы*

$$\begin{aligned} C'' = & d \cdot h_{\alpha_1}(a_1) \cdot h_{\alpha_2}(a_2) \cdot x_{-\alpha_2}(b_2) \cdot x_{-\alpha_6}(b_6) \cdot x_{-\alpha_5}(b_5) \cdot x_{-\alpha_4}(b_4) \cdot x_{-\alpha_3}(b_3) \cdot x_{-\alpha_1}(b_1) \times \\ & \times C' \cdot x_{\alpha_1}(c_1) \cdot x_{\alpha_3}(c_3) \cdot x_{\alpha_4}(c_4) \cdot x_{\alpha_5}(c_5) \cdot x_{\alpha_6}(c_6) \cdot x_{\alpha_2}(c_2) \end{aligned}$$

выполнено $C'' = 1 + Y'$, где $Y' \in M_n(J)$ содержит нули на $n + 1 = 15$ конкретных позициях.

Доказательство. Последовательно обнуляем позиции матрицы Y домножениями слева и справа, следя за тем, чтобы ранее обнулённые позиции не нарушались.

Шаг 1. Домножим $C^{(0)} = C'$ слева на $x_{-\alpha_1}(-C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(0)} / C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(0)})$. Получим $C^{(1)}$ с $C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(1)} = 0$.

Шаг 2. Домножим $C^{(1)}$ слева на $x_{-\alpha_3}(-C_{\alpha_4, \alpha_6}^{(1)} / C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(1)})$. Получим $C^{(2)}$ с $C_{\alpha_4, \alpha_6}^{(2)} = 0$, причём $C_{\alpha_5, \alpha_6}^{(2)} = 0$ сохраняется, так как в матрице $x_{-\alpha_3}(t)$ строка α_5 содержит лишь диагональную единицу.

Шаг 3. Домножим $C^{(2)}$ слева на $x_{-\alpha_4}(C_{\alpha_3, \alpha_6}^{(2)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(2)})$. Получим $C^{(3)}$ с $C_{\alpha_3, \alpha_6}^{(3)} = 0$; все предыдущие нули сохраняются.

Шаг 4. Домножим $C^{(3)}$ слева на $x_{-\alpha_5}(C_{\alpha_1, \alpha_6}^{(3)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(3)})$. Получим $C^{(4)}$ с $C_{\alpha_1, \alpha_6}^{(4)} = 0$.

Шаг 5. Домножим $C^{(4)}$ слева на $x_{-\alpha_6}(C_{h_1, \alpha_6}^{(4)}/(2C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(4)}))$. Получим $C^{(5)}$ с $C_{h_1, \alpha_6}^{(5)} = 0$ (здесь используется обратимость двойки).

Шаг 6. Домножим $C^{(5)}$ слева на $x_{-\alpha_2}(-C_{\alpha_4, \alpha_5}^{(5)}/C_{\alpha_5, \alpha_5}^{(5)})$. Получим $C^{(6)}$ с $C_{\alpha_4, \alpha_5}^{(6)} = 0$.

Шаг 7. Домножим $C^{(6)}$ справа на $x_{\alpha_1}(-C_{\alpha_6, \alpha_5}^{(6)}/C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(6)})$. Получим $C^{(7)}$ с $C_{\alpha_6, \alpha_5}^{(7)} = 0$.

Шаг 8. Домножим $C^{(7)}$ справа на $x_{\alpha_3}(-C_{\alpha_4, \alpha_2}^{(7)}/(2C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(7)}))$. Получим $C^{(8)}$ с $C_{\alpha_4, \alpha_2}^{(8)} = 0$.

Шаг 9. Домножим $C^{(8)}$ справа на $x_{\alpha_4}(C_{\alpha_4, h_2}^{(8)}/C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(8)})$. Получим $C^{(9)}$ с $C_{\alpha_4, h_2}^{(9)} = 0$.

Шаг 10. Домножим $C^{(9)}$ справа на $x_{\alpha_5}(C_{\alpha_4, -\alpha_2}^{(9)}/C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(9)})$. Получим $C^{(10)}$ с $C_{\alpha_4, -\alpha_2}^{(10)} = 0$.

Шаг 11. Домножим $C^{(10)}$ справа на $x_{\alpha_6}(C_{\alpha_5, -\alpha_1}^{(10)}/C_{\alpha_5, \alpha_5}^{(10)})$. Получим $C^{(11)}$ с $C_{\alpha_5, -\alpha_1}^{(11)} = 0$.

Шаг 12. Домножим $C^{(11)}$ справа на $x_{\alpha_2}(C_{\alpha_4, \alpha_3}^{(11)}/(2C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(11)}))$. Получим $C^{(12)}$ с $C_{\alpha_4, \alpha_3}^{(12)} = 0$. Итого 12 обнулённых недиагональных позиций.

Шаг 13. Положим $C^{(13)} = (C_{h_1, h_1}^{(12)})^{-1} \cdot C^{(12)}$. Тогда $C_{h_1, h_1}^{(13)} = 1$, то есть $Y_{h_1, h_1}^{(13)} = 0$.

Шаг 14. Домножим на $h_{\alpha_1}((C_{\alpha_6, \alpha_6}^{(13)})^{-1})$ и $h_{\alpha_2}((C_{\alpha_4, \alpha_4}^{(13)})^{-1})$. У матрицы $h_{\alpha_1}(a)$ на позиции (α_6, α_6) стоит a , на (α_4, α_4) стоит 1; у $h_{\alpha_2}(a)$ на (α_4, α_4) стоит a , на (α_6, α_6) стоит 1; у обеих на (h_1, h_1) стоит 1. Поэтому получаем C''' с $C''_{\alpha_4, \alpha_4} = C''_{\alpha_6, \alpha_6} = 1$, то есть $Y'_{\alpha_4, \alpha_4} = Y'_{\alpha_6, \alpha_6} = 0$, при сохранении всех предыдущих нулей.

Всего обнулено $12 + 3 = 15 = n + 1$ позиций. $\square$

Рассмотрим матрицу $C'' = 1 + Y'$ из леммы 2.39. Она по-прежнему нормализует $G(R)$ и сравнима с единичной по модулю J . Соотношения (2.1) для C'' при корнях $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$ дают систему полиномиальных уравнений относительно $n^2 - (n + 1) + 4n = 237$ неизвестных $Y'_{ij}, a_{\alpha, i}, b_{\alpha, i}, c_{\alpha, i}$ из радикала.

Как показывает вычисление, линеаризация данной системы является системой полного ранга 237. По теореме 2.10 все переменные равны нулю. В частности, $Y' = 0$, то есть $C'' = 1$, и исходная матрица C лежит в $R^* \cdot G(R)$.

Теорема 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.2 проводится по той же схеме. Сначала с использованием теоремы Стейнберга устанавливается, что любой автоморфизм-сопряжение группы $G(\mathbf{F}_4, k)$ над полем k характеристики 2 является внутренним (аналог леммы 2.38 для типа $\mathbf{F}_4$, проверяемый таким же прямым вычислением). Затем матрица C редуцируется к виду $C' = 1 + Y$, $Y \in M_n(J)$, $n = 52$, после чего последовательными домножениями на корневые и диагональные элементы обнуляются $n + 1 = 53$ позиции матрицы Y , и метод линеаризации показывает, что все оставшиеся переменные равны нулю. Отметим, однако, что теорему 2.2 можно получить, опираясь и на результат о нормализаторе группы Шевалле типа $\mathbf{F}_4$, установленный в работе [23]. В приведённом там доказательстве обратимость двойки существенно используется лишь для того, чтобы напрямую сослаться на факт внутренности всякого автоморфизма-сопряжения над полем (аналог леммы 2.38). В нашем случае поле имеет характеристику 2, но указанное утверждение по-прежнему верно и проверяется напрямую — так же, как для типа $\mathbf{G}_2$ в лемме 2.38. Поэтому рассуждение из [23] (в частности, аналог результата леммы 2.39 в нём) практически без изменений переносится на случай необратимой двойки.

Из теорем 2.1 и 2.2 немедленно следует, что любой автоморфизм $G(\mathbf{F}_4, R)$ стандартен (теорема 2.5). Аналогично, из теорем 2.3 и 2.4 следует стандартность всех автоморфизмов $G(\mathbf{G}_2, R)$ (теорема 2.6).

Глава 3. Ш-жесткость присоединённых групп Шевалле малых рангов над коммутативными кольцами

В данной главе исследуется Ш-жесткость присоединённых групп Шевалле малых рангов над коммутативными кольцами: для типов A_1 , A_2 , B_2 с обратимой двойкой и для типа G_2 с обратимыми двойкой и тройкой доказывается, что всякий локально внутренний эндоморфизм является внутренним. Результаты этой главы получены в работе [70].

В разделе 3.1 вводятся понятия локально внутреннего эндоморфизма и множества Шафаревича–Тейта $\text{Ш}(G)$. Разделы 3.2 и 3.3 содержат структурные факты о группах Шевалле и изложение метода локализации, используемые далее. В разделах 3.4–3.7 последовательно доказывается Ш-жесткость для типов A_1 , A_2 , B_2 и G_2 .

Отметим, что в настоящей главе термин «внутренний» применительно к автоморфизму группы G понимается в общем теоретико-групповом смысле; в контексте групп Шевалле это в точности соответствует строго внутреннему автоморфизму в смысле определения 1.16.

3.1 Локально внутренние эндоморфизмы и множество Шафаревича–Тейта, формулировка основной теоремы

Всякий внутренний автоморфизм сохраняет классы сопряжённости. В настоящей главе мы исследуем обратный вопрос: когда всякий сохраняющий классы эндоморфизм является внутренним?

Определение 3.1. Эндоморфизм $\varphi \in \text{End}(G)$ группы G называется *локально внутренним* (или *сохраняющим классы*, ср. [55]), если для всякого $g \in G$ элементы g и $\varphi(g)$ сопряжены в G .

Эта задача тесно связана с локально-глобальным инвариантом, введённым Оно [52; 53]. Пусть G действует на себя сопряжениями, и рассмотрим отмеченное множество $H^1(G, G)$. Среди его элементов выделяют те

классы когомологий, ограничения которых на каждую циклическую подгруппу группы G тривиальны; это подмножество обозначается через $\text{Ш}(G)$ и называется *множеством Шафаревича–Тейта* группы G .

Определение 3.2. Группа G называется *Ш-жёсткой*, если $\text{Ш}(G)$ состоит из одного элемента.

Удобный способ формулировки Ш-жёсткости (восходящий к Мазуру, см., например, [46; 52; 55]) состоит в терминах сохраняющих классы морфизмов. Пусть $\text{End}_c(G)$ (соответственно, $\text{Aut}_c(G)$) обозначает множество эндоморфизмов (соответственно, автоморфизмов) φ таких, что $\varphi(g)$ сопряжён с g для всех $g \in G$. Тогда $\text{Ш}(G)$ тривиально тогда и только тогда, когда всякий сохраняющий классы эндоморфизм является внутренним, то есть

$$\text{End}_c(G) = \text{Inn}(G),$$

— свойство, которое часто называют *Свойством E* (*Property E*), см., например, [46]. Очевидно, что $\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}_c(G) \subseteq \text{End}_c(G)$.

Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней, а R — коммутативное кольцо. Через $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ мы обозначаем присоединённую группу Шевалле, а через $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ — её элементарную подгруппу. Для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ мы всюду предполагаем, что $2 \in R^*$, тогда как для типа $\mathbf{G}_2$ дополнительно предполагается, что $3 \in R^*$.

Основной результат настоящей главы формулируется следующим образом.

Теорема 3.3. Пусть R — коммутативное кольцо.

- (1) Предположим, что $2 \in R^*$, и пусть $\Phi \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ является внутренним. Более того, всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ является внутренним при $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$, а также при $\Phi = \mathbf{A}_1$ при дополнительном предположении, что $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ нормальна в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$.
- (2) Предположим, что $2, 3 \in R^*$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним, и всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним.

В частности, все перечисленные выше группы являются Ш-жёсткими.

Замечание 3.4. Для локальных колец и систем корней Φ ранга > 1 Ш-жѐсткость групп Шевалле и их элементарных подгрупп (в предположении обратимости соответствующих элементов кольца) была заявлена в [25]. Однако приведѐнное там доказательство содержит пробел: поскольку локально внутренний эндоморфизм автоматически инъективен, это рассуждение фактически требует структурного описания *инъективных эндоморфизмов* групп Шевалле над локальными кольцами, тогда как имеющийся результат касается *автоморфизмов*. Приведѐнные ниже доказательства для типов малых рангов A_1 , A_2 , B_2 и G_2 не зависят от рассуждения из [25] и не используют ни теорему о классификации автоморфизмов, ни какое-либо структурное описание инъективных эндоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами.

3.2 Некоторые структурные факты

В настоящем разделе фиксируются обозначения и напоминаются структурные результаты о группах Шевалле над коммутативными и локальными кольцами, дополняющие изложение раздела 1.3 и используемые при доказательстве теоремы 3.3.

Пусть Φ — приведѐнная неприводимая система корней, а R — коммутативное кольцо с 1. Через $G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$ обозначаем группу Шевалле типа $(\Phi, \mathcal{P})$ над R для решѐтки $Q(\Phi) \subseteq \mathcal{P} \subseteq P(\Phi)$ (определение 1.9); крайние случаи $\mathcal{P} = Q(\Phi)$ и $\mathcal{P} = P(\Phi)$ соответствуют присоединѐнной и универсальной (односвязной) формам $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ и $G_{\text{sc}}(\Phi, R)$. Если явно не оговорено противное, далее мы работаем с присоединѐнной формой $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ и её элементарной подгруппой $E(\Phi, R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ (см. определения 1.6, 1.7). Соотношения (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) между корневыми элементами $x_{\alpha}(t)$ и элементами Вейля ω_{α} (определение 1.8) используются всюду далее без специальных оговорок.

Зафиксируем систему положительных корней Φ^+ с простыми корнями Δ и расщепимый максимальный тор $T \leq G = G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$. Положим

$$U = U(\Phi, R) = \langle x_{\alpha}(t) \mid \alpha \in \Phi^+, t \in R \rangle, \quad V = V(\Phi, R) = \langle x_{-\alpha}(t) \mid \alpha \in \Phi^+, t \in R \rangle,$$

а подгруппу, порождённую полупростыми элементами $h_\alpha(t)$ из определения 1.8, обозначим через

$$H = H(\Phi, R) = \langle h_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi, t \in R^* \rangle.$$

Тогда $H = T \cap E$, а факторгруппа $N_E(H)/H$ канонически изоморфна группе Вейля $W(\Phi)$, см., например, [28; 59].

Разложения Брюа и Гаусса. Если R — поле, то всякий $g \in G(\Phi, R)$ допускает разложение Брюа

$$g = t u \mathbf{w} u', \quad t \in T, \mathbf{w} \in W(\Phi), u, u' \in U, \quad (3.1)$$

причём $t \in H$, когда $g \in E$ (см., например, [28; 59]). Если R — *локальное* кольцо (не обязательно поле), то будет использоваться разложение Гаусса

$$g = t u_1 v u_2 \quad (t \in T, u_1, u_2 \in U, v \in V), \quad (3.2)$$

причём для $g \in E$ снова $t \in H$ (см., например, [16]). Нам потребуется лишь существование таких факторизаций (и стандартная единственность упорядоченной факторизации внутри U и внутри V после фиксации порядка на Φ^+).

Тождество ранга 1. Для любого корня α подгруппа $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$ является подгруппой Шевалле ранга 1. В частности, всякий раз, когда $1 + uv \in R^*$, выполнено стандартное тождество

$$x_\alpha(u) x_{-\alpha}(v) = x_{-\alpha}\left(\frac{v}{1 + uv}\right) h_\alpha(1 + uv) x_\alpha\left(\frac{u}{1 + uv}\right), \quad (3.3)$$

см., например, [59]. Над локальным кольцом $(R, \mathfrak{m})$ оно применимо, в частности, к $u \in \mathfrak{m}$, поскольку $1 + \mathfrak{m} \subseteq R^*$.

Нормальность элементарной подгруппы. Если Φ имеет ранг ≥ 2 , то $E(\Phi, R) \trianglelefteq G(\Phi, R)$ для всех коммутативных колец R (Суслин, Копейко, Таддеи, Васерштейн, см. [61; 62]). Для ранга 1 (тип $\mathbf{A}_1$) нормальность, вообще говоря, может не выполняться [36].

Тождество для следа. Пусть $\text{Ad}: G_{\text{ad}}(\Phi, R) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}_R)$ — присоединённое представление. Для длинного корня α след $\text{tr}(\text{Ad}(x_\alpha(t)x_{-\alpha}(s)))$ является полиномом от s, t с целыми коэффициентами. Например, для типов ранга 2,

изучаемых в разделах 3.5 и 3.6, имеем:

$$\mathrm{tr}(x_\alpha(t)x_{-\alpha}(s)) = \begin{cases} s^2t^2 + 6st + 8, & \Phi = \mathbf{A}_2, \\ s^2t^2 + 6st + 10, & \Phi = \mathbf{B}_2, \end{cases} \quad (s, t \in R), \quad (3.4)$$

где след берётся в присоединённом представлении.

