

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Соколов Антон Иванович**

**Проекции трехосного эллипсоида  
для отображения рельефа на картах небесных тел**

1.6.20. Геоинформатика, картография

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени

кандидата географических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре картографии и геоинформатики географического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

- Научный руководитель** — *Нырцов Максим Валерьевич, доктор технических наук, доцент, профессор РАН*
- Официальные оппоненты** — *Лисицкий Дмитрий Витальевич, доктор технических наук, профессор, директор НИИ стратегического развития Сибирского государственного университета геосистем и технологий*
- Пьянков Сергей Васильевич, доктор географических наук, профессор, заведующий кафедрой картографии и геоинформатики географического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета*
- Медведев Андрей Александрович, кандидат географических наук, заведующий отделом картографии и дистанционного зондирования Земли Института географии РАН*

Защита диссертации состоится «18» декабря 2025 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.016.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Географический факультет, 18 этаж, аудитория 1807.

E-mail: [dissovet.geogr.msu@gmail.com](mailto:dissovet.geogr.msu@gmail.com).

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3659>.

Автореферат разослан «14» ноября 2025 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат географических наук

Е.Ю. Матлахова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Картографирование небесных тел является важнейшей и неотъемлемой частью их исследования. Для представления научной информации о небесном теле и формирования впечатления об устройстве его поверхности часто используются карты поверхности и гипсометрические карты. Под *картой поверхности* понимается общегеографическая карта небесного тела, т.е. карта, на которой отображены видимые элементы местности. Это понятие вводится, чтобы избежать использования термина «общегеографическая карта» во внеземном картографировании. Основным содержанием карт поверхности и гипсометрических карт небесных тел чаще всего является рельеф, поскольку другие видимые элементы местности практически не представлены.

Отличие других небесных тел от Земли в качестве объекта картографирования проявляется и в содержании карт, и в их математической основе. Для таких карт характерно разнообразие *референц-поверхностей* (математическая поверхность, аппроксимирующая физическую поверхность небесного тела) вследствие различий формы объектов. При этом, как правило, используется не такое большое число *картографических проекций* (в основном потому, что количество этих карт гораздо меньше, чем карт Земли). Карты поверхности и гипсометрические карты небесных тел состоят в различных по характеру искажений проекциях. При отображении рельефа на таких картах может требоваться как минимизация искажений форм объектов (для передачи очертаний горизонталей, морфологических характеристик кратеров и т.д.), так и сохранение их площадей.

Как стало ясно к концу 80-х гг. XX в., многие небесные тела в Солнечной системе имеют сложную нерегулярную поверхность, что привело к появлению рекомендаций Международного астрономического союза использовать трёхосный эллипсоид в качестве референц-поверхности для их картографирования. Под *трёхосным эллипсоидом* в геодезии и картографии понимается эллипсоид, у которого все три полуоси различны. Таким образом, возникла необходимость получения проекций трёхосного эллипсоида с заданным характером искажений. И если в то время из тел сложной формы космическими аппаратами исследовались только спутники Марса, то к 20-м гг. XXI в. накоплен большой объём данных для картографирования спутников планет-гигантов, астероидов, ядер комет. Это определяет актуальность задач по разработке проекций трёхосного эллипсоида и определению свойств этих проекций. Разнообразие референц-поверхностей и влияние их параметров на свойства проекций обуславливают важность обоснованного выбора проекций при создании карт небесных тел. Выбор проекций тесно связан с таким направлением математической картографии, как получение так называемых *наилучших проекций*, т.е. проекций, в которых минимизированы все искажения или некоторые их виды.

К 20-м гг. XXI в. возросла роль геоинформационных технологий в картографировании, однако вследствие сложности расчётных формул проекции трёхосного эллипсоида отсутствуют в математических модулях распространённых ГИС-пакетов. Поэтому при картографировании небесных тел, фигуры которых предпочтительно аппроксимировать трёхосным эллипсоидом, нередко делается выбор в пользу более простого варианта (сфера

или эллипсоид вращения). Это обуславливает актуальность задачи по разработке инструментария для работы с проекциями трёхосного эллипсоида, в том числе получению конечных формул для упрощения вычислений.

**Цель исследования** – получить формулы и определить свойства проекций трёхосного эллипсоида, наилучших с точки зрения минимизации искажений для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи исследования**:

- на основе опыта картографирования небесных тел выявить проекции, используемые для отображения рельефа на картах поверхности и гипсометрических картах;
- получить конечные формулы аналогичных проекций для трёхосного эллипсоида или простые аппроксимирующие зависимости;
- разработать инструментарий по вычислению прямоугольных координат в этих проекциях и показателей искажений;
- определить свойства проекций трёхосного эллипсоида, прежде всего величину и распределение основных видов искажений;
- выбрать наилучшие проекции для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел с точки зрения минимизации искажений.

**Объектом** исследования являются проекции трёхосного эллипсоида с различным характером искажений. **Предмет** исследования – свойства проекций трёхосного эллипсоида (величина и распределение искажений) и их влияние на отображение рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел.

**Фактический материал и личный вклад автора.** Работа отражает результаты исследований аспиранта за период с 2017 г., выполненных на кафедре картографии и геоинформатики Географического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Автором получены *конечные формулы* цилиндрических, азимутальных и конических проекций трёхосного эллипсоида, а при невозможности их получения – *простые аппроксимирующие зависимости* для вычисления координат в проекциях. Также автором на основе исследования распределения искажений в проекциях трёхосного эллипсоида выбраны наилучшие из них для отображения рельефа на картах небесных тел с точки зрения минимизации искажений. Основные исходные материалы – глобальные фотомозаики небесных тел, созданные проф. Ф. Стуком (Stooke Small Bodies Maps), и цифровые модели поверхности, доступные в системе планетных данных (Planetary Data System). Параметры эллипсоидов устанавливаются в соответствии с отчётом рабочей группы Международного астрономического союза по картографическим координатам и элементам вращения планет и спутников. Программные комплексы для построения изокол и составления карт – Golden Software Surfer и QGIS.

**Методология и методика.** Методологическую базу работы составляют методы моделирования, математические методы, картографический метод исследования, который

заключается в представлении свойств объектов и явлений с помощью картографических изображений, а также сравнительный метод. В основе работы лежит традиционная методика исследования картографических проекций, разработанная К. Якоби, Г.А. Гинзбургом, Л.М. Бугаевским, распространённая на проекции трёхосного эллипсоида. Она заключается в определении величин и распределения искажений в проекциях по *изоколам* и выборе наилучших проекций с точки зрения минимизации искажений. Получение формул проекций трёхосного эллипсоида является продолжением и углублением изысканий Л.М. Бугаевского, Б.Б. Серапинаса, Дж. Снайдера, М.Э. Флейс, М.В. Нырцова. При выводе формул проекций интегралы, соответствующие заданному характеру искажений, выражаются через аналитические функции (конечные формулы) либо сводятся к эллиптическим интегралам. Для выбора наилучших проекций сравнивается распределение искажений в разных проекциях и для разных эллипсоидов.

**Научную новизну работы** определяют следующие результаты:

- впервые получены конечные формулы ряда проекций трёхосного эллипсоида, предназначенных для отображения рельефа на картах поверхностей, фотокартах и гипсометрических картах небесных тел, удобные для их включения в математический модуль геоинформационных систем и для упрощения расчёта показателей искажений;
- разработан новый инструментарий в виде программы на языке JavaScript и графического интерфейса к ней на HTML по вычислению прямоугольных координат в цилиндрических, азимутальных, конических проекциях трёхосного эллипсоида и в проекции Якоби, а также показателей искажений, включающий полученные конечные формулы.

**Научная и практическая значимость работы.** Исследование расширяет теорию проекций трёхосного эллипсоида, получаемых на основе векторного описания самого трёхосного эллипсоида радиус-вектором, а также касательной к эллипсоиду плоскости, содержащей приращение радиус-вектора. Выведенные формулы проекций дополняют систему цилиндрических, азимутальных и конических проекций в нормальной ориентировке, разрабатываемых в рамках этой теории.

Выбранные наилучшие проекции трёхосного эллипсоида для отображения рельефа рекомендуются к использованию при создании карт поверхностей и гипсометрических карт небесных тел, фигуры которых целесообразно аппроксимировать этой референц-поверхностью. Разработанный инструментарий по вычислению координат в проекциях упрощает процесс составления карт таких небесных тел. Алгоритмы расчёта показателей искажений, включённые в инструментарий, могут быть использованы при выборе проекций для картографирования небесных тел, также как и построенные изоколы.

Инструментарий по вычислению прямоугольных координат проекций трёхосного эллипсоида используется в лабораторных работах студентов по учебным курсам на кафедре картографии и геоинформатики географического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

### **Основные защищаемые положения:**

1. Для отображения рельефа на картах глобального охвата при условии комбинирования азимутальной и цилиндрической проекций в рамках единой компоновки и выбора переходной области в зависимости от эксцентриситетов эллипсоида наилучшими являются: для карт поверхности и фотокарт – *проекция меридианного сечения*, для гипсометрических карт – *проекция, сохраняющие длины вдоль меридианов*.
2. *Конические проекции* целесообразно использовать для отображения рельефа на картах поверхности и гипсометрических картах регионального охвата, при этом расположение области с минимальными искажениями тем ближе к субширотному, чем меньше экваториальное сжатие эллипсоида.
3. Для исследования поверхностей небесных тел с точки зрения соотношения площадей различных объектов и отклонения референц-поверхности от физической поверхности пригодны разработанные *равновеликие проекции*.

