

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Моисеев Георгий Николаевич**

**Динамика и управление мобильным омни–экипажем**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре теоретической механики и мехатроники  
механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

**Научный  
руководитель —**

Зобова Александра Александровна,  
доктор физико–математических наук

**Официальные  
оппоненты —**

Бардин Борис Сабирович, доктор физико–математических  
наук, профессор РАН, Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет),  
кафедра № 802 “Мехатроника и теоретическая механика”,  
заведующий кафедрой

Ветчанин Евгений Владимирович, доктор физико–  
математических наук, доцент, Удмуртский государственный  
университет, институт математики, информационных  
технологий и физики, кафедра теоретической  
и экспериментальной физики, заведующий кафедрой

Адамов Борис Игоревич, кандидат физико–математических  
наук, доцент, Национальный исследовательский университет  
“МЭИ”, кафедра робототехники, мехатроники, динамики и  
прочности машин, доцент

Защита диссертации состоится 17 апреля 2026 г. в 17 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.7 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико–математический факультет, аудитория 16–10.

E-mail: [dissovet.msu.011.7@math.msu.ru](mailto:dissovet.msu.011.7@math.msu.ru).

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:

<https://dissovet.msu.ru/dissertation/3772>.

Автореферат разослан 16 марта 2026 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук, доцент

Ю.Д. Селюцкий

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Мобильные роботы используются в различных областях в качестве помощников, способных автоматизировать рутинные процессы и выполнять задачи, которые могут быть опасными или сложными для человека. Перед такими экипажами часто ставится задача перемещения с повышенной точностью в ограниченных пространствах. В этих ситуациях оказываются эффективными платформы с омни-колёсами, которые могут совершать движение в любом направлении без предварительного разворота (рис. 1а).



(а) Омни-экипаж



(b) Меканум-колесо



(c) Ортогональное омни-колесо

Рис. 1: Примеры реальных моделей

Омни-колесо (или роликонесущее колесо) — это колесо особой конструкции, на ободе которого установлены свободно вращающиеся ролики так, что оно может двигаться как обычное колесо, перекаtywаясь с ролика на ролик, и может двигаться за счёт вращения роликов в направлении, перпендикулярном их оси. Ролики представляют собой тела вращения, симметрично расположенные на цилиндрической поверхности. Конкретная модель омни-колеса определяется углом между осью роликов и осью колеса. Колёса, в которых этот угол составляет  $45^\circ$ , называют меканум-колёсами или шведскими колёсами (рис. 1b). Колёса, в которых этот угол составляет  $90^\circ$ , принято называть ортогональными омни-колёсами или просто омни-колёсами, в узком смысле (рис. 1c).

Платформы всенаправленного движения с омни-колёсами находят применение во многих

сферах человеческой деятельности. Подобные роботы используются для исследования поверхностей планет. В медицине с использованием омни-колёс создают средства передвижения для людей с ограниченными возможностями. Наибольшее применение омни-экипажи находят в областях промышленности и образования. Возможность двигаться в необходимом направлении без поворота позволяет эффективно работать на складах и в производственных залах. Экипажи с омни-колёсами используются для обучения робототехнике и регулярно участвуют в профильных соревнованиях. Наконец, с использованием омни-колёс создают предметы бытовой техники.

### **Цели и задачи работы**

Цели диссертационной работы — исследование влияния инерционных свойств ролика на движения омни-экипажа; решение задачи управления омни-экипажем с учётом динамики системы и построение программных движений с точки зрения существующих ограничений; исследование границ применимости математических моделей омни-экипажа и сравнение свойств различных конфигураций роботов.

Для достижения поставленных целей ставятся следующие задачи:

1. разработка математической модели управляемого экипажа с тремя омни-колёсами с учётом инерционных свойств ролика;
2. изучение стационарных движений модели с учётом инерционных свойств ролика и сравнение их с безынерционной моделью;
3. построение программных движений для решения задачи управления омни-экипажем в модели, не учитывающей инерционные свойства ролика; сравнение свойств движений в зависимости от существующих параметров;
4. исследование величин нормальных реакций опоры омни-экипажа на управляемых движениях;
5. создание компьютерных моделей исследуемых систем.

### **Научная новизна**

Все основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Исследовано влияние инерционных свойств опорного ролика переднего колеса омни-экипажа с параллельными колёсами на устойчивость стационарных прямолинейных движений. Аналитиче-

ски построено решение задачи управления симметричным омни-экипажем с помощью кусочно-постоянного управления с одним переключением. Исследованы программные движения симметричного омни-экипажа для кусочно-постоянного управления с одним переключением. Разработан алгоритм численного решения задачи управления для трёхколёсного омни-экипажа произвольной конфигурации и его имплементация в форме компьютерной программы. Проанализированы выражения нормальных реакций опоры для произвольного трёхколёсного омни-экипажа, который управляется посредством электромоторов. Построены условия положительности нормальных реакций опоры на управляемых движениях омни-экипажа. Исследовано влияние параметров конструкции симметричного омни-экипажа на условия положительности нормальных реакций опоры и изучение наиболее опасных с этой точки зрения классов движения.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Работа носит теоретический характер. Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы заключается в исследовании динамики омни-экипажа и построении программных движений для решения задачи управления. Результаты диссертации могут найти применение при проведении исследований в МГУ имени М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, НИУ «МЭИ», Ульяновском государственном университете, Удмуртском государственном университете, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН. Также результаты диссертации могут быть применены при проектировании конструкции омни-экипажей и построении систем управления для них на специализированных производствах.

### **Методология и методы исследования**

Для аналитических исследований в работе используются методы теоретической механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии. Для описания динамики движения омни-экипажа используется метод Я.В. Татарина получения уравнений классической механики в лаконичной форме. Устойчивость движений во второй главе исследована с помощью теоремы Ляпунова. Программы для численного моделирования, используемые для получения результатов диссертации, реализуют метод Рунге-Кутты 8 порядка с коэффициентами Дормана-Принса с автоматическим выбором шага для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений,

LU-разложение для решения систем линейных алгебраических уравнений и метод продолжения по параметру для решения систем нелинейных уравнений.

