

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. Ломоносова

---

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

Казаков Кирилл Александрович

ТЕОРИЯ СИЛЬНОНЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ  
В ГАЗОВЫХ СРЕДАХ

Специальность 1.3.3. Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

МОСКВА–2025

# Оглавление

	7
<b>Введение</b>	7
<b>1. Обзор литературы и описание используемой модели</b>	15
§1.1. Основные параметры, определяющие глобальную структуру пламени	15
§1.2. Формулировка модели тонкого пламени	19
§1.3. Неустойчивость Ландау–Дарье и развитие модели тонкого пламени	21
§1.4. Общие нестрогие уравнения теории искривлённых пламён	25
§1.5. Частные нестрогие модели искривлённых пламён	28
§1.6. Проблема неоднозначности положения поверхности разрыва	29
§1.7. Структура диссертационной работы	31
<b>I Оболочечное описание тонких ламинарных пламён</b>	
<b>2. Самосогласованность модели тонкого пламени [A15]</b>	34
§2.1. Критерий корректности модели тонкого пламени	34
§2.2. Доказательство корректности модели тонкого пламени в первом порядке по $l_f$	37
§2.3. Скачки скорости и завихрённости на фронте в первом порядке по $l_f$	38
<b>3. Усреднение мелкомасштабной структуры пламени [A11]</b>	41
§3.1. Процедура усреднения	41
§3.2. Усреднение уравнений движения газа	43
§3.3. “Перенормировка” нормальной скорости газа	45
<b>4. Оболочечное описание двумерных стационарных пламён [A4,A5]</b>	50
§4.1. Уравнения движения газа и граничные условия	51
А. Завихрённость газа	55
§4.2. Интегральное представление поля скорости газа	56
§4.3. Структура вихревой компоненты скорости газа	58
§4.4. Дисперсионное соотношение для потенциальной компоненты поля скорости	64

§4.5. Распределение вихревой компоненты скорости газа на фронте пламени	66
§4.6. Мастер-уравнение	69
<b>5. Вывод мастер-уравнения методом функций Грина [A10]</b>	<b>70</b>
§5.1. Представление функции тока с помощью функции Грина	70
§5.2. Дисперсионное соотношение для потенциальной компоненты на фронте конечной длины	71
§5.3. Структура вихревой компоненты функции тока	72
§5.4. Мастер-уравнение	77
<b>II Тонкие ламинарные пламёна в слабонелинейном приближении</b>	
<b>6. Слабонелинейное разложение мастер-уравнения [A4,A5]</b>	<b>79</b>
§6.1. Существенная нелинейность пламён с произвольным $\theta$	79
§6.2. Приближение Сивашинского–Клавена	81
А. Вывод уравнения для положения фронта	81
В. Учёт конечной ширины фронта пламени	83
§6.3. Приближение четвёртого порядка	84
А. Уравнение для положения фронта пламени	84
В. Решение уравнения (6.25)	85
<b>7. Альтернативный вывод уравнения четвёртого порядка [A1,A2,A3]</b>	<b>88</b>
§7.1. Трансверсальное представление	88
§7.2. Сведение системы (**) к уравнению для $f(x)$	91
§7.3. Уравнение (7.27) в четвертом порядке разложения по $(\theta - 1)$	93
<b>III Сильнонелинейные режимы распространения тонких ламинарных пламён</b>	
<b>8. Пламя в быстром потоке газа [A8,A9]</b>	<b>95</b>
§8.1. Подход Зельдовича–Скарлока–Тзяна	96

§8.2. Мастер-уравнение при наличии удерживающего стержня	98
§8.3. Замена стержня эквивалентными граничными условиями. Сведение (8.14) к системе ОДУ	100
А. Скорость газа на фронте пламени вблизи стержня	100
В. Уравнение для продольной компоненты скорости	102
С. Уравнение для поперечной компоненты скорости	103
D. Сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений	104
§8.4. Сведение системы к одному дифференциальному уравнению. Численные решения	105
Вывод	110
<b>9. Ламинарное пламя в широкой горизонтальной трубе [A11]</b>	<b>112</b>
§9.1. Экспериментальные предпосылки теоретического описания	112
§9.2. Уравнения для вытянутого пламени. Продолжение решения	114
§9.3. Численные решения. Два типа пламён. Физические решения	117
§9.4. Оценка тепловых потерь	121
§9.5. Оценка точности решений в рамках $1/U$ -разложения	122
§9.6. Сравнение теории с экспериментальными данными по пламёнам в метано-воздушных смесях	123
Вывод	130
<b>10. Экспериментальное открытие стационарных пламён с перегибом фронта [A13]</b>	<b>132</b>
§10.1. Предпосылки практической реализации пламён с перегибом фронта	132
§10.2. Описание экспериментальной установки	135
§10.3. Экспериментальные результаты	136
Вывод	140
<b>11. Ламинарное пламя в широкой вертикальной трубе [A14,A15]</b>	<b>140</b>
§11.1. Пределы воспламенения	140
§11.2. Наблюдаемые свойства частичного распространения пламени	141
§11.3. Уравнения для предельного пламени в ведущем порядке $1/U$ -разложения	143
§11.4. Численные решения	146

§11.5. Теория частичного распространения пламени	148
А. Свойства решений	148
В. Критические диаграммы	150
С. Динамика затухания пламени	154
Вывод	156
<b>12. Численное интегрирование мастер-уравнения [A17]</b>	<b>157</b>
§12.1. Численная схема	157
§12.2. Результаты численного интегрирования	161
А. Эффект теплового расширения газа. Область применимости слабонелинейного приближения	161
В. Эффект растяжения пламени (flame stretch)	165
С. Эффект компрессии пламени (flame compression)	167
D. Рост скорости пламени с шириной трубы. Роль шума	170
Вывод	173
<b>IV Нестационарные пламена</b>	
<b>13. Оболочечное описание нестационарных течений газа [A6,A7,A16]</b>	<b>175</b>
§13.1. Мастер-уравнение для тонкого ламинарного нестационарного пламени	175
§13.2. Неустойчивость Ландау–Дарье	178
§13.3. Уравнение Сивашинского–Клавена	181
§13.4. Пламя в переменном поле тяжести	183
§13.5. Оболочечное описание двумерной турбулентности	185
Вывод	187
<b>14. Гидродинамическая неустойчивость V-пламени в трубе [A9]</b>	<b>187</b>
§14.1. Линеаризация основных уравнений	187
§14.2. Вычисление вихревого вклада	189
§14.3. Анализ линеаризованного мастер-уравнения в пределе $s \gg 1$	192
А. Порядки основных величин	192
В. Уравнение для продольной компоненты скорости	193
С. Решение уравнения (14.19)	194

Вывод	196
<b>15. Ускорение ламинарных пламён в гладких открытых горизонтальных трубах [A12]</b>	197
§15.1. Экспериментальные предпосылки теоретического описания	197
§15.2. Оболочечные уравнения	199
§15.3. Формулы для ускорения тонкого ламинарного пламени и условия квазистационарности	200
§15.4. Пределы применимости теории и оценка её точности	203
§15.5. Ускорение ламинарных метано-воздушных пламён в трубе с $b = 5$ см, $L = 5$ м	206
А. Обработка данных Рис. 59	206
В. Медленно ускоряющиеся пламёна (5.4% и 6.2% метана)	207
С. Быстро ускоряющиеся пламёна (7.1% – 9.5% метана)	210
Вывод	214
<b>Заключение</b>	215
<b>Список литературы</b>	220
<b>Приложения</b>	235
<b>А. Свойства оператора <math>\hat{\mathcal{H}}</math></b>	235
1. Доказательство тождества $\hat{\mathcal{H}}^2 = -1$	235
2. Другие тождества и формулы	236
3. Решение уравнения (7.25)	240
<b>В. Слабонелинейное разложение <math>\hat{\mathcal{H}}</math> (<math> f'  \ll 1</math>)</b>	242
<b>С. Разложение <math>\hat{\mathcal{H}}</math> для вытянутого пламени (<math> f'  \gg 1</math>)</b>	244
<b>D. Устойчивость течения продуктов горения предельных пламён типа Ia в вертикальных трубах</b>	247
1. Численная схема	248
2. Сценарии развития неустойчивости	251
3. Образование областей рециркуляции	254

# Введение

Диссертационная работа посвящена аналитическому и численному исследованию сильно-нелинейных режимов распространения тонких ламинарных пламён в газовых смесях.

---

## Актуальность темы диссертации

---

Пламя в газовых смесях находят многочисленные применения в науке и технике. На них основана работа двигателей внутреннего сгорания и ракетных двигателей [1]; бунзеновские пламя используются в лабораторных исследованиях физико-химических свойств газов [2, 3]; распространение пламён в вертикальных трубах применяется для измерения предела воспламеняемости [4–12], являющегося важнейшим параметром смеси при обеспечении пожарной безопасности в быту и на предприятиях; свойства горения смесей углеводородов и угольной пыли с воздухом и условия его перехода в детонацию диктуют правила безопасной шахтной угледобычи; в астрофизике термоядерные пламя лежат в основе одного из механизмов взрыва сверхновых [13].

Хотя локальный механизм распространения волн горения давно установлен и хорошо исследован, последовательное аналитическое описание их глобальной структуры в настоящее время имеется лишь для простейших конфигураций пламён. Например, для снижения нежелательных выбросов в атмосферу и повышения экономичности аппаратов, использующих горение, требуется развитие технологий воспламенения сильно обеднённых горючих смесей. Но несмотря на многолетние исследования пламён вблизи пределов воспламенения, механизм их затухания до сих пор остаётся предметом научной полемики [14–30]. Аналогично обстоит дело и с проблемой спонтанного ускорения пламён, прикладная важность которой связана с возможностью перехода медленного горения в детонацию [31–36]. На практике нетрудно вызвать ускорение пламени путём хаотизации течения горючей смеси [37–42]. Однако открытым остаётся вопрос о механизме ускорения в невозмущённой смеси в трубах с гладкими стенками. Основную трудность при этом составляет количественное описание начальной стадии ускорения, когда эффекты сжимаемости газа ещё пренебрежимо малы (медленное горение).

Это отставание теории от эксперимента объясняется исключительной сложностью математического описания глобальной эволюции пламени, которая в свою очередь обусловлена тремя обстоятельствами. Во-первых, задачи типа упомянутых выше характеризуются несколькими существенно различными масштабами расстояний – от ширины фронта, составляющей доли миллиметра, до размеров области горения, которые на практике часто достигают метров. Это сильно затрудняет не только аналитическое описание пламён, но и их прямое численное моделирование. Во-вторых, в результате развития различных неустойчивостей, присущих пламёнам, они быстро оказываются сильно искривлёнными независимо от начального состояния. Ввиду этого газодинамика течений газа, порождаемых пламёнами, оказывается существенно нелинейной. Наконец, эта нелинейность усугубляется наличием подвижной границы – фронта пламени – между течениями существенно различной плотности. Форма и скорость этой границы не могут быть заданы заранее и должны определяться согласованно с течениями газа по обе её стороны. В этом отношении математическое описание пламён тождественно с описанием волн конденсации в перенасыщенных парах жидкостей, фронтов лазерной абляции, а также волн разложения взрывчатых жидкостей [43, 44]. Поэтому значение его результатов выходит далеко за рамки теории горения.

Рост возможностей вычислительной техники в последние десятилетия позволил заметно продвинуться в моделировании таких сложных явлений, как распространение пламени. Однако даже мощности современных компьютеров оказывается недостаточно для прямого численного моделирования реальных пламён в описанных выше условиях их применения. Наиболее эффективными в настоящее время являются численно-аналитические методы исследования. С одной стороны, учёт точных аналитических следствий фундаментальных газодинамических уравнений позволяет оптимизировать численные алгоритмы, а приближённые аналитические решения могут использоваться как начальные значения при поиске численных решений. Эти численные решения, с другой стороны, дают дополнительную информацию об исходных приближениях, в частности, об устойчивости аналитических решений, то есть об их практической реализуемости.

### Цель и задачи исследования

---

Диссертационная работа направлена на исследование тонких ламинарных пламён в газовых смесях в сильнонелинейных режимах распространения, близких к стационарным, с целью выяснения механизмов нелинейной стабилизации, спонтанного ускорения и затухания тонких ламинарных пламён, а также предсказания новых режимов их распространения.

Для этого в работе поставлены следующие задачи:

- Доказать самосогласованность модели тонкого ламинарного пламени в рамках асимптотического разложения по ширине фронта пламени.
- Свести фундаментальные уравнения газодинамики к замкнутой системе уравнений для положения фронта тонкого ламинарного пламени и распределения на нём скорости газа.
- Произвести валидацию нового описания путём воспроизведения известных строгих результатов теории тонкого ламинарного пламени.
- Разработать численные и приближённые аналитические методы решения полученной системы уравнений в условиях сильной нелинейности тонкого ламинарного пламени.
- Найти все возможные режимы стационарного распространения тонких ламинарных пламён в трубах произвольного размера.

