

ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Штерна Александра Исааковича
на тему:
«Вопросы теории непрерывных представлений топологических групп и
их обобщений»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

В диссертации проводится глубокое исследование представлений и тесно связанных с ними отображений топологических групп. В ней рассматриваются как непрерывные представления групп в топологических векторных пространствах, так и не обязательно непрерывные локально ограниченные представления, а также квазипредставления, псевдопредставления и квазигомоморфизмы групп, в том числе, конечномерные представления связных групп Ли и связных локально компактных групп.

Роль теории представлений топологических групп в математике и ее приложениях в различных областях науки невозможно переоценить. Здесь лишь отметим, что созданная Г. Вейлем и Э. Картаном теория конечномерных представлений полупростых групп Ли нашла широкие применения в геометрии, математическом анализе, топологии, математической и теоретической физике.

У истоков исследований автора диссертации стоят несколько фундаментальных направлений в теории представлений топологических групп.

Важнейшим среди этих направлений является распространение знаменитой теоремы двойственности Понтрягина за пределы класса абелевых локально компактных групп. Для неабелевых компактных групп была доказана теорема двойственности Таннака -- Крейна. Полученные в дальнейшем различными авторами аналоги таких теорем использовали в

основном бесконечномерные унитарные представления групп. Здесь следует отметить, что в доказательствах этих теорем двойственности задействованы инструменты, которые свойственны не для всех топологических групп. В первую очередь, это касается наличия меры Хаара на группе.

Одной из фундаментальных проблем, возникающих в указанном направлении, является вопрос о представимости топологических групп в локально выпуклых топологических векторных пространствах. Наличие точного унитарного представления дискретной группы в гильбертовом пространстве было доказано в теореме Колмогорова, а существование точного непрерывного унитарного представления локально компактной группы в гильбертовом пространстве --- в теореме Гельфанда - Райкова.

Другим важным направлением, послужившим стимулом для исследований в диссертации, является круг вопросов о нахождении условий непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах и пространствах Фреше. Теорема Банаха о непрерывности измеримого по Бэру гомоморфизма между метризуемыми группами инициировала изучение целым рядом известных математиков условий непрерывности борелевских, бэровских и измеримых гомоморфизмов и представлений топологических групп и полугрупп.

Еще одним направлением, стоящим у истоков диссертации, является изучение свойства непрерывности локально ограниченных представлений и гомоморфизмов. При этом естественно возникают вопросы о возможности распространения классических теорем и понятий теории представлений, связанных с именами Вейля, Ли, фон Неймана, Фрейденталя, Хохшильда, на не обязательно непрерывные представления.

Другим перспективным направлением является исследование структуры и свойств квазипредставлений, псевдопредставлений и квазигомоморфизмов топологических групп. В этой области большой интерес представляют задачи о существовании обычных представлений,

близких к данным квазипредставлениям, в частности, возникающим в теориях аменабельных групп и когомологий локально компактных групп.

Тематика диссертационной работы активно развивалась на протяжении 20-го столетия и она продолжает, не менее активно, развиваться в настоящее время. Библиография по ней достаточно полно отражена в списке литературы.

Таким образом, рассматриваемая диссертация принадлежит к активно исследуемой области современной математики, имеющей широкий спектр приложений, что, несомненно, свидетельствует об актуальности ее темы.

По всем указанным выше направлениям автором диссертации решены сложные и масштабные задачи и получены яркие результаты.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Введение содержит обзор результатов, полученных ранее другими авторами по теме диссертации, и краткое изложение основных задач, решенных в диссертации. Глава 1 посвящена вопросам представимости топологических групп и их приложениям. В Главе 2 исследуются условия слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в топологических векторных пространствах. Глава 3 посвящена условиям непрерывности локально ограниченных представлений топологических групп. В этой главе заложены основы нового направления в изучении топологических групп, а именно, исследование свойств групп с точки зрения их отображений, для которых образы окрестностей предкомпактны. В работе с этой точки зрения для локально компактных групп рассматриваются локально ограниченные отображения. В Главе 4 изучаются отображения, близкие к представлениям топологических групп. Глава 5 посвящена конечномерным квазипредставлениям групп Ли. В ней с помощью результатов Главы 2 решена проблема Каждана-Мильмана об аппроксимации квазипредставлений непрерывными представлениями. Заключение содержит краткий обзор основных результатов диссертации.

Выделим основные результаты диссертации, разбив их на пять групп, соответствующих разделению диссертации на главы.

1) Двойственность Понтрягина между компактными и дискретными объектами распространена на некоммутативные локально компактные группы, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны.

Получена характеристика локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны. Описана структура некоторых подклассов класса локально компактных групп, определяемых свойствами их гомоморфизмов и представлений, в том числе, групп, вложимых в компактные группы и в аменабельные локально компактные группы с помощью не обязательно непрерывных отображений.