**Степень достоверности.** Корректность полученных конечных формул проекций проверяется путём сравнения рассчитанных координат с результатами вычислений определённых интегралов, входящих в эти формулы, численными методами. Также для контроля правильности формул используется тот факт, что азимутальные проекции являются частным случаем, а цилиндрические – предельным случаем конических проекций. Выводы о распределении искажений в проекциях, сделанные по построенным изоколам, проверяются путём оценки искажений на примере отдельных форм рельефа и их сопоставления с составленными фотокартами и гипсометрическими картами небесных тел.

**Апробация работы.** Результаты исследования были представлены на международных конференциях: «*Practical Geography and XXI Century Challenges*» (Москва, 2018), «*14th Moscow International Solar System Symposium*» (Москва, 2023), «*15th Moscow International Solar System Symposium*» (Москва, 2024), «*Lunar and Planetary Science Conference*» (Вудлендс, 2025).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 6 научных работ, в том числе 6 статей в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе ядра Российского индекса научного цитирования «eLibrary Science Index». Во всех работах вклад автора является существенным. Постановка научных задач, вывод формул, подготовка текста и иллюстраций, включая карты, осуществлялись при активном участии соискателя. При подготовке текста диссертации использован текст всех 6 публикаций, в которых, согласно Положению о присуждении учёных степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Работа включает 31 рисунок и 7 таблиц. Объём диссертации составляет 160 страниц, основной текст изложен на 107 страницах. Список литературы содержит 102 наименования, в том числе 48 – на иностранном языке.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность профессору РАН, д.т.н. М.В. Нырцову за научное руководство и за неоценимую помощь при планировании и осуществлении исследования. Также автор благодарен с.н.с. Института географии РАН, к.т.н. М.Э. Флейс за ценные консультации, сотрудникам кафедры картографии и геоинформатики доц., к.г.н. Н.А. Алексеенко, в.н.с., к.г.н. С.М. Кошелю, в.н.с., д.г.н. В.И. Кравцовой, в.н.с., д.г.н. Т.Е. Самсонову, с.н.с., к.г.н. А.Л. Энтину и всему коллективу кафедры за конструктивные замечания и важные советы в рамках аттестации работы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

### Введение

Во введении обоснована актуальность настоящего исследования, сформулированы его цель и задачи, основные защищаемые положения. Выявлена научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

### Глава 1. Картографирование небесных тел в проекциях трёхосного эллипсоида

Диссертационное исследование посвящено отображению рельефа на картах поверхности и гипсометрических картах. Среди трудов, содержащих сведения о рельефе небесных тел, в качестве наиболее значимого отметим «Рельеф планетных тел» (Лукашов, 1996). Под *планетными телами* понимаются планеты и их расслоённые на оболочки шарообразные спутники. В работе рассматриваются только те из них, которые имеют твёрдую, в том числе ледяную поверхность. Описываются типы рельефа планетных тел – кратерный (импактный), вулcano-тектонический, вулканический, флювиальный, гравитационный, гравитационно-тектонический, эоловый, рельеф полярных шапок. Отметим, что многие из перечисленных типов рельефа характерны лишь для планетных тел и не наблюдаются на поверхности небесных тел, не являющихся планетными телами. Поэтому особенность таких небесных тел – ведущая роль процесса кратерообразования и преобладание кратеров в облике местности.

Для небесных тел Солнечной системы, не являющихся планетными телами, – небольших спутников планет, астероидов, комет и объектов из пояса Койпера, обладающих неправильной фигурой – может использоваться понятие *малые тела*. Малые тела из-за своей недостаточной массы не стали планетными телами (Слюта, Воронаев, 1993). Деление небесных тел Солнечной системы (исключая Солнце) на планетные тела и малые тела весьма удобно. Ситуацию осложняет определение Международного астрономического союза (МАС), согласно которому к малым телам Солнечной системы относятся все небесные тела, кроме планет, карликовых планет и естественных спутников (*Resolutions adopted at the General Assemblies*, URL: [https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution\\_GA26-5-6.pdf](https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution_GA26-5-6.pdf)). В соответствии с этим, небольшие спутники, не являющиеся планетными телами, не являются также и малыми телами. В диссертации понятие «малые тела» не используется во избежание противоречий с определением МАС.

Ещё одна особенность небесных тел Солнечной системы, не относящихся к планетным телам, – отсутствие вещественной уровенной поверхности (такой, как земной геоид) и невозможность непосредственного измерения высот, что приводит к необходимости использования референц-поверхности вместо уровенной. Для тел с нерегулярной фигурой такой поверхностью может быть *трёхосный эллипсоид*. Способ точного определения геодезических высот относительно трёхосного эллипсоида (Флейс и др., 2019) разработан М.Э. Флейс, М.В. Нырцовым и М.М. Борисовым совместно с автором диссертации.

Картографирование небесных тел осуществлялось по результатам телескопических наблюдений с XVII в. При этом для карт небесных тел использовались те же проекции, что и для карт мира (*Mars Maps by Schiaparelli (1877-1890)*, URL: [https://planetarymapping.elte.hu/wp-content/uploads/2016/02/schiaparelli\\_\\_1881.jpg](https://planetarymapping.elte.hu/wp-content/uploads/2016/02/schiaparelli__1881.jpg); Monmonier, 2004). С началом космической эры во второй половине XX в. происходил рост степени изученности небесных тел, что способствовало увеличению масштаба картографирования. Постепенно по аналогии с топографическими картами разных стран сложилась система равноугольных проекций для карт поверхностей планет земной группы и Луны (*Map of Mars*, URL: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA03467>): для приэкваториальных широт – *проекция Меркатора*, для средних – *равноугольная коническая проекция* Ламберта, а для приполярных – *азимутальная стереографическая проекция*. Нередко эта система равноугольных проекций применяется и для тематических карт (*Geologic map of the Discovery Quadrangle of Mercury*, URL: <https://pubs.usgs.gov/imap/1658/plate-1.pdf>). Также среди наиболее часто используемых проекций при составлении карт небесных тел можно отметить *поперечную равновеликую азимутальную проекцию* Ламберта (*Атлас планет земной группы и их спутников*, 1992). В последнее время большее распространение получает *равнопромежуточная вдоль меридианов квадратная цилиндрическая проекция*.

Таким образом, карты поверхности и гипсометрические карты могут составляться в различных по характеру искажений проекциях, т.е. связи выбора проекции с содержанием карты небесного тела практически не наблюдается. Так, в «Атласе планет земной группы и их спутников» для гипсометрических карт используется равновеликая проекция, а в «Атласе Фобоса» – равноугольная. Поэтому для обоснования выбора проекций в исследовании используется «Атлас для выбора картографических проекций» (Гинзбург, Салманова, 1957). Для гипсометрических карт в атласе рекомендуются проекции, по характеру искажений занимающие место посередине между равнопромежуточными и равновеликими. На практике используются и те, и другие. Для общегеографических карт признаётся важным передать как формы, так и площади с наименьшими искажениями. В диссертации основной акцент делается на сохранении форм объектов, поскольку отображение морфологии рельефа с минимальными искажениями является ключевым для его исследования. В этом случае рекомендуется применять проекции, в которых минимизированы или полностью устранены искажения углов (Гинзбург, Салманова, 1957).

Рост степени изученности небесных тел и накопление сведений об их фигурах привели к осознанию того, что сфера или эллипсоид вращения не всегда приемлемым образом



аппроксимируют фигуру картографируемого объекта (*Duxbury, 1974; Stooke, 1986; Аванесов и др., 1994*). К концу 80-х гг. XX в. было установлено, что астероиды и небольшие спутники, в отличие от планет, имеют неравновесную фигуру, которая может быть аппроксимирована *трёхосным эллипсоидом* (*Thomas, 1989*). Наличие таких небесных тел находит своё отражение в рекомендациях Международного астрономического союза по выбору референц-поверхностей для картографирования планет и спутников, основанных на исследованиях их фигуры и геологического строения. Трёхосный эллипсоид был рекомендован для спутников Марса и некоторых спутников Юпитера и Сатурна (*Тюфлин, 1986*). Таким образом, задача получения *проекций трёхосного эллипсоида* приобрела практический смысл. Предполагается, что эти проекции предназначены для астероидов, небольших спутников и других тел сложной формы. Применение таких проекций для планетных тел избыточно ввиду незначительных отличий этих тел от сферы и эллипсоида вращения.

В 80-е гг. проекции трёхосного эллипсоида разрабатывали американский картограф Дж. Снайдер (*Snyder, 1985*), советские геодезисты и картографы Б.Б. Серапинас (*Серапинас, 1984*) и Л.М. Бугаевский (*Бугаевский, 1987; Бугаевский, 1991*). Полученная Л.М. Бугаевским *цилиндрическая проекция* трёхосного эллипсоида была использована для карт Фобоса (карта поверхности, гипсометрическая карта и бланковая карта) в «Атласе планет земной группы и их спутников» (1992). Компоновка этих карт была предложена К.Б. Шингарёвой. К центральной части карты, показывающей приэкваториальные и средние широты (до  $\pm 60^\circ$ ), было добавлено изображение полярных территорий в *равнопромежуточной вдоль меридианов азимутальной проекции* трёхосного эллипсоида от  $\pm 40^\circ$  до  $\pm 90^\circ$ .

Новый период разработки проекций трёхосного эллипсоида связан с исследованиями М.В. Нырцова, М.Э. Флейс, М.М. Борисова и Ф. Стука. Ими было показано, что полученные Л.М. Бугаевским и Б.Б. Серапинасом цилиндрические проекции не являются строго равноугольными (*Флейс и др., 2015*). Также авторы создали инструментарий по вычислению координат в проекциях трёхосного эллипсоида, включая проекцию Бугаевского, проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов (*Нырцов и др., 2012*), равноугольную проекцию Якоби (*Nyrtsov et al., 2014*), равновеликие проекции (*Nyrtsov et al., 2015*). Для регионального картографирования небесных тел были предложены различные по характеру искажений *конические проекции* (*Nyrtsov et al., 2017*). Важнейший результат научных изысканий указанного коллектива авторов – создание учебного пособия (*Нырцов и др., 2022*), в котором обобщены знания о геометрии трёхосного эллипсоида и его картографических проекциях.