---

### Объект и предмет исследования

---

Объектом исследования являются тонкие ламинарные пламёна в углеводородо-воздушных смесях, свободно распространяющиеся или удерживаемые в трубах различных размеров и ориентаций. Предметом исследования являются механизмы стабилизации тонких ламинарных пламён под влиянием нелинейных газодинамических эффектов, процессов переноса во фронте и поля тяжести, режимы их стационарного распространения и спонтанного ускорения.

---

## Методология исследования

---

В настоящем исследовании используются аналитические и численные методы. Аналитическая часть исследования состоит в преобразовании фундаментальных газодинамических уравнений методами функций Грина и теории функций комплексного переменного. Получающееся в результате нелинейное интегро-дифференциальное уравнение анализируется с помощью асимптотических методов и методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Численная часть состоит в разработке алгоритма численного решения полученного уравнения и использует как классические методы поиска решений (итерационные методы и метод пристрелки), так и современные методы оптимизации этого процесса (метод ускорения Андерсона и параллельные вычисления).

---

## Научная новизна

---

- Решена проблема неоднозначности вкладов процессов переноса во фронте тонкого ламинарного пламени в его нормальную скорость и скачки скорости и давления газа на фронте.
- Сформулирован критерий корректности модели тонкого пламени и доказаны существование и единственность корректной модели в первом порядке асимптотического разложения по ширине фронта пламени.
- Получено точное нелинейное уравнение для положения фронта двумерного тонкого ламинарного пламени и распределения на нём скорости газа. На его основе впервые построено замкнутое описание двумерных тонких ламинарных пламён с произвольным скачком плотности газа.
- Разработан метод асимптотического анализа полученного уравнения в сильнонелинейных режимах распространения, с помощью которого дана классификация режимов стационарного распространения тонких ламинарных пламён в сильном поле тяжести.
- Впервые дано объяснение наблюдаемых различий в скорости стационарного распространения в горизонтальных трубах ламинарных метано-воздушных пламён с одинаковыми фазовыми параметрами.

- Теоретически предсказан режим стационарного распространения пламени с перегибом фронта, впоследствии обнаруженный экспериментально.
- Получено уточнение уравнения Сивашинского–Клавена для стационарного тонкого ламинарного пламени и найдены его аналитические решения.
- Разработан метод численного решения точного интегро-дифференциального уравнения, с помощью которого впервые количественно исследовано влияние эффекта компрессии тонкого ламинарного пламени на его форму и скорость.
- Построена теория частичного распространения тонких ламинарных пламён в вертикальных трубах, впервые объяснившая всю совокупность наблюдаемых свойств распространения вверх ламинарных метано- и пропано-воздушных пламён вблизи пределов воспламенения.
- Произведён первый строгий анализ устойчивости сильнонелинейного тонкого ламинарного пламени – V-пламени в трубе.
- Впервые дано количественное объяснение различия в наблюдаемой величине ускорения ламинарных метано-воздушных пламён при их распространении в гладких открытых горизонтальных трубах вблизи пределов воспламенения и в стехиометрических смесях.

---

### Практическая и научная значимость

---

Замкнутое описание ламинарных пламён, разработанное в настоящем исследовании, даёт возможность эффективно определять форму и скорость тонких ламинарных пламён без необходимости решать газодинамические уравнения явно. Это существенно снижает вычислительные затраты и позволяет моделировать реальные пламёна, изучаемые в лабораториях и встречающиеся в прикладных задачах. Доказанная корректность модели тонкого пламени устраняет неоднозначность в определении длин Маркштейна и открывает путь к устранению существующих в литературе противоречий в методах и результатах их измерения. Предложенный подход непосредственно применим к описанию других поверхностей разрыва в существенно дозвуковых ламинарных течениях – волн конденсации в перенасыщенных парах жидкостей, фронтов лазерной абляции, волн термоядерного горения в недрах звёзд и др.

---

Тема диссертационного исследования и его результаты соответствуют пунктам 5 и 10 паспорта научной специальности 1.3.3. «Теоретическая физика»: 5. Теория конденсированного состояния. Изучение различных состояний вещества и физических явлений в них. Статистическая физика. Теория фазовых переходов. Физическая кинетика. 10. Теория неравновесных систем. Теория хаоса и турбулентности.

---

### **Положения, выносимые на защиту**

---

1. В первом порядке асимптотического разложения по ширине фронта тонкого пламени существует единственная аппроксимация пламени поверхностью разрыва между течениями газа постоянной плотности.
2. Положение фронта тонкого ламинарного двумерного пламени и распределение на нём скорости газа связаны замкнутой системой уравнений, являющейся точным следствием уравнений газодинамики идеальной несжимаемой среды. Все известные приближённые уравнения для положения фронта тонкого пламени в несжимаемых газовых смесях являются слабонелинейными пределами этой системы.
3. Все конфигурации стационарного тонкого двумерного ламинарного пламени с фиксированной точкой поджига в быстром потоке газа образуют двухпараметрическое семейство решений обыкновенного дифференциального уравнения.
4. В сильном поле тяжести существует несколько устойчивых стационарных режимов распространения тонких ламинарных пламён в горизонтальных трубах. Среди них имеется режим с перегибом фронта пламени, который является решением полученной замкнутой системы уравнений и наблюдается экспериментально.
5. При распространении тонких ламинарных пламён в открытых горизонтальных трубах с гладкими стенками существует положительная обратная связь между ускорением пламени и его скоростью относительно холодной смеси. Ускорение пламени пропорционально квадрату скорости пламени относительно холодной смеси и зависит от режима распространения.
6. При распространении предельных тонких ламинарных пламён в вертикальных трубах существуют различные стационарные режимы распространения с близкими

---

скоростями. Условием затухания метано- и пропано-воздушных пламён при распространении вверх является обращение в нуль скорости продуктов горения на оси трубы в режиме с наибольшей скоростью пламени.

---

### Достоверность и апробация результатов

---

Основные уравнения разработанного в диссертационной работе подхода получены точными преобразованиями фундаментальных уравнений газодинамики с применением методов математического и функционального анализа. Для нахождения их приближённых численно-аналитических решений использовались хорошо известные методы теории дифференциальных уравнений и асимптотические методы с оценкой их точности. Все известные в литературе строгие результаты теории пламён были воспроизведены в диссертационной работе как частные случаи. При поиске численных решений применялись вполне обоснованные и многократно проверенные на практике численные методы, а точность решений контролировалась общепринятыми способами. Разработанный в диссертационной работе подход и полученные с его помощью результаты обсуждались на семинарах в рамках международной программы Interactifs (университет Пуатье, Франция, 2012 г.), семинаре по горению под руководством проф. А.Н. Секундова (ЦИАМ, 2014 г.), семинаре «Современные проблемы атомной, молекулярной и химической физики» под руководством Н.П. Зарецкого (НИЦ Курчатовский институт, 2014 г.), «Семинаре по солнечно-земной физике» под руководством проф. Д.Д. Соколова (ИЗМИРАН, 2023 г.), семинаре кафедры теоретической физики Физического факультета под руководством проф. А.П. Исаева (МГУ им. М.В. Ломоносова, 2024 г.), семинаре «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их приложения» Механико-математического факультета под руководством проф. А.С. Шамаева и доц. Н.А. Раутиан (МГУ им. М.В. Ломоносова, 2024 г.), семинаре Отдела Горения и Взрыва под руководством проф. С.М. Фролова (Институт Химической Физики РАН, 2024 г.), семинаре «Вычислительная математика и приложения» под руководством чл.-корр. РАН Ю.В. Василевского, проф. Ю.М. Нечепуренко и Акад. РАН Е.Е. Тыртышников (Институт Вычислительно Математики им. Г.И. Марчука, 2024), семинаре «Новые методы решения задач прикладной математики» под руководством проф. В.Т. Жукова и Ю.Г. Рыкова (Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша, 2025). Материалы диссертации опубликованы в ведущих международных научных журналах.

### Публикации

---

Результаты диссертации опубликованы в 17 статьях в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова. Список этих статей приведён перед основным библиографическим списком.

---

### Личный вклад автора

---

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично (статьи [A4,A5,A8,A11,A12,A14,A15,A16]). В остальные результаты, представленные в диссертационной работе и научных статьях, автор внёс определяющий вклад. В работах, опубликованных в соавторстве, его вклад был основополагающим. Соискатель принимал активное участие в постановке задач, разработке подходов к их решению, проведении общих доказательств, развитии численных методов, анализе и интерпретации решений. В работах [A1,A2,A3] соискателю принадлежит постановка задачи, проведение слабонелинейного анализа и получение аналитических решений. В работах [A6,A7] соискатель обобщил мастер-уравнение на нестационарные пламёна и получил его предельные формы, а вывод координатно-инвариантной формы мастер-уравнения (не использована в диссертации) дан его соавторами. В работе [A9] постановка задачи, вывод уравнения для положения фронта и построение его аналитического решения выполнены соискателем, а анимация решения (не использована в диссертации) произведена его соавторами. В работе [A10] идея вывода мастер-уравнения для пламён в кривых каналах принадлежит Г. Жулену, а её реализация и проведение необходимых математических доказательств выполнены соискателем. В работе [A13] эксперименты проводились обоими авторами, их анализ – соискателем. В работе [A17] соискателю принадлежат постановка задачи и теоретические выкладки; численный код написан О.Г. Харлановым; анализ численных решений произведён авторами совместно. В названиях глав диссертации указаны номера статей, на которых основано их содержание.

---

### Структура и объём диссертации

---

Диссертация состоит из введения, пятнадцати глав, заключения, списка литературы и четырёх приложений. Объём работы составляет 255 страниц, включая 69 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 210 наименований.

## 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМОЙ МОДЕЛИ

### §1.1. Основные параметры, определяющие глобальную структуру пламени

Современное понятие пламени как одного из режимов горения химически активных газовых смесей возникло в основополагающих работах Малляра и Ле-Шателье [45, 46]. При подаче тепла в смесь реагирующих веществ скорость химической реакции увеличивается, и если реакция является экзотермической, в смеси может возникнуть самоподдерживающаяся волна химического превращения – пламя. Химическая реакция наиболее интенсивно протекает в сравнительно узкой области, называемой зоной реакции. При прохождении газа через пламя он резко расширяется за счёт тепла, выделяющегося в химической реакции. Область газа, в которой градиент его плотности велик вследствие этого расширения, называется фронтом пламени, Рис. 1. Его структура определяется свойствами теплопроводности смеси и диффузии в ней реагентов. Распространение пламени является необратимым процессом, и за фронтом остаётся химически инертная смесь – продукты горения.

Поскольку распространение пламени по смеси обусловлено диффузионными процессами, оно является сравнительно медленным. Для количественной характеристики его скорости используется понятие плоского пламени, под которым понимается формально неограниченное в пространстве пламя, все изотермы которого являются параллельными плоскостями, а линии тока в некоторой системе отсчёта – перпендикулярными к ним прямыми. Все характеристики в таком пламени зависят от одной координаты – расстояния до какой-либо фиксированной изотермы. Скорость движения плоского пламени относительно неподвижной холодной смеси,  $U_f$ , является важнейшим параметром пламени [47–49]. Порядок величины  $U_f$  можно оценить следующим образом [2, 43]. Обозначим через  $l_f$  ширину фронта пламени, то есть характерное расстояние, на котором существенно меняются скорость и плотность газа за счёт тепла, выделяющегося в химической реакции.  $l_f$  можно приближённо найти как расстояние, на которое смещается фронт за характерное время  $\tau$  химической реакции при температуре пламени. Как известно из теории теплопроводности [43], расстояние, на которое смещается неоднородность поля температуры за время  $\tau$ , оценивается как  $\sqrt{\chi\tau}$ , где  $\chi$  есть температуропроводность смеси. По порядку величины  $\chi \sim c_s \cdot l_m$ , где  $c_s$  есть скорость звука в смеси, а  $l_m$  – длина свободного пробега молекул.