### Основные положения, выносимые на защиту

1. Для стационарного прямолинейного движения омни-экипажа с параллельными колёсами в направлении переднего колеса учёт инерционных свойств опорного ролика переднего колеса не изменяет условия устойчивости относительно псевдоскоростей. При этом изменяется вид финальных движений в устойчивом случае: возмущённые движения такого экипажа стремятся к стационарному прямолинейному движению, на котором скорость центра масс направлена вдоль оси симметрии экипажа, в то время как в безынерционной модели скорость центра масс может составлять с осью симметрии ненулевой угол, зависящий от начального возмущения.
2. Задача перемещения за наперёд заданное время управляемого симметричного омни-экипажа с помощью кусочно-постоянного управления с одним переключением из заданного начального состояния в заданное конечное состояние сводится к задаче решения двух систем линейных алгебраических уравнений, причём момент переключения управлений может быть задан произвольно. Первая система линейных алгебраических уравнений всегда имеет единственное решение; аналогичное свойство второй системы доказывается аналитически в ряде частных случаев и имеет место в численных экспериментах в общем случае.
3. Мощность управляющих напряжений, при которой отрыв невырожденного омни-экипажа от опорной плоскости заведомо не происходит, должна быть меньше минимального из значений трёх квадратичных функций псевдоскоростей, коэффициенты которых зависят только от геометрических параметров экипажа (в том числе высоты центра масс) и параметров моторов. Для симметричного омни-экипажа аналогичное ограничение на мощность управляющих напряжений также определяется непрерывной функцией кинетической энергии  $H$  вида  $b_1 - a_1\sqrt{H}$  при  $H \leq H_0$  и  $b_2 - a_2H$  при  $H \geq H_0$ , где коэффициенты  $a_1, a_2, b_1, b_2$  и значение  $H_0$  зависят только от геометрических параметров экипажа (в том числе высоты центра масс) и параметров моторов. Указанные функции найдены в явном виде.

## Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность полученных результатов обусловлена корректным применением математических методов, а также сопоставлением полученных результатов с результатами, полученными другими авторами. Аналитические результаты подтверждены и проиллюстрированы с помощью численного моделирования.

## Апробация работы

Результаты работы докладывались на следующих конференциях всероссийского и международного уровня:

1. Научная конференция “Ломоносовские чтения” 2017, секция механики (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 17–26 апреля 2017 г.),
2. Всероссийская конференция молодых-ученых механиков 2017 (Сочи, “Буревестник” МГУ, 5–15 сентября 2017 г.),
3. Международный молодёжный научный форум “ЛОМОНОСОВ–2018” (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 9–13 апреля 2018, г.),
4. Научная конференция “Ломоносовские чтения” 2019, секция механики (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 15–25 апреля 2019 г.),
5. Научная конференция “Ломоносовские чтения” 2022, секция механики (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 18–22 апреля 2022 г.),
6. Международный молодёжный научный форум “ЛОМОНОСОВ–2023” (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 10–21 апреля 2023 г.),
7. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт–Петербург, СПбГУ Петра Великого, 21–25 августа 2023 г.),

на научном семинаре имени В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова), а также на семинаре кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Института энергомашиностроения и механики НИУ “МЭИ”.

Также опубликованы тезисы докладов на всероссийских и международных конференциях:

1. Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Применение уравнений Я.В. Татаринова в динамике экипажа с омни–колесами с учетом массивности ролика // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 17–26 апреля 2017: тезисы докладов. 2017. С. 97;

2. Моисеев Г.Н., Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа с омни-колесами с учетом массы роликов // Всероссийская конференция молодых-ученых механиков, 5–15 сентября 2017: тезисы докладов. 2017. С. 65;
3. Моисеев Г.Н. Исследование управляемых движений омни-экипажа с кусочно-гладким управлением // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНО-СОВ–2018 [Электронный ресурс]. 2018. Режим доступа: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2018/data/13568/70626\\_uid238575\\_report.pdf](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13568/70626_uid238575_report.pdf) (дата обращения: 24.02.2026);
4. Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Управляемые движения омни-экипажа вида разгон-торможение // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 15–25 апреля 2019: тезисы докладов. 2019. С. 108;
5. Зобова А.А., Моисеев Г.Н. Движение омниэкипажа по плоскости с сухим трением // Научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция механики, 18–22 апреля 2022: тезисы докладов. 2022. С. 83;
6. Моисеев Г.Н. Анализ условий отрыва управляемого омни-экипажа // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ–2023 [Электронный ресурс]. 2023. Режим доступа: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2023/data/28496/153159\\_uid238575\\_report.pdf](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2023/data/28496/153159_uid238575_report.pdf) (дата обращения: 24.02.2026);
7. Моисеев Г.Н., Зобова А.А. Динамика и управление мобильным омни-экипажем // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов в 4 томах. Т. 1. 2023. С. 118–119.

Часть исследований проводилась в рамках грантов РФФИ 16–01–00338 и 19–01–00140.

Исходный код программ, разработанных в рамках диссертации, находится в открытом доступе на личном аккаунте GitHub соискателя:

<https://github.com/DifferentialOrange/omni-vehicle-dynamics-control>.

## Публикации

Основные идеи и положения работы изложены в 3 публикациях автора общим объёмом 3,125 п.л. в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук. Список работ приведён в конце автореферата.

## Личный вклад

Все результаты, выносимые на защиту, принадлежат лично автору. В работе [1] научный руководитель участвовал в постановке задачи, обсуждении выбора математических методов для работы и интерпретации полученных результатов. Личный вклад автора в работе [1] заключается в построении уравнений динамики системы, анализе устойчивости стационарных движений системы, программной реализации численных методов и визуализации сравнения движения исследуемой системы с системой, не учитывающей инерционные свойства роликов. В работе [2] научный руководитель участвовал в постановке задачи, выборе стратегии построения управления, обсуждении выбора математических методов для работы и интерпретации полученных результатов. Личный вклад автора в работе [2] заключается в сведении решения исходной задачи к задаче последовательного решения двух систем линейных алгебраических уравнений, исследовании свойств некоторых классов решений, а также написании программы для численного решения исходной задачи.

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём работы составляет 140 страниц. Диссертация содержит 91 рисунок. Список литературы состоит из 105 наименований.

## Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследований, а также проведён обзор предшествующих публикаций в области динамики мобильных роботов.

В **первой главе** введена модель омни-экипажа, не учитывающая инерционные свойства роликов колёс, и получены уравнения её управляемого движения по абсолютно шероховатой плоскости. Большая часть главы посвящена изложению уже известных результатов, которые выступают основой для исследований в последующих главах.

Экипаж, состоящий из горизонтальной платформы и трёх омни-колёс, совершает управляемые движения по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости (рис. 2а). Омни-колесо

моделируется вертикальным абсолютно твёрдым диском, который катится без проскальзывания в направлении оси ролика и способен свободно проскальзывать в направлении, перпендикулярном оси ролика.