В 2017-2018 гг. польский геодезист П. Пендзих представил методы построения равнопромежуточных и равновеликих проекций трёхосного эллипсоида (*Pędzich, 2017; Pędzich, 2018*). В 2019 году он предложил равноугольную проекцию трёхосного эллипсоида для ограниченного участка поверхности небесного тела (*Pędzich, 2019*). Эти исследования дополняют и расширяют описанные выше разработки М.В. Нырцова, М.Э. Флейс, М.М. Борисова и Ф. Стука. В 2022 году П. Пендзих использовал координаты, введённые Л.М. Бугаевским и названные им *изометрическими*, и представил «равноугольную» цилиндрическую проекцию трёхосного эллипсоида (*Pędzich, 2022*), ссылаясь на

справедливость рассуждений Л.М. Бугаевского о соблюдении равноугольности. В статье (Fleis et al., 2024), рассматриваются ошибки при введении изометрических координат и описываются два способа задания таких координат, позволяющие создавать новые проекции, которые, однако, не являются равноугольными.

Таким образом, в начале XXI в. активно ведётся разработка проекций трёхосного эллипсоида с различным характером искажений. Проблемой остаётся отсутствие этих проекций в математических модулях ГИС-пакетов (Нырцов, 2017). Упомянутый ранее инструментарий по вычислению координат в проекциях трёхосного эллипсоида (на основе квадратурных формул Гаусса) в свободном доступе отсутствует. Поэтому при создании карт небесных тел часто выбирается более простой вариант (сфера или эллипсоид вращения), что делает карты менее точными, затрудняет измерения по ним; также такая карта может формировать искажённое представление об устройстве поверхности небесного тела.

Под *исследованием проекций* понимается определение их свойств, прежде всего величины и распределения основных видов искажений (углов, площадей, длин и форм) по картографируемой поверхности. Для характеристики искажений в отдельных точках проекции могут быть использованы *изоколы* – линии равных искажений. Изоколы удобны тем, что они показывают, как нарастают или убывают искажения и где достигаются их наибольшие или наименьшие значения. Однако по изоколам трудно судить об искажениях на картах крупных объектов, имеющих конечные размеры. Искажения в пределах некоторого региона или даже всей карты исследуются разными способами, один из которых основан на построении так называемых *фигур искажений* (Сератинас, 2005). Характеристика искажений в каждой точке карты для проекций трёхосного эллипсоида может быть получена, теория искажений подробно освещена в литературе (Нырцов и др., 2022). В то же время способы оценки искажений в пределах региона или всей карты, основанные на фигурах искажений, необходимо дорабатывать, чтобы они были применимы для таких проекций. Исследование искажений в проекциях служит основой для выбора наилучших проекций.

В основе диссертационного исследования лежит классификация проекций по виду вспомогательной поверхности и по характеру искажений, адаптированная для трёхосного эллипсоида (Нырцов, Флейс, 2021; Нырцов и др., 2022). Выделяемые в этой классификации *цилиндрические, азимутальные и конические проекции* выводятся на основе векторного описания самого трёхосного эллипсоида радиус-вектором, а также касательной к эллипсоиду плоскости, содержащей приращение радиус-вектора. Такой подход позволяет получить *равновеликие и сохраняющие длины вдоль меридианов проекции*, однако вместо равноугольных проекций трёхосного эллипсоида возникает новый класс проекций – *квазиравноугольные проекции*, сохраняющие некоторые свойства равноугольных. Они подразделяются на *проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью*, и *проекции меридианного сечения*. Вследствие невозможности получения равноугольных цилиндрических и азимутальных проекций трёхосного эллипсоида, в исследовании также рассматривается *равноугольная проекция Якоби* (Nyrtsov et al., 2014).

## Глава 2. Получение формул и определение свойств проекций трёхосного эллипсоида

Получение формул проекций основывается на интегрировании выражений, которые отражают соотношения элементов бесконечно малой трапеции в плоскости проекции и на эллипсоиде, соответствующие заданному характеру искажений. Для ряда проекций трёхосного эллипсоида имеются формулы в виде определённых интегралов (Нырцов и др., 2022), при этом конечные формулы представлены только для азимутальной проекции меридианного сечения. В диссертации путём вычисления интегралов для существующих и для вновь разработанных проекций получены конечные формулы, а при невозможности их получения – формулы приведены к эллиптическим интегралам 1-го, 2-го и 3-го рода (таблица 1; полужирным шрифтом выделены формулы, полученные в диссертации). Следует добавить, что формула горизонтальной координаты в цилиндрических проекциях приведена к эллиптическому интегралу 2-го рода, а интеграл, входящий в выражение для полярного угла в конических проекциях, вычисляется с помощью квадратурной формулы Гаусса.

Таблица 1. Результаты преобразования формул проекций трёхосного эллипсоида

| Проекция по характеру искажений                | Вертикальная координата в цилиндрических проекциях            | Полярное расстояние                      |  |
|--|---|--|--|
|  |   | в азимутальных проекциях                 | в конических проекциях                   |
| Меридианного сечения                           | <b>Конечная формула</b>                                       | Конечная формула (Нырцов и др., 2022)    | <b>Конечная формула</b>                  |
| Сохраняющие угол между меридианом и параллелью | <b>Эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода</b>         | <b>Конечная формула</b>                  | <b>Проекция не существует</b>            |
| Сохраняющие длины вдоль меридианов             | <b>Эллиптические интегралы 2-го рода</b>                      | <b>Эллиптические интегралы 2-го рода</b> | <b>Эллиптические интегралы 2-го рода</b> |
| Равновеликие                                   | <b>Конечная формула</b>                                       | <b>Конечная формула</b>                  | <b>Конечная формула</b>                  |
| Равноугольная проекция Якоби                   | Эллиптические интегралы 1-го и 3-го рода (Нырцов и др., 2022) |  |  |

Определение свойств проекций осуществляется путём вычисления показателей искажений и их визуализации в виде *изокол*. В выражения для вычисления показателей искажений (Нырцов и др., 2022) входят *производные вертикальной координаты* (для цилиндрических проекций) и *полярного расстояния* (для азимутальных и конических) по широте и долготе. В диссертации эти производные получены аналитически. Вычисления координат и показателей искажений были реализованы в виде программы на языке JavaScript и графического интерфейса к ней на HTML (рисунок 1). Для построения *изокол* были выбраны спутник Марса Фобос, спутник Сатурна Гиперион и астероид 433 Эрос – наиболее изученные небесные тела из тех, фигуры которых близки к трёхосному эллипсоиду. Параметры эллипсоидов, аппроксимирующих их фигуры (размеры полуосей  $a$ ,  $b$  и  $c$ , квадраты экваториального  $e_{ab}^2$  и полярного  $e_{ac}^2$  эксцентриситетов) даны в таблице 2. Для Фобоса оба эксцентриситета невелики, для Эроса, напротив, значительны, а Гиперион занимает по этим параметрам промежуточное положение. Отличие эллипсоида от сферы

можно описать близким понятием «сжатие»; далее понятия «эксцентриситет» и «сжатие» считаются равнозначными, поскольку различия между ними для исследования несут незначительную нагрузку. Для Гипериона были использованы параметры аппроксимирующего эллипсоида, полученные из геометрических соображений (Slodarz et al., 2022), поскольку вследствие хаотичности его вращения существует неоднозначность определения системы координат (Harbison et al., 2011; Sokolov et al., 2024b). Параметры эллипсоидов, аппроксимирующих Фобос и Эрос, были взяты из отчёта (Archinal et al., 2018). Так как для проекции Якоби должно соблюдаться условие  $a > b > c$ , в экспериментальных целях при построении изокон в этой проекции для Эроса было принято значение  $b = 5510$  м.

**Картографические проекции трёхосного эллипсоида**

**Проекция**

| По характеру искажений                         | По виду вспомогательной поверхности |                       |                        |
|--|-------------------------------------|-----------------------|------------------------|
|  | Азимутальная                        | Цилиндрическая        | Коническая             |
| Равновеликая                                   | <input type="radio"/>               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>  |
| Сохраняющая длины вдоль меридианов             | <input checked="" type="radio"/>    | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>  |
| Меридианного сечения                           | <input type="radio"/>               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>  |
| Сохраняющая угол между меридианом и параллелью | <input type="radio"/>               | <input type="radio"/> | проекция не существует |
| Равноугольная (Якоби)                          | <input type="radio"/>               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>  |

**Параметры проекции**

Полус проекции: северный (90°)

Средний меридиан: 0

**Планетоцентрические координаты для пересчёта**

Координаты: из диапазона широт и долгот

Широта: от 0  до 90  шаг 90

Долгота: от 0  до 90  шаг 10

**Параметры трёхосного эллипсоида**

Небесное тело:

Большая экваториальная полуось: 13000

Малая экваториальная полуось: 11400

Полярная полуось: 9100

**Дополнительные параметры**

☒ Показатели искажений

- ☐ Масштаб длин вдоль меридианов (kmer)
- ☒ Масштаб длин вдоль параллелей (kpar)
- ☒ Масштаб площадей (karea)
- ☒ Наибольшее искажение углов (tmax)
- ☐ Угол между меридианом и параллелью в проекции (om\_proj)
- ☐ Параметры эллипса искажений: полуоси (kmax, kmin), угол поворота (ga\_0)