3.3 Метод локализации

В дальнейших доказательствах мы будем многократно сводить рассуждения над произвольным коммутативным кольцом R к рассуждениям над локальными кольцами и далее над полями. Этот приём основан на классической конструкции локализации (см., например, [19]).

Определение 3.5. Подмножество $Y \subseteq R$ называется *мультипликативно замкнутым* в R , если $1 \in Y$ и $y_1y_2 \in Y$ для всех $y_1, y_2 \in Y$.

Для мультипликативно замкнутого $Y \subseteq R$ рассмотрим на множестве пар (a, s) с $a \in R$, $s \in Y$ отношение эквивалентности $\sim$, определяемое правилом

$$\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \iff \exists u \in Y: (at - bs)u = 0.$$

Класс эквивалентности пары (a, s) обозначаем через $\frac{a}{s}$, а множество всех классов — через $Y^{-1}R$. На $Y^{-1}R$ имеется естественная структура коммутативного кольца с 1, заданная формулами

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Определение 3.6. Кольцо $Y^{-1}R$ называется *кольцом частных кольца R по Y* (или *локализацией R по Y*).

Каноническое отображение $R \rightarrow Y^{-1}R$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, является гомоморфизмом колец; его ядро состоит в точности из элементов $a \in R$, аннулируемых некоторым элементом Y .

Пусть $\mathfrak{p} \subset R$ — простой идеал. Тогда множество $Y = R \setminus \mathfrak{p}$ мультипликативно замкнуто (это эквивалентно определению простого идеала). В этом

случае кольцо частных $Y^{-1}R$ обозначают через $R_{\mathfrak{p}}$, а соответствующий процесс перехода от R к $R_{\mathfrak{p}}$ называют *локализацией по $\mathfrak{p}$* . Элементы вида $\frac{a}{s}$ с $a \in \mathfrak{p}$ образуют идеал $\mathfrak{M}$ в $R_{\mathfrak{p}}$. Если $\frac{b}{t} \notin \mathfrak{M}$, то $b \in Y = R \setminus \mathfrak{p}$, а потому $\frac{b}{t}$ обратим в $R_{\mathfrak{p}}$ с обратным $\frac{t}{b}$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ совпадает с множеством всех необратимых элементов кольца $R_{\mathfrak{p}}$ и потому является его единственным максимальным идеалом. Таким образом, $R_{\mathfrak{p}}$ — локальное кольцо.

В случае максимального идеала $\mathfrak{m} \subset R$ радикал Джекобсона $\text{Rad } R_{\mathfrak{m}}$ совпадает с этим единственным максимальным идеалом, а соответствующее поле вычетов мы обозначаем через

$$k(\mathfrak{m}) = R_{\mathfrak{m}} / \text{Rad } R_{\mathfrak{m}}.$$

Предложение 3.7. *Всякое коммутативное кольцо R с 1 вкладывается в декартово произведение своих локализаций по максимальным идеалам*

$$S = \prod_{\mathfrak{m} \text{ — максимальный идеал в } R} R_{\mathfrak{m}}$$

посредством диагонального отображения $a \mapsto \prod_{\mathfrak{m}} \left(\frac{a}{1}\right)_{\mathfrak{m}}$ (см., например, [19]).

По функториальности конструкции групп Шевалле отсюда получаются вложения

$$G(\Phi, R) \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m}} G(\Phi, R_{\mathfrak{m}}), \quad E(\Phi, R) \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m}} E(\Phi, R_{\mathfrak{m}}).$$

Кроме того, для каждого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset R$ редукция по $\text{Rad } R_{\mathfrak{m}}$ даёт гомоморфизмы

$$G(\Phi, R_{\mathfrak{m}}) \rightarrow G(\Phi, k(\mathfrak{m})), \quad E(\Phi, R_{\mathfrak{m}}) \rightarrow E(\Phi, k(\mathfrak{m})).$$

Эта цепочка редукций $R \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \prod_{\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m})$ неоднократно используется в последующих разделах.

3.4 Ш-жѐсткость для типа A_1

На протяжении всего этого раздела R — коммутативное кольцо с $1/2 \in R$, и

$$E(\mathbf{A}_1) = E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$$

обозначает присоединённую элементарную группу Шевалле типа $\mathbf{A}_1$ в стандартной реализации матрицами 3×3 . Она порождается корневыми унитарными

$$x_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t^2 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (t \in R).$$

Соотношения ранга 1

Мы будем использовать стандартные соотношения в типе $\mathbf{A}_1$:

1. $x_{\pm\alpha}(t)x_{\pm\alpha}(s) = x_{\pm\alpha}(t+s)$, следовательно, $x_{\pm\alpha}(t)^{-1} = x_{\pm\alpha}(-t)$;
2. для $u \in R^*$,

$$h_\alpha(u)x_\alpha(t)h_\alpha(u)^{-1} = x_\alpha(u^2t), \quad h_\alpha(u)x_{-\alpha}(t)h_\alpha(u)^{-1} = x_{-\alpha}(u^{-2}t);$$

3. стандартное разложение ранга 1

$$x_\alpha(t)x_{-\alpha}(s) = x_{-\alpha}\left(\frac{s}{1+ts}\right)h_\alpha(1+ts)x_\alpha\left(\frac{t}{1+ts}\right) \quad (1+ts \in R^*).$$

3.4.1 Подготовка и нормализация

Пусть $\varphi: E(\mathbf{A}_1) \rightarrow E(\mathbf{A}_1)$ — локально внутренний эндоморфизм, то есть $\varphi(g)$ сопряжён с g для каждого $g \in E(\mathbf{A}_1)$. Умножая φ на подходящий внутренний автоморфизм i_y (сопряжение элементом $y \in E(\mathbf{A}_1)$), мы можем считать, что

$$\varphi(x_\alpha(1)) = x_\alpha(1). \quad (3.5)$$

Тогда автоматически $\varphi(x_\alpha(-1)) = \varphi(x_\alpha(1)^{-1}) = x_\alpha(-1)$.

Замечание 3.8 (инвариантность следа). Поскольку $\varphi(g)$ сопряжён с g для каждого $g \in E(\mathbf{A}_1)$, мы будем свободно использовать равенство $\text{tr}(\varphi(X)) = \text{tr}(X)$ для всех $X \in E(\mathbf{A}_1)$.

3.4.2 Образы корневых элементов

Шаг 1: ограничения на след для $\varphi(x_{-\alpha}(s))$

Запишем

$$\varphi(x_{-\alpha}(s)) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad a + e + i = \operatorname{tr}(\varphi(x_{-\alpha}(s))) = \operatorname{tr}(x_{-\alpha}(s)) = 3.$$

Непосредственное перемножение показывает, что для всех $s, t \in R$

$$\operatorname{tr}(x_{-\alpha}(s)x_{\alpha}(t)) = s^2t^2 + 4st + 3. \quad (3.6)$$

Теперь подставим $t = \pm 1$. Используя (3.5) (и, следовательно, $\varphi(x_{\alpha}(\pm 1)) = x_{\alpha}(\pm 1)$), получаем

$$\operatorname{tr}(\varphi(x_{-\alpha}(s)x_{\alpha}(\pm 1))) = \operatorname{tr}(\varphi(x_{-\alpha}(s))x_{\alpha}(\pm 1)) = (a + e + i) + d \pm (f + 2g).$$

Сравнение с (3.6) при $t = \pm 1$ даёт систему

$$d + (f + 2g) = s^2 + 4s, \quad d - (f + 2g) = s^2 - 4s,$$

откуда

$$d = s^2, \quad f + 2g = 4s. \quad (3.7)$$

Шаг 2: Централизатор элемента $x_{\alpha}(1)$

Лемма 3.9. *Централизатор элемента $x_{\alpha}(1)$ в $M_3(R)$ в точности состоит из матриц вида*

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 2h \\ 0 & a & 0 \\ 0 & h & a \end{pmatrix} \quad (a, b, h \in R).$$

Доказательство. Пусть $X = (x_{ij}) \in M_3(R)$ коммутирует с $x_{\alpha}(1)$. Выписывая равенство $Xx_{\alpha}(1) = x_{\alpha}(1)X$ и сравнивая элементы матриц,

последовательно получаем $x_{21} = x_{23} = 0$, затем $x_{31} = 0$, затем $x_{22} = x_{11} = x_{33}$ и, наконец, $x_{13} = 2x_{32}$. Обозначая $a = x_{11}$, $b = x_{12}$, $h = x_{32}$, получаем требуемый вид. $\square$

Поскольку $x_\alpha(t)$ коммутирует с $x_\alpha(1)$, элемент $\varphi(x_\alpha(t))$ коммутирует с $\varphi(x_\alpha(1)) = x_\alpha(1)$. Следовательно, по лемме 3.9

$$\varphi(x_\alpha(t)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2\gamma \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad 3\alpha = \text{tr}(\varphi(x_\alpha(t))) = \text{tr}(x_\alpha(t)) = 3. \quad (3.8)$$

Шаг 3: Определение $\beta(t)$ и $\gamma(t)$

Применим инвариантность следа к элементам $x_{-\alpha}(\pm 1)x_\alpha(t)$:

$$\text{tr}(\varphi(x_{-\alpha}(\pm 1)x_\alpha(t))) = \text{tr}(\varphi(x_{-\alpha}(\pm 1))\varphi(x_\alpha(t))).$$

По (3.7) при $s = \pm 1$ матрица $\varphi(x_{-\alpha}(\pm 1))$ удовлетворяет условиям $d = 1$ и $f + 2g = \pm 4$, поэтому перемножение с (3.8) и переход к следу дают

$$\text{tr}(\varphi(x_{-\alpha}(\pm 1))\varphi(x_\alpha(t))) = 3\alpha + \beta \pm 4\gamma = 3 + \beta \pm 4\gamma.$$

С другой стороны, из (3.6) получаем $\text{tr}(x_{-\alpha}(\pm 1)x_\alpha(t)) = t^2 \pm 4t + 3$. Следовательно,

$$\beta = t^2, \quad \gamma = t. \quad (3.9)$$

Шаг 4: Нормализация $\varphi(x_{-\alpha}(1))$ сопряжением

Запишем (используя (3.7) при $s = 1$)

$$\varphi(x_{-\alpha}(1)) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & e & 4 - 2g \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad a + e + i = 3.$$

Сопряжением элементом $x_\alpha(\mu)$ не изменяет $\varphi(x_\alpha(t))$ (поскольку все матрицы из леммы 3.9 коммутируют с $x_\alpha(\mu)$). Более точно, замена φ на $i_{x_\alpha(\mu)^{-1}} \circ \varphi$

переводит элемент g , стоящий на месте $(3, 1)$, в $g - \mu$. Выбирая $\mu = g - 1$, получаем $g = 1$, и тогда из (3.7) следует, что $f = 2$. Таким образом, мы можем считать, что

$$\varphi(x_{-\alpha}(1)) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & e & 2 \\ 1 & h & i \end{pmatrix}, \quad a + e + i = 3. \quad (3.10)$$

Шаг 5: Квадратичное соотношение и его следствия

Используем стандартное тождество ранга 1

$$(x_{\alpha}(-1) x_{-\alpha}(1) x_{\alpha}(-1))^2 = 1. \quad (3.11)$$

Применяя φ к (3.11) и используя (3.5), (3.10), получаем

$$1 = \left(x_{\alpha}(-1) \varphi(x_{-\alpha}(1)) x_{\alpha}(-1) \right)^2.$$

Вычисляя явно сопряжённую матрицу $x_{\alpha}(-1) \varphi(x_{-\alpha}(1)) x_{\alpha}(-1)$, а затем её квадрат, из элемента на месте $(2, 1)$ получаем $a + e = 2$, откуда $i = 1$ (так как $a + e + i = 3$). Далее, из элемента на месте $(3, 1)$ следует, что $a = 1 - h$, так что $e = 1 + h$. Подставляя обратно и сравнивая остальные элементы, получаем

$$c = -2h, \quad b = -h^2,$$

и, следовательно,

$$\varphi(x_{-\alpha}(1)) = \begin{pmatrix} 1 - h & -h^2 & -2h \\ 1 & 1 + h & 2 \\ 1 & h & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Шаг 6: Редукция сопряжением

Заметим разложение

$$\varphi(x_{-\alpha}(1)) = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_{-\alpha}(1) \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $P = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\varphi(x_{-\alpha}(-1)) = P^{-1}x_{-\alpha}(-1)P$ в $\mathrm{GL}_3(R)$.

Поскольку $\varphi(x_{-\alpha}(-1))$ сопряжён с $x_{-\alpha}(-1)$ внутри $E(\mathbf{A}_1)$, существует элемент $A \in E(\mathbf{A}_1)$ такой, что $A^{-1}x_{-\alpha}(-1)A = \varphi(x_{-\alpha}(-1))$. Следовательно, $C := AP^{-1}$ централизует $x_{-\alpha}(-1)$, и мы можем записать

$$A = CP, \quad Cx_{-\alpha}(-1) = x_{-\alpha}(-1)C.$$

Рассуждая, как в лемме 3.9, проверяем, что централизатор $x_{-\alpha}(-1)$ в $M_3(R)$ состоит из матриц вида

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 2c \\ c & 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_{-\alpha}(c/a) \quad (a \in R^*).$$

Поэтому, обращая матрицу A и переобозначая a^{-1} , $-h$, $-d$ соответственно через a , h , d , с точностью до множителя $x_{-\alpha}(c/a) \in E(\mathbf{A}_1)$, мы приходим к матрице

$$B := a \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+hd) & ah & 0 \\ ad & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in E(\mathbf{A}_1) \subseteq G(\mathbf{A}_1).$$

Лемма 3.10. *Ситуация*

$$B = \begin{pmatrix} a(1+hd) & ah & 0 \\ ad & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in G(\mathbf{A}_1)$$

возможна лишь при $h = d = 0$, $a = 1$.

Доказательство. Вложим R в произведение своих локализаций $S = \prod_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$. Достаточно показать, что для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ из условия $B_{\mathfrak{m}} \in G(\mathbf{A}_1, R_{\mathfrak{m}})$ следует, что $h_{\mathfrak{m}} = d_{\mathfrak{m}} = 0$ и $a_{\mathfrak{m}} = 1$.

Зафиксируем $\mathfrak{m}$ и будем рассматривать $R_{\mathfrak{m}}$ как локальное кольцо. Используя разложение Гаусса $G = TUVU$ для $\mathbf{A}_1$, можно записать

$$B_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_{\alpha}(\alpha) x_{-\alpha}(\beta) x_{\alpha}(\gamma)$$

с $t \in R_m^*$ и $\alpha, \beta, \gamma \in R_m$. Перемножая эти множители явно, получаем (ср. элементы на местах $(3, 1)$ и $(2, 3)$)

$$\beta(\alpha\beta + 1) = 0, \quad \beta(\beta\gamma + 1) = 0.$$

Если $\beta \in R_m^*$, то $\alpha\beta + 1 = \beta\gamma + 1 = 0$, и получающаяся матрица имеет нуль на диагональных местах $(2, 2)$ и $(1, 1)$, что несовместимо с блочным видом матрицы B_m . Следовательно, β не является обратимым, то есть $\beta \in \mathfrak{m}R_m$. Но тогда $\alpha\beta \in \mathfrak{m}R_m$, так что $\alpha\beta + 1 \in 1 + \mathfrak{m}R_m \subseteq R_m^*$, и аналогично $\beta\gamma + 1 \in R_m^*$. Поэтому приведённые выше равенства влекут $\beta = 0$.

При $\beta = 0$ имеем $x_{-\alpha}(\beta) = 1$, следовательно, $B_m \in TU$, и, в частности, элемент на месте $(2, 1)$ должен быть равен нулю. Таким образом, $ad = 0$ в R_m , и так как $a \in R^*$ в группе, получаем $d = 0$. Тогда матрица B_m также становится верхнетреугольной, откуда $h = 0$, и, наконец, сравнение элемента на месте $(3, 3)$ даёт $a = 1$. $\square$

По лемме 3.10, в (3.12) возможен только случай $h = 0$, откуда

$$\varphi(x_{-\alpha}(1)) = x_{-\alpha}(1).$$

Шаг 7: Получение диагонального параметра $\alpha = 1$

Из (3.8) и (3.9) мы знаем, что

$$\varphi(x_\alpha(t)) = \begin{pmatrix} \alpha & t^2 & 2t \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & t & \alpha \end{pmatrix} \in E(\mathbf{A}_1) \quad (t \in R),$$

где $3\alpha = 3$. Мы утверждаем, что обязательно $\alpha = 1$. В самом деле, рассмотрим общую матрицу

$$X = \begin{pmatrix} a & b^2 & 2b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \in G(\mathbf{A}_1, R).$$

Локализуя по R_m и повторяя рассуждение с разложением Гаусса, как в лемме 3.10, сравнение элемента на позиции $(2, 1)$ влечёт, что параметр отрицательного корня $\beta = 0$, так что $X \in TU$, следовательно, элементы на

позициях $(2, 2)$ и $(3, 3)$ должны быть равны 1. Поэтому $a = 1$. Применяя это к $X = \varphi(x_\alpha(t))$, получаем $\alpha = 1$.