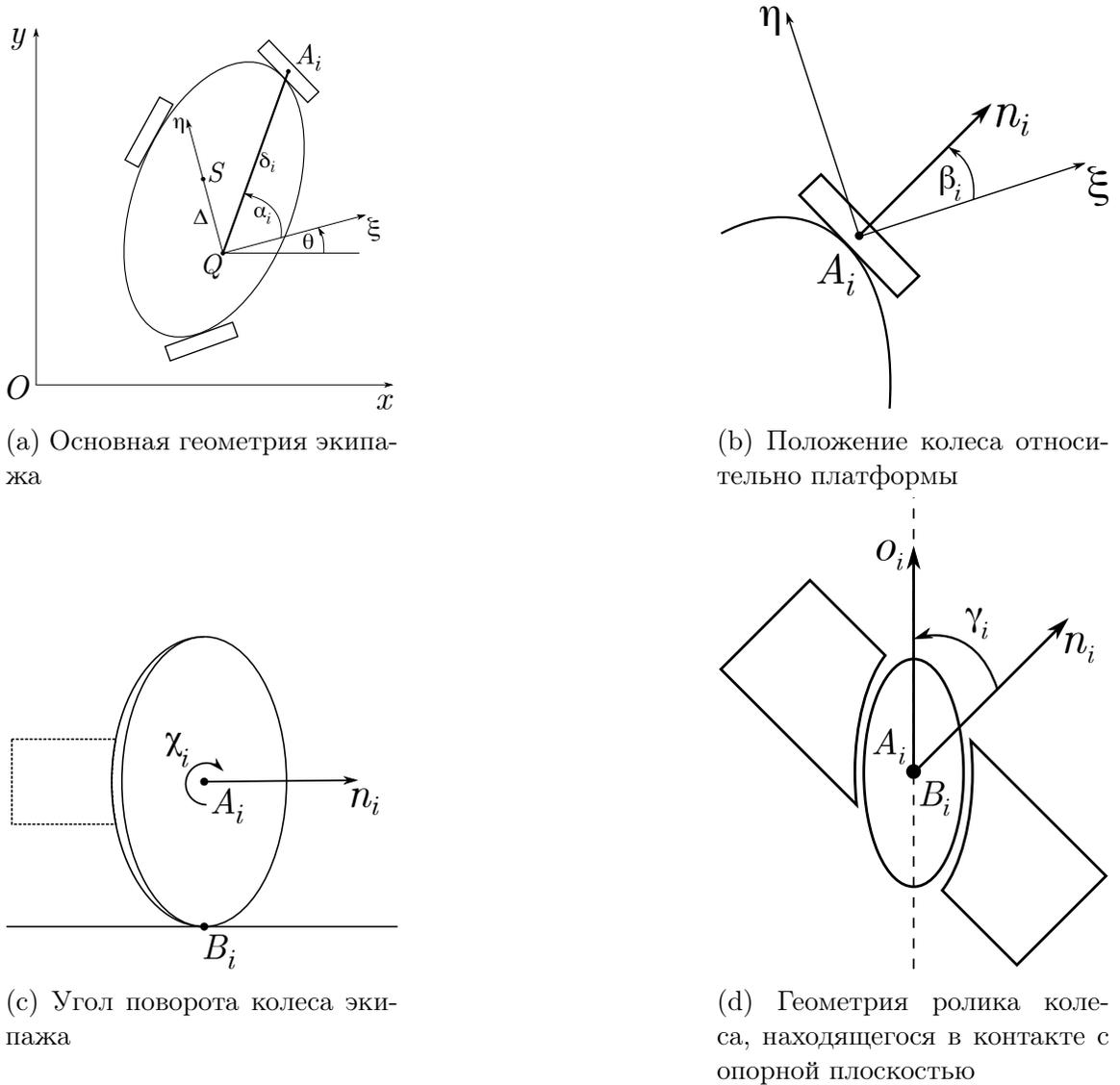


Рис. 2: Обозначения в модели омни-экипажа

Рассматривается движение в абсолютной системе координат  $Oxyz$ , где плоскость  $Oxy$  горизонтальна, а  $Oz$  является вертикалью. Пусть точка  $S$  — центр масс экипажа. Координаты  $(x, y)$  задают положение центра масс  $S$  на плоскости  $Oxy$ . Высота центра масс над опорной плоскостью постоянна и равна  $h$ .

Пусть  $Q$  — некоторая фиксированная точка платформы. Через  $A_i$  обозначим центр  $i$ -го колеса, через  $B_i$  — точку касания  $i$ -го колеса с плоскостью ( $i = 1, 2, 3$ ). С платформой свяжем правый трёхгранник  $Q\xi\eta z$ , ось  $Q\eta$  которого направлена по  $\overrightarrow{QS}$ . Угол  $\theta$  — угол курса платформы

— угол между  $Qx$  и  $Q\xi$ . Угол  $\theta$  отсчитывается так, что угловая скорость платформы равна  $\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ .

Вектор  $\mathbf{n}_i$  — единичный направляющий вектор оси  $i$ -го колеса (рис. 2b), направленный “наружу”. Угол  $\chi_i$  — угол поворота  $i$ -го колеса относительно платформы (рис. 2c). Вектор  $\mathbf{o}_i$  — касательный вектор к ободу колеса (рис. 2d). Он направлен таким образом, что, когда центр ролика расположен под центром колеса,  $\mathbf{o}_i$  совпадает с осью собственного вращения ролика. Колёса имеют одинаковый радиус  $r$ .

Конструкция экипажа задаётся следующими параметрами: расстояние  $\delta_i = |\overrightarrow{QA_i}|$  и угол  $\alpha_i$  (угол между осью платформы  $Q\xi$  и направлением из платформы в центр  $i$ -го колеса  $\overrightarrow{QA_i}$ ) — полярные координаты центра колеса относительно  $Q\xi\eta$ ; угол  $\beta_i$  — угол между  $Q\xi$  и  $\mathbf{n}_i$  — задаёт направление оси вращения  $i$ -го колеса; расстояние  $\Delta = |\overrightarrow{QS}|$  задаёт смещение центра масс; тип  $i$ -го колеса задаёт угол  $\gamma_i \in (0, \pi)$  — угол между вектором  $\mathbf{o}_i$  и  $\mathbf{n}_i$  (углы  $\gamma_i = \frac{\pi}{4}$  и  $\gamma_i = \frac{3\pi}{4}$  определяют меканум-колёса, а угол  $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$  определяет омни-колесо в узком смысле).

Общая масса экипажа равна  $m$ . Момент инерции всего экипажа относительно вертикальной оси  $Sz$  равен  $\Lambda^2$ . Момент инерции каждого колеса относительно его оси вращения  $A_i\mathbf{n}_i$  равен  $\lambda^2$  и одинаков для всех колёс.

Таким образом, исследуемая система состоит из четырёх абсолютно твёрдых тел. Её положение описывается шестью обобщёнными координатами:  $x, y, \theta, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ . Конструкция экипажа задаётся набором параметров  $r, h, \Delta, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Экипаж движется в поле силы тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . Высота центра масс  $h$  экипажа считается постоянной в течение всего времени движения. Управление совершается посредством трёх двигателей, для которых используется модель электромотора постоянного тока. Управляющий момент для  $i$ -го колеса имеет вид  $\mathbf{M}_i^{\text{ctrl}} = (c_1 U_i - c_2 \dot{\chi}_i)(-\mathbf{n}_i)$ , где  $U_i$  — подаваемые на обмотки двигателей управляющие напряжения, а слагаемое с коэффициентом  $c_2$  соответствует сопротивлению, вызываемому противоЭДС.

Псевдоскорости введены следующим образом:  $\nu_1 = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta$ ,  $\nu_2 = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta$ ,  $\nu_3 = \Lambda \dot{\theta}$ .