Точность координат: 1 / 1000  Вычислить

**Вычисленные прямоугольные координаты**

[Сохранить файл](#)

id, longitude, latitude, x, y, kpar, karea, tmax

1.0, 0.0, -17492.699, 1.346, 1.346, 16.945

2.0, 90.0, 0.1, 1.0

3.10, 0.3028, 959.17178, 0.81, 1.347, 1.346, 17.096

4.10, 90.0, 0.1, 1.0

5.20, 0.5918, 347.16260, 0.525, 1.351, 1.348, 17.486

6.20, 90.0, 0.1, 1.0

7.30, 0.8550, 822.14810, 0.459, 1.358, 1.354, 17.986

8.30, 90.0, 0.1, 1.0

9.40, 0.10843, 27.12922, 0.507, 1.368, 1.364, 18.487

10.40, 90.0, 0.1, 1.0

11.50, 0.12746, 109.10695, 0.255, 1.381, 1.377, 18.936

12.50, 90.0, 0.1, 1.0

13.60, 0.14234, 769.8218, 0.447, 1.395, 1.392, 19.314

14.60, 90.0, 0.1, 1.0

15.70, 0.15299, 687.5568, 0.631, 1.406, 1.405, 19.607

Рисунок 1. Интерфейс программы по вычислению прямоугольных координат и показателей искажений в проекциях трёхосного эллипсоида

Таблица 2. Параметры эллипсоидов, аппроксимирующих фигуры выбранных небесных тел

| Небесное тело            | a, м    | b, м    | c, м    | $e_{ab}^2$ | $e_{ac}^2$ |
|--------------------------|---------|---------|---------|------------|------------|
| Спутник Марса Фобос      | 13 000  | 11 400  | 9100    | 0,231      | 0,51       |
| Спутник Сатурна Гиперион | 177 600 | 128 500 | 105 600 | 0,4765     | 0,6465     |
| Астероид 433 Эрос        | 17 000  | 5500    | 5500    | 0,8953     | 0,8953     |

Для построения изокон были выбраны такие показатели искажений, как частные масштабы длин вдоль меридианов, длин вдоль параллелей и площадей, а также наибольшее искажение углов. Их выбор обусловлен тем, что они позволяют количественно анализировать искажения разных типов, в то время как эллипс искажений даёт их комплексную характеристику. Помимо оценки искажений по изоконам, была произведена оценка искажений формы некоторых кратеров на поверхности небесных тел. Для этого было вычислено среднеквадратическое отклонение (СКО) экстремальных масштабов длин ( $\sigma_K$ ) в разных проекциях вдоль границы каждого кратера. Показатель был подобран исходя из предположения, что чем меньше отличаются наибольший и наименьший масштабы длин между собой и вдоль контура, тем меньше искажена форма этого контура. Также путём сравнения площади кратера в каждой проекции с его площадью в равновеликой проекции была осуществлена количественная оценка искажения площадей. Дополнительно для оценки

искажений на примере линейной формы рельефа была вычислена длина одной из борозд на поверхности Фобоса в разных проекциях. Рассчитанные значения длины сравнивались с длиной этой борозды на эллипсоиде, вычисленной приближённо по пространственным прямоугольным координатам. Также было вычислено значение  $\sigma_K$  вдоль этой борозды.

Для количественной оценки искажений форм и площадей на поверхности небесных тел были выбраны кратеры Казанова, Мери и Скайреш (таблица 3). Отметим, что искажения форм и площадей зависят от расположения и размеров кратеров; это необходимо учитывать при оценке. Выбранные кратеры располагаются в средних широтах, что позволяет на их примере оценить искажения в конических проекциях, а также сравнивать между собой искажения в азимутальных и цилиндрических проекциях. На рисунке 2 представлены изображения кратеров Скайреш (рисунок 2, а) и Казанова (рисунок 2, в), сделанные по трёхмерным моделям Эроса и Фобоса, а также изображение кратера Мери, полученное по стереопаре (рисунок 2, б).

Таблица 3. Планетоцентрические координаты центров кратеров, выбранных для количественной оценки искажений формы

| Кратер   | Широта (°) | Долгота (°, отсчёт от 0° до 360° на восток) |
|--|------------|---|
| Скайреш (Фобос)<br>( <i>Skyresh</i> , URL: <a href="https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/14264">https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/14264</a> ) | 52,5       | 40  |
| Мери (Гиперион)<br>( <i>Meri</i> , URL: <a href="https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/3852">https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/3852</a> )      | 31         | 213   |
| Казанова (Эрос)<br>( <i>Casanova</i> , URL: <a href="https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/1039">https://planetarynames.wr.usgs.gov/Feature/1039</a> )  | 46,6       | 124   |

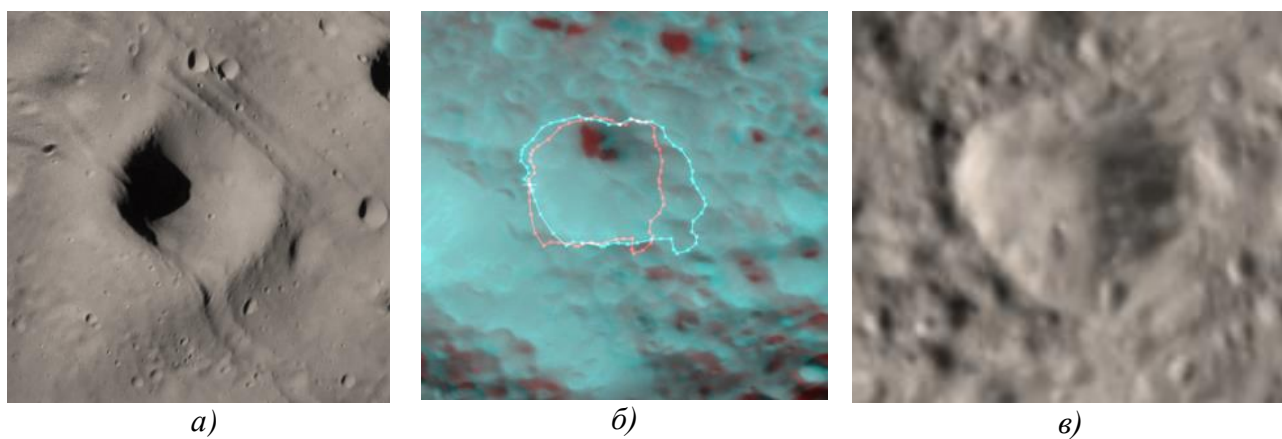


Рисунок 2. Изображения кратеров, выбранных для количественной оценки искажений форм и площадей:

а) Скайреш (*M1 Phobos*, URL: <https://3d-asteroids.space/moons/M1-Phobos>);

б) Мери (*Sokolov et al.*, 2024b);

в) Казанова ( (433) *Eros*, URL: <https://3d-asteroids.space/asteroids/433-Eros>).

На качественном уровне свойства проекций исследовались визуально по составленным в них авторским *фотокартам* и *гипсометрическим картам*. Визуальная оценка по фотокартам вместо карт поверхности допустима, так как фотокарты пригодны для анализа формы объектов (при условии достаточного пространственного разрешения космических изображений), а их составление менее трудоёмко. Суть визуальной оценки в том, что, определив по изоколам величины искажений и их распределение, можно увидеть, как искажаются объекты в соответствующих местах на карте. Для создаваемых фотокарт в проекциях меридианного сечения использована видоизменённая компоновка Шингарёвой: изображение приполярных областей дано по всему диапазону долгот, в отличие от исходного варианта компоновки. Были составлены фотокарты Фобоса (*Нырцов и др., 2021; Fleis et al., 2024*) и Эроса, а также карта поверхности Гипериона (*Sokolov et al., 2024a; Sokolov et al., 2024b*) в проекциях меридианного сечения. Для отображения рельефа на гипсометрических картах использовались *геодезические высоты* относительно трёхосного эллипсоида (*Флейс и др., 2019; Sokolov et al., 2024a*). Свойства проекций исследовались по гипсометрическим картам Эроса в цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов (*Флейс и др., 2019*), Гипериона (*Sokolov et al., 2024b*), Фобоса и Эроса в равновеликой цилиндрической проекции.

Таким образом, получены конечные формулы цилиндрических, азимутальных и конических проекций трёхосного эллипсоида или простые аппроксимирующие зависимости, которые упрощают вычисление координат и показателей искажений, а также удобны для вывода формул обратного пересчёта в планетоцентрические координаты на эллипсоиде. С помощью нового инструментария по вычислению прямоугольных координат и показателей искажений построены изоколы, проведена оценка искажений форм и площадей на примере отдельных кратеров, что является основой для выбора наилучших проекций.

### **Глава 3. Выбор наилучших проекций трёхосного эллипсоида для отображения рельефа на картах небесных тел**

На картах поверхностей небесных тел важно уменьшить искажения форм, поскольку эти карты часто используются для формирования представления об устройстве поверхности, в первую очередь о рельефе. Так, знание морфологических характеристик рельефа позволяет выдвинуть гипотезы о его происхождении, а правильно определять эти характеристики предпочтительно по карте в проекции, в которой минимизированы искажения форм. В этих целях можно использовать проекции меридианного сечения, проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью, и равноугольную проекцию Якоби.

Для проекций меридианного сечения характерно, что искажения в азимутальной проекции достигают к экватору гораздо меньших значений, чем искажения в цилиндрической проекции – к параллели  $60^\circ$  широты. Кроме того, чем больше эксцентриситеты эллипсоида, тем больше все искажения в цилиндрической проекции по сравнению с азимутальной. Поэтому для карт глобального охвата в проекциях меридианного сечения целесообразно комбинировать цилиндрическую и азимутальную проекции в рамках



видоизменённой компоновки Шингарёвой. Это подтверждается при сопоставлении фотокарт трёх небесных тел. По фотокарте Фобоса (рисунок 3) видно, что кратеры, расположенные вблизи экватора и вблизи полюсов, имеют округлую форму.