3.4.3 Завершение случая A_1

Мы показали, что для всех $t \in R$

$$\varphi(x_\alpha(t)) = x_\alpha(t), \quad \varphi(x_{-\alpha}(t)) = x_{-\alpha}(t).$$

Поскольку $E(A_1)$ порождается этими элементами, нормализованный эндоморфизм совпадает с тождественным:

$$\varphi = \text{id} \quad \text{на } E(A_1).$$

Обращая нормализацию (3.5), получаем, что *исходный* локально внутренний эндоморфизм является внутренним.

Теорема 3.11. *Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2 \in R$. Тогда любой локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(A_1, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $E_{\text{ad}}(A_1, R)$ обладает Свойством E и, следовательно, является III-жесткой.*

Теорема 3.12. *Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2 \in R$, и предположим, что $E_{\text{ad}}(A_1, R) \trianglelefteq G_{\text{ad}}(A_1, R)$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм присоединённой группы Шевалле $G_{\text{ad}}(A_1, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $G_{\text{ad}}(A_1, R)$ является III-жесткой.*

Доказательство. Пусть $\varphi : G_{\text{ad}} \rightarrow G_{\text{ad}}$ — локально внутренний эндоморфизм. Ограничивая его на E_{ad} и применяя теорему 3.11, после внутренней нормализации мы можем считать, что $\varphi|_{E_{\text{ad}}} = \text{id}$. Для $g \in G_{\text{ad}}$ и $x \in E_{\text{ad}}$ имеем $gxg^{-1} \in E_{\text{ad}}$, поэтому

$$gxg^{-1} = \varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)x\varphi(g)^{-1}.$$

Следовательно, элемент $g^{-1}\varphi(g)$ централизует E_{ad} . Так как централизатор E_{ad} в G_{ad} тривиален, получаем $g^{-1}\varphi(g) = 1$, откуда $\varphi(g) = g$ для всех g , то есть $\varphi = \text{Id}$. □

3.5 III-жѣсткость для типа A_2

3.5.1 Подготовка и нормализация

Пусть $\Phi = A_2$ с простыми корнями α_1, α_2 и $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$. Мы используем стандартную реализацию (канонический изоморфизм групповых схем) $G_{\text{ad}}(A_2, R) \cong \text{PGL}_3(R)$, происходящую из SL_3 :

$$x_{\alpha_1}(t) = I + tE_{12}, \quad x_{\alpha_2}(t) = I + tE_{23}, \quad x_{\gamma}(t) = I + tE_{13},$$

$$x_{-\alpha_1}(t) = I + tE_{21}, \quad x_{-\alpha_2}(t) = I + tE_{32}, \quad x_{-\gamma}(t) = I + tE_{31}.$$

Для $u \in R^*$ положим

$$h_{\alpha_1}(u) = \text{diag}(u, u^{-1}, 1), \quad h_{\alpha_2}(u) = \text{diag}(1, u, u^{-1}),$$

и определим $w_{\alpha_i}(u) = x_{\alpha_i}(u)x_{-\alpha_i}(-u^{-1})x_{\alpha_i}(u)$.

Мы будем использовать следующие соотношения (все остальные коммутаторы между непротивоположными корневыми подгруппами в типе A_2 тривиальны, поскольку сумма корней не лежит в Φ):

$$\begin{aligned} x_r(t)x_r(s) &= x_r(t+s) & (r \in \Phi), \\ [x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_2}(s)] &= x_{\gamma}(ts), \\ x_{\alpha_2}(v)x_{\alpha_1}(u) &= x_{\alpha_1}(u)x_{\alpha_2}(v)x_{\gamma}(-uv), \\ [x_{\alpha_1}(t), x_{-\gamma}(s)] &= x_{-\alpha_2}(-ts), & [x_{\alpha_2}(t), x_{-\gamma}(s)] = x_{-\alpha_1}(ts), \\ [x_{\gamma}(t), x_{-\alpha_1}(s)] &= x_{\alpha_2}(-ts), & [x_{\gamma}(t), x_{-\alpha_2}(s)] = x_{\alpha_1}(ts). \end{aligned}$$

Кроме того, $w_{\alpha_i}(u)^2 = h_{\alpha_i}(-1)$ для $i = 1, 2$.

3.5.2 Образы корневых элементов, диагональных инволюций и элементов Вейля

Специальный элемент X_0 и его централизатор

Пусть $X_0 = x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)$ и предположим, что для нашего исходного φ выполнено $\varphi(X_0) = X_0$.

Определим централизатор X_0 в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ (эквивалентно, в $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$). Если g коммутирует с X_0 , то для каждого максимального идеала $J \subset R$ его локализация g_J коммутирует с $(X_0)_J$. Следовательно, достаточно найти централизатор над локальным кольцом R_J ; переходя далее к фактору по J , получаем, что образ $\bar{g}$ коммутирует с $\bar{X}_0$ над полем вычетов k_J .

Полевой этап. Над полем можно записать

$$\bar{g} = t_1(a_1)t_2(a_2) x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) \mathbf{w} x_{\alpha_1}(c_1)x_{\alpha_2}(c_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3),$$

и потребовать, чтобы

$$\bar{g} x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)\bar{g}^{-1} = x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) &= \\ &= g' x_{\alpha_1}(c_1)x_{\alpha_2}(c_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3) x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) (x_{\alpha_1}(c_1)x_{\alpha_2}(c_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3))^{-1} (g')^{-1} = \\ &= g' x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(d) (g')^{-1} = g'' \mathbf{w} x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(d) \mathbf{w}^{-1} (g'')^{-1} = \\ &= g'' x_{w(\alpha_1)}(1)x_{w(\alpha_2)}(1) x_{w(\alpha_1+\alpha_2)}(d) (g'')^{-1}. \end{aligned}$$

Левая часть содержит только множители, отвечающие положительным корням, поэтому необходимо $\mathbf{w} = e$ (иначе появился бы отрицательный корень). Далее,

$$\begin{aligned} x_{w(\alpha_1)}(1)x_{w(\alpha_2)}(1)x_{w(\alpha_1+\alpha_2)}(d) &= \\ &= g''' t_1(a_1)^{-1}t_2(a_2)^{-1} x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) t_1(a_1)t_2(a_2) (g''')^{-1} = \\ &= g''' x_{\alpha_1}(a_1^{-1})x_{\alpha_2}(a_2^{-1}) (g''')^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_{\alpha_1}(-b_1)x_{\alpha_2}(-b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(-b_3)x_{\alpha_1}(a_1^{-1})x_{\alpha_2}(a_2^{-1})x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) = \\
&= x_{\alpha_1}(a_1^{-1})x_{\alpha_2}(a_2^{-1})x_{\alpha_1+\alpha_2}(d').
\end{aligned}$$

Таким образом, $a_1 = a_2 = 1$, откуда $t_1 = t_2 = 1$, и

$$\bar{g} = x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3).$$

Наконец,

$$x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)x_{\alpha_1}(-b_1)x_{\alpha_2}(-b_2) = x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_1 - b_2),$$

поэтому $b_1 = b_2$, тогда как b_3 произволен.

Локальный этап. Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом J и полем вычетов $k = R/J$. Если g коммутирует с X_0 в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$, то $\bar{g}$ коммутирует с $\bar{X}_0$ в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, k)$, и потому

$$\bar{g} = \overline{x_{\alpha_1}(b)} \overline{x_{\alpha_2}(b)} \overline{x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3)}.$$

Следовательно, g допускает короткое разложение Гаусса

$$g = x_{-\alpha_1}(u_1)x_{-\alpha_2}(u_2)x_{-\alpha_1-\alpha_2}(u_3)t_1(r_1)t_2(r_2)x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3),$$

где $u_i \in J$, $r_i \equiv 1 \pmod{J}$ и $s_1 \equiv s_2 \pmod{J}$. Из равенства $gX_0g^{-1} = X_0$ вычисляем

$$\begin{aligned}
&x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) = \\
&= g'x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)(x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3))^{-1}(g')^{-1} = \\
&= g'x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(d)(g')^{-1} = \\
&= g''t_1(r_1)t_2(r_2)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(d)t_1(r_1^{-1})t_2(r_2^{-1})(g'')^{-1} = \\
&= g''x_{\alpha_1}(r_1)x_{\alpha_2}(r_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(d')(g'')^{-1} = \\
&= x_{-\alpha_1}(u_1)x_{-\alpha_2}(u_2)x_{-\alpha_1-\alpha_2}(u_3)x_{\alpha_1}(r_1)x_{\alpha_2}(r_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(d') \times \\
&\quad \times x_{-\alpha_1}(-u_1)x_{-\alpha_2}(-u_2)x_{-\alpha_1-\alpha_2}(-u_3).
\end{aligned}$$

Поскольку $r_1, r_2 \in R^*$, правая часть содержала бы множители, отвечающие отрицательным корням, всякий раз, когда $u_3 \neq 0$, тогда как в левой части их нет; следовательно, $u_3 = 0$. Кроме того, перестановка $x_{-\alpha_i}(u_i)$ с $x_{\alpha_i}(r_i)$ (соотношение ранга 1) порождает нетривиальный торический множитель $h_{\alpha_i}(\cdot)$ всякий раз, когда $u_i \neq 0$, который не может быть поглощён, поскольку

r_i обратимы и в левой части никакого тора нет; следовательно, $u_1 = u_2 = 0$. Таким образом,

$$g = t_1(r_1)t_2(r_2)x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3).$$

Наконец, из равенства $gX_0g^{-1} = X_0$ следует, что $t_1 = t_2 = 1$ (нетривиальный тор масштабирует $x_{\alpha_i}(1)$), а вычисление из полевого этапа выше даёт $s_1 = s_2$. Следовательно, для некоторых $a, b \in R$ имеем

$$g = x_{\alpha_1}(a)x_{\alpha_2}(a)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b).$$

Глобальный этап. Для общего кольца R элемент g централизует X_0 тогда и только тогда, когда каждая локализация g_J централизует $(X_0)_J$ для всех максимальных J . По локальному описанию,

$$g_J = x_{\alpha_1}(a_J)x_{\alpha_2}(a_J)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_J).$$

Склеивая, получаем существование $a, b \in R$ с этими локальными образами. Обратное включение непосредственно следует из приведённых выше вычислений.

Предложение 3.13.

$$C_{G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)}(X_0) = \left\{ x_{\alpha_1}(a)x_{\alpha_2}(a)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) \mid a, b \in R \right\}.$$

Образ $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$

Положим $X_{12} := \varphi(x_{\alpha_1+\alpha_2}(1))$. Поскольку φ локально внутренний, элемент X_{12} сопряжён в группе Шевалле элементу $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$. Кроме того, по предложению 3.13, элемент X_{12} коммутирует с X_0 , поэтому

$$X_{12} = x_{\alpha_1}(a)x_{\alpha_2}(a)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) \quad \text{для некоторых } a, b \in R,$$

и для каждого максимального идеала $J \subset R$ его локализация $(X_{12})_J$ сопряжена с $(x_{\alpha_1+\alpha_2}(1))_J$ в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R_J)$.

Полевой этап. Зафиксируем J и перейдём к полю вычетов $k_J = R_J/\text{Rad } R_J$. Поскольку $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$ коммутирует со всеми положительными

корневыми унитарными, можно считать, что сопрягающий элемент над k_J имеет вид

$$g = t_1(a_1) t_2(a_2) x_{\alpha_1}(b_1) x_{\alpha_2}(b_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) \mathbf{w},$$

так что

$$\begin{aligned} (x_{\alpha_1}(b_1) x_{\alpha_2}(b_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3))^{-1} x_{\alpha_1}(a_1^{-1}a) x_{\alpha_2}(a_2^{-1}a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(a_1^{-1}a_2^{-1}b) \times \\ \times x_{\alpha_1}(b_1) x_{\alpha_2}(b_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) = x_{w(\alpha_1+\alpha_2)}(1). \end{aligned}$$

Переносим $x_{\alpha_1}(b_1)$ и $x_{\alpha_2}(b_2)$, получаем

$$x_{\alpha_1}(a_1^{-1}a) x_{\alpha_2}(a_2^{-1}a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(-b_2 a_1^{-1}a - b_1 a_2^{-1}a + a_1^{-1}a_2^{-1}b) = x_{w(\alpha_1+\alpha_2)}(1).$$

Если $a \neq 0$ в k_J , то левая часть содержит нетривиальные множители x_{α_1} и x_{α_2} , что невозможно, поскольку правая часть является одним корневым элементом. Следовательно, $a \equiv 0 \pmod{J}$ для всякого J , то есть $a \in \text{Rad}(R)$. Тогда мы видим, что $w(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, а это необходимо влечёт $\mathbf{w} = e$.

Локальный этап. Зафиксируем максимальный идеал J и будем работать над локальным кольцом R_J . Как и выше, можно считать, что сопрягающий элемент имеет вид

$$g = x_{-\alpha_1}(c_1) x_{-\alpha_2}(c_2) x_{-\alpha_1-\alpha_2}(c_3) t_1(r_1) t_2(r_2), \quad c_i \in \text{Rad}(R_J), r_i \in R_J^*.$$

Сопряжение элемента $x_{\alpha_1+\alpha_2}(r_1 r_2)$ элементом $x_{-\alpha_1-\alpha_2}(c_3)$ порождает торический множитель $h_{\alpha_1+\alpha_2}(1 + c_3)$; поскольку

$$x_{\alpha_1}(a) x_{\alpha_2}(a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)$$

не имеет торической части, необходимо $c_3 = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1}(a) x_{\alpha_2}(a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) &= x_{-\alpha_1}(c_1) x_{-\alpha_2}(c_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(r_1 r_2) x_{-\alpha_2}(-c_2) x_{-\alpha_1}(-c_1) = \\ &= x_{-\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(r_1 r_2) x_{\alpha_1}(\pm c_2 r_1 r_2) x_{-\alpha_1}(-c_1) = \\ &= x_{\alpha_1+\alpha_2}(r_1 r_2) x_{\alpha_2}(\pm c_1 r_1 r_2) h_{\alpha_1}(1 \pm c_1 c_2 r_1 r_2) x_{\alpha_1}(\pm c_2 r_1 r_2) x_{-\alpha_1}(\dots). \end{aligned}$$

Поскольку левая часть лежит в положительной унитарной группе U (никакого тора и никаких множителей, отвечающих отрицательным корням), необходимо

$$h_{\alpha_1}(1 \pm c_1 c_2 r_1 r_2) = 1 \implies c_1 c_2 = 0,$$

и отрицательный множитель $x_{-\alpha_1}(\dots)$ должен исчезать в произведении, что влечёт

$$c_1 = \pm c_2, \quad c_1^2 = 0.$$

Сравнивая оставшиеся положительные множители с $x_{\alpha_1}(a) x_{\alpha_2}(a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)$, получаем

$$b = r_1 r_2 \in R_J^*, \quad a = \pm c_2 r_1 r_2,$$

и, следовательно, $a^2 = (c_2^2) (r_1 r_2)^2 = 0$ в R_J .

Глобальный этап. Мы показали, что для каждой локализации R_J образ элемента b обратим, а образ элемента a^2 равен 0. Следовательно, $b \in R^*$ и $a^2 = 0$ в R . Подводя итог, получаем:

Предложение 3.14. Пусть $X_{12} = \varphi(x_{\alpha_1+\alpha_2}(1))$. Тогда

$$X_{12} = x_{\alpha_1}(a) x_{\alpha_2}(a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) \quad \text{при} \quad a^2 = 0 \quad \text{и} \quad b \in R^*.$$

Образ $x_{\alpha_1}(1)$

Положим $X_1 := \varphi(x_{\alpha_1}(1))$. Тогда X_1 коммутирует с X_{12} во всех локализациях и, следовательно, после перехода к каждому полю вычетов. Напомним, что

$$X_{12} = x_{\alpha_1}(a) x_{\alpha_2}(a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b), \quad a^2 = 0, \quad b \in R^*,$$

и, в частности, $\bar{a} = 0$ в каждом поле вычетов.