Уравнения связей имеют следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \Xi \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)^T, \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T, \quad \Xi = \|\sigma_{is}\|,$$

$$\sigma_{i1} = \frac{\cos(\beta_i + \gamma_i)}{r \sin \gamma_i}, \quad \sigma_{i2} = \frac{\sin(\beta_i + \gamma_i)}{r \sin \gamma_i}, \quad \sigma_{i3} = \frac{\Delta \cos(\beta_i + \gamma_i) + \delta_i \sin(\beta_i + \gamma_i - \alpha_i)}{\Lambda r \sin \gamma_i}.$$

Уравнения движения управляемого омни-экипажа, полученные с использованием формализма лаконичных уравнений Я.В. Татарина, имеют вид

$$\mathfrak{A}\dot{\boldsymbol{\nu}} = \frac{m}{\Lambda} \begin{pmatrix} \nu_2\nu_3 \\ -\nu_1\nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\Xi^T\mathbf{U} - c_2\Xi^T\Xi\boldsymbol{\nu}, \quad (1.43)$$

где  $\mathfrak{A} = \text{diag}\{m, m, 1\} + \lambda^2\Xi^T\Xi$ .

В случае, когда модель учитывает вязкое трение в осях колёс, задача исследования динамики этой модели сводится к задаче исследования экипажа без учёта трения корректировкой коэффициента сопротивления  $c_2$ .

Во **второй главе** исследовано влияние учёта инерционных свойств роликов колёс на устойчивость стационарных движений.

Рассматривается динамика экипажа *с параллельными колёсами* (рис. 3а).

Экипаж характеризуется следующим набором параметров:

$$\delta_2 > \Delta > 0, \quad \delta_1 = \delta_3 = \delta_{||},$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \beta_3 = \pi, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{\pi}{2}.$$

У системы, колёса которой моделируются без учёта инерционных свойств роликов, существуют равномерные движения вида

$$\nu_1 = \text{const}, \quad \nu_2 = \text{const}, \quad \nu_3 = 0,$$

устойчивые по псевдоскоростям при  $\nu_2 < 0$  и неустойчивые при  $\nu_2 > 0$ . Физический смысл условия: прямолинейное движение устойчиво, если центр масс во время движения находится позади оси параллельных колёс.

Для того, чтобы изучить влияние инерционных свойств роликов колёс на динамику омни-экипажа с параллельными колёсами, рассматривается следующая модель. Пусть задние колёса экипажа моделируются без учёта инерционных свойств роликов. Переднее колесо мы будем моделировать с учётом инерционных свойств роликов (рис. 4). Будем рассматривать лишь такое движение экипажа, при котором касание переднего колеса с плоскостью происходит посредством

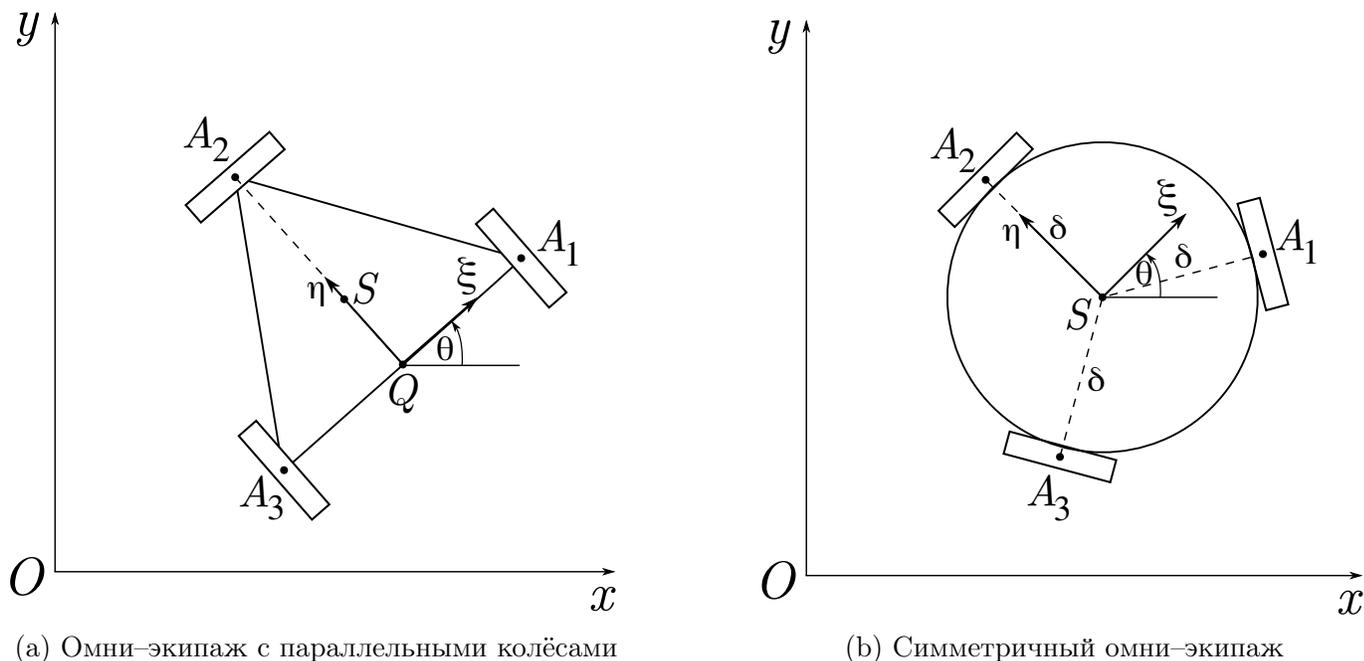


Рис. 3: Конфигурации экипажей

одного и того же ролика, т.е. не случается “переключения” с одного опорного ролика на другой. С учётом этого ограничения будем считать, что  $\chi_2 \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right)$ , где  $n = 3, 4, \dots$  — количество роликов на ободе колеса. Опорный ролик не проскальзывает в точке контакта.

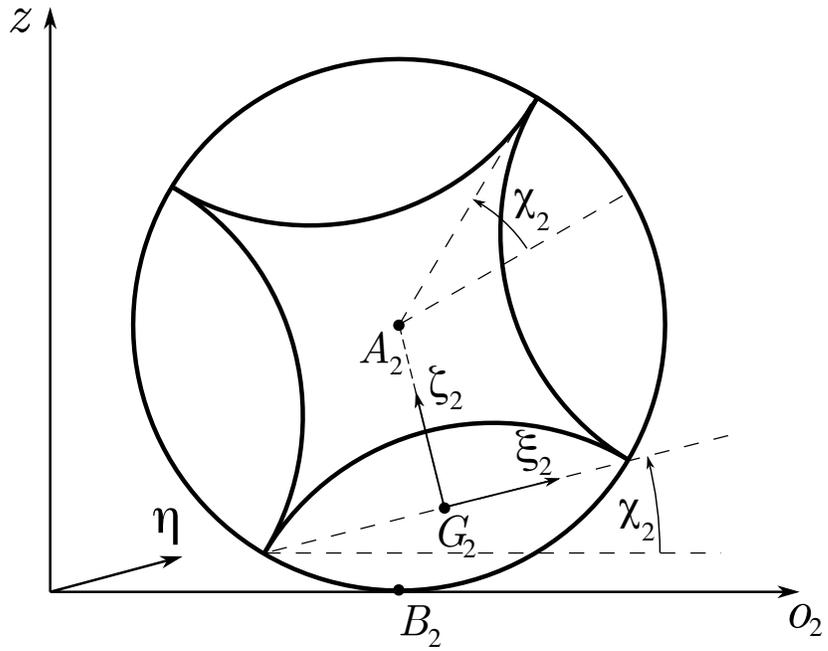


Рис. 4: Модель, учитывающая инерционные свойства роликов колёс ( $n = 4$ )