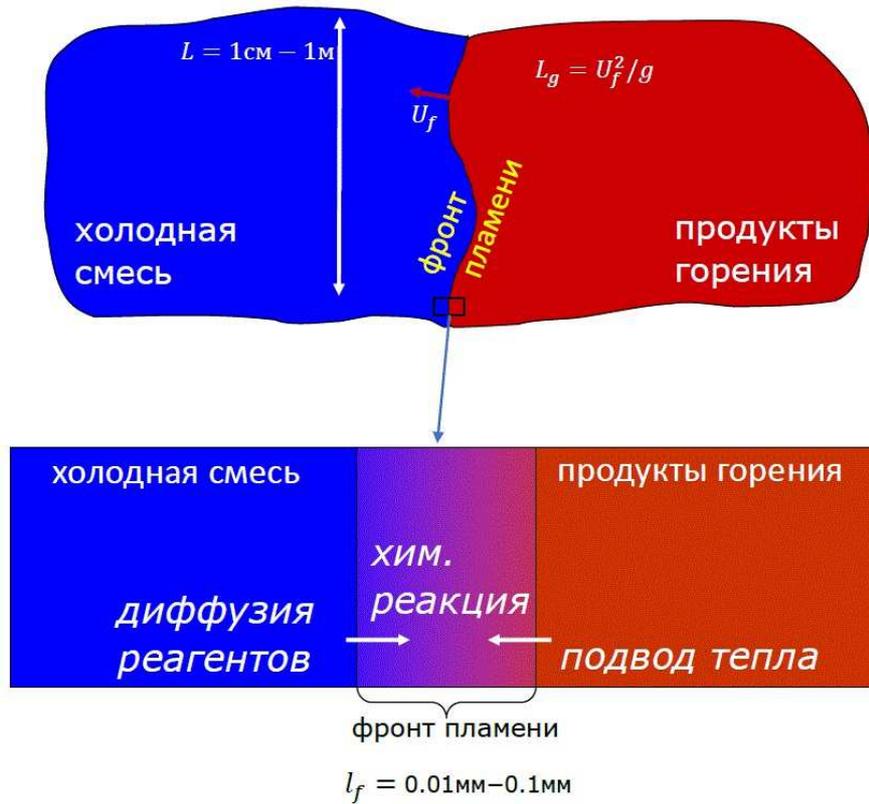


Рис. 1: Схематическое изображение пламени в газовой смеси. Указаны характерные масштабы длины — ширина фронта  $l_f$ , внешний масштаб  $L$  и гравитационная длина  $L_g$ . Нормальная скорость искривлённого пламени относительно холодного газа принимается в теории Ландау–Дарье равной скорости плоского пламени.

Успешный акт химического превращения требует  $n \gg 1$  столкновений молекул, способных к реакции при данной температуре. Поэтому  $\tau \simeq nt_m$ , где время свободного пробега молекул  $t_m \simeq l_m / c_s$ . Следовательно, скорость пламени  $U_f = l_f / \tau \simeq \sqrt{\chi / \tau} \simeq c_s / \sqrt{n}$ , а ширина фронта  $l_f \simeq \chi / U_f$ .

Типичные значения  $n \simeq 10^4$ , так что  $U_f / c_s \simeq 10^{-2}$ . Таким образом, распространение пламени является существенно дозвуковым процессом. Ввиду этого газ можно с большой точностью рассматривать как несжимаемый и полагать  $c_s = \infty$ . Если область горения не замкнута (имеется свободный отток газа), то в силу несжимаемости газа его плотность по обе стороны фронта будет оставаться постоянной. Везде в дальнейшем это условие подразумевается выполненным. На Рис. 2 приведены примеры таких пламен. Отношение массовых плотностей холодной смеси и продуктов горения называется коэффициентом

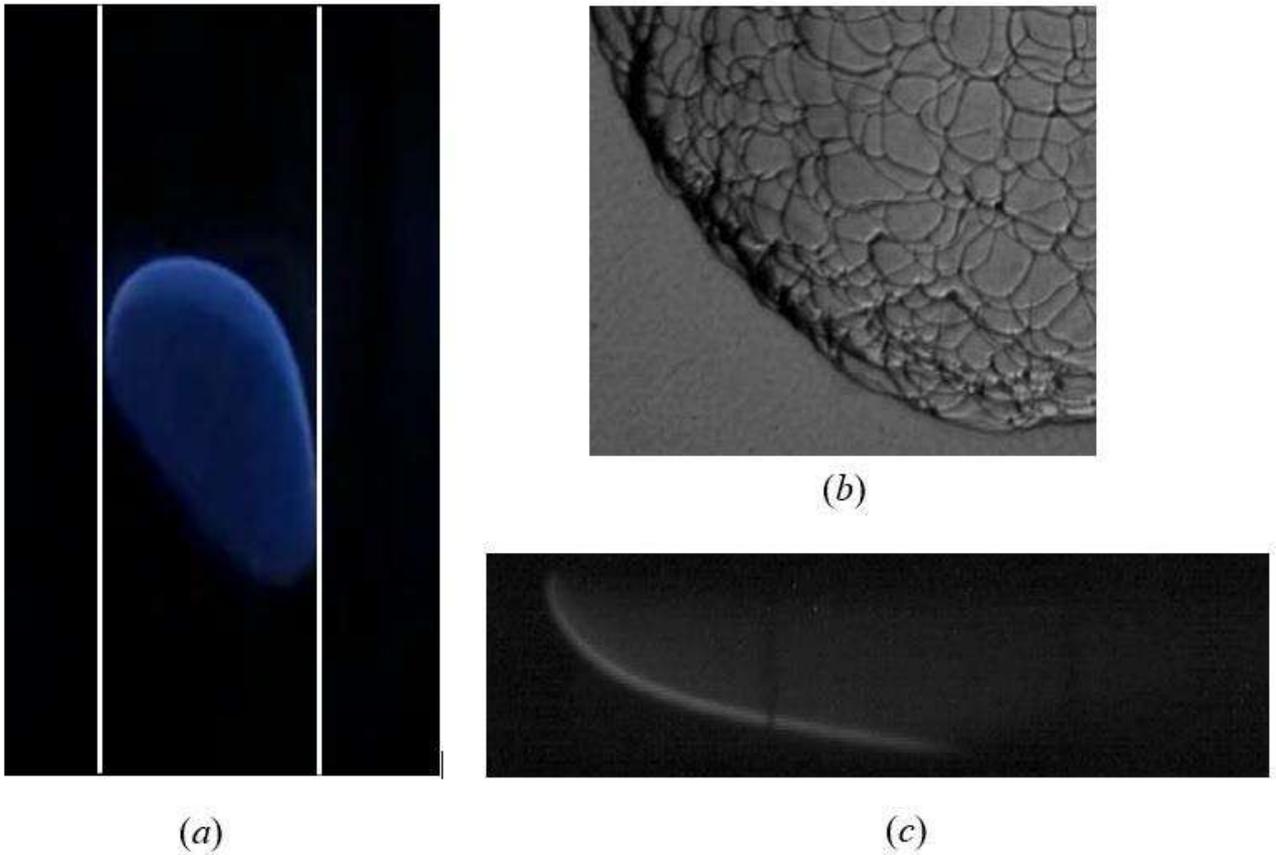


Рис. 2: Примеры пламён в газовых смесях. (a) Распространение вверх метано-воздушного пламени в трубе диаметром 5 см с открытым нижним концом. (b) Участок сферического водородо-воздушного пламени в бомбе с давлением газа 5 атм [50]. (c) Этановоздушное пламя в горизонтальной трубе диаметром 10 см. Пламя распространяется справа налево от открытого конца. Снимки (a) и (c) сделаны в Лаборатории горения и детонации, г. Пуатье, Франция (H.El-Rabii, частное сообщение).

теплового расширения газа, обозначается  $\theta$  и является вторым важнейшим параметром, характеризующим пламя. Для большинства пламён в нормальных условиях он лежит в интервале от 5 до 10. Следует заметить, что в то время как значения  $\theta$  для реальных пламён достаточно точно вычисляются и измеряются экспериментально, значения  $U_f$  известны с гораздо меньшей точностью. В качестве примера на Рис. 3 приведена заимствованная из работы [51] сводка результатов измерений  $U_f$  в стехиометрической метано-воздушной смеси, проводившихся различными методами в период 1953–2002 гг [49, 52–64]. Прямые численные моделирования с помощью современных алгоритмов, использующих самые со-

Technique	$S_L$ (cm/s)
Burner	39.7
Closed vessel	35.1
Tube/burner	33.0
Nozzle burner	42.1
Nozzle burner	37.0
Flat flame, heat extraction	35.7
Nozzle burner	39.7
Closed vessel	42.6
Flat flame	41.5
Stagnation/Bunsen flame	39.2
	34.9
Closed vessel, zero gravity	34.5
Counterflow	40.0
Counterflow	40.5
Flat flame, heat flux	37.0
Closed vessel	36.8
Counterflow, stretch corrected	34.9
Counterflow, ultralow strain	36.7
Closed vessel	36.8
Flat flame, heat flux	35.7

Рис. 3: Нормальная скорость плоского пламени  $U_f$  (обозначенная в таблице как  $S_L$ ), измеренная различными методами в стехиометрической смеси метана с воздухом [51].

вершенные схемы химической кинетики [например, GRIMech-3 [65] (325 реакций между 53 соединениями) или схема Коннова [66] (1207 реакций между 127 соединениями)], дают расхождение в значениях  $U_f$  примерно 10%.

Хотя приближение несжимаемости упрощает математическое описание пламени, сам факт несжимаемости газа означает существенную нелокальность процесса. А именно, движение продуктов горения, порождаемое тепловым расширением газа во фронте пламени, оказывает непосредственное влияние на холодную смесь. В приближении  $c_s = \infty$  это влияние является мгновенным. Возникающие вследствие этого изменения в движении холодного газа влияют, в свою очередь, на течение продуктов горения. Другими словами, движение холодной смеси не может быть задано заранее и должно определяться согласованно с движением сгоревшего газа.

Другим важным следствием малости  $U_f$  является то, что в земных условиях на динамику практически всех пламён существенное влияние оказывает поле тяжести. В частности, значения  $U_f$  во всех углеводородо-воздушных смесях лежат в интервале от

$\approx 5$  см/с до  $\approx 50$  см/с. Поэтому даже для быстрых стехиометрических смесей число Фруда  $Fr = gL/U_f^2$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, оказывается порядка единицы уже при  $L = 1$  см. Следовательно, если внешний масштаб длины  $L$  данной проблемы (например, диаметр трубы, в которой распространяется пламя) превосходит 1 см, то глобальные свойства пламени определяются полем тяжести.

### §1.2. Формулировка модели тонкого пламени

На практике ширина фронта  $l_f$  обычно на несколько порядков меньше внешнего масштаба длины. Типичные значения  $l_f = 0.01$  мм– $0.1$  мм, тогда как  $L = 1$  см– $1$  м, Рис. 1. В этих условиях с точки зрения глобальной структуры пламени его фронт можно рассматривать как математическую поверхность, на которой плотность  $\rho$ , давление  $p$  и скорость  $v$  газа испытывают скачки. Это приближение значительно упрощает описание пламени и является основой настоящего исследования. В данной модели, по определению, плотность газа постоянна по обе стороны поверхности разрыва и равна значению, к которому стремится истинная плотность при удалении от фронта вглубь газа. Заменой истинного течения газа переменной плотности течением газа постоянной плотности сразу достигается существенное упрощение задачи. Разумеется, эта замена имеет смысл, только если при удалении от фронта вглубь газа модельные поля скорости и давления газа действительно стремятся к соответствующим истинным значениям. Это асимптотическое стремление является экспоненциальным, а его характерной длиной является ширина фронта пламени  $l_f$ . Поверхность разрыва, заменяющая в модельной задаче реальный фронт пламени, для краткости обычно также называется фронтом пламени. Одной из принципиальных проблем описанного моделирования является определение положения поверхности разрыва по отношению к реальному фронту пламени.

Таким образом, модельные поля скорости и давления газа существенно отличаются от истинных лишь в относительно малой окрестности фронта пламени, где заметно меняется истинная плотность газа. Вследствие предполагаемого постоянства плотности газа вплоть до поверхности разрыва, вблизи неё модельные поля (в отличие от истинных) мало меняются на малых расстояниях порядка  $l_f$ . Следовательно, их значения на этой поверхности мало отличаются от предельных значений при движении от фронта пламени вглубь газа, то есть от истинных значений. Поэтому ограничения модельных полей на поверхность

разрыва, и в частности, их скачки на этой поверхности могут быть вычислены в рамках асимптотического разложения по малому отношению  $l_f/L$ . Эти скачки играют роль граничных условий для решений газодинамических уравнений по обе стороны фронта.

Плоское пламя играет в этом подходе особую роль. Поскольку в этом случае  $L = \infty$ , все асимптотические разложения по  $l_f/L$  для полей в модели с поверхностью разрыва сводятся к членам нулевого порядка, а сама она совпадает с одной из изотерм. В частности, скорость холодного газа относительно этой поверхности везде равна  $U_f$ . Отношение  $l_f/L$  обращается в нуль также и при  $l_f = 0$ , то есть при полном пренебрежении шириной фронта пламени. Это приближение называется моделью Ландау–Дарье, или моделью бесконечно тонкого пламени [67–69]. Таким образом, в этой модели фронт пламени в окрестности каждой своей точки рассматривается как локально плоский. В частности, значения скачков скорости и давления газа на фронте в любой его точке принимаются равными их значениям для плоского пламени, фронт которого совпадает с касательной плоскостью к истинному фронту в данной точке. Далее, его скорость относительно холодного газа в направлении нормали к фронту (короче, нормальная скорость) постоянна вдоль фронта и равна  $U_f$ . Эквивалентно, можно говорить о нормальной скорости газа относительно фронта:

$$\hat{v}_-^n \equiv \hat{\mathbf{v}}_- \cdot \mathbf{n} = U_f. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор нормали к фронту, направленный в сторону продуктов горения, нижний индекс “–” (“+”) у поля, определённого в области холодного газа (продуктов горения), означает его ограничение на поверхность фронта, а крышечка над  $\mathbf{v}_-$  означает скорость газа относительно фронта, или эквивалентно, её значение в системе, где данный элемент фронта покоится. Соотношение (1.1) называется уравнением эволюции и является одним из основных уравнений теории горения. Из него следует, в частности, что объём газа, сгорающего в единицу времени, пропорционален площади фронта.