Полевой этап. Пусть k — поле вычетов кольца R . Мы уже знаем, что в этом случае $a = 0$, так что

$$X_{12} = x_{\alpha_1+\alpha_2}(b), \quad b \in k^*.$$

Поскольку X_1 коммутирует с X_{12} , он нормализует однопараметрическую подгруппу $\{x_{\alpha_1+\alpha_2}(t) \mid t \in k\}$.

Запишем разложение Брюа для X_1 :

$$X_1 = t_1(a_1) t_2(a_2) x_{\alpha_1}(b_1) x_{\alpha_2}(b_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) \mathbf{w} x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_2}(c_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3),$$

где $\mathbf{w}$ — элемент группы Вейля типа A_2 .

Сопрягая элемент $X_{12} = x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)$ этим элементом, получаем

$$X_1 x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) X_1^{-1} = t_1(a_1)t_2(a_2) x_{\alpha_1}(b_1) x_{\alpha_2}(b_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) \mathbf{w} x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) \mathbf{w}^{-1} \times \\ \times (x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3))^{-1} t_1(a_1)^{-1} t_2(a_2)^{-1}.$$

Поскольку сопряжение посредством $t_i(a_i)$ действует в соответствии с весами корней,

$$t_1(a_1)t_2(a_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) t_1(a_1)^{-1} t_2(a_2)^{-1} = x_{\alpha_1+\alpha_2}(a_1^{-1}a_2^{-1}b),$$

а сопряжение посредством $\mathbf{w}$ переводит $x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)$ в $x_{w(\alpha_1+\alpha_2)}(\pm b)$. Таким образом, условие $X_1 x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) X_1^{-1} = x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)$ влечёт

$$x_{\alpha_1+\alpha_2}(a_1^{-1}a_2^{-1}b) = x_{w(\alpha_1+\alpha_2)}(b).$$

Если теперь $\mathbf{w} \neq e$, то $w(\alpha_1 + \alpha_2)$ является отрицательным корнем, тогда как левая часть есть положительный корневой элемент, что невозможно. Следовательно, $\mathbf{w} = e$. При $\mathbf{w} = e$ обе части отвечают одному и тому же положительному корню, и равенство однопараметрических подгрупп даёт $a_1^{-1}a_2^{-1} = 1$, то есть $a_1a_2 = 1$. Следовательно, в случае поля имеем $\mathbf{w} = e$, $a_1a_2 = 1$.

Локальный этап. Зафиксируем максимальный идеал $J \subset R$ и будем работать над локальным кольцом R_J . Запишем

$$X_1 = t_1(r_1)t_2(r_2) x_{\alpha_1}(s_1) x_{\alpha_2}(s_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3) x_{-\alpha_1}(u_1) x_{-\alpha_2}(u_2) x_{-\alpha_1-\alpha_2}(u_3),$$

где $u_i \in \text{Rad } R_J$. Мы также сохраняем вид

$$X_{12} = x_{\alpha_1}(a) x_{\alpha_2}(a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b), \quad a^2 = 0, \quad b \in R^*.$$

Если $u_3 \neq 0$, то сопряжение элемента $x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)$ элементом $x_{-\alpha_1-\alpha_2}(u_3)$ порождает нетривиальный торический множитель $h_{\alpha_1+\alpha_2}(1 + u_3 \cdot (\dots))$, который не может быть поглощён; поскольку b обратим и никакого такого тора в другой части нет, должно быть $u_3 = 0$.

Из коммутирования $X_{12}X_1 = X_1X_{12}$ после сокращения общего внешнего тора $t_1(r_1)t_2(r_2)$ и положительного унитарного блока в X_1 получаем

$$\begin{aligned}
x_{\alpha_1}(r_1 a) x_{\alpha_2}(r_2 a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(r_1 r_2 b) x_{-\alpha_1}(u_1) x_{-\alpha_2}(u_2) &= \\
&= x_{-\alpha_1}(u_1) x_{-\alpha_2}(u_2) x_{\alpha_1}(a) x_{\alpha_2}(a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b).
\end{aligned}$$

Перестановка $x_{-\alpha_i}(u_i)$ с $x_{\alpha_i}(a)$ (тождество ранга 1) порождает торический множитель $h_{\alpha_i}(1 + au_i)$. В левой части торический множитель отсутствует, следовательно,

$$au_1 = au_2 = 0. \quad (*)$$

Переставляя правую часть через $x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)$ с использованием соотношений Шевалле, получаем

$$x_{\alpha_1}(r_1 a) x_{\alpha_2}(r_2 a) x_{\alpha_1+\alpha_2}(r_1 r_2 b) = x_{\alpha_1}(a \pm u_2 b) x_{\alpha_2}(a \pm u_1 b) x_{\alpha_1+\alpha_2}(b).$$

Сравнение координат при α_1 и α_2 даёт

$$r_1 a = a \pm u_2 b, \quad r_2 a = a \pm u_1 b.$$

Поскольку $b \in R^*$, отсюда следует, что

$$u_2 = \pm(r_1 - 1) b^{-1} a, \quad u_1 = \pm(r_2 - 1) b^{-1} a,$$

то есть

$$u_1 = a\gamma_1, \quad u_2 = a\gamma_2 \quad \text{для некоторых } \gamma_1, \gamma_2 \in R_J. \quad (\dagger)$$

С учётом $(\dagger)$ любая поправка к координате при $\alpha_1 + \alpha_2$, возникающая при перестановке $x_{-\alpha_i}(u_i)$ с $x_{\alpha_i}(a)$, пропорциональна a^2 и потому исчезает. Поэтому сравнение координаты при $\alpha_1 + \alpha_2$ даёт

$$r_1 r_2 b = b \implies r_1 r_2 = 1.$$

Положим $r := r_1 \in 1 + J$ и запишем внешний тор как $t_1(r)t_2(r^{-1})$. Используя $(\dagger)$, получаем нормализованное локальное представление

$$X_1 = t_1(r) t_2(r^{-1}) x_{\alpha_1}(s_1) x_{\alpha_2}(s_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3) x_{-\alpha_1}(a\gamma_1) x_{-\alpha_2}(a\gamma_2),$$

где, как и выше, $a^2 = 0$ и $b \in R^*$.

Второе ограничение

Применяя φ к тождеству $x_{\alpha_1}(1)X_0 = x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)X_0x_{\alpha_1}(1)$, получаем

$$X_1X_0 = X_{12}X_0X_1.$$

Напомним, что в локализации R_J имеем

$$X_{12} = x_{\alpha_1}(a)x_{\alpha_2}(a)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b), \quad a^2 = 0, \quad b \in R_J^*,$$

и

$$X_1 = t_1(r)t_2(r^{-1})x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3)x_{-\alpha_1}(a\gamma_1)x_{-\alpha_2}(a\gamma_2).$$

В частном случае $u^2 = 0$ имеет место равенство

$$x_{-\alpha}(u)x_{\alpha}(1) = h_{\alpha}(1-u)x_{\alpha}(1+u)x_{-\alpha}(u). \quad (3.13)$$

Применяя (3.13) к $x_{-\alpha_i}(a\gamma_i)x_{\alpha_i}(1)$, мы переносим множители, отвечающие отрицательным корням, в самый правый конец. Следовательно, при сравнении T - и U^+ -частей в тождестве $X_1X_0 = X_{12}X_0X_1$ можно не учитывать общий крайний правый блок и работать с

$$\tilde{X}_1 := t_1(r)t_2(r^{-1})x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3).$$

Сопрягая X_0 с тором, получаем

$$X_0t_1(r)t_2(r^{-1}) = t_1(r)t_2(r^{-1})x_{\alpha_1}(r^{-1})x_{\alpha_2}(r).$$

Умножая равенство $X_1X_0 = X_{12}X_0X_1$ слева на $t_1(r)^{-1}t_2(r)$, получаем равенство целиком внутри положительной унипотентной подгруппы:

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) = \\ = x_{\alpha_1}(a)x_{\alpha_2}(a)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)x_{\alpha_1}(r^{-1})x_{\alpha_2}(r)x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Используя стандартный порядок $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ и соотношение

$$x_{\alpha_2}(v)x_{\alpha_1}(u) = x_{\alpha_1}(u)x_{\alpha_2}(v)x_{\alpha_1+\alpha_2}(-uv),$$

получаем, что параметры при α_1 и α_2 в (3.14) равны

$$s_1 + 1, s_2 + 1 \quad \text{в левой части и} \quad r^{-1} + s_1, r + s_2 \quad \text{в правой части.}$$

Следовательно, $r = 1$. При $r = 1$ единственный вклад в координату при $\alpha_1 + \alpha_2$ возникает при перестановке $x_{\alpha_2}(s_2)$ с $x_{\alpha_1}(1)$. Сравнение этих параметров даёт

$$b = s_1 - s_2,$$

и это обратимый элемент в R_J , поскольку $b \in R_J^*$. Сопряжение элемента X_1 элементом $x_{\alpha_1}(\mu)x_{\alpha_2}(\mu)$ изменяет только координату при $\alpha_1 + \alpha_2$:

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1}(\mu)x_{\alpha_2}(\mu)x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3)x_{\alpha_2}(-\mu)x_{\alpha_1}(-\mu) = \\ = x_{\alpha_1}(s_1)x_{\alpha_2}(s_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s_3 + (s_2 - s_1)\mu). \end{aligned}$$

Поскольку $b = s_1 - s_2$ обратим, выбор $\mu = s_3/b$ уничтожает $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -компоненту. Обозначая $s := s_2$ (так что $s_1 = b + s$), получаем локальную нормальную форму

$$X_1 = x_{\alpha_1}(b + s)x_{\alpha_2}(s), \quad b \in R_J^*.$$

Ограничения на сопряжённость для X_1 и X_2 над полем

Пусть $J \subset R$ — максимальный идеал. Будем работать в локализации R_J с полем вычетов $k_J := R_J / \text{Rad } R_J$, а редукцию по модулю $\text{Rad } R_J$ будем обозначать чертой сверху. Из предыдущего подраздела имеем локальную нормальную форму

$$X_1 = x_{\alpha_1}(b + s)x_{\alpha_2}(s), \quad b \in R_J^*, s \in R_J. \quad (3.15)$$

Поскольку $X_0 = x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1)$, отсюда

$$X_2^{-1} = \varphi(x_{\alpha_2}(-1)) = X_0^{-1}X_1 = x_{\alpha_1}(b + s - 1)x_{\alpha_2}(s - 1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(1 - b - s). \quad (3.16)$$

Эквивалентно, в U имеем

$$X_2 = x_{\alpha_1}(1 - b - s)x_{\alpha_2}(1 - s)x_{\alpha_1+\alpha_2}(s(s + b - 1)), \quad (3.17)$$

что получается обращением (3.16) внутри группы U .

Критерий над полем. Над полем k_J отождествим $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, k_J) \simeq \text{PGL}_3(k_J)$, используя стандартные корневые подгруппы. В этой модели корневой элемент удовлетворяет условию

$$(g - I)^2 = 0 \quad \text{и} \quad g \neq I.$$

Поскольку φ сохраняет классы сопряжённости, то же условие нильпотентности должно выполняться для $\overline{X_1}$ и $\overline{X_2}$. Запишем общий элемент группы $U(k_J)$ в упорядоченном виде

$$u = x_{\alpha_1}(u_1) x_{\alpha_2}(u_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(u_3).$$

Непосредственное перемножение матриц даёт

$$u = I + u_1 E_{12} + u_2 E_{23} + (u_3 + u_1 u_2) E_{13}, \quad \text{откуда} \quad (u - I)^2 = (u_1 u_2) E_{13}.$$

Следовательно,

$$(u - I)^2 = 0 \iff u_1 u_2 = 0. \quad (3.18)$$

Из (3.15) получаем

$$\overline{X_1} = x_{\alpha_1}(\bar{b} + \bar{s}) x_{\alpha_2}(\bar{s}).$$

Применяя (3.18), получаем

$$\bar{s}(\bar{b} + \bar{s}) = 0.$$

Поскольку $\bar{b} \neq 0$ в k_J , возможны только два случая:

$$\text{либо } \bar{s} = 0, \quad \text{либо } \bar{b} + \bar{s} = 0.$$

Из (3.16) имеем

$$\overline{X_2^{-1}} = x_{\alpha_1}(\bar{b} + \bar{s} - 1) x_{\alpha_2}(\bar{s} - 1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(1 - \bar{b} - \bar{s}).$$

Повторно применяя (3.18), получаем

$$(\bar{b} + \bar{s} - 1)(\bar{s} - 1) = 0.$$

В сочетании с двумя приведёнными выше альтернативами это даёт в точности два взаимно исключающих случая редукции:

Случай I: из $\bar{s} = 0$ следует $\bar{b} = 1$. Эквивалентно,

$$s \in \text{Rad } R_J, \quad b \equiv 1 \pmod{J}.$$

Случай II: из $\bar{b} + \bar{s} = 0$ следует $\bar{s} = 1$ и, значит, $\bar{b} = -1$. Эквивалентно,

$$s \equiv 1 \pmod{J}, \quad b \equiv -1 \pmod{J}.$$

Над k_J это означает, что

$$\overline{X_1} = x_{\alpha_2}(1), \quad \overline{X_2} = x_{\alpha_1}(1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(-1).$$

Образы диагональных инволюций

Инволюция $h_{\alpha_1}(-1)$ коммутирует с $x_{\alpha_1}(1)$ и обращает $x_{\alpha_2}(1)$. Инволюция $h_{\alpha_2}(-1)$ коммутирует с $x_{\alpha_2}(1)$ и обращает $x_{\alpha_1}(1)$. Они коммутируют, а их произведение $h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1)$ коммутирует с $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$, обращает $x_{\alpha_1}(1)$ и $x_{\alpha_2}(1)$, и

$$X_0^{h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1)} = x_{\alpha_1}(-1)x_{\alpha_2}(-1) = x_{\alpha_2}(-1)x_{\alpha_1}(-1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(1) = X_0^{-1}x_{\alpha_1+\alpha_2}(1).$$

Положим

$$H_1 = \varphi(h_{\alpha_1}(-1)), \quad H_2 = \varphi(h_{\alpha_2}(-1)), \quad H_{12} = \varphi(h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1)).$$

Элемент H_{12} по модулю радикала. Поскольку H_{12} коммутирует с X_{12} , переходя по модулю радикала, получаем

$$\begin{aligned} & h_{\alpha_1}(a_1)h_{\alpha_2}(a_2)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) \mathbf{w} x_{\alpha_1}(c_1)x_{\alpha_2}(c_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) = \\ & = x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)h_{\alpha_1}(a_1)h_{\alpha_2}(a_2)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) \mathbf{w} x_{\alpha_1}(c_1)x_{\alpha_2}(c_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3). \end{aligned}$$

Это упрощается до равенства

$$x_{w(\alpha_1+\alpha_2)}(b) = x_{\alpha_1+\alpha_2}(a_1a_2b),$$

откуда $w(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ (поэтому $\mathbf{w} = e$) и $a_1a_2 = 1$. Используя соотношение $H_{12}^2 = 1$, получаем

$$h_{\alpha_1}(a_1)h_{\alpha_2}(1/a_1)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3) =$$

$$\begin{aligned}
&= x_{\alpha_1+\alpha_2}(-b_3)x_{\alpha_2}(-b_2)x_{\alpha_1}(-b_1)h_{\alpha_1}(1/a_1)h_{\alpha_2}(a_1) = \\
&= h_{\alpha_1}(1/a_1)h_{\alpha_2}(a_1)x_{\alpha_2}(-b_2/a_1)x_{\alpha_1}(-a_1b_1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(-b_3).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $a_1 = \pm 1$ и $2b_3 = b_1b_2$. Случай $a_1 = 1$ влечёт $b_1 = b_2 = 0$, что невозможно; следовательно, $a_1 = a_2 = -1$, и

$$H_{12} \equiv h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_2}(-1)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}\left(-\frac{b_1b_2}{2}\right) \pmod{\text{Rad}}.$$

Далее, из равенства

$$H_{12}X_0 = X_0^{-1}x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)H_{12}$$

получаем (по-прежнему по модулю радикала)

$$x_{\alpha_1}(b_1+1)x_{\alpha_2}(b_2+1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(-b_2) = x_{\alpha_1}(1+b_1)x_{\alpha_2}(1+b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b-1-b_1),$$

откуда

$$b_1 - b_2 = b - 1.$$

Используя равенство $H_{12}x_{\alpha_1}(1) = x_{\alpha_1}(-1)H_{12}$, получаем

$$x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1}(b+s)x_{\alpha_2}(s) = x_{\alpha_2}(s)x_{\alpha_1}(b+s)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2),$$

так что

$$b_2(b+s) = s(b+b_1+s).$$

Если $b = 1$ и $s = 0$, то $b_1 = b_2$ и необходимо $b_2 = 0$, откуда $H_{12} \equiv h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1) \pmod{\text{Rad}}$. Если $b = -1$ и $s = 1$, то $b_1 = 0$ и $b_2 = 2$. Таким образом, над полем вычетов имеются ровно две возможности:

$$H_{12} \equiv h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1) \text{ или } H_{12} \equiv h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1)x_{\alpha_2}(2) \pmod{\text{Rad}}.$$