Уравнения движения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1^\Delta \dot{\nu}_1 - \kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 &= \left( \frac{m}{\Lambda} - \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \cos \chi_2}{\Lambda r} \right) \nu_2 \nu_3, \\
\mathbf{a}_2^\Delta \dot{\nu}_2 + \lambda_r^2 \rho^2(\chi_2) \dot{\nu}_2 + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda} \dot{\nu}_3 &= - \left( \frac{m}{\Lambda} - \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \cos \chi_2}{\Lambda r} \right) \nu_1 \nu_3 + \\
&\quad + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \rho'(\chi_2)}{r} \nu_1 \nu_2 - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho(\chi_2) \rho'(\chi_2)}{\Lambda r} \nu_2 \nu_3 - \\
&\quad - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho(\chi_2) \cos \chi_2}{\Lambda^2 r} \nu_3^2, \\
-\kappa \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_1 + \mathbf{a}_3^\Delta \dot{\nu}_3 + \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda} \dot{\nu}_2 &= \lambda_r^2 \frac{\rho(\chi_2) \cos \chi_2 + \rho'(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda r} \nu_1 \nu_2 - \\
&\quad - \lambda_r^2 \frac{(\delta_2 - \Delta) \rho'(\chi_2) \sin \chi_2}{\Lambda^2 r} \nu_2 \nu_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1^\Delta = \mathbf{a}_{11} &= m + \lambda^2 \frac{1}{r^2}, \quad \mathbf{a}_2^\Delta = \mathbf{a}_{22} = m + \lambda^2 \frac{2}{r^2}, \\
\mathbf{a}_3^\Delta = \mathbf{a}_{33} &= 1 + \lambda^2 \frac{2\delta_{||}^2 + (\delta_2 - \Delta)^2}{\Lambda^2 r^2}, \quad \kappa = -\frac{\mathbf{a}_{13}}{\mathbf{a}_{33}} = -\frac{\mathbf{a}_{31}}{\mathbf{a}_{33}} = \frac{\lambda^2 \delta_2 - \Delta}{\mathbf{a}_3^\Delta \Lambda r^2},
\end{aligned}$$

а  $\lambda_r^2$  — момент инерции ролика относительно его оси вращения. При  $\lambda_r = 0$  уравнения движения совпадают с уравнениями движения безынерционной модели.

Уравнения движения модели, учитывающей инерционные свойства опорного ролика переднего колеса, допускают решения вида

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \nu_2^0 \neq 0, \quad \nu_3 = 0, \quad \chi_2 = \chi_2^0 \in \left( -\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right).$$

При  $\nu_2^0 > 0$  существует корень характеристического многочлена линеаризованной системы с положительной действительной частью, и такое движение является неустойчивым. При  $\nu_2^0 < 0$  наблюдается критический случай двух нулевых корней, причём остальные корни имеют отрицательную действительную часть, а семейство решений двухпараметрическое. Следовательно, такое движение устойчиво по переменным  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \chi_2$ , причём всякое возмущённое движение, достаточно близкое к невозмущённому, стремится с неограниченным возрастанием времени к одному из установившихся движений этого вида.

Таким образом, на условие устойчивости добавление инерции ролика не повлияло. Однако

в безынерционной модели существуют также прямолинейные движения вида

$$\nu_1 = \nu_1^0 \neq 0, \quad \nu_2 = \nu_2^0 \neq 0, \quad \nu_3 = 0,$$

такие, что скорость центра масс  $S$  экипажа составляет некоторый ненулевой угол с осью симметрии, и именно таким будет в общем случае финальное движение экипажа в безынерционной модели омни-колеса при возмущении устойчивого прямолинейного движения. Таким образом, учет инерционных свойств ролика ведет к качественным отличиям в финальных прямолинейных движениях экипажа. Данный факт также проиллюстрирован численным экспериментом.

В случае, когда модель учитывает вязкое трение в осях роликов, а изменением расстояния от оси опорного ролика до точки касания можно пренебречь, задача исследования динамики этой модели сводится к задаче исследования экипажа без учёта трения корректировкой коэффициента сопротивления  $c_2$  в уравнении (1.43).

В **третьей главе** решается задача управления омни-экипажем при известных начальных условиях на положение и скорости и наперёд заданных финальных положений, скоростях и времени движения.

Рассматривается управляемое движение трёхколёсного омни-экипажа по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Колёса моделируются без учёта инерционных свойств роликов. Ставится следующая задача: необходимо найти такое управление, чтобы за наперёд заданное время  $T$  экипаж из произвольного начального положения при произвольных начальных скоростях переместился в наперёд заданное положение, имея в конце интервала наперёд заданные скорости.

Рассмотрим управляемое движение модели *симметричного* омни-экипажа, не учитывающей инерционные свойства роликов колёс (рис. 3b).

Уравнения движения этой модели имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \mathbf{b}^\odot \nu_2 \nu_3 - \mathbf{c}^\odot \nu_1 + W_1, \\ \dot{\nu}_2 &= -\mathbf{b}^\odot \nu_1 \nu_3 - \mathbf{c}^\odot \nu_2 + W_2, \\ \dot{\nu}_3 &= -\mathbf{c}_3^\odot \nu_3 + W_3, \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{b}^\ominus = \frac{m}{\mathbf{a}^\ominus \Lambda}, \quad \mathbf{c}^\ominus = \frac{3c_2}{2\mathbf{a}^\ominus r^2}, \quad \mathbf{c}_3^\ominus = \frac{3c_2 \delta^2}{\mathbf{a}_3^\ominus \Lambda^2 r^2}, \quad \mathbf{a}^\ominus = m + \frac{3\lambda^2}{2r^2}, \quad \mathbf{a}_3^\ominus = 1 + \frac{3\delta^2 \lambda^2}{\Lambda^2 r^2},$$