Как известно, из закона непрерывности плотности потока массы на поверхности разрыва следует, что величина нормальной скорости продуктов горения относительно фронта также постоянна вдоль фронта и равна  $\hat{v}_+^n = \theta U_f$  [43]. В силу же непрерывности плотности потока тангенциальной компоненты импульса газа непрерывна тангенциальная компонента его скорости:  $\mathbf{v}_-^T = \mathbf{v}_+^T$ .

Параметры  $U_f$  и  $\theta$  полностью определяют влияние внутренних процессов во фрон-

те пламени на его глобальную динамику в модели Ландау–Дарье. Часто бывает удобно пользоваться естественными единицами измерения, в которых  $U_f$  принимается за единицу скорости. Если при этом за единицу плотности принять плотность холодного газа  $\rho_-$ , то плотность сгоревшего газа будет равна  $1/\theta$ , а естественной единицей давления будет  $\rho_- U_f^2$ .

### §1.3. Неустойчивость Ландау–Дарье и развитие модели тонкого пламени

Модель Ландау–Дарье является неполной в том смысле, что масштаб  $l_f$  не может быть полностью исключён из рассмотрения. Дело в том, что уже в простейшем случае плоского пламени оно оказывается неустойчивым по отношению ко всем возмущениям с длиной волны, много большей  $l_f$ . А именно, основным результатом теории Ландау–Дарье является выражение для инкремента возмущения пламени с волновым числом  $k$  [69]:

$$\nu = |k| U_f \frac{\theta}{\theta + 1} \left( \sqrt{1 + \theta - \frac{1}{\theta}} - 1 \right). \quad (1.2)$$

С учётом  $\theta > 1$  отсюда следует, что  $\nu > 0$  для любого  $k$ . Эта так называемая неустойчивость Ландау–Дарье играет фундаментальную роль в физике пламени. Она означает, во-первых, что предел  $l_f \rightarrow 0$  решений газодинамических уравнений является, вообще говоря, сингулярным. Другими словами, теория пламени должна содержать механизмы стабилизации возмущений, длина волны которых сравнима с шириной фронта пламени. Эти механизмы обеспечиваются процессами переноса во фронте пламени и называются эффектами конечной ширины фронта. Учёт этих эффектов приводит к появлению коротковолновой границы неустойчивых возмущений, которая называется длиной волны обрезания и обозначается  $\lambda_c$ . Таким образом, по крайней мере в случае слабонелинейных пламён, для последовательного описания их эволюции требуется явный учёт эффектов, связанных с конечностью ширины фронта, то есть членов первого порядка по  $l_f/L$ , прежде всего, в разложении нормальной скорости газа. Во-вторых, неустойчивость плоского пламени означает, что теория эволюции пламени должна быть нелинейной. Действительно, в линейном приближении возмущения пламени всевозможных длин волн развиваются независимо друг от друга согласно теории Ландау–Дарье, и только их взаимодействие приводит к ограничению роста амплитуды возмущения.

Итак, для описания динамики пламени требуется нелинейная и нелокальная теория,

которая должна учитывать процессы, происходящие на существенно различных масштабах. Например, в случае распространения пламени в трубе диаметром 10 см, заполненной смесью 6% метана с воздухом, характерными расстояниями являются ширина фронта пламени  $l_f \approx 0.1$  мм, диаметр трубы  $b \approx 10^3 l_f$  и гравитационная длина  $L_g = U_f^2/g \approx 0.12$  см  $\approx 12 l_f$ . Поэтому неудивительно, что первые последовательные теоретические описания глобальной эволюции пламени появились лишь во второй половине XX века. Интенсивные же экспериментальные исследования, направленные на выяснение механизма распространения пламени и их основных свойств, начались в последней четверти XIX века и продолжались до 30-х годов XX века [31, 32, 37–39, 45, 46, 70–81], пока не была построена последовательная теория плоского пламени [82–85], объяснившая основные закономерности в поведении величин  $U_f$  и  $l_f$  в зависимости от физико-химических свойств смеси. Учёт влияния процессов переноса во фронте на нормальную скорость был произведён Маркштейном [86, 87] путём феноменологического добавления к  $U_f$  члена, пропорционального кривизне фронта  $\kappa$ :

$$\hat{v}_-^n = U_f(1 - \mathcal{L}\kappa), \quad (1.3)$$

где  $\mathcal{L} = O(l_f)$  – некоторая постоянная, называемая длиной Маркштейна (эта модификация  $\hat{v}_-^n$  была впервые предложена Михельсоном ещё в конце XIX века [88]). В результате выражение для инкремента возмущения приняло вид

$$\nu = |k|U_f \frac{\theta}{\theta + 1} \left( \sqrt{1 + \theta - \frac{1}{\theta} + \mathcal{L}|k|(\mathcal{L}|k| - 2\theta)} - 1 - \mathcal{L}|k| \right). \quad (1.4)$$

Таким образом, при увеличении  $|k|$  инкремент достигает максимума, а затем уменьшается и обращается в нуль при  $|k| = k_c = (\theta - 1)/(2\theta\mathcal{L})$ . Соответствующая длина волны обрезания  $\lambda_c = 4\pi\theta\mathcal{L}/(\theta - 1)$ .

Последовательный учёт процессов переноса во фронте возможен лишь в простейших моделях с одно- или двухстадийной химической реакцией. Он производится методом сращиваемых асимптотических разложений по степеням  $l_f/L$  решений газодинамических уравнений внутри и вне фронта пламени [89–98]. Оказывается, что в первом порядке разложения по  $l_f/L$  имеется три независимых эффекта конечной ширины – эффекты кривизны, растяжения и компрессии пламени, с которыми связаны три параметра с размерностью длины, также называемые длинами Маркштейна [97]. Прямое их измерение

в реальном или численном эксперименте сопряжено как с техническими, так и с принципиальными теоретическими трудностями [98–100]. В литературе имеются серьёзные противоречия по поводу их величины даже в такой хорошо изученной смеси, как метано-воздушная [101–105], а для многих смесей этих данных нет вовсе.

Из выражения (1.4) следует важный вывод: при достаточно малых  $(\theta - 1)$  эволюция пламени является медленной, а его нелинейность – слабой. Действительно, в этом случае волновые числа неустойчивых мод ограничены величиной  $k_c = O(\theta - 1)$ , и поэтому градиенты всех полей, описывающих пламя, малы. Тогда из (1.4) следует, что их производные по времени являются величинами  $O((\theta - 1)^2)$ . Эти факты были использованы Сивашинским для получения нелинейного интегро-дифференциального уравнения для положения фронта пламени [106]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(f')^2}{2} = \frac{\theta - 1}{2} \left( -\hat{H}f' + \frac{\lambda_c}{2\pi} f'' \right). \quad (1.5)$$

Здесь для простоты пламя предполагается двумерным, положение его фронта (линии в плоскости  $x, y$ ) задаётся уравнением  $y = f(x, t)$ , а  $\hat{H}$  – оператор Гильберта

$$(\hat{H}f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \frac{f(\tilde{x})}{\tilde{x} - x}.$$

Это уравнение имеет решения, описывающие установившееся движение искривлённого пламени, то есть оно последовательным образом описывает нелинейную стабилизацию неустойчивости Ландау–Дарье. Уравнение Сивашинского справедливо в низшем (втором) порядке по  $(\theta - 1)$ . Позже было получено его уточнение с учётом вкладов порядка  $(\theta - 1)^3$  [107]. Так же как и соотношение Ландау–Дарье (1.2), эти уравнения получаются путём *явного* решения газодинамических уравнений для течений холодного газа и продуктов горения и последующего их согласования на фронте пламени с использованием известных условий скачка для скорости и давления газа и уравнения (1.3). Решения уравнений газодинамики при этом строятся методом последовательных приближений и поэтому условие слабой нелинейности пламени является необходимым.

На практике, однако,  $(\theta - 1)$  отнюдь не мал. Например, для всех углеводородо-воздушных смесей  $\theta = 5 \div 8$ , тогда как для пламён с более высоким энерговыделением  $\theta$  превосходит 10 (для стехиометрической смеси метана с кислородом  $\theta = 10.2$ ). Исключением в этом отношении являются так называемые холодные пламёна [110], но и они

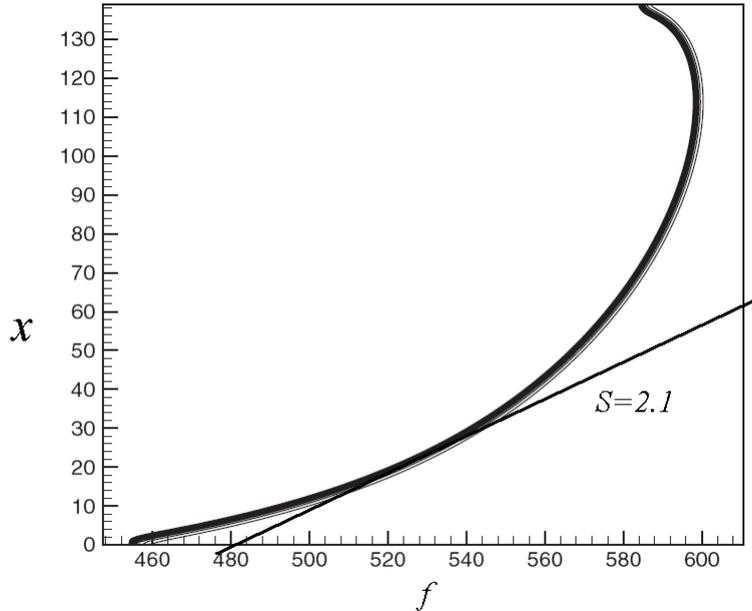


Рис. 4: Положение фронта пламени с  $\theta = 8$  в трубе шириной  $8\lambda_c$ , полученное прямым численным моделированием [114]. Пламя распространяется слева направо. Показаны также касательная к фронту в точке общего положения и тангенс угла её наклона к оси  $x$ .

характеризуются  $\theta \approx 2$ . В этой связи возникает важный вопрос о том, насколько слабонелинейное приближение применимо к реальным пламёнам. При конечных  $(\theta - 1)$  динамика пламени уже не является медленной. Из (1.4) следует, что характерным временем развития неустойчивости Ландау–Дарье является  $t_{LD} = 1/\nu|_{k=k_c} \approx \mathcal{L}/U_f$ , что для реальных пламён составляет миллисекунды, после чего наступает гораздо более длительная фаза взаимодействия различных мод, в результате которого возникает режим установившегося (стационарного) распространения пламени. Как показывают многочисленные эксперименты [70, 71, 76, 77, 80, 81, 112–115], в этом режиме нелинейность пламени (определяемая по отношению скорости распространения пламени  $U$  к  $U_f$ , по величине наклона фронта пламени к направлению его распространения или по кривизне линий тока элементов газа) совсем не мала и растёт с увеличением  $L$ . Ввиду этого можно было бы ожидать, что слабонелинейное приближение окажется применимым при  $L \sim \lambda_c$ , то есть при распространении в областях, в которых имеется лишь небольшое число неустойчивых мод. Однако прямое численное моделирование пламён в трубах шириной порядка нескольких  $\lambda_c$  показывает, что и в этом случае стационарное пламя является существенно нелинейным. В качестве

примера на Рис. 4 приведён результат [114] прямого численного моделирования двумерного пламени с  $\theta = 8$  в трубе шириной  $b = 8\lambda_c$  (в реальности пламёна в трубах столь малого диаметра не распространяются из-за теплопотерь в стенки трубы). Как видно, наклон фронта, то есть величина  $s = |df(x)/dx|$  в этом случае превосходит единицу на протяжении большей части фронта. В то же время, в выводе уравнения Сивашинского используются разложения вида  $\sqrt{1+s^2} \approx 1 + s^2/2$ , которые при  $s \gtrsim 1$  не применимы даже качественно. Несмотря на это, уравнение Сивашинского широко применяется для аналитического и численно-аналитического исследования пламён [115–131]. Одним из аспектов настоящей работы является выяснение условий применимости слабонелинейного приближения и реальной точности получаемых в его рамках результатов.

#### §1.4. Общие нестрогие уравнения теории искривлённых пламён

В литературе имеется большое число уравнений для положения фронта пламени, которые являются нестрогими в том смысле, что они не могут быть получены из фундаментальных уравнений газодинамики путём преобразований контролируемой точности, таких как точные преобразования методами функционального анализа или приближённые асимптотические методы. Вывод таких уравнений либо явно игнорирует какие-либо фундаментальные законы или соотношения, либо использует необоснованные упрощающие предположения о связи полей скорости и давления газа или о структуре решения основных уравнений.