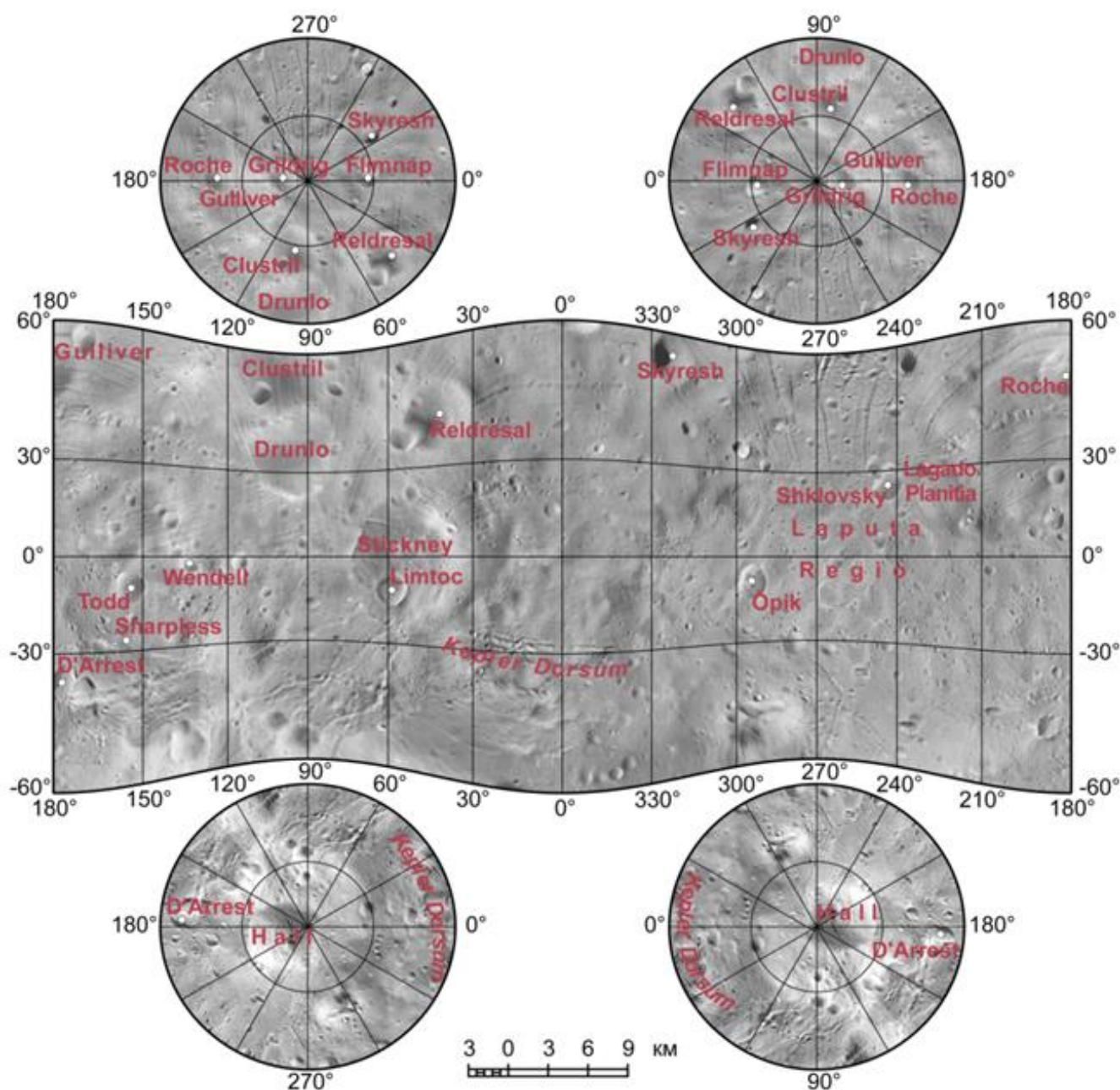
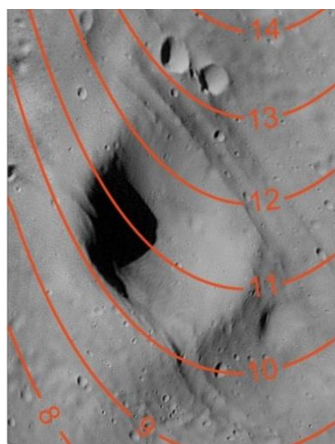
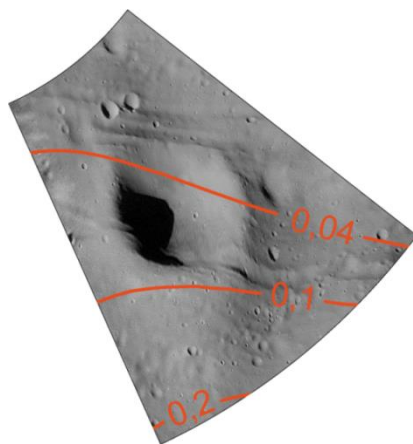


Рисунок 3. Фотокарта Фобоса (Нырцов и др., 2021) в цилиндрической и азимутальной проекциях меридианного сечения (видоизменённая компоновка Шингарёвой)

Преимущества компоновки Шингарёвой видны и при рассмотрении переходной полосы между параллелями 30° и 60°. Так, в цилиндрической проекции форма расположенного здесь кратера Скайреш (рисунок 4, а-б) уже начинает искажаться, а в азимутальной остаётся близкой к окружности. Также в азимутальной проекции с меньшими искажениями передаются линейные формы рельефа (борозды к северу от области Лапута).



а)



б)

Рисунок 4. Изображение кратера Скайреш в проекциях меридианного сечения с изоколами наибольшего искажения углов (°):

а) в цилиндрической проекции ( $\sigma_K = 0,321$ );

б) в азимутальной проекции ( $\sigma_K = 0,008$ )

При построении карты поверхности Гипериона (Sokolov et al., 2024a) переходная область между азимутальной и цилиндрической проекциями была смещена к экватору на основе сопоставления изокол наибольшего искажения углов в этих двух проекциях. Это позволило уменьшить искажения при отображении рельефа, особенно искажения форм. Наконец, фотокарта Эроса показывает, что искажения в цилиндрической проекции для этого небесного тела сильно возрастают уже в непосредственной близости от экватора. Такое распределение искажений затрудняет комбинирование двух проекций меридианного сечения в рамках видоизменённой компоновки Шингарёвой. Поэтому для небесных тел с большими значениями эксцентриситетов проекции меридианного сечения для глобального картографирования не рекомендуются. Таким образом, для большинства небесных тел, исключая те из них, которые аппроксимируются трёхосными эллипсоидами с большими значениями эксцентриситетов (на рисунке 5 вблизи Эроса), проекции меридианного сечения обеспечивают отображение рельефа с минимальными искажениями форм.

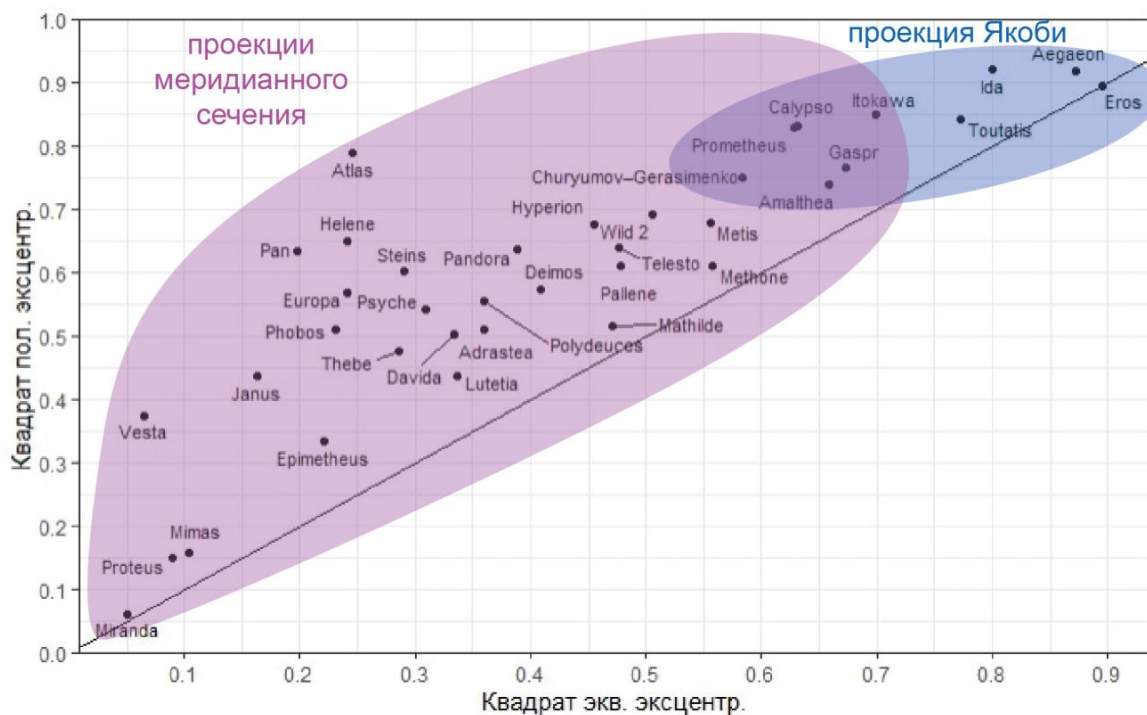


Рисунок 5. Наилучшие проекции для отображения рельефа на фотокартах и картах поверхности глобального охвата (границы областей условные)



