

**ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Лисеева Михаила Юрьевича
на тему: «Нормальные отображения и их свойства»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

Послойная топология изучает свойства отображений между пространствами, рассматривая их как семейства "слоев" (прообразов точек). Данное направление объединяет методы общей и алгебраической топологии, распространяя топологические инварианты и конструкции с пространств на отображения и исследуя их послойную структуру.

Послойная общая топология позволяет переносить на отображения такие свойства пространств, как компактность, связность, различные аксиомы отделимости и другие, обобщая их и рассматривая в послойном контексте. При этом слои отображения рассматриваются как переменные семейства топологических пространств.

В теории сечений расслоенных пространства (fiber bundles), являющихся частным случаем послойных пространств с дополнительным условием локальной тривиальности, методы послойной топологии используются для исследования существования непрерывных сечений отображений.

Подходы послойной топологии находят применение в алгебраической топологии (в частности, в теории гомотопий), дифференциальной геометрии, теории особенностей, задачах классификации сложных математических структур, аксиоматической теории дифференциальных уравнений, а также в современных методах машинного обучения для снижения размерности данных со сложной топологией.

Программа «от пространств — к отображениям», сформулированная Б.А.Пасынковым в 1984 году, инициировала широкий круг исследований, проводимых, в основном, его учениками. Вместе с тем идея распространения

топологических свойств пространств на отображения возникла значительно раньше. По-видимому, ее первое упоминание — классическая работа И.А.Вайнштейна (1947), где был введен и исследован класс совершенных отображений, играющий для непрерывных отображений роль, аналогичную роли компактов в классе топологических пространств. Дальнейшее развитие направления связано с введением Дж.Дьедонне и А.Гротендиком (J.Dieudonne, A.Grothendieck) в 1960 году понятия отделимого (хаусдорфова) отображения. В конце 1960-х годов возник интерес к компактификациям отображений, отраженный в работах Дж.Вайберна и Дж.Кейна (G.Whyburn, G.Cain 1966-1969). Существенную роль в становлении теории сыграла монография И. М. Джеймса (I.M.James) *Fibrewise Topology* (1989), которая систематизировала предмет и ввела строгий язык категорий.

Первоначальное определение нормального отображения принадлежит Б.А.Пасынкову (1984). Современное определение было предложено В.А.Матвеевым, а класс отображений, нормальных в смысле Пасынкова, получил название преднормальных. Вопрос о совпадении этих двух классов оставался открытым до настоящего времени.

До конца 1990-х годов аналог леммы Урысона для отображений отсутствовал, считалось, что нормальность и функциональная нормальность отображений могут не совпадать. В монографии Б.А.Пасынкова и Д.К.Мусаева (1994) показано, что по аналогии с пространствами можно рассматривать компактные и (функционально) хаусдорфовы отображения, являющиеся соответственно (вполне) регулярными и (функционально) нормальными.

Используя введенное понятие f -непрерывной функции на отображении $f: X \rightarrow Y$, А.Ю.Зубовым доказан аналог леммы Урысона для отображений (1998). Однако предложенный функциональный подход не получил дальнейшего систематического развития; в частности, не были построены аналоги наследственной и совершенной нормальности отображений. Отсутствие

полноценной теории нормальности отображений послужило основной мотивацией представленной работы.

В главе 2 представлена авторская техника работы с f -непрерывными функциями, необходимая для дальнейшего изложения. Вводится понятие семейства функций, f -равностепенно непрерывного в точке, рассматриваются алгоритмы построения f -непрерывной функции на отображении, а также методы работы с семействами f -непрерывных функций. Введенное понятие согласованного семейства двоичных разбиений отображения позволяет строить f -непрерывную функцию по согласованному семейству двоичных разбиений отображения.

В главе 3 на отображения переносятся понятия и утверждения, относящиеся к нормальным пространствам. Приводится пример преднормального отображения, которое не является нормальным.