Простейшим уравнением для формы фронта пламени является так называемое  $G$  уравнение [132, 133]

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla G = \hat{v}_-^n |\nabla G|,$$

где поле скорости газа  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  считается заданным, а положение фронта определяется по решению этого уравнения как множество точек, удовлетворяющих  $G(\mathbf{x}, t) = 0$ . Поскольку эта формулировка полностью игнорирует влияние пламени на течение газа, поле  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  не может считаться истинным полем скорости газа и поэтому о выполнении уравнений газодинамики говорить не имеет смысла. Если же считать  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  истинным полем скорости, то  $G$  уравнение является неполным, поскольку  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  остаётся неопределённым.

Другой популярной в литературе моделью является потенциальная модель Франкеля [134]. Она предполагает, что течения как холодной смеси, так и продуктов горения

являются потенциальными. Положение фронта пламени определяется уравнением

$$V(\mathbf{x}, t)/U_f = -1 + \frac{\theta - 1}{2\theta} \left( 1 + \frac{1}{2\pi} \int_F d\tilde{s} \frac{(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^3} \right),$$

где  $V(\mathbf{x}, t)$  есть скорость фронта пламени в точке  $\mathbf{x}$  в нормальном направлении, а интеграл распространён по его поверхности ( $d\tilde{s}$  есть элемент площади фронта в точке  $\tilde{\mathbf{x}}$ ). Важное свойство пламени состоит в том, что его искривление порождает завихрённость течения продуктов горения (при наличии поля тяжести завихрённость порождается также и плоским пламенем) [2, 135]. Этот эффект является следствием закона непрерывности плотности потока импульса газа на фронте. Поэтому предположение о потенциальности течения продуктов горения нарушает фундаментальный закон сохранения импульса газа.

Отдельную группу составляют слабонелинейные уравнения для пламён с немалым  $(\theta - 1)$ . Дело в том, что имеется широкий класс интегро-дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью относительно искомой функции, которые могут быть сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) методом разложения по полюсам [116]. Поэтому корректное приведение уравнения для фронта пламени к этому виду позволило бы далеко продвинуться в аналитическом исследовании глобальной структуры пламени. К сожалению, эта цель пока не была достигнута. Одним из уравнений этой группы является уравнение Жданова–Трубникова [136], вывод которого использует предположение, что поля скорости и давления продуктов горения связаны уравнением Бернулли. Однако в общем нестационарном случае это уравнение не выполняется. С другой стороны, в стационарном случае пламя с немалым  $(\theta - 1)$  не может быть слабонелинейным. Этот факт был доказан в работе [A1] и будет обсуждаться ниже в §6.1. Поэтому область применимости уравнения Жданова–Трубникова ограничена пределом слабого теплового расширения газа  $(\theta - 1) \ll 1$ , где оно сводится к уравнению Сивашинского.

В 1992 году было предложено [118] феноменологически модифицировать уравнение Сивашинского (1.5), изменив в нём зависимость коэффициентов от параметра  $\theta$  так, чтобы при произвольных  $\theta$  решения этого уравнения лучше соответствовали наблюдениям, а в пределе  $(\theta - 1) \ll 1$  восстанавливалось исходное уравнение (1.5). Последовательного вывода модифицированного уравнения дано не было. Однако ввиду упомянутой выше существенной нелинейности стационарных пламён заранее ясно, что никакая модификация, сохраняющая функциональную структуру слабонелинейного уравнения, не способна

даже качественно описать нелинейную стабилизацию пламён с немалым  $(\theta - 1)$ . По этой же причине некорректным является слабонелинейное стационарное уравнение Бычкова [137], имеющее функциональную структуру уравнения Сивашинского.

Большой обоснованностью обладает слабонелинейное уравнение **[A3]**, полученное с помощью перехода в так называемое трансверсальное представление – форму основных газодинамических уравнений, в которой зависимость всех полей от одной из пространственных координат является параметрической. Его функциональная структура аналогична структуре уравнения Жданова–Трубникова. Однако справедливость трансверсального представления была установлена лишь до четвёртого порядка асимптотического разложения по степеням  $(\theta - 1)$  **[A1]**. Поэтому уравнение **[A3]** также является корректным лишь при условии  $(\theta - 1) \ll 1$ .

Недавно была предпринята попытка [138] обосновать применимость уравнения Сивашинского в пределе  $\theta \gg 1$  игнорируя доказательство **[A1]**. Авторы предположили, что в этом пределе применимо слабонелинейное разложение и имеет место следующий скейлинг временной переменной, компонент скорости и давления продуктов горения по отношению к  $\theta$  (используются обозначения настоящей диссертационной работы и естественные единицы):

$$t = \theta^{-1/2}\tilde{t}, \quad v_x = \theta \tilde{v}_x, \quad v_y = \theta + \theta \tilde{v}_y, \quad p = \theta \tilde{p},$$

где переменные, снабжённые тильдой, являются величинами  $O(1)$  относительно  $\theta$ . В результате уравнения Эйлера для течения продуктов горения свелись к

$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} + \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} + \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Производя аналогичные преобразования уравнений для холодного газа и условий скачка, авторы [138] пришли к уравнению для фронта, совпадающему по форме с уравнением Сивашинского для  $\theta = 3$ . Однако легко видеть, что предполагаемый скейлинг не имеет места уже в линейном приближении, в котором должны воспроизводиться результаты теории Ландау–Дарье. Действительно, начальные условия для возмущения пламени всегда можно выбрать так, чтобы на любом заданном отрезке времени нелинейные члены в уравнениях были пренебрежимо малы. В этом случае второе из уравнений (1.6) сводится к

$$\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y},$$

откуда следует  $\tilde{p}(x, y, t) = -\tilde{v}_y(x, y, t) + C(x, t)$ , где  $C(x, t)$  – некоторая функция, не зависящая от  $y$ . Подстановка в первое из уравнений (1.6) даёт в том же приближении

$$\tilde{\sigma} \equiv \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} = \frac{\partial C(x, t)}{\partial x}.$$

Однако согласно результатам теории Ландау–Дарье, завихрённость течения, как и все возмущения пламени, стремится к нулю при удалении от фронта, то есть при  $y \rightarrow \infty$  [43]. Но  $\tilde{\sigma}$  оказалась независимой от  $y$ , следовательно,  $\tilde{\sigma} \equiv 0$ . Таким образом, течение продуктов горения оказывается безвихревым, что возможно лишь в тривиальном случае плоского пламени.

### §1.5. Частные нестрогие модели искривлённых пламён

Помимо общих уравнений в литературе имеются модели более узкой применимости, предназначенные для описания специфических эффектов в распространении пламён в конкретных условиях. Из всего многообразия таких моделей ниже упоминаются лишь имеющие отношение к теме диссертационного исследования.

Учёт влияния вязкости течения продуктов горения на скорость двумерного пламени произведён в работе [139] на основе модели, в которой течение газа описывается заданием функции тока и завихрённости газа, а поля скорости не подлежат полному определению. Результатом этой модели является вывод о том, что при увеличении числа Рейнольдса скорость распространения пламени  $U$  стремится к нормальной скорости  $U_f$ . Этот вывод, однако, не подтверждается прямыми наблюдениями [70, 71, 76, 77, 80, 81] и противоречит результатам современного прямого численного моделирования [112–114].

При достаточно больших скоростях распространения пламени в трубе за его фронтом часто образуются зоны стагнации – примыкающие к стенкам трубы области неподвижного относительно пламени газа. Для учёта их влияния на форму и скорость двумерного пламени была предложена сильно упрощённая модель, в которой течение холодной смеси описывается решением уравнения Лапласа с одной или двумя гармоническими модами с фиксированными амплитудами [140]. Другими словами, предполагается, что при заданной скорости пламени течение холодной смеси не зависит от структуры течения продуктов горения. Учёт поля тяжести в этой модели был произведён в [141]. Однако уже в слабонелинейном приближении (теория Сивашинского) число мод в решении формально

бесконечно. Для корректного описания нелинейной стабилизации требуется учёт взаимодействия всех мод (как неустойчивых, так и устойчивых), а также взаимного влияния течений газа по обе стороны фронта пламени.

Экспериментально установлено, что при распространении предельных пламён вверх по вертикальной трубе их скорость близка к скорости пузыря воздуха в воде, заполняющей трубу того же диаметра [9]. На этом факте основана так называемая модель пузыря, применяемая для описания установившегося распространения пламён как в вертикальных, так и в горизонтальных трубах [128, 142, 143]. В этой модели пренебрегается потоком газа через фронт, и следовательно, влиянием течения продуктов горения на структуру пламени. Однако хорошо известно, что динамика поверхности разрыва существенно зависит от того, равен ли нулю поток вещества через неё [43]. Уже в исходной работе [9] было отмечено, что аналогия между пламенем и пузырём быстро исчезает при удалении от предела воспламенения, в частности, модель пузыря даёт неверные значения для скорости пламени. Аналогично, в случае горизонтальной трубы скорость распространения пламени согласно этой модели равна  $U = 0.43\sqrt{gd}$ , где  $d$  и  $g$  – диаметр трубы и ускорение свободного падения. Это предсказание сильно расходится с наблюдениями [70, 71, 77, 78, 80, 144]. Таким образом, в общем случае модель пузыря не имеет ни качественной, ни количественной применимости.

### §1.6. Проблема неоднозначности положения поверхности разрыва

Величина поправок в нормальную скорость газа, связанных с конечностью ширины фронта, является одним из самых дискутируемых вопросов теории горения. Разработка общего метода их вычисления была закончена более сорока лет назад [90–96], и на его основе производился учёт вкладов различных процессов переноса в условия скачка и нормальную скорость газа [97, 98, 145–150]. Однако было замечено, что в этих вкладах имеется неоднозначность, связанная с выбором положения поверхности разрыва по отношению к истинному фронту пламени [97–100, 151]. С учётом поправок первого порядка по  $l_f$  уравнение (1.1) заменяется на

$$\hat{v}_-^n \equiv \hat{\mathbf{v}}_- \cdot \mathbf{n} = U_f - S(\hat{\mathbf{v}}, f). \quad (1.7)$$

где  $S(\hat{\mathbf{v}}, f)$  является функцией распределения скорости газа вдоль фронта и её первых производных, а также от формы фронта. В наиболее простом и наглядном случае двумер-

ного пламени, когда течение однородно в направлении оси  $z$ , положение фронта задаётся функцией  $y = f(x, t)$ , а  $S$  имеет вид [86, 88, 95, 96, 145, 152–155]

$$S(\hat{\mathbf{v}}, f) = \mathcal{L}_s \frac{(v_-^\tau)'}{N} + \mathcal{L}_c U_f \left( \frac{f'}{N} \right)'. \quad (1.8)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $x$ ,  $N = \sqrt{1 + (f')^2}$ , тангенциальная компонента скорости газа на фронте определена как  $v_-^\tau = \mathbf{v}_- \cdot \boldsymbol{\tau}$ , где единичный вектор касательной к фронту  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y) = (f'/N, 1/N)$ , а  $\mathcal{L}_s, \mathcal{L}_c = O(l_f)$  – длины Маркштейна. Эти параметры определяют величину эффектов растяжения пламени (первое слагаемое) и кривизны его фронта (второе слагаемое) на локальную скорость горения.

В уравнении (1.7) подразумевается, что положение поверхности разрыва относительно истинного фронта пламени уже определено. Представим теперь, что эта поверхность деформируется таким образом, что каждый её элемент смещается в нормальном направлении на расстояние  $\delta\xi = O(l_f)$ . При этом значение  $v_-^n$  получает приращение

$$\delta v_-^n = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \right)_- \cdot \mathbf{n} \delta\xi,$$

где для простоты рассматривается стационарное пламя, то есть установившееся течение газа. Подставляя  $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (-f'/N, 1/N)$  и учитывая, что в силу  $\rho = \text{const}$  модельное поле скорости  $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \equiv (w, u)$  удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} \right)_- \cdot \mathbf{n} &= -\frac{f'}{N} \left[ n_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_- + n_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_- \right] + \frac{1}{N} \left[ n_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_- + n_y \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_- \right] \\ &= \frac{n_x}{N} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_- + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_- f' \right] - \frac{n_y}{N} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_- + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_- f' \right] \\ &= -\frac{f'}{N^2} \frac{du_-}{dx} - \frac{1}{N^2} \frac{dw_-}{dx} = -\frac{1}{N} \frac{d}{dx} \frac{w_-}{N} + \frac{f' u_-}{N} + \frac{f'' u_- - f' w_-}{N^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, приращение нормальной скорости принимает вид

$$\delta v_-^n = \left[ -\frac{(v_-^\tau)'}{N} + \left( \frac{f'}{N} \right)' v_-^n \right] \delta\xi.$$

Сравнивая это выражение с (1.7), (1.8) заключаем, что в первом порядке по  $l_f$  рассматриваемый сдвиг поверхности разрыва эквивалентен следующему переопределению длин Маркштейна:

$$\mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{L}_s - \delta\xi, \quad \mathcal{L}_c \rightarrow \mathcal{L}_c + \delta\xi.$$

Поскольку же  $\mathcal{L}_s, \mathcal{L}_c$  сами являются величинами  $O(l_f)$ , то перемещение поверхности разрыва в пределах истинного фронта пламени приводит к  $O(1)$  относительной вариации этих параметров, включая возможное изменение их знака [98–100]. Инвариантной при этом является лишь сумма  $\mathcal{L}_s + \mathcal{L}_c$ .