Элемент H_{12} над R_J . Рассмотрим H_{12} над локальным кольцом R_J . В обоих случаях он допускает короткое разложение Гаусса, и из равенства

$$\begin{aligned}
&h_{\alpha_1}(a_1)h_{\alpha_2}(a_2)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3)x_{-\alpha_1}(c_1)x_{-\alpha_2}(c_2)x_{-\alpha_1-\alpha_2}(c_3)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b) = \\
&= x_{\alpha_1+\alpha_2}(b)h_{\alpha_1}(a_1)h_{\alpha_2}(a_2)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3)x_{-\alpha_1}(c_1)x_{-\alpha_2}(c_2)x_{-\alpha_1-\alpha_2}(c_3)
\end{aligned}$$

получаем $c_3 = 0$, затем $c_1 = c_2 = 0$ и, наконец, $a_1 a_2 = 1$. Из инволютивности H_{12} выводим, что $b_3 = -b_1 b_2 / 2$ и $a_1 = -1$; как и в случае поля,

$$b_1 - b_2 = b - 1.$$

Таким образом,

$$H_{12} = h_{\alpha_1}(-1) h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_1}(b_1) x_{\alpha_2}(b_1+1-b) x_{\alpha_1+\alpha_2} \left(-\frac{b_1(b_1+1-b)}{2} \right).$$

Образ $h_{\alpha_1}(-1)$. Теперь определим $H_1 = \varphi(h_{\alpha_1}(-1))$. По модулю радикала элемент H_1 коммутирует с H_{12} , обращает X_{12} , коммутирует с X_1 и имеет порядок 2. Запишем

$$H_1 = h_{\alpha_1}(a_1) h_{\alpha_2}(a_2) x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_2}(c_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3) \mathbf{w} x_{\alpha_1}(d_1) x_{\alpha_2}(d_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(d_3).$$

Из равенства $X_{12} H_1 = H_1 X_{12}^{-1}$ получаем, что $w(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, то есть $\mathbf{w} = e$, и $a_1 a_2 = -1$. Используя то, что H_1 коммутирует с $X_1 = x_{\alpha_1}(b+s) x_{\alpha_2}(s)$, имеем

$$\begin{aligned} h_{\alpha_1}(a_1) h_{\alpha_2}(-1/a_1) x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_2}(c_2) x_{\alpha_1}(b+s) x_{\alpha_2}(s) = \\ = x_{\alpha_1}(b+s) x_{\alpha_2}(s) h_{\alpha_1}(a_1) h_{\alpha_2}(-1/a_1) x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_2}(c_2). \end{aligned}$$

В случае $b = 1, s = 0$ отсюда получаем $a_1 = -1$ и $c_2 = 0$, так что

$$H_1 = h_{\alpha_1}(-1) x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3),$$

и так как $H_1^2 = 1$, необходимо

$$H_1 = h_{\alpha_1}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3).$$

Из коммутирования с H_{12} следует $b_1 \equiv 0 \pmod{\text{Rad}}$, то есть над полем $H_{12} = h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1)$. В случае $b+s=0, s=1$ (эквивалентно $b=-1$) получаем $a_1 = 1$ и $c_1 = 0$:

$$H_1 = h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_2}(c_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3),$$

а условие инволютивности даёт

$$H_1 = h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3).$$

Коммутирование с H_{12} тогда показывает, что $b_1 = 0$, и в этом случае

$$H_{12} = h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1) x_{\alpha_2}(2).$$

Над локальным кольцом R_J в обоих случаях элемент H_1 допускает короткое разложение Гаусса. Из соотношения $H_1 X_{12} = X_{12}^{-1} H_1$ получаем

$$H_1 = h_{\alpha_1}(a_1) h_{\alpha_2}(-1/a_1) x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_2}(c_2) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3),$$

а из коммутирования H_1 с X_1 следует, что $a_1 = \pm 1$; таким образом, либо $s = 0$, либо $b + s = 0$. Следовательно, либо $X_1 = x_{\alpha_1}(b)$, либо $X_1 = x_{\alpha_2}(s)$. В первом случае $c_2 = 0$, во втором $c_1 = 0$, и вместе с условием $H_1^2 = 1$ получаем

$$H_1 = h_{\alpha_1}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3) \quad \text{или} \quad H_1 = h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c_3).$$

Наконец, используя коммутирование H_1 и H_{12} , в первом случае получаем

$$b_1 + 1 - b = 0, \quad b_1 = b - 1, \quad H_{12} = h_{\alpha_1}(-1) h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_1}(b - 1),$$

а во втором случае

$$b_1 = 0, \quad H_{12} = h_{\alpha_1}(-1) h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_2}(1 - b).$$

Итак, на данном этапе мы имеем либо

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{\alpha_1}(b), & X_2 &= x_{\alpha_1}(1 - b) x_{\alpha_2}(1), \\ H_{12} &= h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1) x_{\alpha_1}(b - 1), & H_1 &= h_{\alpha_1}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c), \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{\alpha_2}(-b), & X_2 &= x_{\alpha_1}(1) x_{\alpha_2}(1 + b) x_{\alpha_1+\alpha_2}(-b), \\ H_{12} &= h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1) x_{\alpha_2}(1 - b), & H_1 &= h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c). \end{aligned}$$

Ясно, что $H_2 = \varphi(h_{\alpha_2}(-1)) = H_1 H_{12}$. Поскольку H_2 коммутирует с X_2 , в первом случае получаем $b = 1$; во втором случае получаем $b = -1$. Следовательно, в первом случае

$$\varphi(x_{\alpha}(1)) = x_{\alpha}(1) \quad \text{для всех положительных корней } \alpha \in \Phi^+,$$

а диагональные инволюции переходят следующим образом: $\varphi(h_{\alpha_1}(-1)) = h_{\alpha_1}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c)$, $\varphi(h_{\alpha_2}(-1)) = h_{\alpha_2}(-1) x_{\alpha_1+\alpha_2}(c)$, $\varphi(h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1)) = h_{\alpha_1+\alpha_2}(-1)$.

Сопряжение элементом $x_{\alpha_1+\alpha_2}(c/2)$ устраняет лишние $x_{\alpha_1+\alpha_2}(c)$ -множители. Во втором случае после сопряжения тем же элементом $x_{\alpha_1+\alpha_2}(c/2)$ получаем

$$\begin{aligned}\varphi(x_{\alpha_1}(1)) &= x_{\alpha_2}(1), & \varphi(x_{\alpha_2}(1)) &= x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_1+\alpha_2}(1), \\ \varphi(x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)) &= x_{\alpha_1+\alpha_2}(-1), & \varphi(h_{\alpha_1}(-1)) &= h_{\alpha_2}(-1), \\ \varphi(h_{\alpha_2}(-1)) &= h_{\alpha_1}(-1)x_{\alpha_2}(2).\end{aligned}$$

Образ $w_{\alpha_1}(1)$ в первом случае

Положим $W_1 := \varphi(w_{\alpha_1}(1))$. Напомним стандартные соотношения

$$W_1^2 = H_1, \quad W_1 H_2 = H_{12} W_1, \quad W_1 X_2 = X_{12} W_1.$$

Над полем вычетов, записывая W_1 в форме Брюа и последовательно используя приведённые выше соотношения, получаем $\mathbf{w} = s_{\alpha_1}$, а затем

$$W_1 = h_{\alpha_1}(a_1)h_{\alpha_2}(a_2)w_{\alpha_1}(1).$$

Из равенства $W_1^2 = H_1$ получаем $a_2 = 1$, а из $W_1 X_2 = X_{12} W_1$ следует $a_1 = 1$. Следовательно, по модулю радикала

$$W_1 \equiv w_{\alpha_1}(1).$$

Над локальным кольцом записываем

$$W_1 = w_{\alpha_1}(1)h_{\alpha_1}(a_1)h_{\alpha_2}(a_2)x_{\alpha_1}(b_1)x_{\alpha_2}(b_2)x_{\alpha_1+\alpha_2}(b_3)x_{-\alpha_1}(c_1)x_{-\alpha_2}(c_2)x_{-\alpha_1-\alpha_2}(c_3),$$

где все параметры лежат в радикале, кроме, возможно, a_1, a_2 . Соотношения $H_1 W_1 H_1 = W_1$ и $H_2 W_1 = W_1 H_{12}$ влекут

$$b_2 = b_3 = c_2 = c_3 = 0, \quad b_1 = c_1 = 0.$$

Тогда из равенства $W_1^2 = H_1$ получаем $a_2 = 1$, а соотношение $W_1 X_2 = X_{12} W_1$ влечёт $a_1 = 1$. Таким образом,

$$\varphi(w_{\alpha_1}(1)) = w_{\alpha_1}(1)$$

в первом случае.

Образ $w_{\alpha_1}(1)$ во втором случае

Положим снова $W_1 := \varphi(w_{\alpha_1}(1))$. Над полем вычетов соотношения

$$W_1^2 = H_1, \quad W_1 H_2 = H_{12} W_1, \quad W_1 X_2 = X_{12} W_1$$

приводят к равенству

$$W_1 = x_{\alpha_2}(-1)w_{\alpha_2}(1)x_{\alpha_2}(1)$$

по модулю радикала. Сопрягая наш эндоморфизм элементом $x_{\alpha_2}(1)$, мы получаем над полем вычетов в точности диаграммный автоморфизм, переставляющий простые корни. Следовательно, достаточно найти элемент, не сопряжённый своему образу при этом диаграммном автоморфизме.

Предложение 3.15. *Пусть R — коммутативное кольцо, и пусть $G_{\text{ad}}(A_2, R)$ — присоединённая группа Шевалле типа A_2 над R . Положим $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$ и рассмотрим элемент*

$$Y = x_{\alpha_1}(1)w_{\gamma}(1)x_{\alpha_2}(1) \in G_{\text{ad}}(A_2, R).$$

Пусть φ — автоморфизм группы $G_{\text{ad}}(A_2, R)$, такой что

$$\varphi(x_{\pm\alpha_1}(1)) = x_{\pm\alpha_2}(1), \quad \varphi(x_{\pm\alpha_2}(1)) = x_{\pm\alpha_1}(1).$$

Тогда, если у R имеется хотя бы одна локализация по максимальному идеалу, поле вычетов которой имеет характеристику, отличную от 7, элементы Y и $\varphi(Y)$ не сопряжены в $G_{\text{ad}}(A_2, R)$.

Доказательство. Предположим, что Y и $\varphi(Y)$ сопряжены над R . Тогда они остаются сопряжёнными над каждой локализацией $R_{\mathfrak{m}}$, а значит, и над полем вычетов каждой такой локализации. Выберем максимальный идеал $\mathfrak{m}$, для которого поле вычетов имеет характеристику, отличную от 7. Переходя к этому полю вычетов, а затем к его алгебраическому замыканию, мы можем работать внутри $\text{PGL}_3(K)$, где K — алгебраически замкнутое поле с $\text{char } K \neq 7$. В стандартной реализации

$$w_{\gamma}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку диаграммный автоморфизм переводит $x_\gamma(1)$ в $x_\gamma(-1)$, он переводит $w_\gamma(1)$ в $w_\gamma(-1)$, и потому $\varphi(Y)$ поднимается до матрицы

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если бы Y и Y' были сопряжены в $\mathrm{PGL}_3(K)$, то существовали бы $g \in \mathrm{GL}_3(K)$ и $\lambda \in K^*$ такие, что $gYg^{-1} = \lambda Y'$. Сравнение определителей даёт $\lambda^3 = 1$, тогда как сравнение следов даёт $1 = 2\lambda$, откуда $\lambda = 1/2$. Следовательно, $2^3 = 1$ в K , то есть $7 = 0$, противоречие. $\square$

Остаётся рассмотреть случай, когда каждое поле вычетов имеет характеристику 7. Определим

$$\tilde{w}_\alpha := x_\alpha(3) x_{-\alpha}(-5) x_\alpha(3)$$

и

$$\tilde{h}_\alpha(3) := \tilde{w}_\alpha w_\alpha(1)^{-1}.$$

Для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ в поле вычетов характеристики 7 имеем $3^{-1} = 5$, так что $\tilde{h}_\alpha(3)$ редуцируется к $h_\alpha(3)$. Теперь положим

$$Y := x_{\alpha_1}(1) x_{-\alpha_1}(2) \tilde{h}_{\alpha_2}(3).$$

Его образ при диаграммном автоморфизме имеет вид

$$\varphi(Y) = x_{\alpha_2}(1) x_{-\alpha_2}(2) \tilde{h}_{\alpha_1}(3).$$

Переходя к любому полю вычетов k характеристики 7, получаем, что эти элементы поднимаются до матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если бы образы A и B были сопряжены в $\mathrm{PGL}_3(k)$, то существовали бы $u \in \mathrm{GL}_3(k)$ и $\lambda \in k^*$ такие, что $uAu^{-1} = \lambda B$. Сравнение определителей даёт $\lambda^3 = 1$, тогда как сравнение следов даёт $\lambda = 4/5$. В характеристике 7 это невозможно, поскольку $(4/5)^3 \neq 1$. Следовательно, Y и $\varphi(Y)$ не сопряжены. Таким образом, второй случай невозможен.

Отсюда заключаем, что все $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$, отображаются тождественно.

Образы всех $x_\alpha(r)$

Поскольку каждая корневая подгруппа

$$X_\alpha = \{ x_\alpha(r) \mid r \in R \}$$

является двойным централизатором элемента $x_\alpha(1)$, имеем

$$\varphi(x_\alpha(r)) = x_\alpha(r'), \quad r' = \rho(r),$$

где $\rho: R \rightarrow R$ — некоторый эндоморфизм кольца. Докажем, что $\rho = \text{id}_R$. Для типа $\mathbf{A}_2$ след в присоединённом представлении удовлетворяет равенству

$$F(s, t) := \text{tr}(x_\alpha(t)x_{-\alpha}(s)) = s^2t^2 + 6st + 8.$$

Поскольку φ локально внутренний, след сохраняется:

$$F(s, t) = F(\rho(s), \rho(t)) \quad (s, t \in R).$$

Зафиксируем $s = 1$ и положим

$$F(t) = t^2 + 6t + 8, \quad \widehat{F}(t) = \rho(t)^2 + 6\rho(t) + 8.$$

Вычислим

$$\Delta(t) := [F(t+1) + F(-t-1)] - [F(t) + F(-t)] = 4t + 2,$$

и та же формула с $\rho(t)$ вместо t даёт

$$\widehat{\Delta}(t) = 4\rho(t) + 2.$$

Из тождества для следа имеем $\Delta(t) = \widehat{\Delta}(t)$, откуда

$$4(\rho(t) - t) = 0 \quad \forall t \in R.$$

Поскольку $2 \in R^*$, то и $4 \in R^*$, следовательно, $\rho(t) = t$ для всех $t \in R$. Таким образом,

$$\varphi(x_\alpha(t)) = x_\alpha(t) \quad (\forall \alpha \in \Phi, \forall t \in R).$$

Так как элементарная присоединённая группа $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ порождается всеми корневыми подгруппами, нормализованный эндоморфизм φ является тождественным на $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$. Обращая нормализацию, получаем, что любой локально внутренний эндоморфизм группы $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ является внутренним.

Теорема 3.16. Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2 \in R$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм элементарной присоединённой группы Шевалле $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ является Ш-жёсткой.

Доказательство. Согласно приведённым выше вычислениям, после внутренней нормализации эндоморфизм φ поточечно фиксирует каждую корневую подгруппу X_α , следовательно, $\varphi = \text{id}$ на $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$. Обращая нормализацию, получаем, что исходный локально внутренний эндоморфизм является внутренним. $\square$

3.5.3 Завершение случая $\mathbf{A}_2$

Теорема 3.17. Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2 \in R$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм присоединённой группы Шевалле $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ является Ш-жёсткой.