Вводится понятие σ -нормального отображения, усиливающее понятие нормальности отображения и обладающее рядом преимуществ при описании наследственных свойств отображений нормального типа, а также при функциональной характеристизации совершенно нормальных отображений. Использование согласованных семейств двоичных разбиений отображения позволяет получить характеристизации σ -нормальности.

Для нормальных отображений получен аналог теоремы Брауэра–Титце–Урысона для пространств.

Исследуется сохранение (σ) -нормальности отображений при замкнутых гомеоморфизмах.

В главе 4 рассмотрены подходы к понятию наследственной нормальности отображения. Вводятся понятия so -, $soim$ - и im -наследственно нормальных отображений, обобщающие понятие наследственной нормальности пространства. Устанавливается иерархия введенных типов наследственной нормальности

отображений, исследуются их свойства и приводится характеристика наследственно нормальных отображений.

Как и в случае пространств, установлено, что наследственная нормальность отображения сохраняется при замкнутых тар-морфизмах.

В главе 5 рассмотрены подходы к определению совершенно нормального отображения.

Вводятся понятия F_σ -подотображения и совершенно нормального отображения как нормального отображения, любое открытое подотображение которого имеет тип F_σ . Исследуются основные свойства таких отображений. В зависимости от интерпретации подотображения — как сужения на прообраз или как сужения отображения на прообраз и образ, — возникают различные понятия совершенной нормальности отображения.

Установлено, что, в отличие от случая пространств, для отображений нарушается связь между наследственной и совершенной нормальностью. Для устранения этих трудностей, как и в случае проблемы наследования нормальности F_σ -подотображениями, рассматриваются совершенно нормальные отображения, являющиеся σ -нормальными. Получена функциональная характеристика данного класса совершенно нормальных отображений, фактически являющаяся аналогом теоремы Веденисова, характеризующей совершенно нормальные пространства.

«Функциональное» определение совершенной нормальности отображения, занимающее промежуточное положение между рассмотренными «наивными» типами совершенной нормальности, сохраняет связь между наследственной и совершенной нормальностями и, по-видимому, является наиболее естественным и оптимальным.

Доказано, что почти все типы совершенно нормальных отображений сохраняются при замкнутых тар-морфизмах.

Результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми, получены М.Ю.Лисеевым самостоятельно. Они докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и семинарах.

По моему мнению, в диссертации построена полноценная теория отображений нормального типа.

Разработанные методы работы с f -непрерывными функциями позволили получить вариант теоремы Брауэра-Титце-Урысона для отображений и дать полную характеристика нормальности отображения, а также ввести понятие совершенно нормального отображения, удовлетворяющее аналогу условия Веденисова для топологических пространств.

Для нормальных отображений, а также для введенных классов наследственно и совершенно нормальных отображений установлены их наследственные свойства и их инвариантность относительно замкнутых отображений.

Среди построенных примеров, различающих нормальности, особое место занимает пример, различающий классы преднормальных и нормальных отображений. Тем самым решена открытая более тридцати пяти лет задача о несовпадении данных классов.

Следует отметить, что М.Ю.Лисеев отличается упорством и настойчивостью в преодолении возникающих трудностей. Им получены значительные результаты в области послойной общей топологии, которые еще несколько лет назад казались недостижимыми. Хочется пожелать ему новых научных достижений и успешного продолжения начатых исследований.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям

Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Лисеева Михаила Юрьевича удовлетворяет всем требованиям “Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В.Ломоносова” и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент,
зав. кафедрой общей топологии и геометрии
механико-математического факультета,
ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М.В.
Ломоносова”

САДОВНИЧИЙ Юрий Викторович

Контактные данные:

тел.: , email:

Специальность, по которой научным руководителем
защищена диссертация:

01.01.04 – геометрия и топология

Адрес места работы:

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет
Тел.: 8(495)939-44-02; email: office@mech.math.msu.su

Подпись заведующего кафедрой механико-математического факультета МГУ
имени М.В.Ломоносова Ю.В. Садовниченко удостоверяю:

Декан механико-математического
факультета МГУ, член-корреспондент РАН
профессор А.И. Шафаревич

_____ / _____