Мнения, высказываемые в литературе по этому поводу, варьируются от утверждения, что эта неоднозначность естественна и может быть использована для улучшения аппроксимации первого порядка [151], до заключения, что она является указанием на невозможность самосогласованно описать пламя конечной ширины путём его замены поверхностью разрыва. Превалирующим всё же является то мнение, что положение поверхности разрыва действительно неоднозначно, но все положения принципиально эквивалентны в том смысле, что окончательные физические результаты однозначны, а конкретный выбор поверхности определяется лишь соображениями удобства [97, 98, 145]. В главе 2 будет доказано, что на самом деле положение поверхности разрыва относительно истинного фронта определено однозначно, и самосогласованное описание пламени в рамках модели тонкого пламени существует, по крайней мере, в первом порядке по ширине фронта.

### §1.7. Структура диссертационной работы

Как уже было указано, слабонелинейное приближение неприменимо для описания установившегося распространения пламён с конечным  $(\theta - 1)$ , а следовательно, и самого процесса нелинейной стабилизации пламени. С другой стороны, в условиях сильной нелинейности течения невозможно построить точное общее решение газодинамических уравнений в явном виде. Следовательно, оставаясь в рамках классического подхода, основанного на явном решении уравнений для течений газа по обе стороны фронта, невозможно построить аналитическое описание существенно нелинейного пламени. Основной задачей настоящей работы является построение аналитического описания пламени обходя проблему отсутствия явного общего решения газодинамических уравнений. Как будет показано, для описания динамики фронта пламени достаточно величин, определённых на фронте – распределений компонент скорости холодного газа на фронте и формы самого фронта. Таким образом, исходная проблема полного описания пламени, включая течение газа в основном объёме, сужается до задачи построения замкнутой системы уравнений для величин, определённых на фронте. Интуитивной предпосылкой этого так называемого

*оболочечного описания* (on-shell description) является указанное выше свойство несжимаемости газа и следующая из него нелокальность пламени. В силу этой нелокальности любое изменение течения холодной смеси или продуктов горения в какой либо его области мгновенно отражается на всём течении, и в частности, на структуре фронта пламени. Другими словами, информация о структуре этих течений в каждый момент времени содержится в распределениях скорости газа на фронте пламени и его форме в тот же момент времени. С математической точки зрения возможность реализации этой физической идеи связана с тем хорошо известным свойством потенциальных полей, что каждое такое поле в любой области полностью определяется своими значениями на границе области. Это свойство невозможно применить к пламени непосредственно, поскольку даже если течение холодного газа является потенциальным, течение продуктов горения, порождаемое искривлённым пламенем, неизбежно оказывается вихревым. Основной частью построения оболочечного описания является доказательство того, что путём последовательного выделения потенциальных вкладов из поля скорости продуктов горения его можно выразить через распределение скорости холодного газа на фронте пламени и его форму. Потенциальный же вклад остаётся неизвестным, но он может быть исключён из рассмотрения используя упомянутое свойство потенциальных полей. Таким образом, информация, которая содержится в этом вкладе и является явно недоступной для анализа, оказывается ненужной для описания динамики фронта пламени.

Эта программа реализована в Части I для двумерных стационарных пламён. Результатом является нелинейное комплексное интегро-дифференциальное уравнение, получившее название мастер-уравнения, которое связывает распределение скорости холодного газа на фронте с его формой. Вместе с уравнением эволюции оно образует замкнутую систему уравнений. Мастер-уравнение выводится в рамках общего формализма тонкого пламени, в котором эффекты конечной ширины полностью учитываются условиями скачка и выражением для нормальной скорости газа. Часть I начинается с доказательства самосогласованности данного формализма в первом порядке по ширине фронта, которое решает указанную в §1.6 проблему неоднозначности. Затем выводится мастер-уравнение для стационарного пламени в трубе. Это делается двумя различными методами, отличающимися способом учёта граничных условий для течения газа на стенках трубы. Важной частью настоящей работы является воспроизведение в рамках оболочечного описания известных результатов теории пламён. Во-первых, это служит нетривиальной проверкой корректно-

сти нового подхода, и во-вторых, даёт гораздо более простой способ их получения. Часть II целиком посвящена слабонелинейному разложению стационарного мастер-уравнения, которое воспроизводит уравнение Сивашинского и его уточнения высших порядков. Однако основной целью оболочечного описания является исследование сильнонелинейных пламён, а именно, пламён в быстрых потоках газа и в сильном поле тяжести, которые рассматриваются в Части III. Там же строится алгоритм численного решения оболочечных уравнений, с помощью которого подробно исследуется влияние каждого из эффектов конечной ширины фронта на форму пламени и структуру порождаемых им течений газа. Обобщение мастер-уравнения на нестационарные пламёна дано в Части IV. В его рамках воспроизводятся соотношение Ландау–Дарье (1.2) и уравнения Сивашинского–Клавена [107] и Маркштейна [86] для слабонелинейного нестационарного пламени. Затем мастер-уравнение применяется для исследования сильнонелинейных нестационарных пламён – V-пламени в быстром потоке газа в трубе и ускорения пламён в открытых трубах.

## Часть I

# Оболочечное описание тонких ламинарных пламён

Оболочечное описание основано на модели тонкого пламени. Конкретный вид уравнения эволюции и условий скачка скорости при этом не важен, но принципиальным является вопрос о точности этой модели. А именно, замена реального физического фронта пламени конечной ширины математической поверхностью разрыва является корректной, только если она оставляет неизменными, в пределах точности модели, все глобальные физические характеристики пламени, такие как скорость распространения или инкремент роста возмущения пламени.

Положение фронта пламени в общем случае задаётся уравнением  $F(x, y, z, t) = 0$ , где функция  $F(x, y, z, t)$  является непрерывной, а при учёте эффектов конечной ширины фронта и дифференцируемой (гладкой) по всем аргументам. Если  $\partial F/\partial y \neq 0$ , то без ограничения общности можно считать, что  $F(x, y, z, t) = y - f(x, z, t)$ . Если же в некоторой точке  $\partial F/\partial y = 0$ , то в её окрестности вместо  $x, z$  необходимо использовать другой набор независимых переменных, что сводится просто к переобозначениям и не меняет окончательных результатов. Поэтому везде ниже будет предполагаться, что положение фронта задаётся уравнением  $y = f(x, z, t)$ .

## 2. САМОСОГЛАСОВАННОСТЬ МОДЕЛИ ТОНКОГО ПЛАМЕНИ [A15]

### §2.1. Критерий корректности модели тонкого пламени

Как было указано в §1.6, величина нормальной скорости газа зависит от положения математической поверхности разрыва относительно физического фронта пламени. В этой связи иногда ссылаются [97] на термодинамическую проблему неоднозначности в расположении границы между двумя гетерогенными веществами, находящимися в равновесии, которую обсуждал ещё Гиббс [156]. Однако помимо равновесности, проблема Гиббса существенно отличается от рассматриваемой отсутствием потока вещества через поверхность

раздела двух сред. Если течения газа, связанные с пламенем, рассматривать с чисто полевой точки зрения, то есть интересоваться лишь значениями скорости и давления газа в каждой точке, то в положении поверхности разрыва действительно будет иметься неоднозначность. Но такое рассмотрение является неполным, потому что процесс горения складывается из перемещений отдельных элементов газа и их прохождения через фронт, а поле скорости является лишь вспомогательным средством описания этого движения. Замена истинного течения газа, плотность которого непрерывно меняется в малой окрестности фронта, течением газа со скачком плотности является допустимой, только если она не меняет движение элементов газа вне этой окрестности. Таким образом, имеем следующее требование корректности модели тонкого пламени:

(\*) *Положение элементов газа, находящихся на расстоянии  $\gg l_f$  от фронта пламени, должно оставаться неизменным (с точностью до членов  $O(l_f)$  включительно) при замене истинного фронта поверхностью разрыва.*

Это требование имеет важное аналитическое следствие. Оно будет получено ниже в самом общем случае, не предполагающем, в частности, двумерности или стационарности пламени. Для его вывода заметим, что хотя в формулировке требования корректности речь идёт об элементах газа, удалённых от фронта пламени, рано или поздно каждый элемент проходит через него. Поэтому положение элементов продуктов горения, удалённых от фронта в данный момент времени, не должно меняться от замены истинного фронта поверхностью разрыва в прошлом. Истинные величины, то есть величины до этой замены, будут обозначаться заглавными буквами. Выделим произвольный элемент газа и рассмотрим часть его траектории  $\mathbf{R}(t)$  между точкой  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(t_1)$ , находящейся в основном объёме холодного газа (то есть области, где градиент истинной плотности газа пренебрежимо мал) и точкой  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(t_2)$  в основном объёме продуктов горения. В силу условия (\*), траектория  $\mathbf{r}(t)$  этого элемента в модели тонкого пламени должна совпадать (в каждом порядке разложения по  $l_f/L$ ) с истинной траекторией  $\mathbf{R}(t)$  везде, за исключением окрестности шириной  $O(l_f)$  поверхности разрыва. Для этого необходимо, чтобы время движения из начальной точки в конечную в обеих картинах также совпадало. Иначе в области продуктов горения функции  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  оказались бы различными, даже если они совпадали в области холодного газа. Написав время движения на отрезке

$d\mathbf{R}$  как  $|d\mathbf{R}|/|\mathbf{V}|$ , приходим к условию

$$\int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \frac{|d\mathbf{R}|}{|\mathbf{V}|} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{|d\mathbf{r}|}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.1)$$

Упростим (2.1) с точностью до величин первого порядка включительно. Для этого удобно перейти в систему отсчёта, в которой элемент поверхности разрыва, с которой пересекается данная траектория  $\mathbf{r}(t)$ , покоится в момент пересечения. Поскольку подынтегральные выражения в этом уравнении отличаются лишь на расстояниях  $O(l_f)$  от поверхности разрыва, разность левой и правой частей (2.1) есть величина  $O(l_f)$ . Изменения полей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}$  на расстояниях  $O(l_f)$  в касательных к поверхности направлениях также являются величинами  $O(l_f)$ . Следовательно, значения скоростей  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}$  на траекториях  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  могут быть заменены их значениями вдоль проекций этих траекторий на одну и ту же нормаль к поверхности в точке её пересечения с  $\mathbf{r}(t)$ . Вносимая этой заменой ошибка в разность левой и правой частей является величиной  $O(l_f^2)$ . Оба интеграла в (2.1) тогда могут быть выражены через одну переменную интегрирования  $\xi$  вдоль этой нормали:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left( \frac{1}{V^n} - \frac{1}{v^n} \right) = 0, \quad (2.2)$$

где символы  $\pm\infty$  означают, что пределы интегрирования лежат достаточно далеко от поверхности разрыва. Наконец, поскольку интегрирование в этой формуле ведётся эффективно по отрезку длины  $O(l_f)$ ,  $v^n$  в подынтегральном выражении с той же точностью может быть вычислено в нулевом порядке по ширине фронта, то есть  $v^n = 1$  перед пересечением поверхности разрыва и  $v^n = \theta$  – после.

Поскольку  $v^n$  постоянна по обе стороны поверхности разрыва и имеет на ней конечный ненулевой скачок, при перемещении этой поверхности вклад второго слагаемого в подынтегральном выражении в (2.2) не может оставаться постоянным. А именно, при смещении поверхности разрыва от холодной стороны фронта в сторону продуктов горения этот вклад, будучи отрицательным, монотонно уменьшается. С другой стороны, вклад первого слагаемого при этом вообще не меняется. Следовательно, решение соотношения (2.2), рассматриваемого как уравнение для положения поверхности разрыва, существует и единственно. Таким образом, положение поверхности разрыва относительно истинного фронта пламени определено однозначно.