2) Найдены критерии сильной и слабой непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах и пространствах Фреше. При этом их формулировки даются в терминах понятий сильной и слабой вариаций представлений, которые введены и изучены автором диссертации.

Доказан аналог теоремы Ли для конечномерных неприводимых представлений разрешимых групп Ли.

3) Получены необходимые и достаточные условия непрерывности локально ограниченных представлений топологических групп. Часть этих условий сформулирована и доказана с использованием введенных и исследованных автором диссертации понятий: группы разрывов и финальной группы разрывов гомоморфизмов и представлений, слабого колебания и колебания представлений.

Доказана гипотеза Мищенко о трихотомии для значений слабого колебания на классе конечномерных представлений связных локально компактных групп.

Для связных полупростых групп Ли доказан аналог теоремы Картана -- Ван дер Вардена о непрерывности ограниченного конечномерного представления компактной группы Ли.

Показано, что в классической теореме Фрейденталя - Вейля, описывающей структуру группы, допускающей вложение в компактную группу, требование непрерывности вложения является излишним. Более того, утверждение этой теоремы распространено на класс почти связных локально компактных групп и аменабельных связных локально компактных групп.

Получено усиление теоремы Вейля о вполне приводимости конечномерных представлений связных групп Ли.

Дана новая характеристика ядра фон Неймана для связной локально компактной группы. Введены аналоги ядер фон Неймана и Хохшильда и их свойства распространены на не обязательно непрерывные представления соответствующих топологических групп.

4) Доказано, что вторая ограниченная вещественная непрерывная группа когомологий для связной локально компактной группы является конечномерной.

Описана структура конечномерных квазипредставлений групп. При этом выявлено, что изучение таких квазипредставлений в основном сводится к изучению обычных представлений, квазипредставлений с ограниченными орбитами и квазикоциклов.

Введен и исследован класс бесконечномерных квазипредставлений аменабельных локально компактных групп. Показано, что те из них, которые имеют малый дефект, аппроксимируются непрерывными обычными представлениями.

5) Получено полное решение проблемы Каждана -- Мильмана о существовании для связной компактной полупростой группы Ли и ее не

обязательно непрерывного квазипредставления с малым дефектом близкого непрерывного представления группы.

Описана структура локально ограниченных конечномерных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонент этих псевдохарактеров.

Все основные результаты диссертации являются новыми, Достоверность выводов и заключений, сформулированных в диссертации, обоснована строгими математическими доказательствами.

Результаты диссертации получены автором самостоятельно, своевременно и в полном объеме опубликованы в 53 работах в авторитетных рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности 1.1.3. Геометрия и топология. Статей, написанных в соавторстве, нет.

Все результаты диссертации многократно докладывались на научных семинарах, международных и всероссийских конференциях, на Международном конгрессе математиков в Берлине в 1998 году, т.е. прошли необходимую апробацию.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Полученные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Эти результаты, а также введенные и развитые для их получения новые понятия, методы и подходы, будут полезны в дальнейших исследованиях по теории представлений топологических групп, теории псевдохарактеров на группах, теории отображений близких к представлениям, некоммутативной геометрии, функциональному анализу и математической и теоретической физике, которые проводятся в Казанском федеральном университете, МГУ имени М.В. Ломоносова, МИАН имени В.А. Стеклова, МФТИ, СПбГУ, НИУ «Высшая школа экономики», ПОМИ РАН, ИМ СО РАН, ИПМ имени М.В. Келдыша РАН, а также в зарубежных математических центрах. Ряд результатов диссертации может лечь в основу специальных курсов, которые

будут полезными студентам и аспирантам, специализирующимся в области фундаментальной математики и обучающимся в Казанском федеральном университете, МГУ имени М.В. Ломоносова, НИУ «Высшая школа экономики», МФТИ, СПбГУ и в других ведущих российских университетах.

Диссертация написана хорошим и ясным языком. Замечания, которые возникают при чтении диссертации -- это, в основном, опечатки и погрешности редакционного характера, которые неизбежны в работах большого объема. Не приводя таких замечаний, мы позволим сделать лишь одно. На наш взгляд, читателю было бы удобнее ориентироваться в диссертации, если бы она была снабжена указателями терминов и обозначений, используемых в тексте.

Подчеркнем, что указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Подведем итог сказанному. Диссертация А.И. Штерна является завершенной научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как создание нового научного направления в теории топологических групп. Результаты работы вносят существенный вклад в существующие направления в теории топологических групп. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Александр Исаакович Штерн заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:


доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

Гумеров Ренат Нельсонович



12.05.2026.

Контактные данные:

тел.: , e-mail: Renat.Gumerov@kpfu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Адрес места работы:

420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35,
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет», Институт математики
и механики имени Н.И. Лобачевского, кафедра
математического анализа

Тел.: +7(843)2337373 e-mail: Renat.Gumerov@kpfu.ru



12.05.2026