Доказательство. Пусть $\varphi : G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R) \rightarrow G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ — локально внутренний эндоморфизм. По теореме 3.16, после внутренней нормализации φ является тождественным на элементарной подгруппе $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$, которая нормальна в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$. Возьмём произвольный элемент $g \in G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ и произвольный элемент $x \in E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$. Тогда $gxg^{-1} \in E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$, и потому

$$\varphi(gxg^{-1}) = gxg^{-1} = \varphi(g)x\varphi(g)^{-1}.$$

Следовательно, элемент $g^{-1}\varphi(g)$ централизует $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$. Для групп Шевалле ранга не меньше 2 централизатор элементарной подгруппы совпадает с центром, а в присоединённой группе центр тривиален. Поэтому $g^{-1}\varphi(g) = 1$ и $\varphi(g) = g$ для всех g , то есть $\varphi = \text{id}$. Обращая нормализацию, получаем, что всякий локально внутренний эндоморфизм группы $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_2, R)$ является внутренним. $\square$

3.6 Ш-жѳсткость для типа $\mathbf{B}_2$

3.6.1 Подготовка и нормализация

Пусть $\varphi: E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R) \rightarrow E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ — локально внутренний эндоморфизм. Предполагаем всюду, что $2 \in R^*$. Зафиксируем простые корни α (длинный) и β (короткий), так что

$$\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta\}.$$

Положим

$$X_0 := x_\alpha(1)x_\beta(1).$$

Как и в случае $\mathbf{A}_2$, умножая φ на подходящий внутренний автоморфизм, мы можем и будем считать, что

$$\varphi(X_0) = X_0.$$

Используемые соотношения

Нам потребуются только следующие стандартные коммутаторные соотношения Шевалле для типа $\mathbf{B}_2$:

$$[x_\alpha(t), x_\beta(s)] = x_{\alpha+\beta}(-ts) x_{\alpha+2\beta}(-ts^2), \quad (3.19)$$

$$[x_{\alpha+\beta}(t), x_\beta(s)] = x_{\alpha+2\beta}(-2ts). \quad (3.20)$$

В частности, внутри U^+ корневая подгруппа $X_{\alpha+2\beta}$ коммутирует с X_α , X_β и $X_{\alpha+\beta}$.

3.6.2 Образы корневых элементов, диагональных инволюций и элементов Вейля

Специальный элемент X_0 и его централизатор

Сначала определим централизатор $C(X_0)$ внутри U^+ . Как и в случае A_2 , сведением к полям вычетов проверяется, что любой элемент $g \in C(X_0)$ должен лежать в U^+ . Следовательно, каждый элемент из $C(X_0)$ единственным образом представляется в виде

$$g = x_\alpha(b_1)x_\beta(b_2)x_{\alpha+\beta}(b_3)x_{\alpha+2\beta}(d), \quad b_1, b_2, b_3, d \in R.$$

Поскольку $x_{\alpha+2\beta}(d)$ коммутирует с X_0 , условие $gX_0 = X_0g$ сводится к равенству

$$x_\alpha(b_1)x_\beta(b_2)x_{\alpha+\beta}(b_3)x_\alpha(1)x_\beta(1) = x_\alpha(1)x_\beta(1)x_\alpha(b_1)x_\beta(b_2)x_{\alpha+\beta}(b_3). \quad (3.21)$$

Используя (3.19) и (3.20) и собирая множители в стандартном порядке в U^+ , а именно $(\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$, получаем равенство в U^+ , эквивалентное

$$1 = x_{\alpha+\beta}(b_1 - b_2)x_{\alpha+2\beta}(b_1 + b_2^2 - 2b_1 - 2b_1b_2 + 2b_2 + 2b_3). \quad (3.22)$$

Из единственности координат в U^+ имеем $b_1 = b_2 =: b$, и тогда

$$0 = b - b^2 + 2b_3 \quad \Longleftrightarrow \quad b_3 = \frac{b^2 - b}{2}.$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 3.18. *Централизатор X_0 в U^+ состоит в точности из элементов вида*

$$x_\alpha(b)x_\beta(b)x_{\alpha+\beta}\left(\frac{b^2 - b}{2}\right)x_{\alpha+2\beta}(d), \quad b, d \in R.$$

Образ $x_{\alpha+2\beta}(1)$

Положим

$$X_4 := \varphi(x_{\alpha+2\beta}(1)).$$

Поскольку $x_{\alpha+2\beta}(1)$ коммутирует с X_0 , имеем также $X_4 \in C(X_0)$. По лемме 3.18 можно записать

$$X_4 = x_\alpha(a) x_\beta(a) x_{\alpha+\beta} \left(\frac{a^2 - a}{2} \right) x_{\alpha+2\beta}(b), \quad a, b \in R. \quad (3.23)$$

Теперь покажем, что обязательно $a = 0$. Зафиксируем максимальный идеал J и будем работать в локальном кольце R_J . Редуцируя по модулю J , видим, что элемент $\bar{X}_4$ сопряжён в $G_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, k_J)$ элементу $x_{\alpha+2\beta}(1)$, поэтому его координаты при α и β равны нулю; в частности, $\bar{a} = 0$, то есть $a \in \text{Rad } R_J$. Пусть $c \in R_J^*$ таков, что X_4 сопряжён в $G_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R_J)$ элементу $x_{\alpha+2\beta}(c)$. Как и в случае $\mathbf{A}_2$, можно считать, что сопрягающий элемент записан в короткой форме Гаусса:

$$g = t \cdot x_{-\beta}(u) x_{-\alpha-\beta}(v) x_{-\alpha-2\beta}(w), \quad u, v, w \in \text{Rad } R_J.$$

Записывая уравнение сопряжённости $X_4 g = g x_{\alpha+2\beta}(c)$ и переставляя $x_{-\alpha-2\beta}(w)$ через $x_{\alpha+2\beta}(c)$, получаем торический множитель $h_{\alpha+2\beta}(1 + wc)$. Сравнение торических частей даёт

$$h_{\alpha+2\beta}(1 + wc) = h_\beta(1 + uvc(1 + wc)). \quad (3.24)$$

Поскольку $h_{\alpha+2\beta}(\cdot)$ и $h_\beta(\cdot)$ независимы в присоединённом торе, а $c \in R_J^*$, из (3.24) следует, что $w = 0$, а затем $uv = 0$. При $w = 0$ и $uv = 0$ уравнение сопряжённости упрощается до равенства в U^+U^- . Короткое вычисление с использованием (3.19) даёт соотношения

$$a = vc = u^2c, \quad 2uc = a(a - 1).$$

Так как $uv = 0$ и $u, v \in \text{Rad } R_J$, получаем $a^2 = 0$, а потому $u^2 = 0$, и тогда из приведённых выше соотношений следует $a = 0$. Следовательно, $X_4 = x_{\alpha+2\beta}(b)$ с $b \in R_J^*$. Поскольку J был произволен, глобально заключаем следующее.

Лемма 3.19. *Имеем*

$$X_4 = \varphi(x_{\alpha+2\beta}(1)) = x_{\alpha+2\beta}(b) \quad \text{для некоторого } b \in R^*.$$

Образ $x_{\alpha+\beta}(1)$

Положим

$$X_3 := \varphi(x_{\alpha+\beta}(1)).$$

Тогда X_3 коммутирует с X_4 , и применение φ к тождеству $[x_{\alpha+\beta}(1), X_0] = x_{\alpha+2\beta}(-2)$ даёт

$$[X_3, X_0] = X_4^{-2} = x_{\alpha+2\beta}(-2b). \quad (3.25)$$

Кроме того, для каждого J редукция $\bar{X}_3$ сопряжена с $x_{\alpha+\beta}(1)$ над k_J .

Предложение 3.20. *После сопряжения φ элементом из централизатора $C(X_0)$ можно считать, что*

$$X_3 = x_\alpha(s) x_\beta(s) x_{\alpha+\beta} \left(b + \frac{s^2 - s}{2} \right), \quad s \in \text{Rad } R_J \text{ в каждой локализации } R_J. \quad (3.26)$$

Доказательство. Над k_J коммутирование с $\bar{X}_4 = x_{\alpha+2\beta}(\bar{b})$ влечёт тривиальность компоненты Вейля в разложении Брюа элемента $\bar{X}_3$. Поднимаясь в R_J и используя то же сравнение в коротком разложении Гаусса, что и в случае $\mathbf{A}_2$, получаем, что все параметры из U^- равны нулю, а торическая часть должна быть тривиальной. Остаётся

$$X_3 = x_\alpha(b_1) x_\beta(b_2) x_{\alpha+\beta}(b_3) x_{\alpha+2\beta}(b_4), \quad b_1, b_2 \in \text{Rad } R_J.$$

Подставляя в (3.25) и сравнивая координаты в U^+ , получаем $b_2 = b_1$ и $b_3 = b + \frac{b_1^2 - b_1}{2}$, тогда как b_4 можно уничтожить сопряжением подходящим элементом из $C(X_0)$. $\square$

Образы $x_\alpha(1)$ и $x_\beta(1)$

Положим $X_1 := \varphi(x_\alpha(1))$ и $X_2 := \varphi(x_\beta(1))$. Поскольку $\varphi(X_0) = X_0$, имеем

$$X_0 = X_1 X_2. \quad (3.27)$$

Применяя φ к равенству $[x_\alpha(1), X_0] = x_{\alpha+\beta}(1) x_{\alpha+2\beta}(1)$, получаем

$$[X_1, X_0] = X_3 X_4. \quad (3.28)$$

Наконец, X_1 коммутирует с X_3 и X_4 . Редуцируя по модулю J , видим, что коммутирование с $\bar{X}_4$ и $\bar{X}_3$ влечёт

$$\bar{X}_1 = x_\alpha(\lambda) x_{\alpha+2\beta}(\mu).$$

Подставляя в (3.28) и сравнивая параметр при X_α , получаем $\lambda = \bar{b}$. Тогда из (3.27) вычисляем

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1^{-1} \bar{X}_0 = x_\alpha(1 - \bar{b}) x_\beta(1) x_{\alpha+2\beta}(\cdot).$$

Поскольку $\bar{X}_2$ должен быть сопряжён с $x_\beta(1)$, дополнительный множитель $x_\alpha(1 - \bar{b})$ должен быть тривиален; следовательно, $\bar{b} = 1$. Таким образом, $\bar{X}_4 = x_{\alpha+2\beta}(1)$ и $\bar{X}_3 = x_{\alpha+\beta}(1)$. Над локальным кольцом то же рассуждение с коротким разложением Гаусса, что и в случае $\mathbf{A}_2$, показывает, что X_1 не имеет ни U^- -части, ни торической части. Следовательно, $X_1 \in U^+$ и из коммутирования с X_3 и X_4 обязательно следует, что

$$X_1 = x_\alpha(1) x_{\alpha+2\beta}(c) \quad \text{для некоторого } c \in R_J.$$

Тогда из (3.27) получаем

$$X_2 = X_1^{-1} X_0 = x_\beta(1) x_{\alpha+2\beta}(-c).$$

Итак, после наших нормализаций в каждой локализации имеем

$$\begin{aligned} X_1 &= x_\alpha(1) x_{\alpha+2\beta}(c), \\ X_2 &= x_\beta(1) x_{\alpha+2\beta}(-c), \\ X_3 &= x_{\alpha+\beta}(1), \quad X_4 = x_{\alpha+2\beta}(1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Образ диагональной инволюции

Для типа $\mathbf{B}_2$ единственной нетривиальной диагональной инволюцией в присоединённой группе является $h_\alpha(-1)$. Положим

$$H_1 := \varphi(h_\alpha(-1)).$$

Тогда H_1 коммутирует с X_1 и X_4 и обращает X_2 и X_3 . Над k_J коммутирование с $x_{\alpha+2\beta}(1)$ влечёт тривиальность компоненты Вейля в разложении Брюа элемента $\overline{H}_1$, а коммутирование с $x_\alpha(1)$ влечёт, что $\overline{H}_1$ лежит в борелевской подгруппе и не содержит множителя $x_\beta(\cdot)$. Обращение элемента $\overline{X}_3 = x_{\alpha+\beta}(1)$ влечёт, что торическая часть равна $h_\alpha(-1)$, а условие $\overline{H}_1^2 = 1$ уничтожает координату при $x_{\alpha+2\beta}$. Таким образом,

$$\overline{H}_1 = h_\alpha(-1) x_{\alpha+\beta}(\bar{c}).$$

Поднимаясь в R_J с помощью того же сравнения в разложении Гаусса, что и в случае $\mathbf{A}_2$, получаем то же утверждение над R_J :

$$H_1 = h_\alpha(-1) x_{\alpha+\beta}(c), \quad (3.30)$$

с тем же параметром c , что и в (3.29).

Образ $w_\beta(1)$ и избавление от c

Положим $W_2 := \varphi(w_\beta(1))$. Мы используем стандартные соотношения

$$W_2 X_3 = X_3^{-1} W_2, \quad W_2 X_1 = X_4 W_2, \quad [W_2, H_1] = 1, \quad W_2^2 = 1.$$

Из соотношения $W_2 X_1 = X_4 W_2$ при $\overline{X}_1 = x_\alpha(1) x_{\alpha+2\beta}(\bar{c})$ и $\overline{X}_4 = x_{\alpha+2\beta}(1)$ следует, что компонента Вейля элемента $\overline{W}_2$ должна переводить α в $\alpha + 2\beta$, следовательно, она равна w_β . Тогда соотношение $W_2 X_3 = X_3^{-1} W_2$ влечёт тривиальность торической части и уничтожает координату при $x_\beta(\cdot)$. Затем коммутирование с $\overline{H}_1 = h_\alpha(-1) x_{\alpha+\beta}(\bar{c})$ влечёт $\bar{c} = 0$. Таким образом, $\overline{X}_1 = x_\alpha(1)$, $\overline{X}_2 = x_\beta(1)$ и $\overline{H}_1 = h_\alpha(-1)$. Над локальным кольцом, записывая W_2 в короткой форме Гаусса с компонентой Вейля $w_\beta(1)$ и параметрами из радикала, тем же способом показываем, что все дополнительные параметры равны нулю и что обязательно $c = 0$. Следовательно,

$$W_2 = w_\beta(1).$$

Рассуждая в точности так же, аналогично получаем $\varphi(w_\alpha(1)) = w_\alpha(1)$. Поэтому после всех нормализаций имеем

$$\varphi(x_\alpha(1)) = x_\alpha(1), \quad \varphi(x_\beta(1)) = x_\beta(1),$$

$$\varphi(x_{\alpha+\beta}(1)) = x_{\alpha+\beta}(1), \quad \varphi(x_{\alpha+2\beta}(1)) = x_{\alpha+2\beta}(1),$$

а также $\varphi(h_\alpha(-1)) = h_\alpha(-1)$.

3.6.3 Завершение случая B_2

Поскольку φ фиксирует $w_\alpha(1)$ и $w_\beta(1)$ и, следовательно, нормализует действие тора, он сохраняет каждую корневую подгруппу. Таким образом, для каждого корня γ существует эндоморфизм кольца $\rho_\gamma: R \rightarrow R$ такой, что

$$\varphi(x_\gamma(r)) = x_\gamma(\rho_\gamma(r)).$$

Теперь используем свойство локально внутреннего эндоморфизма. Для длинного корня γ в случае B_2 имеем

$$\mathrm{tr}(x_\gamma(t)x_{-\gamma}(s)) = s^2t^2 + 6st + 10.$$

Следовательно,

$$s^2t^2 + 6st = \rho_\gamma(s)^2\rho_\gamma(t)^2 + 6\rho_\gamma(s)\rho_\gamma(t).$$

Как и в случае A_2 , применяя приём с симметрической разностью по переменной t , получаем

$$\rho_\gamma(t) = t \quad \forall t \in R.$$

Таким образом, φ является тождественным на всех подгруппах, отвечающих длинным корням. Наконец, коммутаторное соотношение (3.19) при $t = 1$ показывает, что отображения на подгруппах коротких корней также должны быть тождественными: поскольку

$$[x_\alpha(1), x_\beta(s)] = x_{\alpha+\beta}(-s)x_{\alpha+2\beta}(-s^2),$$

то, применяя φ и используя, что $\rho_\alpha = \rho_{\alpha+2\beta} = \mathrm{id}$, получаем

$$x_{\alpha+2\beta}(-\rho_\beta(s)^2) = x_{\alpha+2\beta}(-s^2),$$

откуда $\rho_\beta(s)^2 = s^2$ для всех s . Поскольку $\rho_\beta(1) = 1$ и ρ_β аддитивно, применяя это равенство также к $s + 1$ и вычитая одно из другого, получаем

$\rho_\beta = \text{id}$, а тогда и $\rho_{\alpha+\beta} = \text{id}$. Следовательно, φ является тождественным на всех корневых подгруппах, а значит, и на $E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$. Обращая исходную нормализацию, заключаем, что всякий локально внутренний эндоморфизм группы $E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ является внутренним.