**§2.2. Доказательство корректности модели тонкого пламени в первом порядке по  $l_f$**

Докажем теперь, что, располагая поверхностью разрыва в соответствии с условием (2.2), возможно корректно построить модель тонкого пламени, удовлетворяющую (\*) в первом порядке по  $l_f$ . Следует заметить, что это нетривиальная задача, поскольку замена истинного фронта ширины  $l_f$  поверхностью разрыва сильно меняет течение на расстояниях  $O(l_f)$  от фронта. Чтобы доказать выполнение (\*), проследим за движением данного элемента газа. Поскольку вдали от фронта газодинамические уравнения в модели с поверхностью разрыва совпадают с истинными, траектории  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  в основном объёме холодного газа также совпадают. Их дальнейшее поведение при приближении элемента газа к фронту может быть найдено путём интегрирования уравнений

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{R}, t), \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

где истинная скорость  $\mathbf{V}$  является, в принципе, известной точно, тогда как модельное поле  $\mathbf{v}$  должно быть найдено как продолжение поля  $\mathbf{V}$  из основного объёма газа к поверхности разрыва путём решения уравнений газодинамики для газа постоянной плотности. Такое продолжение существует для достаточно малых  $l_f$ . В самом деле, поле  $\mathbf{v}$  не имеет особенностей в области, где истинная плотность газа постоянна, то есть на расстояниях  $\gg l_f$  от фронта, поскольку оно совпадает там с истинным полем  $\mathbf{V}$ . Поэтому  $\mathbf{v}$  не имеет особенностей в некотором открытом множестве, охватывающем основной объём, и при достаточно малом  $l_f$  поверхность, удовлетворяющая условию (2.2), окажется в этом множестве. Следовательно, поле  $\mathbf{v}$  может быть продолжено вплоть до этой поверхности. Ограничение  $\mathbf{v}$  на эту поверхность есть как раз то, что ранее обозначалось  $\mathbf{v}_-$ . Совершенно аналогично, уменьшив при необходимости  $l_f$ , поле скорости продуктов горения  $\mathbf{v}$  может быть получено из  $\mathbf{V}$  продолжением из основного объёма к поверхности разрыва. Для доказательства того, что решения уравнений (2.3) совпадают и в основном объёме продуктов горения, остаётся установить совпадение (т.е. равенство начальных условий) функций  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  при выходе рассматриваемого элемента газа в основной объём продуктов горения. Поскольку в нулевом порядке по  $l_f$  тангенциальная к поверхности разрыва компонента скорости непрерывна на фронте, имеем  $(\mathbf{V} - \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau} = O(l_f)$  в окрестности фронта. Но так как время прохождения этой окрестности также есть величина  $O(l_f)$ , то

$(\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}(t)) \cdot \boldsymbol{\tau}$  остаётся в течение этого времени величиной  $O(l_f^2)$ . В отличие от тангенциальной компоненты, проекция на нормаль  $(\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{n} = O(l_f)$ , поскольку  $v^n$  постоянна по обе стороны поверхности разрыва, а  $V^n$  меняется непрерывно. Однако, поскольку в силу условия (2.2) время пересечения рассматриваемой окрестности в обеих картинах одинаково, после выхода из неё  $(\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{n}$  оказывается величиной  $O(l_f^2)$ . Таким образом,  $(\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}(t)) = O(l_f^2)$ , когда элемент газа оказывается в основном объёме продуктов горения, так что начальные условия для обеих систем уравнений (2.3) оказываются одинаковыми в первом порядке по  $l_f$ . Следовательно, в силу известной теоремы для нормальной системы ОДУ [157], функции  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{r}(t)$  также совпадают в первом порядке по  $l_f$  везде в основном объёме продуктов горения, что завершает доказательство выполнения условия (\*).

Выполнение условия (\*) гарантирует, что глобальные характеристики пламени, вычисляемые в модели тонкого пламени, совпадают с истинными. Например, инкремент роста возмущения пламени непосредственно определяется по зависимости от времени скорости газа вдали от фронта. Аналогично, скорость установившегося распространения пламени относительно смеси можно найти как скорость смеси достаточно далеко вверх по течению в системе покоя пламени, и т.д.

Везде в дальнейшем пламена рассматриваются в рамках модели тонкого пламени и условие (2.2) подразумевается выполненным.

### §2.3. Скачки скорости и завихрённости на фронте в первом порядке по $l_f$

Рассмотрим поле  $a(\mathbf{r}, t)$ , определённое по обе стороны поверхности разрыва, и обозначим через  $[a]$  скачок  $a$  на этой поверхности:  $[a] = a_+ - a_-$ . Здесь  $a_-$  ( $a_+$ ) есть ограничение  $a$  на поверхность разрыва со стороны холодного газа (продуктов горения). Важнейшую роль в аналитическом описании пламен с помощью модели тонкого пламени играют выражения для скачков на фронте пламени полей скорости газа, его давления и завихрённости ( $\text{rot } \mathbf{v}$ ), а также уравнение эволюции, то есть формула для нормальной скорости газа на фронте. В первом порядке по  $l_f$  и при выполнении условия (2.2) эти выражения могут быть получены из известных в литературе следующим образом.

В подынтегральное выражение в (2.2) входит проекция  $V^n$  истинной скорости газа на нормаль к поверхности разрыва в точке её пересечения с  $\mathbf{r}(t)$ . Она может быть выражена

через истинную плотность газа  $D$  используя постоянство массы движущегося элемента газа. А именно, на расстояниях порядка  $O(l_f)$  от фронта имеем, в естественных единицах,

$$V^n D = 1 + O(l_f).$$

Следовательно, (2.2) с той же точностью первого порядка может быть переписано в виде

$$\int_{-\infty}^0 d\xi (D - 1) + \int_0^{+\infty} d\xi \left( D - \frac{1}{\theta} \right) = 0, \quad (2.4)$$

где начало отсчёта координаты  $\xi$  выбрано на поверхности разрыва, причём  $\xi = -\infty$  находится в основном объёме холодного газа. Левая часть этого равенства совпадает с так называемым интегралом плотности, введённым в работе [97], где в общем виде рассматривался вопрос о зависимости скачков скорости и давления газа на поверхности разрыва от её положения. Авторами было обнаружено, что выражения для скачков принимают особенно простой вид, когда интеграл плотности обращается в нуль. Поскольку, как было показано в §2.2, обращение этого интеграла в нуль на самом деле необходимо, мы можем использовать результаты [97] для этого случая. Во-первых, тангенциальная компонента скорости газа оказывается непрерывной не только в нулевом, но также и в первом порядке по  $l_f$ :

$$v_-^T = v_+^T. \quad (2.5)$$

Соотношение между  $v_-^n$  и  $v_+^n$  также остаётся прежним

$$v_+^n = \theta v_-^n. \quad (2.6)$$

Из него следует, что скачок нормальной компоненты скорости

$$[v^n] = (\theta - 1)v_-^n \quad (2.7)$$

вполне определен, если задано уравнение эволюции. Далее, скачок давления газа имеет вид

$$[p] = -(\theta - 1)(v_-^n)^2 - 2\mathcal{L}_\sigma \kappa, \quad (2.8)$$

где  $\kappa$  есть кривизна фронта (определённая положительной для фронта, выпуклого в сторону холодного газа), а  $\mathcal{L}_\sigma$  — ещё одна длина Маркштейна. Наконец, скачок завихрённости может быть выражен через скачки скорости и давления [135]. Явное выражение для него

понадобится ниже лишь для двумерного пламени, где оно принимает особенно простой вид. Обозначив  $(\text{rot } \mathbf{v})_z \equiv \sigma$ , имеем

$$[\sigma] = -\frac{\theta - 1}{\theta N v_-^n} \left\{ \frac{Dw_-}{Dt} + f' \frac{Du_-}{Dt} + \frac{v_-^n}{N} \frac{Df'}{Dt} + \phi'_- \right\} - \frac{(\theta - 1)(v_-^n)'}{N} - \frac{2\mathcal{L}_\sigma}{N} \left( \frac{f''}{N^3} \right)', \quad (2.9)$$

где

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left( w_- + \frac{v_-^n f'}{N} \right) \frac{\partial}{\partial x},$$

а  $\phi(x, y, t) = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$  – потенциал поля тяжести ( $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения).

Член с  $\phi_-$  описывает так называемый бароклинный эффект – генерацию завихрённости в потоке газа, градиент плотности которого не параллелен направлению поля тяжести.

Таким образом, в первом порядке по  $l_f$  влияние процессов переноса во фронте пламени на его глобальную динамику определяется заданием пяти независимых параметров:

$U_f, \theta, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_c, \mathcal{L}_\sigma$ .

### 3. УСРЕДНЕНИЕ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ СТРУКТУРЫ ПЛАМЕНИ [A11]

Фронт пламени часто имеет сложную структуру, образующуюся в результате развития той или иной неустойчивости плоского пламени. В некоторых случаях он состоит из сравнительно больших гладких “ячеек” разнообразной формы, разделённых относительно чёткими границами, как на Рис. 5(a), или имеет однотипные мелкомасштабные искривления, которые однородно накладываются на гладкую крупномасштабную структуру, как на Рис. 5(b). Во втором случае у пламени имеется два существенно различных масштаба: характерный размер мелкомасштабного искривления фронта и характерная длина той структуры, которая получится, если сгладить мелкомасштабные искривления. В предположении, что пламя не имеет других масштабов, промежуточных между этими двумя, можно строго сформулировать процедуру сглаживания, или усреднения, мелкомасштабной структуры. Ниже это сделано в общем трёхмерном случае и показано, что усреднённые поля подчиняются обычным идеальным газодинамическим уравнениям, но при этом модифицируется уравнение эволюции – нормальная скорость газа эффективно увеличивается пропорционально увеличению площади фронта за счёт его мелкомасштабного искривления.

Ниже будет удобно пользоваться естественными единицами измерения, а именно, в качестве единиц измерения длины, времени и скорости берутся  $L$ ,  $L/U_f$  и  $U_f$ , соответственно.

#### §3.1. Процедура усреднения

Пусть данное поле  $A = A(\mathbf{x}, t)$  представимо в виде суммы

$$A(\mathbf{x}, t) = A_0(\mathbf{x}, t) + A_1(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

где  $A_0(\mathbf{x}, t)$  относительно медленно меняется в пространстве (его характерной длиной является внешний масштаб  $L$ ), а  $A_1(\mathbf{x}, t)$  – быстро (характерная длина  $\lambda_c$ ). Оба слагаемых являются величинами  $O(\varepsilon^0)$  по отношению к малому параметру  $\varepsilon \equiv \lambda_c/L$ , но при усреднении по областям размера  $\gg \lambda_c$  поле  $A_1(\mathbf{x}, t)$  становится величиной  $o(\varepsilon^0)$ . Более точно, на основании условия  $\varepsilon \ll 1$  выберем промежуточный масштаб  $\Delta = \sqrt{\lambda_c L}$ , так что

$$\lambda_c \ll \Delta \ll L, \quad (3.2)$$

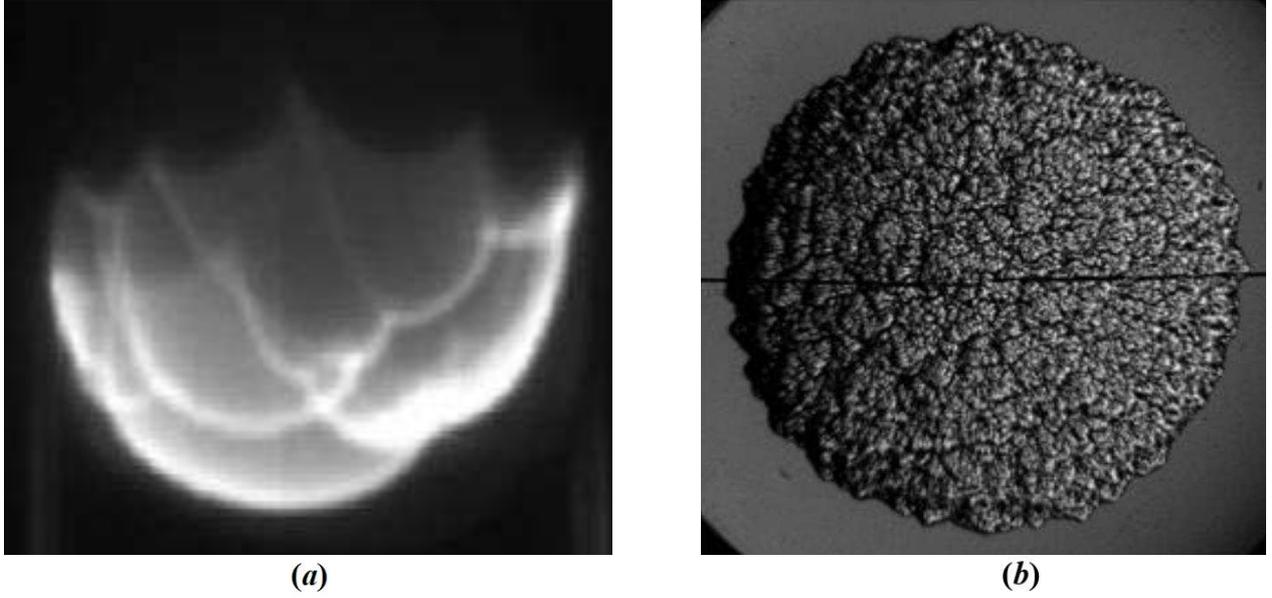


Рис. 5: (a) Пламя в стехиометрической пропано-воздушной смеси в трубе диаметром 9.4 см [115].  
 (b) Сферическое пламя в водородо-воздушной смеси с коэффициентом избытка горючего  $\Phi = 0.6$  и давлении 5 атм [50].