Обратимся теперь к проекциям, сохраняющим угол между меридианом и параллелью. Отметим, что азимутальная проекция является равноугольной на начальном меридиане и в полюсе, а цилиндрическая – только на начальном меридиане. Сравнение двух фотокарт Фобоса, составленных в цилиндрических проекциях меридианного сечения и сохраняющей угол между меридианом и параллелью (*Fleis et al., 2024*), показывает, что форма крупных кратеров, в целом, лучше сохраняется в проекциях меридианного сечения. Однако у проекции, сохраняющей угол между меридианом и параллелью, вблизи параллелей  $50^{\circ}$ - $60^{\circ}$  имеется область, где она близка к равноугольной, вследствие чего форма кратера Скайреш, расположенного именно в этой области, искажается меньше, чем в проекции меридианного сечения ( $\sigma_K = 0,232$  и  $\sigma_K = 0,321$  соответственно). Итак, два класса квазиравноугольных проекций схожи по характеру искажений, но различны по их распределению. Особенно это заметно для цилиндрических проекций. Распределение искажений в проекциях меридианного сечения лучше подходит для комбинирования азимутальной и цилиндрической проекций в единой компоновке. Это позволяет считать их наилучшими для карт поверхности глобального охвата, за исключением карт небесных тел, фигуры которых аппроксимируются трёхосными эллипсоидами с большими значениями эксцентриситетов.

Альтернативой проекциям меридианного сечения может быть равноугольная проекция Якоби. Однако её недостатком для карт глобального охвата является то, что масштабы длин и площадей значительно возрастают в окрестности *круговой точки* (в ней оба масштаба стремятся к бесконечности). С большими искажениями передаётся участок поверхности в диапазоне  $\pm 10\text{-}15^{\circ}$  от начального меридиана по долготе и  $\pm 10\text{-}15^{\circ}$  от параллели круговых точек по широте. Проекция меридианного сечения в компоновке для глобального картографирования, хотя и не обеспечивают строгой равноугольности, такого недостатка лишены. Однако проекцию Якоби целесообразно использовать для небесных тел, фигуры которых аппроксимируются трёхосными эллипсоидами со значительными экваториальными и полярными сжатиями, так как для них проекции меридианного сечения не рекомендуются.

Таким образом, для отображения рельефа на картах поверхностей небесных тел с небольшими экваториальным и полярным сжатиями наилучшими являются проекции меридианного сечения, а в случае, если оба сжатия велики – проекция Якоби (рисунок 5). При использовании проекций меридианного сечения необходимо смещать переходную область между азимутальной и цилиндрической проекциями в рамках единой компоновки ближе к экватору при увеличении эксцентриситетов эллипсоида.

При отображении рельефа на гипсометрических картах важно уменьшить искажения площадей, не пренебрегая полностью искажениями форм. В этих целях могут быть использованы как *равновеликие проекции*, так и *проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов*. Выбор наилучших из них основывается на сравнении распределения искажений. При анализе искажений в равновеликой цилиндрической проекции следует отметить уменьшение масштаба длин вдоль меридианов от 1 на экваторе до 0 в полюсе. На гипсометрической карте Гипериона (*Sokolov et al., 2024b*) с трудом различаются горизонтали выше  $60^{\circ}$  широты (рисунок 6).

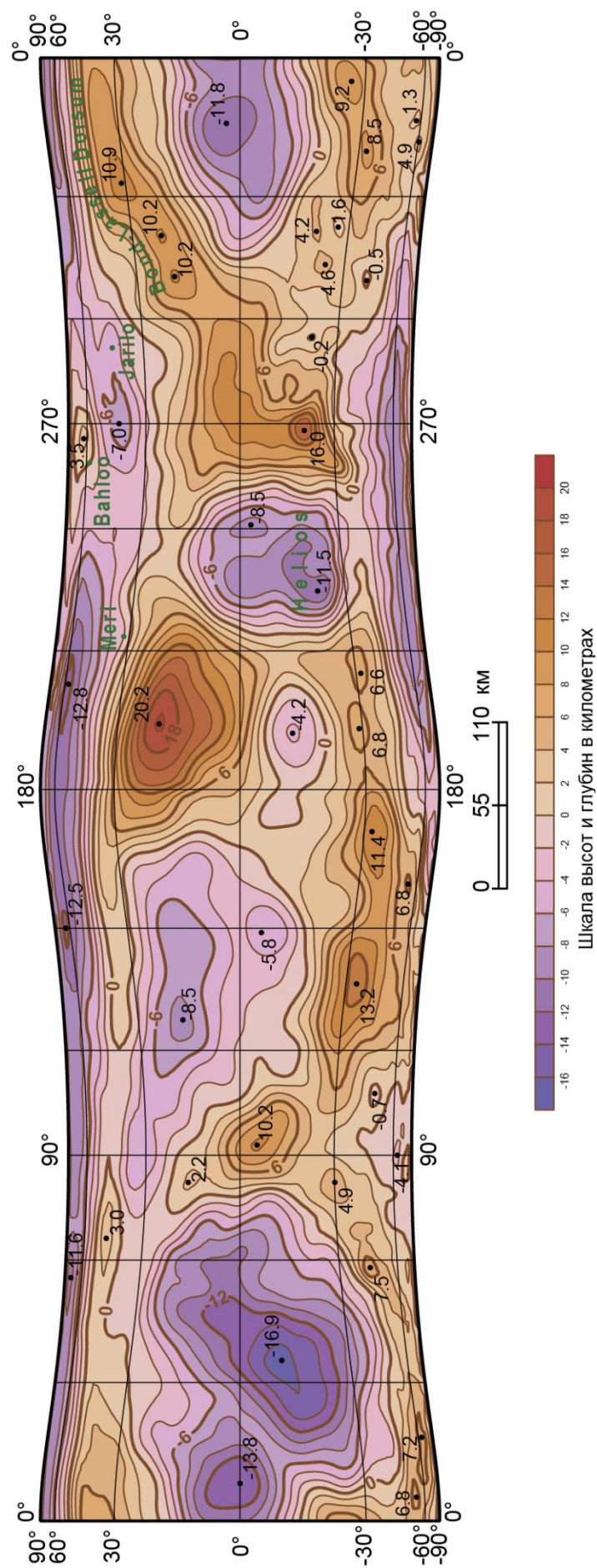


Рисунок 6. Гипсометрическая карта Гипериона (Sokolov et al., 2024b) в равновеликой цилиндрической проекции

Решением проблемы может быть использование цилиндрической и азимутальной проекций в единой компоновке. Однако для Эроса, судя по изоколам и картографической сетке, указанная особенность равновеликой цилиндрической проекции наблюдается уже на параллели  $40^\circ$ . Это снижает целесообразность комбинирования двух равновеликих проекций в рамках видоизменённой компоновки Шингарёвой. Наилучшие проекции для отображения рельефа на гипсометрических картах глобального охвата показаны на рисунке 7.

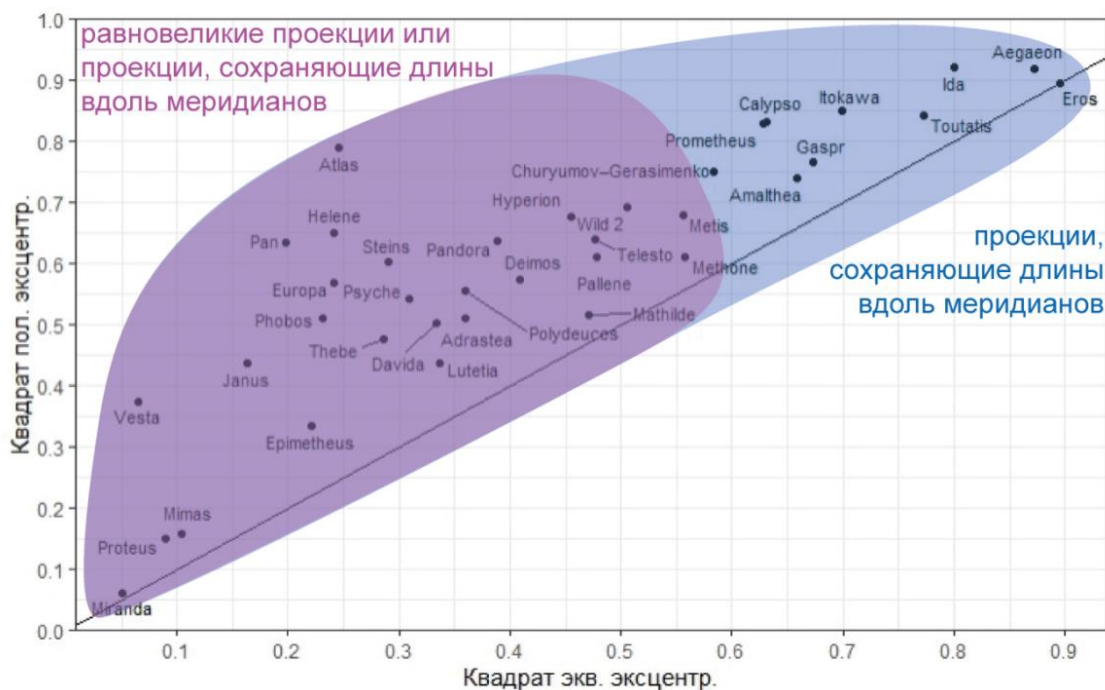


Рисунок 7. Наилучшие проекции для отображения рельефа на гипсометрических картах глобального охвата (границы областей условные)

Проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов, интересна для гипсометрических карт тем, что обеспечивает баланс между искажениями площадей и углов. На картах в таких проекциях не будет больших искажений как очертаний горизонталей, так и площадей высотных уровней. Оценка искажений форм и площадей кратеров Казанова, Мери и Скайреш показывает, что лучший баланс искажений форм и площадей достигается в азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов: искажения площадей в этой проекции небольшие, а формы искажаются ощутимо меньше, чем в равновеликой азимутальной проекции. С точки зрения глобального картографирования, целесообразно использовать такое преимущество цилиндрических проекций, как отсутствие искажений на экваторе, и комбинировать их с азимутальными проекциями в видоизменённой компоновке Шингарёвой, по аналогии с картами в проекциях меридианного сечения.