Теорема 3.21. *Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2 \in R$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм группы $E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ является III-жесткой.*

Теорема 3.22. *Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2 \in R$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм группы $G_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $G_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ является III-жесткой.*

Доказательство. По теореме 3.21, после внутренней нормализации локально внутренний эндоморфизм группы $G_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ действует тождественно на $E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$. Поскольку $\mathbf{B}_2$ имеет ранг 2, подгруппа $E_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$ нормальна в $G_{\text{ad}}(\mathbf{B}_2, R)$, и то же рассуждение, что и в доказательстве теоремы 3.17, показывает, что после нормализации эндоморфизм является тождественным. Обращая нормализацию, получаем требуемое утверждение. $\square$

3.7 III-жесткость для типа $\mathbf{G}_2$

3.7.1 Подготовка и нормализация

На протяжении всего этого раздела R — коммутативное кольцо с $2, 3 \in R^*$. Для краткости пишем

$$E(\mathbf{G}_2) = E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R), \quad G(\mathbf{G}_2) = G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R).$$

Зафиксируем систему корней Φ типа $\mathbf{G}_2$ с простыми корнями α (длинный) и β (короткий). Множество положительных корней имеет вид

$$\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta\}.$$

Коммутаторы

Для каждого корня $\gamma \in \Phi$ и каждого параметра $t \in R$ обозначим через $x_\gamma(t)$ соответствующий корневой элемент. Мы используем нормализацию, при которой коммутаторные соотношения для положительных корней имеют вид

$$[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+\beta}(tu) x_{\alpha+3\beta}(-tu^3) x_{\alpha+2\beta}(-tu^2) x_{2\alpha+3\beta}(t^2u^3), \quad (3.31)$$

$$[x_{\alpha+\beta}(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+2\beta}(2tu) x_{\alpha+3\beta}(3tu^2) x_{2\alpha+3\beta}(3t^2u), \quad (3.32)$$

$$[x_\alpha(t), x_{\alpha+3\beta}(u)] = x_{2\alpha+3\beta}(tu), \quad (3.33)$$

$$[x_{\alpha+2\beta}(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+3\beta}(-3tu), \quad (3.34)$$

$$[x_{\alpha+\beta}(t), x_{\alpha+2\beta}(u)] = x_{2\alpha+3\beta}(3tu). \quad (3.35)$$

Для любой пары корней $\gamma, \delta \in \Phi$ такой, что $\gamma + \delta$ не является корнем и $\gamma \neq -\delta$, соответствующие корневые подгруппы коммутируют. Все соотношения с участием отрицательных корней восстанавливаются из (3.31)–(3.35) с помощью действия группы Вейля и соотношений ранга 1.

Централизатор элемента X_0

Положим $X_0 := x_\alpha(1)x_\beta(1)$ и после подходящей внутренней нормализации снова считаем, что $\varphi(X_0) = X_0$. Как и в предыдущих разделах, если $g \in G(\mathbf{G}_2)$ коммутирует с X_0 , то каждая локализация g_J коммутирует с $(X_0)_J$, а после редукции по модулю радикала образ коммутирует с $\bar{X}_0$ над полем вычетов. То же рассуждение, что и ранее, даёт

$$C_{G(\mathbf{G}_2)}(X_0) \subseteq U.$$

Возьмём произвольный элемент

$$x_\alpha(b_1)x_\beta(b_2)x_{\alpha+\beta}(b_3)x_{\alpha+2\beta}(b_4)x_{\alpha+3\beta}(b_5)x_{2\alpha+3\beta}(b_6)$$

и наложим условие, что он централизует X_0 . Сравнение координаты при $x_{\alpha+\beta}(\cdot)$ в обеих частях сразу даёт $b_1 = b_2 =: b$. Непосредственное вычисление

в присоединённом представлении затем даёт

$$b_3 = \frac{b - b^2}{2}, \quad (3.36)$$

$$b_4 = -\frac{2b^3}{3} + \frac{b^2}{2} + \frac{b}{6}, \quad (3.37)$$

$$b_5 = \frac{3b^4}{4} - \frac{b^3}{2} - \frac{b^2}{4}, \quad (3.38)$$

тогда как параметр b_6 произволен. Таким образом, централизатор X_0 в U состоит в точности из элементов вида

$$x_\alpha(b)x_\beta(b)x_{\alpha+\beta}\left(\frac{b-b^2}{2}\right)x_{\alpha+2\beta}\left(-\frac{2b^3}{3} + \frac{b^2}{2} + \frac{b}{6}\right)x_{\alpha+3\beta}\left(\frac{3b^4}{4} - \frac{b^3}{2} - \frac{b^2}{4}\right)x_{2\alpha+3\beta}(d)$$

с $b, d \in R$.

3.7.2 Образы корневых элементов, диагональных инволюций и элементов Вейля

Образ $x_{2\alpha+3\beta}(1)$

Положим $X_6 := \varphi(x_{2\alpha+3\beta}(1))$. Поскольку $x_{2\alpha+3\beta}(1)$ коммутирует с X_0 , элемент X_6 также лежит в централизаторе X_0 . Поэтому в каждой локализации можно записать

$$X_6 = x_\alpha(b)x_\beta(b)x_{\alpha+\beta}\left(\frac{b-b^2}{2}\right)x_{\alpha+2\beta}\left(-\frac{2b^3}{3} + \frac{b^2}{2} + \frac{b}{6}\right) \times \\ \times x_{\alpha+3\beta}\left(\frac{3b^4}{4} - \frac{b^3}{2} - \frac{b^2}{4}\right)x_{2\alpha+3\beta}(d),$$

где $b \in \text{Rad } R$ и $d \in R^*$. Так как X_6 сопряжён элементу $x_{2\alpha+3\beta}(1)$, существует сопрягающий элемент вида

$$g = x_{-\alpha}(c_1)x_{-\alpha-\beta}(c_2)x_{-\alpha-2\beta}(c_3)x_{-\alpha-3\beta}(c_4)x_{-2\alpha-3\beta}(c_5)$$

после поглощения торической части в параметр элемента, отвечающего старшему корню. Рассмотрим соотношение, выражающее, что элементы

$x_{2\alpha+3\beta}(a)$ и X_6 сопряжены, где $a \in R^*$. Непосредственное вычисление в присоединённом представлении даёт последовательность ограничений. Из элемента на позиции $(1, 2)$ получаем $b^2 c_4 = 0$. Затем элемент на позиции $(1, 1)$ даёт $ac_5 = 0$, откуда $c_5 = 0$. Из элемента на позиции $(1, 6)$ следует $c_3^3 = 0$. Используя далее элементы на позициях $(1, 4)$, $(3, 5)$, $(1, 3)$, $(4, 5)$, $(3, 1)$ и $(3, 2)$, получаем

$$b = ac_2^2, \quad c_4 = c_2^2, \quad c_3^2 = -c_2^3,$$

и, наконец, $c_2^4 = 0$, так что $b^2 = 0$. Тогда элемент на позиции $(5, 4)$ даёт $bc_1 = 0$, и при учёте всех этих соотношений элемент на позиции $(2, 14)$ принимает вид

$$2b = 0.$$

Поскольку $2 \in R^*$, отсюда следует, что $b = 0$. Следовательно, можно считать, что

$$X_6 = x_{2\alpha+3\beta}(a), \quad a \in R^*.$$

Образ $x_{\alpha+3\beta}(1)$

Теперь положим $X_5 := \varphi(x_{\alpha+3\beta}(1))$. Тогда X_5 коммутирует с X_6 , удовлетворяет соотношению

$$[X_5, X_0] = X_6^{-1},$$

и сопряжён элементу $x_{\alpha+3\beta}(1)$. Над полем коммутирование с $X_6 = x_{2\alpha+3\beta}(a)$ оставляет только две возможные формы Брюа. Форма, содержащая множитель Вейля $w_\beta(1)x_\beta(c)$, сразу оказывается невозможной из единственности разложения Брюа. Следовательно, над полем можно записать

$$X_5 = t_1(b^3)t_2(1/b^2)x_\alpha(b_1)x_\beta(b_2)x_{\alpha+\beta}(b_3)x_{\alpha+2\beta}(b_4)x_{\alpha+3\beta}(b_5)x_{2\alpha+3\beta}(b_6).$$

Используя коммутаторное соотношение с X_0 и упрощая, получаем $b = 1$ и $b_1 = b_2$. Непосредственное матричное вычисление затем даёт

$$b_3 = \frac{b_1 - b_1^2}{2}, \quad b_4 = \frac{-4b_1^3 + 3b_1^2 + b_1}{6}, \quad b_5 = a + \frac{3b_1^4 - 2b_1^3 - b_1^2}{4}.$$

Поскольку X_5 сопряжён элементу $x_{\alpha+3\beta}(1)$, можно считать, что сопрягающий элемент имеет вид $g = t_1(a_1)t_2(a_2)x_\alpha(p)$. Как и в предыдущих разделах, сравнение координаты при $x_\alpha(\cdot)$ влечёт $b_1 = 0$. Следовательно, над полем

$$X_5 = x_{\alpha+3\beta}(a)x_{2\alpha+3\beta}(b_6).$$

Переходя к локальному кольцу и повторяя то же сравнение в коротком разложении Гаусса, видим, что часть, отвечающая отрицательным корням, исчезает и что

$$X_5 = C \cdot x_{\alpha+3\beta}(a), \quad C \in C(X_0).$$

Образ $x_{\alpha+2\beta}(1)$

Теперь положим $X_4 = \varphi(x_{\alpha+2\beta}(1))$. Тогда X_4 коммутирует с X_5 и X_6 . Над полем коммутирование с X_6 снова оставляет две возможные формы; та из них, которая содержит множитель Вейля, несовместима с коммутированием с X_5 . Следовательно, над полем

$$X_4 = t_1(s^3)t_2(1/s^2)x_\alpha(b_1) \cdots x_{2\alpha+3\beta}(b_6),$$

и из коммутирования с X_5 получаем $b_1 = 0$ и $s^3 = 1$. Используя соотношение

$$[X_4, X_0] = X_5^{-3}X_6^{-3},$$

сравниваем координаты и сначала получаем $s^2 = 1$, откуда $s = 1$. Непосредственное матричное вычисление затем даёт

$$b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = a, \quad b_5 = 3d,$$

где $X_5 = x_{\alpha+3\beta}(a)x_{2\alpha+3\beta}(d)$. Таким образом, над полем

$$X_4 = x_{\alpha+2\beta}(a)x_{\alpha+3\beta}(3d)x_{2\alpha+3\beta}(e).$$

Над локальным кольцом то же рассуждение с коротким разложением Гаусса устраняет множитель, отвечающий отрицательному корню, и торическую часть, и мы приходим к тому же выражению:

$$X_4 = x_{\alpha+2\beta}(a)x_{\alpha+3\beta}(3d)x_{2\alpha+3\beta}(e). \quad (3.39)$$

Образ $x_{\alpha+\beta}(1)$

Положим $X_3 := \varphi(x_{\alpha+\beta}(1))$. Тогда X_3 коммутирует с X_6 и X_5 , а также

$$[X_3, X_4] = X_6^3, \quad [X_3, X_0] = X_4^2 X_5^3 X_6^6.$$

Над полем из коммутирования с X_5 и X_6 следует, что

$$X_3 = t_2(b)x_\beta(b_2)x_{\alpha+\beta}(b_3)x_{\alpha+2\beta}(b_4)x_{\alpha+3\beta}(b_5)x_{2\alpha+3\beta}(b_6), \quad b^3 = 1.$$

Используя соотношение $[X_3, X_4] = X_6^3$ и (3.39), последовательно получаем $b = 1$, $b_2 = 0$ и $b_3 = 1$. Следовательно, над полем

$$X_3 = x_{\alpha+\beta}(1)x_{\alpha+2\beta}(b_4)x_{\alpha+3\beta}(b_5)x_{2\alpha+3\beta}(b_6).$$

Такая же форма имеет место и над локальными кольцами. Теперь используем соотношение $[X_3, X_0] = X_4^2 X_5^3 X_6^6$. Сравнение координаты при $x_{\alpha+2\beta}(\cdot)$ даёт $a = 1$ в (3.39). Упрощая оставшиеся координаты, получаем

$$b_4 = -2d, \quad b_5 = 3d - 2e,$$

так что

$$X_3 = x_{\alpha+\beta}(1)x_{\alpha+2\beta}(-2d)x_{\alpha+3\beta}(3d - 2e)x_{2\alpha+3\beta}(f) \quad (3.40)$$

для некоторого $f \in R$.

Образы $x_\alpha(1)$ и $x_\beta(1)$

Теперь положим $X_1 := \varphi(x_\alpha(1))$ и $X_2 := \varphi(x_\beta(1))$. Мы знаем, что X_1 коммутирует с X_3 , X_4 , X_6 , и что

$$[X_1, X_5] = X_6, \quad [X_1, X_0] = X_3 X_4^{-1} X_5^{-1}.$$

Как и в предыдущих случаях, коммутирование с X_6 влечёт, что над полем

$$X_1 = t_1(b^3)t_2(1/b^2)x_\alpha(b_1)x_\beta(b_2)x_{\alpha+\beta}(b_3)x_{\alpha+2\beta}(b_4)x_{\alpha+3\beta}(b_5)x_{2\alpha+3\beta}(b_6).$$

Использование соотношения $[X_1, X_5] = X_6$ даёт $b^3 = 1$ и $b_1 = 1$. Коммутирование с X_4 затем влечёт $b = 1$, $b_2 = 0$ и $b_3 = -d$. Коммутирование с X_3 даёт

$$b_4 = 2d^2 + d - \frac{2}{3}e.$$

Наконец, из соотношения $[X_1, X_0] = X_3X_4^{-1}X_5^{-1}$ получаем

$$e = \frac{3}{2}(d^2 + d), \quad b_5 = -\frac{3}{2}d^2 + \frac{5}{2}d - f.$$

Следовательно,

$$X_1 = x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(-d)x_{\alpha+2\beta}(d^2)x_{\alpha+3\beta}\left(-\frac{3}{2}d^2 + \frac{5}{2}d - f\right)x_{2\alpha+3\beta}(k),$$

и

$$\begin{aligned} X_2 = X_1^{-1}X_0 &= x_\beta(1)x_{\alpha+\beta}(d)x_{\alpha+2\beta}(-d^2 + 2d) \times \\ &\times x_{\alpha+3\beta}\left(\frac{9}{2}d^2 - \frac{11}{2}d + f\right)x_{2\alpha+3\beta}(3d^3 - 3d^2 - k). \end{aligned}$$

Поскольку $x_\alpha(1)$ и X_1 сопряжены, можно использовать тот факт, что $(X_1 - I)^3 = 0$; это даёт дополнительное соотношение

$$f = -d^3 - \frac{3}{2}d^2 + \frac{5}{2}d.$$

Аналогично, поскольку $x_\beta(1)$ и X_2 сопряжены, имеем $(X_2 - I)^4 = 0$, откуда следует

$$k = \frac{1}{4}d^4 + \frac{3}{2}d^3 + \frac{1}{4}d^2.$$

Подставляя эти выражения, получаем

$$X_1 = x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(-d)x_{\alpha+2\beta}(d^2)x_{\alpha+3\beta}(d^3)x_{2\alpha+3\beta}\left(\frac{1}{4}d^4 + \frac{3}{2}d^3 + \frac{1}{4}d^2\right), \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= x_\beta(1)x_{\alpha+\beta}(d)x_{\alpha+2\beta}(-d^2 + 2d) \times \\ &\times x_{\alpha+3\beta}(-d^3 + 3d^2 - 3d)x_{2\alpha+3\beta}\left(-\frac{1}{4}d^4 + \frac{3}{2}d^3 - \frac{13}{4}d^2\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Нормализация образов положительных корневых элементов

Мы хотим подобрать элемент $g \in C(X_0)$ такой, что

$$g \varphi(x_\gamma(1)) g^{-1} = x_\gamma(1) \quad \text{для всех } \gamma \in \Phi^+.$$

Непосредственное вычисление показывает, что элемент

$$g = x_\alpha(-d)x_\beta(-d)x_{\alpha+\beta} \left(-\frac{d^2+d}{2} \right) x_{\alpha+2\beta} \left(\frac{2d^3}{3} + \frac{d^2}{2} - \frac{d}{6} \right) x_{\alpha+3\beta} \left(\frac{3d^4}{4} + \frac{d^3}{2} - \frac{d^2}{4} \right)$$

обладает в точности этим свойством. Следовательно, после сопряжения φ элементом g можно считать, что

$$\begin{aligned} X_1 &= x_\alpha(1), & X_2 &= x_\beta(1), & X_3 &= x_{\alpha+\beta}(1), \\ X_4 &= x_{\alpha+2\beta}(1), & X_5 &= x_{\alpha+3\beta}(1), & X_6 &= x_{2\alpha+3\beta}(1). \end{aligned}$$