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \frac{c_1}{r} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\ominus & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^\ominus & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_3^\ominus \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\delta}{\Lambda} & \frac{\delta}{\Lambda} & \frac{\delta}{\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения симметричного омни-экипажа могут быть проинтегрированы в квадратурах для случая постоянных напряжений. На основе этого факта мы ищем решение иско-мой задачи управления с помощью кусочно-постоянного управления с одним переключением (управление вида “разгон”–“торможение”), где момент переключения  $t_{sw} \in (0, T)$  также выби-рается произвольно. С помощью этого подхода решение задачи управления сводится к задаче последовательного решения двух систем линейных алгебраических уравнений. Первая система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\mathbf{c}_3^\ominus} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}} & -e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}} & \frac{1}{\mathbf{c}_3^\ominus} & -\frac{1}{\mathbf{c}_3^\ominus} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{c}_3^\ominus T} & 0 & \frac{1}{\mathbf{c}_3^\ominus} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} & \frac{e^{-\mathbf{c}_3^\ominus t_{sw}}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} & \frac{t_{sw}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} & -\frac{t_{sw}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{e^{-\mathbf{c}_3^\ominus T}}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} & 0 & \frac{T}{\mathbf{c}_3^\ominus \Lambda} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_3^- \\ D_3^+ \\ W_3^- \\ W_3^+ \\ D_6^- \\ D_6^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_3^0 \\ 0 \\ \nu_3^T \\ \theta^0 \\ 0 \\ \theta^T \end{pmatrix}.$$

Доказано, что эта линейная система имеет единственное решение при фиксированных парамет-рах  $T > 0$ ,  $t_{sw} \in (0, T)$ . Вторая система имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi(0, t_{sw}) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \Phi(t_{sw}, T) & e^{-\psi(t_{sw}, T)} & 0 \\ \Gamma(0, t_{sw}) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \Gamma(t_{sw}, T) & \Psi(t_{sw}, T) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{1,2}^- \\ W_{1,2}^+ \\ D_{1,2}^+ \\ D_{4,5}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_{1,2}^0 e^{-\psi(0, t_{sw})} \\ \nu_{1,2}^T \\ -\nu_{1,2}^0 \Psi(0, t_{sw}) \\ \Upsilon^T \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\psi(t_1, \tau) + I\theta(\tau)} \left( \int_{t_1}^{\tau} e^{\psi(t_1, s)} ds \right) d\tau, \\ \Psi(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\psi(t_1, \tau) + I\theta(\tau)} d\tau, \\ \Phi(t_1, t_2) &= e^{-\psi(t_1, t_2)} \int_{t_1}^{t_2} e^{\psi(t_1, \tau)} d\tau, \\ \psi(t_1, t) &= (t - t_1) \mathfrak{c}^\ominus - I \frac{\mathfrak{b}^\ominus \left( (t - t_1) W_3 - \left( e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus t} - e^{-\mathfrak{c}_3^\ominus t_1} \right) D_3 \right)}{\mathfrak{c}_3^\ominus}, \\ \nu_{1.2} &= \nu_1 + I\nu_2, \quad \Upsilon = x + Iy,\end{aligned}$$

$I$  — комплексная единица.

Существование и единственность решения второй системы доказано аналитически в ряде частных случаев и продемонстрировано в численных экспериментах для движений общего вида.

В численных экспериментах также рассмотрена возможность минимизации функционала расхода энергии вида

$$\mathcal{E} = \int_0^T \left( (U_1)^2 + (U_2)^2 + (U_3)^2 \right) dt$$

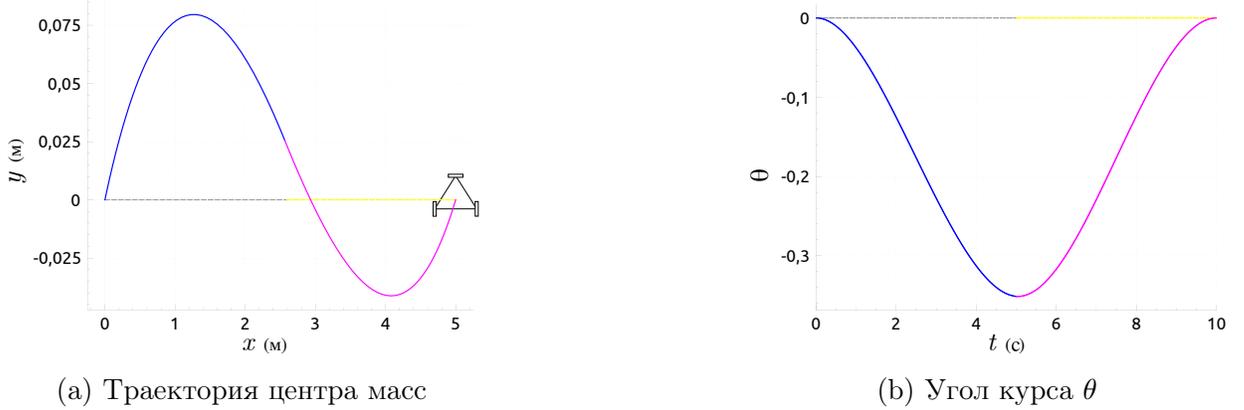
и максимального по модулю управляющего напряжения

$$\mathcal{U} = \max_{i=1,2,3; s=-,+} |U_i^s|$$

путём варьирования параметров времени движения  $t_{sw}$ ,  $T$  для конкретных задач управления. Аналитически показано, что при движении симметричного экипажа по прямой без поворота энергетические затраты не зависят от выбора направления движения (и при этом пропорциональны квадрату пройденного расстояния). Для движений, в которых поворот осуществляется на угол, меньший полного угла  $2\pi$ , показано преимущество предложенных программных движений по сравнению с подходом, при котором поступательное движение и вращение осуществляются последовательно.

На основе аналитического решения задачи управления для симметричного экипажа строится численный алгоритм, который решает аналогичные задачи управления для омни-экипажей произвольной конфигурации (на примере экипажа с параллельными колёсами) методом продолжения по параметру, где за начальное приближение берётся решение задачи для симметричного

экипажа, а в качестве параметров выступают геометрические и инерционные характеристики экипажа  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ,  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ,  $\Delta$ ,  $\Lambda$  (рис. 5).



(a) Траектория центра масс

(b) Угол курса  $\theta$

Рис. 5: Пример: управляемое движение вбок без поворота

(Сплошная линия соответствует экипажу с параллельными колёсами: синий цвет — этап до переключения, пурпурный — после. Пунктирная линия соответствует симметричному экипажу: серый цвет — этап до переключения, жёлтый — после.)

В **четвёртой главе** исследуются границы применимости модели, не учитывающей инерционные свойства роликов колёс, с точки зрения выполнения условий напряжённости неудерживающих связей.