Таким образом, проекция, сохраняющая длины вдоль меридианов, следует признать наилучшими для гипсометрических карт. При этом для небесных тел с небольшими экваториальным и полярным сжатиями (рисунок 6) равновеликие проекции также могут использоваться, при условии комбинирования цилиндрических и азимутальных проекций в рамках всё той же компоновки. Однако, чем больше экваториальное и полярное сжатия, тем более целесообразным становится выбор проекций, сохраняющих длины вдоль меридианов.

Конечные формулы, полученные для равновеликих проекций, пригодны для расчёта площадей любых объектов на поверхности небесного тела, в том числе кратеров и высотных ступеней, и их сопоставления. В статье (Sokolov et al., 2024b) по карте в равновеликой цилиндрической проекции измеряется площадь кратера на поверхности Гипериона. Карты в равновеликих проекциях служат инструментом для таких измерений в условиях отсутствия в ГИС-пакетах возможности их выполнения непосредственно на эллипсоиде.

Расчёт площадей высотных ступеней в равновеликой проекции позволяет получить распределение поверхности по высотам, которое может быть представлено в виде гистограммы или кривой с накоплением (гипсографической кривой). Такое представление позволяет анализировать как рельеф, так и отклонения референц-поверхности от физической поверхности. На рисунке 8 представлены *диаграммы высотных уровней* (англ. *hypsograms*) для Фобоса, Гипериона и Эроса. Они позволяют оценить соответствие аппроксимирующего эллипсоида физической поверхности небесного тела. Для Гипериона (Sokolov et al., 2024a) определён наилучший эллипсоид, выведенный под условием минимума отклонения от физической поверхности, поэтому диаграмма имеет вид нормального распределения. Если центр масс тела не совпадает с геометрическим центром его фигуры или при различиях в направлении осей фигуры и осей системы координат, диаграмма высотных уровней будет значительно отклоняться от нормального распределения.

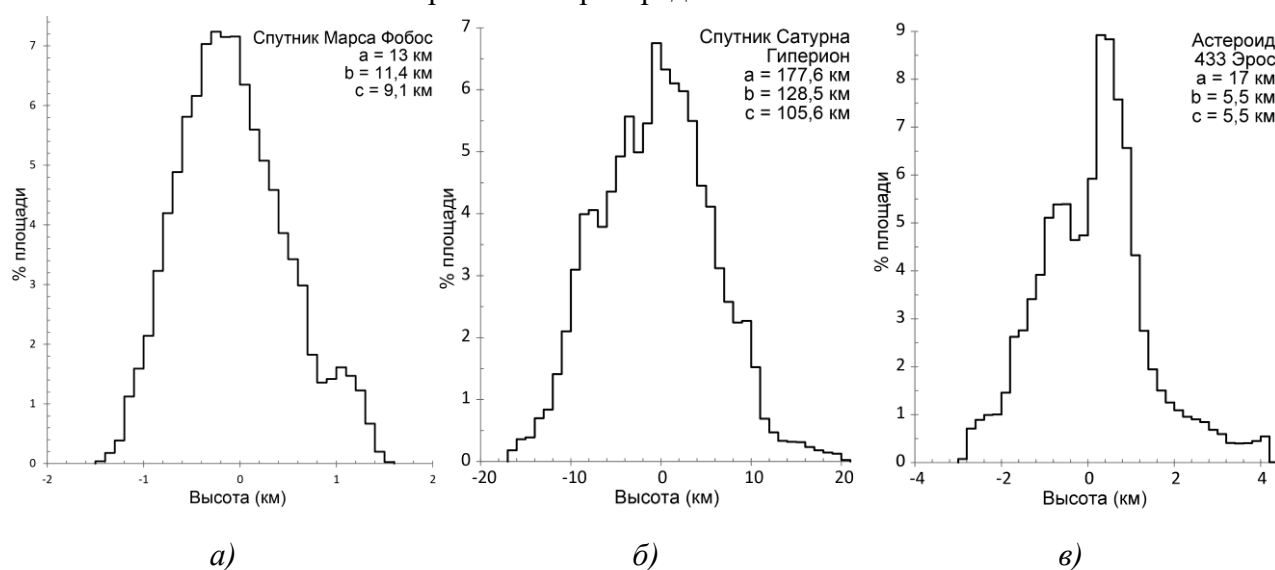


Рисунок 8. Диаграммы высотных уровней: а) Фобос; б) Гиперион; в) Эрос

Конические проекции трёхосного эллипсоида удобны для отображения рельефа на картах регионального охвата, поскольку предоставляют возможность выбрать точку (центр карты), где отсутствуют искажения всех типов. Изоколы в этих проекциях были построены таким образом, чтобы отсутствовали искажения в точке с широтой  $45^\circ$  и долготой  $0^\circ$ . Анализ изокोल показывает, что конфигурация участка поверхности, где искажения всех типов минимальны, зависит от экваториального эксцентриситета эллипсоида. Для Фобоса это область близка к широтной полосе. Так, наибольшее искажение углов в равновеликой проекции (рисунок 9) не превышает  $1^\circ$  в полосе широт  $35^\circ$ - $55^\circ$ , которая при возрастании долготы слегка смещается в сторону полюса примерно к  $39^\circ$ - $58^\circ$  широты.

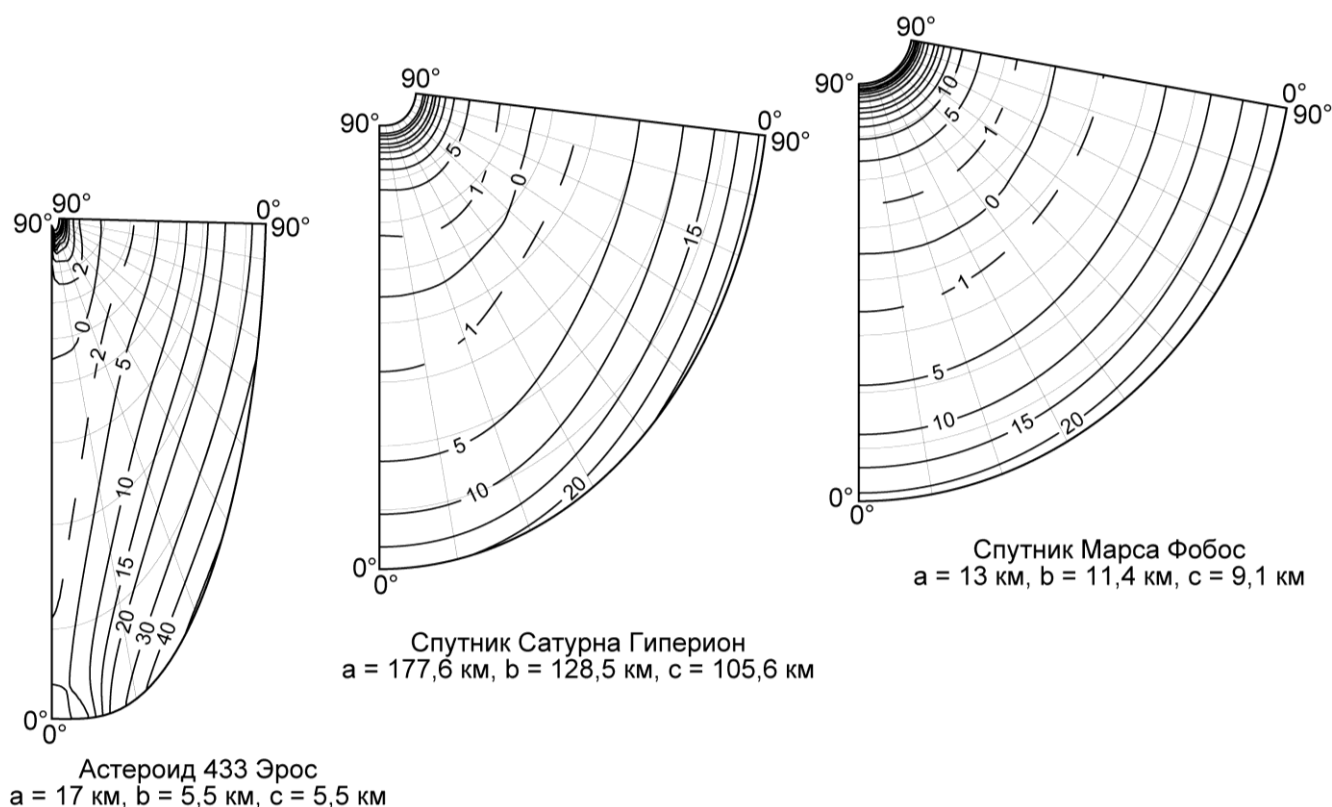


Рисунок 9. Наибольшее искажение углов ( $^{\circ}$ ) в равновеликой конической проекции

Для Гипериона такой сдвиг к полюсу заметнее: наибольшее искажение углов не превышает  $1^{\circ}$  в полосе широт  $32^{\circ}$ - $58^{\circ}$ , которая при возрастании долготы смещается к полюсу примерно до  $43^{\circ}$ - $63^{\circ}$  широты. Для Эроса зона минимальных искажений углов имеет нижнюю границу по меридиану  $0^{\circ}$  около  $30^{\circ}$  широты, а по меридиану  $90^{\circ}$  выше  $60^{\circ}$  широты. Эти особенности проекции определяются положением линии касания эллипсоида и эллиптического конуса. В конической проекции меридианного сечения на конфигурацию области с минимальными искажениями углов влияет также тот факт, что эта проекция является равноугольной на начальном меридиане и меридиане  $90^{\circ}$ . Такое свойство позволяет заключить, что для карт поверхности регионального охвата более предпочтительны именно проекции меридианного сечения. В то же время отличия распределения изокон между проекциями с различным характером искажений невелики, поэтому все конические проекции можно считать взаимозаменяемыми.