Образы диагональных инволюций

Рассмотрим

$$H_1 = \varphi(h_\alpha(-1)), \quad H_2 = \varphi(h_\beta(-1)).$$

Инволюция H_1 коммутирует с X_1 и X_4 и обращает X_2, X_3, X_5, X_6 . Над полем, записывая H_1 в форме Брюа и используя эти соотношения, сначала получаем, что компонента Вейля тривиальна, затем что торическая часть равна $t_2(-1) = h_\alpha(-1)$, и, наконец, что все параметры при положительных корнях исчезают, кроме, возможно, параметра при старшем корне. Таким образом, над полем

$$H_1 = t_2(-1)x_{2\alpha+3\beta}(b_6).$$

Для H_2 , который коммутирует с X_2 и X_6 и обращает X_1, X_3, X_4, X_5 , то же рассуждение даёт

$$H_2 = t_1(-1)x_{2\alpha+3\beta}(c_6).$$

Поскольку $H_2^2 = 1$, получаем $c_6 = 0$, откуда $H_2 = h_\beta(-1)$. Над локальным кольцом то же рассуждение с коротким разложением Гаусса показывает, что

$$H_2 = h_\beta(-1).$$

Возвращаясь к H_1 , дополнительное соотношение $[H_1, H_2] = 1$ влечёт обращение в нуль всех параметров при корнях, кроме старшего, а коммутирование с X_1 и X_4 даёт

$$H_1 = h_\alpha(-1)x_{2\alpha+3\beta}(b_6).$$

Сопряжение нашего эндоморфизма элементом $x_{2\alpha+3\beta}(b_6/2)$ устраняет этот дополнительный множитель при старшем корне, не изменяя ни одного из положительных корневых элементов и не меняя H_2 . Таким образом, после этой последней нормализации можно считать, что

$$H_1 = h_\alpha(-1), \quad H_2 = h_\beta(-1).$$

Образ $w_\beta(1)$

Положим $W_2 := \varphi(w_\beta(1))$. Тогда

$$[W_2, H_2] = 1, \quad W_2^2 = H_2, \quad W_2 H_1 = H_1 H_2 W_2,$$

а также

$$W_2 X_6 = X_6 W_2, \quad W_2 X_1 = X_5 W_2, \quad W_2 X_3 = X_4 W_2.$$

Над полем соотношение $[W_2, H_2] = 1$ влечёт, что в разложении Брюа элемента W_2 могут встречаться только те корневые параметры, которые фиксируются элементом $h_\beta(-1)$. Используя дополнительно равенство $W_2 H_1 = H_1 H_2 W_2$, видим, что все корневые параметры обращаются в нуль и что (с учётом коммутирования с X_6) компонента Вейля должна переводить

$$\beta \mapsto \pm\beta, \quad \alpha \mapsto \pm(\alpha + 3\beta), \quad 2\alpha + 3\beta \mapsto 2\alpha + 3\beta.$$

Следовательно, компонента Вейля равна $w_\beta(1)$, и остаётся только торический множитель:

$$W_2 = t_1(a_1)t_2(a_2)w_\beta(1).$$

Из равенства $W_2X_3 = X_4W_2$ получаем $a_1a_2^2 = 1$, а из $W_2X_1 = X_5W_2$ следует $a_1a_2^3 = 1$. Отсюда следует $a_1 = a_2 = 1$. Таким образом, над полем

$$W_2 = w_\beta(1).$$

Над локальным кольцом записываем W_2 в короткой форме Гаусса с компонентой Вейля $w_\beta(1)$. Соотношения с H_1 и H_2 устраним все параметры при отрицательных и положительных корнях, и снова остаётся только торический множитель. То же сравнение, что и в случае поля, затем показывает, что торическая часть тривиальна. Следовательно,

$$W_2 = w_\beta(1).$$

Рассуждение для $W_1 := \varphi(w_\alpha(1))$ полностью аналогично, и потому

$$\varphi(w_\alpha(1)) = w_\alpha(1), \quad \varphi(w_\beta(1)) = w_\beta(1).$$

Поскольку положительные корневые элементы вместе с $w_\alpha(1)$ и $w_\beta(1)$ порождают все корневые элементы с параметром 1, заключаем, что φ фиксирует каждый элемент $x_\gamma(1)$, $\gamma \in \Phi$.

3.7.3 Завершение случая G_2

Поскольку φ фиксирует все $x_\gamma(1)$, $w_\gamma(1)$ и $h_\gamma(-1)$ и коммутирует с действием тора, он сохраняет корневые подгруппы. Следовательно, для каждого корня γ существует эндоморфизм кольца $\rho_\gamma: R \rightarrow R$ такой, что

$$\varphi(x_\gamma(r)) = x_\gamma(\rho_\gamma(r)) \quad (r \in R).$$

Поскольку φ локально внутренний, он сохраняет следы в присоединённом представлении. Для длинного корня γ в случае G_2 имеем

$$\mathrm{tr}(x_\gamma(t)x_{-\gamma}(s)) = s^2t^2 + Ast + B$$

для некоторых целых чисел A, B . Применяя тот же приём с симметрической разностью, что и в разделах 3.5 и 3.6, получаем

$$\rho_\gamma(t) = t \quad \text{для всех } t \in R$$

для каждого длинного корня γ . Теперь используем коммутаторные соотношения (3.31)–(3.35). Поскольку отображения на подгруппах длинных корней тождественны и поскольку $\varphi(x_\beta(1)) = x_\beta(1)$, из этих соотношений последовательно следует, что отображения на подгруппах коротких корней также тождественны. Следовательно, φ действует тождественно на всех корневых подгруппах, а потому и на $E(\mathbf{G}_2)$. Обращая нормализацию, получаем, что всякий локально внутренний эндоморфизм группы $E(\mathbf{G}_2)$ является внутренним.

Теорема 3.23. *Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2, 1/3 \in R$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм группы $E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является III-жесткой.*

Теорема 3.24. *Пусть R — коммутативное кольцо с $1/2, 1/3 \in R$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм группы $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним. Эквивалентно, группа $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является III-жесткой.*

Доказательство. По теореме 3.23, после внутренней нормализации локально внутренний эндоморфизм группы $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ действует тождественно на $E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Поскольку $\mathbf{G}_2$ имеет ранг 2, элементарная подгруппа нормальна в полной присоединённой группе, и то же рассуждение с централизатором, что и в доказательстве теоремы 3.17, показывает, что нормализованный эндоморфизм является тождественным. Обращая нормализацию, получаем требуемое утверждение. $\square$

Этим завершается доказательство теоремы 3.3.

Заключение

Диссертация посвящена изучению автоморфизмов и Ш-жёсткости групп Шевалле над коммутативными кольцами. В работе полностью закрыты два остававшихся открытыми случая в описании автоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами: доказана стандартность автоморфизмов групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой. Кроме того, доказана Ш-жёсткость присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

Получены следующие основные результаты:

- Описаны автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой. Доказано, что всякий автоморфизм группы $G(\mathbf{F}_4, R)$, где R — локальное кольцо с необратимой двойкой, стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов. Доказательство основано на редукции по максимальному идеалу (радикалу) и последующем поэтапном подъёме с поля вычетов на локальное кольцо с использованием метода линеаризации.
- Описаны автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой. Доказано, что всякий автоморфизм группы $G(\mathbf{G}_2, R)$, где R — локальное кольцо с необратимой тройкой, стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.
- Доказана Ш-жёсткость присоединённых элементарных подгрупп $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$ при $2 \in R^*$ и для $\Phi = \mathbf{G}_2$ при $2, 3 \in R^*$ над произвольным коммутативным кольцом R , а также Ш-жёсткость соответствующих присоединённых групп $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{G}_2\}$ при тех же условиях обратимости и для $\Phi = \mathbf{A}_1$ при дополнительном предположении нормальности $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$. Для каждого типа доказано, что всякий локально внутренний эндоморфизм является внутренним. Доказательства не зависят от теоремы о стандартности автоморфизмов и не исполь-

зуют какого-либо описания инъективных эндоморфизмов групп Шевалле.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам в области теории групп Шевалле над кольцами, теории линейных алгебраических групп, теории колец и смежных разделов алгебры.

Список литературы

1. Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{B}_\ell$ над локальными кольцами с $1/2$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, № 7. — С. 3—46.
2. Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с $1/2$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, № 2. — С. 35—59.
3. Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, № 7. — С. 47—80.
4. Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, № 4. — С. 3—29.
5. Бунина Е. И. Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле и других производных структур. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. — Москва, 2010. — 313 с.
6. Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с $1/2$ // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 4. — С. 443—470.
7. Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. — 2012. — Т. 17, № 7. — С. 49—66.
8. Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Нормализатор группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. — 2013. — Т. 18, № 1. — С. 57—62.
9. Вавилов Н. А., Николенко С. И. $\mathbf{A}_2$ -доказательство структурных теорем для группы Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 27—63.

10. *Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б., Степанов А. В.* Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 307, № 4. — С. 788—791.
11. *Петечук В. М.* Автоморфизмы групп $SL_3(K)$, $GL_3(K)$ // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 657—668.
12. *Петечук В. М.* Автоморфизмы групп SL_n , GL_n над некоторыми локальными кольцами // Мат. заметки. — 1980. — Т. 28, № 2. — С. 187—204.
13. *Петечук В. М.* Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. сб. — 1982. — Т. 117, № 4. — С. 534—547.
14. *Шевалле К.* О некоторых простых группах // Математика: Период. сб. перев. иностр. статей. — 1958. — Т. 2, № 1. — С. 3—53.
15. *Abe E.* Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra i Analiz. — 1993. — Vol. 5, № 2. — pp. 74—90.
16. *Abe E.* Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21, № 3. — pp. 474—494.
17. *Abe E.* Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Contemp. Math. — 1989. — Vol. 83. — pp. 1—17.
18. *Apte H., Stepanov A.* Local-global principle for congruence subgroups of Chevalley groups // Cent. Eur. J. Math. — 2014. — Vol. 12. — pp. 801—812.
19. *Atiyah M. F., Macdonald I. G.* Introduction to Commutative Algebra. — Reading, MA : Addison-Wesley, 1969. — 128 pp.
20. *Borel A., Tits J.* Homomorphismes «abstraites» de groupes algébriques simples // Ann. Math. — 1973. — Vol. 97, № 3. — pp. 499—571.
21. *Bourbaki N.* Groupes et algèbres de Lie. — Paris : Hermann, 1968. — 288 pp.
22. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. — 2012. — Vol. 355, № 1. — pp. 154—170.
23. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with $1/2$ // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323, № 8. — pp. 2270—2289.
24. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Comm. Algebra. — 2024. — Vol. 52, № 6. — pp. 2313—2327.

25. *Bunina E. I., Kunyavskii B. È.* III-rigidity of Chevalley groups over local rings // J. Group Theory. — 2025. — Vol. 28, № 5. — pp. 1143—1161.
26. *Burnside W.* On the outer automorphisms of a group // Proc. Lond. Math. Soc. — 1913. — Vol. 11. — pp. 40—42.
27. *Burnside W.* Theory of Groups of Finite Order. — 2nd ed. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1911. — 512 pp.
28. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. — London : Wiley, 1989. — 335 pp.
29. *Carter R. W., Chen Y.* Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. — 1993. — Vol. 155, № 1. — pp. 44—94.
30. *Chen Y.* Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$ -algebras // Tôhoku Math. J. — 1995. — Vol. 47, № 1. — pp. 81—97.
31. *Chen Y.* Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 92. — pp. 231—237.
32. *Chen Y.* Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, № 2. — pp. 521—541.
33. *Chen Y.* Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 226, № 2. — pp. 719—741.
34. *Chen Y.* On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123, № 8. — pp. 2357—2361.
35. *Cohen A. M., Murray S. H., Taylor D. E.* Computing in groups of Lie type // Math. Comp. — 2004. — Vol. 73, № 247. — pp. 1477—1498.
36. *Cohn P.* On the structure of the GL_2 of a ring // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1966. — Vol. 30. — pp. 365—413.
37. *Costa D. L., Keller G. E.* On the normal subgroups of $\mathbf{G}_2(A)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 351, № 12. — pp. 5051—5088.
38. *Demazure M., Grothendieck A.* Schémas en groupes (SGA 3), Exp. XIX–XXVI. — Berlin : Springer, 1970. — 529 pp.
39. *Dieudonné J.* On the Automorphisms of the Classical Groups // Mem. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — pp. 1—95.

40. *Gilkey P. B., Seitz G. M.* Some representations of exceptional Lie algebras // *Geom. Dedicata.* — 1988. — Vol. 25. — pp. 407—416.
41. *Hua L. K.* On the automorphisms of the symplectic group over any field // *Ann. Math.* — 1948. — Vol. 49. — pp. 739—759.
42. *Hua L. K., Reiner I.* Automorphisms of unimodular groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1951. — Vol. 71. — pp. 331—348.
43. *Humphreys J. E.* Introduction to Lie algebras and representation theory. — New York : Springer, 1978. — 171 pp.
44. *Humphreys J. E.* On the automorphisms of infinite Chevalley groups // *Can. J. Math.* — 1969. — Vol. 21. — pp. 908—911.
45. *Klyachko A. A.* Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // *J. Algebra.* — 2010. — Vol. 324, № 10. — pp. 2608—2619.
46. *Kunyavskii B. È.* Local–global invariants of finite and infinite groups: Around Burnside from another side // *Expo. Math.* — 2013. — Vol. 31. — pp. 256—273.
47. *Landin J., Reiner I.* Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain // *Ann. Math.* — 1957. — Vol. 65, № 3. — pp. 519—526.
48. *McDonald B. R.* Automorphisms of $GL_n(R)$ // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1976. — Vol. 215. — pp. 145—159.
49. *McDonald B. R., Pomfret J.* Automorphisms of $GL_n(R)$, R a local ring // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1972. — Vol. 173. — pp. 379—388.
50. *O’Meara O. T.* The automorphisms of linear groups over any integral domain // *J. Reine Angew. Math.* — 1966. — Vol. 223. — pp. 56—100.
51. *O’Meara O. T.* The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain // *J. Reine Angew. Math.* — 1968. — Vol. 230. — pp. 103—138.
52. *Ono T.* “Shafarevich–Tate sets” for profinite groups // *Proc. Japan Acad.* — 1999. — Vol. 75A. — pp. 96—97.
53. *Ono T.* A note on Shafarevich–Tate sets for finite groups // *Proc. Japan Acad.* — 1998. — Vol. 74A. — pp. 77—79.
54. *Rickart C. E.* Isomorphic groups of linear transformations // *Amer. J. Math.* — 1950. — Vol. 72. — pp. 451—464.

55. *Sah C.-H.* Automorphisms of finite groups // J. Algebra. — 1968. — Vol. 10. — pp. 47–68.
56. *Samelson H.* Notes on Lie algebras. — New York : Springer, 1990. — 162 pp.
57. *Schreier O., van der Waerden B. L.* Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — Vol. 6. — pp. 303–322.
58. *Steinberg R.* Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 12. — pp. 606–615.
59. *Steinberg R.* Lectures on Chevalley groups. — Yale Univ., 1967. — 277 pp.
60. *Stepanov A. V.* Structure of Chevalley groups over rings via universal localization // J. Algebra. — 2016. — Vol. 450. — pp. 522–548.
61. *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Contemp. Math. — 1986. — Vol. 55. — pp. 693–710.
62. *Vaserstein L. N.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. — 1986. — Vol. 38, № 2. — pp. 219–230.
63. *Vavilov N. A., Plotkin E. B.* Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // Acta Appl. Math. — 1996. — Vol. 45. — pp. 73–113.
64. *Wan C. A.* The automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$ // Acta Math. Sinica. — 1957. — Vol. 7. — pp. 533–573.
65. *Waterhouse W. C.* Automorphisms of $\det(X_{ij})$: the group scheme approach // Adv. Math. — 1987. — Vol. 65, № 2. — pp. 171–203.
66. *Waterhouse W. C.* Automorphisms of $GL_n(R)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 79. — pp. 347–351.
67. *Yan S.-j.* Linear groups over a ring // Chinese Math. — 1965. — Vol. 7, № 2. — pp. 163–179.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

68. *Булнина Е. И., Киракосян В. В.* Автоморфизмы групп Шевалле типа F_4 над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 2025. — Т. 25, № 3.2. — С. 37—70.
EDN: WSUQVL. Импакт-фактор 0.1 (SJR). Объем 2.125 п.л.
Общая доля диссертанта составляет 90%, 1.9125 п.л.
69. *Киракосян В. В.* Автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой тройкой // *Сибирский математический журнал*. — 2026. — Т. 67, № 3 (397). — С. 424—443.
EDN: HJCEQJ. Импакт-фактор 0.451 (РИНЦ). Объем 1.25 п.л.
Английский перевод: *Kirakosyan V. V.* Automorphisms of Chevalley groups of type G_2 over local rings without 1/3 // *Siberian Mathematical Journal*. — 2026. — Vol. 67, № 3. — pp. 556—571.
EDN: RBOPQL. Импакт-фактор 0.7 (JIF). Объем 1 п.л.
70. *Bunina E. I., Kirakosyan V. V., Treskunov R.* Sha-rigidity of adjoint Chevalley groups of types A_1 , A_2 , B_2 , G_2 over commutative rings // *Groups, Complexity, Cryptology*. — 2026. — Vol. 18, № 2. — pp. 1:1—1:32.
EDN: EMVNQE. Импакт-фактор 0.3 (JIF). Объем 2 п.л.
Общая доля диссертанта составляет 75%, 1.5 п.л.