Уравнения движения этой модели имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\mathfrak{B}^\nu \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^\nu \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^\nu \mathbf{U},$$

где матрицы  $\mathfrak{B}^\nu$ ,  $\mathfrak{C}^\nu$ ,  $\mathfrak{U}^\nu$  определяются выражениями

$$\mathfrak{B}^\nu = \|\mathfrak{b}_{ij}^\nu\| = \frac{m}{\Lambda} \mathfrak{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \|\mathfrak{a}_{ij}\| = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda^2 \Xi^T \Xi,$$

$$\mathfrak{C}^\nu = \|\mathfrak{c}_{ij}^\nu\| = -c_2 \mathfrak{A}^{-1} \Xi^T \Xi, \quad \mathfrak{U}^\nu = \|\mathfrak{u}_{ij}^\nu\| = c_1 \mathfrak{A}^{-1} \Xi^T.$$

Предположим, что реакции связей сводятся к трём силам между  $i$ -ым колесом и плоскостью в точках контакта. Тогда нормальные реакции опоры  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются решением системы линейных уравнений

$$\mathfrak{A}^{\text{eq}} \mathbf{N} = (\mathfrak{B}^{\text{eq}} \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^{\text{eq}} \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^{\text{eq}} \mathbf{U} + \mathfrak{g}^{\text{eq}} g,$$

$$\text{где } \mathfrak{A}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{a}_{ij}^{\text{eq}}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 \sin \alpha_1 - \Delta & \delta_2 \sin \alpha_2 - \Delta & \delta_3 \sin \alpha_3 - \Delta \\ -\delta_1 \cos \alpha_1 & -\delta_2 \cos \alpha_2 & -\delta_3 \cos \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{b}_{ij}^{\text{eq}}\| &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{B}^\nu - \frac{\lambda^2}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & -\sin \beta_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \\ &\quad - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{B}^\nu - h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{C}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{c}_{ij}^{\text{eq}}\| &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{C}^\nu - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{C}^\nu, \\ \mathfrak{U}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{u}_{ij}^{\text{eq}}\| &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 \end{pmatrix} \Xi \mathfrak{U}^\nu - mh \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{U}^\nu, \\ \mathfrak{g}^{\text{eq}} = \|\mathfrak{g}_{ij}^{\text{eq}}\| &= m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В работе доказано, что если все три точки контакта трёхколёсного омни-экипажа с плоскостью лежат на одной прямой, система уравнений относительно нормальных реакций опоры всегда имеет единственное решение для невырожденного экипажа. Такие экипажи будем называть *невырожденными*.

Решив систему уравнений для невырожденного экипажа, мы получим явный вид нормальных реакций опоры:

$$\mathbf{N} = (\mathfrak{B}^N \boldsymbol{\nu}) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \mathfrak{C}^N \boldsymbol{\nu} + \mathfrak{U}^N \mathbf{U} + \mathfrak{g}^N g,$$

где матрицы определяются следующими выражениями:

$$\mathfrak{B}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \mathfrak{B}^{\text{eq}}, \quad \mathfrak{C}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \mathfrak{C}^{\text{eq}}, \quad \mathfrak{U}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \mathfrak{U}^{\text{eq}}, \quad \mathfrak{g}^N = (\mathfrak{A}^{\text{eq}})^{-1} \mathfrak{g}^{\text{eq}}.$$

Отрывом будем называть ситуацию, когда для нормальных реакций опоры омни-экипажа нарушено хотя бы одно из условий  $N_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 4.1.** Пусть в текущий момент времени омни-экипаж имеет псевдоскорости  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Если управляющие напряжения удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{11}^N U_1 + \mathbf{u}_{12}^N U_2 + \mathbf{u}_{13}^N U_3 + \mathbf{f}_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) > 0, \\ \mathbf{u}_{21}^N U_1 + \mathbf{u}_{22}^N U_2 + \mathbf{u}_{23}^N U_3 + \mathbf{f}_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) > 0, \\ \mathbf{u}_{31}^N U_1 + \mathbf{u}_{32}^N U_2 + \mathbf{u}_{33}^N U_3 + \mathbf{f}_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3) > 0, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{f}_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_{ij}^N \nu_j \right) \frac{m\nu_3}{\Lambda} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_{ij}^N \nu_j + \mathbf{g}_i^N g \quad (i = 1, 2, 3),$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

**Теорема 4.2.** Пусть в текущий момент времени омни-экипаж имеет псевдоскорости  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \min_{i=1,2,3} \frac{\mathbf{f}_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{i1}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i2}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i3}^N)^2}},$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

**Теорема 4.3.** Пусть в данный момент времени омни-экипаж имеет величину скорости центра масс  $v_S \geq 0$  и угловую скорость платформы  $\omega \mathbf{e}_z$ . Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \min_{i=1,2,3} \frac{\mathfrak{V}_i(v_S, \omega)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{i1}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i2}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i3}^N)^2}},$$

где

$$\mathfrak{V}_i(v_S, \omega) = \left\{ \min \mathbf{f}_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \mid \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} = v_S, \nu_3 = \Lambda\omega \right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

**Теорема 4.4.** Пусть в данный момент времени омни-экипаж имеет кинетическую энергию

$T = H$ . Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \min_{i=1,2,3} \frac{\mathfrak{H}_i(H)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{i1}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i2}^N)^2 + (\mathbf{u}_{i3}^N)^2}},$$

где

$$\mathfrak{H}_i(H) = \{ \min \mathbf{f}_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \mid T(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = H \} \quad (i = 1, 2, 3),$$

то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

**Утверждение 4.4.** Следующее выражение определяет функцию  $\mathfrak{B}_i(v_S, \omega)$  из теоремы 4.3:

$$\mathfrak{B}_i(v_S, \omega) = -v_S \sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2} + (m\mathbf{b}_{i3}^N \omega + \mathbf{c}_{i3}^N) \Lambda \omega + \mathbf{g}_i^N g,$$

для  $i = 1, 2, 3$ .

Наиболее опасным с точки зрения минимума величины нормальной реакции опоры  $N_i$  является движение вида

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}} v_S \\ -\frac{m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N}{\sqrt{(m\mathbf{b}_{i1}^N \omega + \mathbf{c}_{i1}^N)^2 + (m\mathbf{b}_{i2}^N \omega + \mathbf{c}_{i2}^N)^2}} v_S \end{pmatrix}.$$

**Следствие 4.4.** Пусть в данный момент времени симметричный омни-экипаж имеет кинетическую энергию  $T = H$ . Если мощность управляющих напряжений удовлетворяет условию

$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} < \mathfrak{H}(H),$$

где

$$\mathfrak{H}(H) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}\mathfrak{d}_0}{2} - \frac{\sqrt{6}c_2}{c_1} \sqrt{\frac{H}{2mr^2 + 3\lambda^2}}, & \text{для } H \leq \frac{c_2^2 (\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4 r^2}, \\ \frac{\sqrt{2}\mathfrak{d}_0}{2} - \frac{\sqrt{3}}{c_1 r} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}} \left( \frac{\lambda^2 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} H + \frac{c_2^2}{2\lambda^2} \right), & \text{для } H \geq \frac{c_2^2 (\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4}, \end{cases}$$

где  $\mathfrak{d}_0 = \frac{\sqrt{3}m\delta g}{3c_1} \frac{2mr^2 + 3\lambda^2}{2mhr + 3\lambda^2}$ , то все нормальные реакции опоры строго положительны и отрыва не происходит.