Количественная оценка искажений форм и площадей кратеров Казанова, Мери и Скайреш также показывает, что при подборе параметров конических проекций в соответствии с координатами центров кратера эти искажения во всех трёх конических проекциях практически одинаковы. Схожесть показателей иллюстрирует таблица 4.

Таблица 4. Искажения форм и площадей кратеров в конических проекциях

| Коническая проекция          | СКО экстремальных масштабов длин |                 |                 | Площадь, км <sup>2</sup> |                 |                 |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------|-----------------|--------------------------|-----------------|-----------------|
|                              | Казанова (Эрос)                  | Мери (Гиперион) | Скайреш (Фобос) | Казанова (Эрос)          | Мери (Гиперион) | Скайреш (Фобос) |
| Равновеликая                 | 0,01                             | 0,009           | 0,002           | 0,467                    | 749             | 1,881           |
| Сохр. длины вдоль меридианов | 0,009                            | 0,009           | 0,001           | 0,468                    | 750             | 1,882           |
| Мерид. сечения               | 0,012                            | 0,01            | 0,001           | 0,469                    | 751             | 1,883           |

Тезис о взаимозаменяемости конических проекций подтверждается при рассмотрении фотокарт участка поверхности Эроса (*Нырцов и др., 2022*). Не глядя на подписи, затруднительно увидеть разницу между тремя фотокартами. Можно заключить, что для карт поверхностей и гипсометрических карт регионов, расположенных в средних широтах и простирающихся на 15°-20° по широте и долготе, наилучшей может считаться любая из трёх конических проекций. Следует также обратить внимание, что во всех трёх конических проекциях область минимальных искажений для Эроса не ограничивается окрестностью линии касания. Имеется полоса, расположенная примерно вдоль 50° долготы и простирающаяся до экватора, вдоль которой искажения минимальны. В проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, к западу от этой полосы частные масштабы длин вдоль параллелей и площадей уменьшаются, к востоку – увеличиваются. Для Фобоса и Гипериона эти частные масштабы всюду больше или равны единице.

Таким образом, конические проекции целесообразно использовать для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах регионального охвата, а расположение области с минимальными искажениями тем ближе к субширотному, чем меньше экваториальное сжатие эллипсоида. При этом для карт регионов, расположенных в средних широтах и простирающихся на 15°-20° по широте и долготе, наилучшей может считаться любая из трёх конических проекций.

## Заключение

### Результаты исследования

В исследовании определены проекции, используемые для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах небесных тел. Рассмотрены способы получения таких проекций для трёхосного эллипсоида. Получены конечные формулы цилиндрических, азимутальных и конических проекций трёхосного эллипсоида, а при невозможности их получения – простые аппроксимирующие зависимости для вычисления координат в проекциях. Эти формулы удобны для включения в математический модуль геоинформационных систем и для упрощения расчёта показателей искажений. Разработан новый инструментарий по вычислению прямоугольных координат в проекциях трёхосного эллипсоида и показателей искажений. На основе исследования проекций трёхосного эллипсоида путём оценки искажений по изоколам и на примере отдельных кратеров, визуальной оценки по фотокартам и гипсометрическим картам выбраны наилучшие из них для отображения рельефа на картах небесных тел с точки зрения минимизации искажений.

Выбранные наилучшие проекции для отображения рельефа рекомендуются к использованию для карт поверхностей и гипсометрических карт небесных тел, фигуры которых целесообразно аппроксимировать трёхосным эллипсоидом. Разработанный инструментарий по вычислению координат в проекциях значительно упрощает процесс составления карт таких небесных тел. Алгоритмы расчёта показателей искажений, включённые в упомянутый инструментарий, могут быть использованы при выборе проекций для карт небесных тел, также как и построенные изоколы.

### **Основные выводы**

1. Для отображения рельефа на картах поверхностей и фотокартах глобального охвата небесных тел с небольшими экваториальным и полярным сжатиями наилучшими являются проекции меридианного сечения. В случае значительных экваториального и полярного сжатий искажения в проекциях меридианного сечения возрастают, поэтому наилучшей для таких небесных тел является проекция Якоби. Наилучшие проекции для отображения рельефа на гипсометрических картах глобального охвата – проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов.

2. Проекции меридианного сечения и проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов, являются наилучшими для отображения рельефа на картах глобального охвата при использовании видоизменённого варианта компоновки Шингарёвой, который обеспечивает минимизацию искажений по всей поверхности небесного тела. Использование равновеликих проекций в этой компоновке для гипсометрических карт также допускается – в случае небольших значений экваториального и полярного эксцентриситетов эллипсоида.

3. Конические проекции целесообразно использовать для отображения рельефа на картах поверхностей и гипсометрических картах регионального охвата. Построенные изоколы показывают, что расположение области с минимальными искажениями тем ближе к субширотному, чем меньше экваториальное сжатие эллипсоида. Количественная оценка искажений форм и площадей отдельных кратеров позволяет сделать вывод, что для карт регионов, расположенных в средних широтах и простирающихся на  $15^{\circ}$ - $20^{\circ}$  по широте и долготе, наилучшей может считаться любая из трёх конических проекций.

4. Равновеликие проекции предоставляют возможность анализировать небесные тела на предмет отклонения референц-поверхности от физической поверхности путём сопоставления площадей различных объектов. Новый инструментарий по вычислению координат в проекциях трёхосного эллипсоида включает конечные формулы этих проекций.

## **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе ядра  
Российского индекса научного цитирования «eLibrary Science Index»:**

1. *Sokolov A.I., Nyrtsov M.V., Fleis M.E., Nadezhkina I.E.* Investigation and cartographic representation of Hyperion space images photogrammetric processing results //



Planetary and Space Science. – 2024. – Vol. 249. – 105945. EDN: GYXPGD / 0,41 п.л. *Импакт-фактор 1,800 (JIF). Вклад соискателя 60%.*

2. **Соколов А.И., Надеждина И.Е., Нырцов М.В., Зубарев А.Э., Флейс М.Э., Козлова Н.А.** Картографирование Гипериона в проекциях трехосного эллипсоида на основе новой опорной сети и цифровой модели рельефа // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы.* – 2024. – Т. 58. – № 1. – С. 118-128. EDN: OGQNVN / 0,59 п.л. *Импакт-фактор 1,136 (РИНЦ). Вклад соискателя 60%. [Англоязычная версия: Sokolov A.I., Nadezhdina I.E., Nyrtsov M.V., Zubarev A.E., Fleis M.E., Kozlova N.A. Mapping Hyperion in Projections of the Triaxial Ellipsoid Based on a New Reference Network and a Digital Terrain Model // Solar System Research. – 2024. – Vol. 58. – No. 1. – pp. 112-121. EDN: PCXXAT / 0,59 п.л. Импакт-фактор 0,600 (JIF). Вклад соискателя 60%.]*

3. **Fleis M.E., Nyrtsov M.V., Sokolov A.I., Stooke P.J.** Errors in the Introduction of Isometric Coordinates and Violation of the Property of Conformality of the Triaxial Ellipsoid Projections // *Cartographica.* – 2024. – Vol. 59. – No. 2. – pp. 67-76. EDN: HTVHZI / 0,59 п.л. *Импакт-фактор 0,700 (JIF). Вклад соискателя 30%.*

4. **Флейс М.Э., Нырцов М.В., Соколов А.И.** Цилиндрические проекции трёхосного эллипсоида: точные формулы и эллиптические интегралы // *Геодезия и картография.* – 2022. – № 4. – С. 26-38. EDN: FVLKFG / 0,81 п.л. *Импакт-фактор 0,225 (SJR). Вклад соискателя 30%.*

5. **Нырцов М.В., Флейс М.Э., Соколов А.И.** Проекция меридианного сечения: новый класс проекций для трёхосного эллипсоида // *Геодезия и картография.* – 2021. – № 2. – С. 11-22. EDN: XHPCZT / 0,75 п.л. *Импакт-фактор 0,225 (SJR). Вклад соискателя 30%.*

6. **Флейс М.Э., Нырцов М.В., Борисов М.М., Соколов А.И.** Точное определение геодезических высот точек небесного тела относительно трёхосного эллипсоида // *Доклады Академии наук.* – 2019. – Т. 486. – № 4. – С. 489-493. EDN: WNMDFW / 0,35 п.л. *Импакт-фактор 1,370 (РИНЦ). Вклад соискателя 20%. [Англоязычная версия: Fleis M.E., Nyrtsov M.V., Borisov M.M., Sokolov A.I. Accurate calculation of geodetic heights of a celestial body's surface points relative to the triaxial ellipsoid // Doklady Earth Sciences. – 2019. – Vol. 486. – No. 2. – pp. 663-668. EDN: FANVUF / 0,35 п.л. Импакт-фактор 0,700 (JIF). Вклад соискателя 20%.]*