**Следствие 4.7.** Для движений симметричного омни-экипажа с фиксированной кинетической энергией

$H \leq \frac{c_2^2 (\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4 r^2}$  имеют место следующие утверждения:

- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2+3\lambda^2}} \\ \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2+3\lambda^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$  доставляет минимум нормальной реакции опоры  $N_1$ ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2+3\lambda^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$  доставляет минимум нормальной реакции опоры  $N_2$ ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2+3\lambda^2}} \\ \sqrt{\frac{Hr^2}{2mr^2+3\lambda^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$  доставляет минимум нормальной реакции опоры  $N_3$ .

**Следствие 4.8.** Среди всех движений симметричного омни-экипажа с фиксированной кинетической энергией

$H \geq \frac{c_2^2 (\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2)}{2\lambda^4 r^2}$  имеют место следующие утверждения:

- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 \nu_3^H + \sqrt{3} c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ -\frac{\sqrt{3} \lambda^2 \nu_3^H - c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ \nu_3^H \end{pmatrix}$  доставляет минимум нормальной реакции опоры  $N_1$ ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 \nu_3^H}{c^\ominus} \\ -\frac{c_2 \Lambda}{c^\ominus} \\ \nu_3^H \end{pmatrix}$  доставляет минимум нормальной реакции опоры  $N_2$ ,
- $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2 \nu_3^H - \sqrt{3} c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ \frac{\sqrt{3} \lambda^2 \nu_3^H - c_2 \Lambda}{2c^\ominus} \\ \nu_3^H \end{pmatrix}$  доставляет минимум нормальной реакции опоры  $N_3$ ,

где  $c^\ominus = \frac{\sqrt{2} \lambda^2 \Lambda}{2} \sqrt{\frac{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2}{2mr^2 + 3\lambda^2}}$  и  $\nu_3^H = \pm \frac{\sqrt{2} \Lambda}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{2H\lambda^4 r^2}{\Lambda^2 r^2 + 3\lambda^2 \delta^2} - c_2^2}$ .

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построены динамические уравнения трёхколёсного омни-экипажа с параллельными колё-

сами (экипажа с вертикальной плоскостью симметрии, у которого оси двух задних омни-колёс, вращающихся независимо, совпадают и перпендикулярны плоскости симметрии, а ось вращения переднего омни-колеса лежит в той же плоскости симметрии) с учётом инерционных свойств опорного ролика переднего колеса. Показано существование стационарных по псевдоскоростям и углу поворота переднего колеса прямолинейных движений в направлении оси переднего колеса. Показано, что учёт инерционных свойств опорного ролика переднего колеса не влияет на условия устойчивости по псевдоскоростям стационарных прямолинейных движений в направлении оси переднего колеса, но меняет вид финальных движений в устойчивом случае: возмущённые движения стремятся к некоторому стационарному прямолинейному движению, на котором скорость центра масс коллинеарна оси переднего колеса, тогда как в модели, не учитывающей массивность опорного ролика, они могут стремиться к стационарным прямолинейным движениям, на которых эта скорость может составлять с указанной осью ненулевой угол.

2. Показано, что в динамических уравнениях линейное вязкое трение в осях колёс и эффект противоЭДС в модели электромотора постоянного тока описываются совпадающими по форме слагаемыми; тот же факт установлен и в случае линейного вязкого трения в осях роликов омни-колёс с большим числом роликов для симметричной конфигурации экипажа.
3. Рассмотрена задача управления симметричным омни-экипажем (экипажем, омни-колёса которого расположены в вершинах правильного треугольника, центр которого является центром масс системы, а биссектрисы совпадают с осями колёс), в которой за заданное время из заданного начального положения системы с заданными начальными псевдоскоростями необходимо достичь заданного конечного положения с заданными конечными псевдоскоростями без ограничений на управления. Предложено решение данной задачи в форме кусочно-постоянного управления с одним переключением (управления вида “разгон-торможение”), где момент переключения выступает в качестве наперёд заданного параметра. Решение задачи управления с помощью предложенного подхода сведено к решению двух систем линейных алгебраических уравнений. Доказано, что первая система линейных алгебраических уравнений всегда имеет единственное решение; аналогичное свойство второй системы доказано аналитически в ряде частных случаев и продемонстрировано в численных экспериментах для движений общего вида. В явном виде построены простейшие программные движения (поступательное движение и вращение на месте) и

исследованы их свойства. В численных экспериментах рассмотрена возможность оптимизации управления для функционала, пропорционального затраченной на движениях моторами энергии, и удовлетворения возможных ограничений на максимальное по модулю значение управлений посредством изменения времени движения на каждой стадии. Для движений, в которых поворот осуществляется на угол, меньший полного угла  $2\pi$ , показано преимущество предложенных программных движений по сравнению с подходом, при котором поступательное движение и вращение осуществляются последовательно.

4. Представлена программа для численного решения аналогичной задачи управления для трёхколёсного омни-экипажа произвольной конфигурации. Работа программы продемонстрирована на примере решения нескольких краевых задач для омни-экипажа с параллельными колёсами.
5. Получен явный вид нормальных реакций опоры для управляемых движений трёхколёсного омни-экипажа произвольной конфигурации. Сформулированы достаточные условия положительности нормальных реакций опоры относительно мощностей управляющих напряжений при известных псевдоскоростях системы, скорости центра масс системы и угловой скорости платформы, кинетической энергии системы. Указаны наиболее “опасные” с точки зрения нарушения представленных достаточных условий движения в двух случаях: в классе движений с фиксированной скоростью центра масс системы и угловой скоростью платформы для экипажа произвольной конфигурации и в классе движений с фиксированной кинетической энергией для симметричного омни-экипажа. Исследовано влияние конкретных параметров конструкции симметричного омни-экипажа на условия положительности нормальных реакций опоры.

## Публикации

По теме диссертации опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук:

1. Моисеев Г.Н., Зобова А.А. Устойчивость прямолинейных движений омни-экипажа с учетом инерционности роликов колес // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 6. С. 78–82 (Импакт-фактор 0,211 (РИНЦ), EDN: YSAQPZ, 0,25 п.л. / авторский вклад определен). = Moiseev G.N., Zobova A.A. Stability of the

- Rectilinear Motion of an Omni Vehicle with Consideration of Wheel Roller Inertia // Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Vol. 73, № 6. Pp. 145–148 (Импакт–фактор 0,612 (РИНЦ), EDN: LJNDLQ, 0,25 п.л. / авторский вклад определен);
2. Moiseev G.N., Zobova A.A. Dynamics–based piecewise constant control of an omnivehicle // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 18, № 4. Pp. 661–680 (Импакт–фактор 0,716 (РИНЦ), EDN: UPYMVX, 1,25 п.л. / авторский вклад определен);
  3. Moiseev G.N. No–overturn conditions for omnivehicle motion // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 20, № 2. Pp. 311–336 (Импакт–фактор 0,716 (РИНЦ), EDN: QARBPB, 1,625 п.л.).