и для произвольного поля  $B$  определим среднее поле

$$\langle B \rangle(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \tilde{\mathbf{x}} B(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t) g(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (3.3)$$

где вес  $g(\mathbf{x}) \geq 0$  является гладкой функцией, быстро убывающей с ростом  $|\mathbf{x}|$  на характерном расстоянии  $\Delta$  и нормированной условием  $\int d^3 \mathbf{x} g(\mathbf{x}) = 1$ , например,  $g(\mathbf{x}) \sim \exp\{-\mathbf{x}^2/\Delta^2\}$ . При этом подразумевается, что интегрирование в этих формулах распространено либо на область холодного газа, либо на область продуктов горения. Заметим, что если поле  $B = O(\varepsilon^0)$  не представимо в виде (3.1), то его среднее также является величиной  $O(\varepsilon^0)$  и характеризуется длиной  $\Delta$ , в частности  $\nabla \langle B \rangle = O(\varepsilon^{-1/2})$ . Действительно, из (3.3) находим, интегрируя по частям,

$$\frac{\partial \langle B \rangle(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = - \int d^3 \tilde{\mathbf{x}} \frac{\partial B(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} g(\tilde{\mathbf{x}}) = \int d^3 \tilde{\mathbf{x}} \frac{\partial g(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} B(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t) = O(\varepsilon^{-1/2}),$$

поскольку характерной длиной функции  $g(\mathbf{x})$  является  $\Delta \sim \sqrt{\varepsilon}$ . Специальные же свойства поля  $A$  вида (3.1) означают, что

$$\langle A_0 \rangle = O(\varepsilon^0), \quad \nabla \langle A_0 \rangle = O(\varepsilon^0), \quad \langle A_1 \rangle = o(\varepsilon^0).$$

Поэтому, в частности,  $\langle A \rangle = \langle A_0 \rangle + o(\varepsilon^0) = A_0 + o(\varepsilon^0)$ , то есть  $A_0$  представляет собой среднее поле  $A$  в нулевом порядке по  $\varepsilon$ . Более того,

$$\begin{aligned} \langle A_0 A_1 \rangle(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 \tilde{\mathbf{x}} [A_0(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{x}} \cdot \nabla A_0(\mathbf{x}, t) + \dots] A_1(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t) g(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= A_0(\mathbf{x}, t) \int d^3 \tilde{\mathbf{x}} A_1(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t) g(\tilde{\mathbf{x}}) - \nabla A_0(\mathbf{x}, t) \cdot \int d^3 \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}} A_1(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t) g(\tilde{\mathbf{x}}) + \dots \\ &= A_0(\mathbf{x}, t) \langle A_1 \rangle + O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из определения (3.3) также непосредственно следует, что для любого поля  $B$

$$\frac{\partial \langle B \rangle}{\partial \mathbf{x}} = \left\langle \frac{\partial B}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle, \quad \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial B}{\partial t} \right\rangle. \quad (3.5)$$

### §3.2. Усреднение уравнений движения газа

По определению модели тонкого пламени, поля скорости и давления газа удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{v},$$

где плотность  $\rho$  постоянна по обе стороны поверхности разрыва. Ввиду этого поле тяжести с каждой стороны фронта может быть формально исключено переходом к приведённому давлению  $\tilde{p}$ :  $p = \tilde{p} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ . Следовательно, эффект поля тяжести проявляется лишь в условиях скачка на фронте, а именно, в скачке завихрённости. Далее, кинематическая вязкость газа  $\nu$  по порядку величины совпадает с его температуропроводностью  $\chi$ . Учитывая, что  $\lambda_c = O(l_f)$ , а  $l_f \simeq \chi/U_f \sim \nu/U_f$ , заключаем, что в рамках разложения по  $\varepsilon$  следует считать  $\nu = O(\varepsilon)$ . Таким образом, в естественных единицах основные газодинамические уравнения имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \varepsilon \operatorname{Pr} \Delta \mathbf{v}, \quad (3.7)$$

где  $\operatorname{Pr} \sim \nu/\chi$  есть безразмерная постоянная порядка единицы.

Установим порядки основных величин и их производных по параметру  $\varepsilon$ . Обозначим для краткости любую первую (вторую) пространственную производную символом  $\partial$  ( $\partial^2$ ).

Согласно описанной выше структуре пламени имеем

$$\mathbf{v}_0 = O(1), \quad \mathbf{v}_1 = O(1), \quad p_0 = O(1), \quad p_1 = O(1), \quad (3.8)$$

$$\partial \mathbf{v}_1 = O(\varepsilon^{-1}), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \partial p_1 = O(\varepsilon^{-1}), \quad \partial^2 \mathbf{v}_1 = O(\varepsilon^{-2}), \quad (3.9)$$

$$\partial \mathbf{v}_0 = O(\varepsilon^0), \quad \partial p_0 = O(\varepsilon^0), \quad \partial^2 \mathbf{v}_0 = O(\varepsilon^0). \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что ведущие члены разложения по  $\varepsilon$  в уравнениях (3.6), (3.7) имеют порядок  $O(1/\varepsilon)$ . Эти члены должны сокращаться независимо от остальных, что даёт

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + ([\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1] \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}_1 + \varepsilon \operatorname{Pr} \Delta \mathbf{v}_1. \quad (3.12)$$

Собирая слагаемые, оставшиеся после сокращения ведущих членов, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + ([\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1] \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}_0 + \varepsilon \operatorname{Pr} \Delta \mathbf{v}_0. \quad (3.14)$$

Далее, усредним уравнение (3.14). По формулам (3.4), (3.5) имеем

$$\langle \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + O(\varepsilon^{1/2}) = o(\varepsilon^0), \quad \langle \varepsilon \Delta \mathbf{v}_0 \rangle = \varepsilon \Delta \langle \mathbf{v}_0 \rangle = O(\varepsilon)$$

Следовательно, в нулевом порядке по  $\varepsilon$  (3.14) сводится к уравнению Эйлера для полей  $\mathbf{v}_0, \tilde{p}_0$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p}_0. \quad (3.15)$$

Таким образом, при наличии мелкомасштабной структуры пламя может быть описано как наложение этой структуры на гладкое пламя, которое получается усреднением истинных полей и описывается идеальными газодинамическими уравнениями. Сама же мелкомасштабная структура подчиняется уравнениям, в которых средние поля играют роль “фона.” Этот вывод не означает, что динамика усреднённых полей не зависит от свойств мелкомасштабной структуры. Напротив, поскольку скорость пламени пропорциональна площади фронта, его искривление на расстояниях порядка  $\lambda_c$  приводит к увеличению потока газа через фронт, а тем самым к изменению глобальной структуры пламени. Для описания этого механизма необходимо переформулировать уравнение эволюции в терминах усреднённой скорости газа.

### §3.3. “Перенормировка” нормальной скорости газа

Появление у пламени мелкомасштабной структуры выражается добавлением членов порядка  $O(\varepsilon)$  к функции  $f(x, z, t)$ , описывающей положение фронта. Хотя в нулевом порядке по  $\varepsilon$  они не меняют мгновенного положения фронта, вызываемое ими изменение нормальной средней скорости пламени оказывается величиной  $O(\varepsilon^0)$ . Для того чтобы его вычислить, то есть получить уравнение эволюции для  $\mathbf{v}_0$ , следует подходящим образом усреднить исходное уравнение эволюции. Для наглядности это будет сделано сначала в двумерном случае, а затем обобщено на трёхмерные пламена.

Подставив в уравнение (1.7)  $U_f = 1$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_- = (w_-, u_- - \dot{f})$ , где  $\dot{f} \equiv \partial f(x, t)/\partial t$ , имеем исходное уравнение эволюции в виде

$$\mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} - \frac{\dot{f}}{N} = 1 - \mathcal{L}_s \frac{(v_-^\tau)'}{N} + \mathcal{L}_c \left( \frac{f'}{N} \right)'. \quad (3.16)$$

Введём вспомогательную операцию усреднения вдоль фронта. Для функции  $A = A(x)$ , заданной на фронте, определим её среднее как функцию

$$\langle A \rangle_l(x) = \frac{1}{\mathcal{L}(x)} \int_x^{x+\Delta} dl A(\tilde{x}), \quad (3.17)$$

где  $dl = Nd\tilde{x}$  есть элемент длины фронта, а  $\mathcal{L}(x) = O(\Delta)$  – длина дуги фронта между его точками с абсциссами  $x$  и  $x + \Delta$ . В соответствии с предположением о структуре пламени единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  и функция положения фронта  $f(x, t)$  могут быть представлены в виде

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_1, \quad f = f_0 + f_1, \quad (3.18)$$

где

$$\mathbf{n}_0 = O(\varepsilon^0), \quad \mathbf{n}_1 = O(\varepsilon^0), \quad \langle \mathbf{n}_1 \rangle_l = o(\varepsilon^0), \quad f_1 = O(\varepsilon), \quad \langle f_1 \rangle_l = o(\varepsilon). \quad (3.19)$$

Усредним сперва правую часть (3.16). С учётом (3.8), (3.19) и того, что  $\mathcal{L}_s, \mathcal{L}_c = O(\varepsilon)$ , находим

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{L}_s \frac{(v_-^\tau)'}{N} \right\rangle_l(x) &= \frac{\mathcal{L}_s}{\mathcal{L}(x)} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} (v_-^\tau)' = \frac{\mathcal{L}_s}{\mathcal{L}(x)} v_-^\tau \Big|_x^{x+\Delta} = O(\varepsilon^{1/2}), \\ \left\langle \mathcal{L}_c \left( \frac{f'}{N} \right)' \right\rangle_l(x) &= \frac{\mathcal{L}_c}{\mathcal{L}(x)} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} \frac{f''}{1 + (f')^2} = \frac{\mathcal{L}_c}{\mathcal{L}(x)} \operatorname{arctg}(f') \Big|_x^{x+\Delta} = O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, среднее правой части (3.16) равно  $1 + O(\varepsilon^{1/2})$ .

Для усреднения левой части удобно ввести функции тока для полей  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_0$  на основании уравнений (3.11), (3.13):

$$u_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \quad w_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad w_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y}. \quad (3.20)$$

Ввиду (3.8) имеем следующие оценки

$$\psi_0 = O(\varepsilon^0), \quad \psi_1 = O(\varepsilon).$$

Подставив (3.20) и  $\mathbf{n} = (-f'/N, 1/N)$ , а также обозначив  $\psi_0 + \psi_1 \equiv \psi$ , найдём

$$\langle \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} \rangle_l(x) = \frac{1}{\mathcal{L}(x)} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right)_- = \frac{1}{\mathcal{L}(x)} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} \frac{d\psi_-}{d\tilde{x}} = \frac{\psi_-(\tilde{x})}{\mathcal{L}(x)} \Big|_x^{x+\Delta}.$$

Учитывая, что  $\Delta = O(\varepsilon^{1/2})$ , вклад  $\psi_1$  в правой части оценивается как  $\psi_1/\mathcal{L}(x) = O(\varepsilon^{1/2})$ . Далее, поскольку характерной длиной  $\psi_0$  является внешний масштаб  $L$ , его вклад может быть вычислен как

$$\begin{aligned} \psi_{0-} \Big|_x^{x+\Delta} &= \psi_{0-}(x + \Delta, f(x + \Delta, t), t) - \psi_{0-}(x, f(x, t), t) \\ &= \psi_{0-}(x + \Delta, f_0(x + \Delta, t), t) - \psi_{0-}(x, f_0(x, t), t) + O(\varepsilon) \\ &= \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right)_- \Delta + O(\varepsilon) = (u_{0-} - w_{0-} f'_0) \Delta + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} \rangle_l(x) = (u_{0-} - w_{0-} f'_0) \frac{\Delta}{\mathcal{L}(x)} + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Компоненты вектора  $\mathbf{n}_0$  также выражаются через отношение  $\Delta/\mathcal{L}(x)$

$$n_{x0} = \left\langle -\frac{f'}{N} \right\rangle_l = -\frac{1}{\mathcal{L}(x)} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} f' = -\frac{f_0 + f_1}{\mathcal{L}(x)} \Big|_x^{x+\Delta} = -\frac{\Delta}{\mathcal{L}(x)} f'_0 + O(\varepsilon^{1/2}),$$

и

$$n_{y0} = \frac{\Delta}{\mathcal{L}(x)} + O(\varepsilon^{1/2}).$$

С помощью этих формул искомое среднее может быть записано как

$$\langle \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} \rangle_l = (\mathbf{v}_{0-} \cdot \mathbf{n}_0) + O(\varepsilon^{1/2}). \quad (3.21)$$

Заметим, что  $\mathbf{n}_0$  не является единичным вектором. Действительно, пренебрегая членами  $O(\varepsilon^{1/2})$ , его обратная длина есть

$$\|\mathbf{n}_0\|^{-1} = \frac{\mathcal{L}(x)}{\Delta\sqrt{1+(f'_0)^2}} \equiv \beta(x) \geq 1. \quad (3.22)$$

Эта величина имеет простой геометрический смысл:  $(\beta(x)-1)$  представляет относительное увеличение длины фронта между точками с абсциссами  $x$  и  $x + \Delta$  за счёт его мелкомасштабного искривления. Наконец, усреднение оставшегося слагаемого в левой части (3.16) даёт

$$\left\langle \frac{\dot{f}}{N} \right\rangle_l(x) = \frac{1}{\mathcal{L}(x)} \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} \{f_0(\tilde{x}, t) + f_1(\tilde{x}, t)\} = \frac{\Delta}{\mathcal{L}(x)} \dot{f}_0(x, t) + o(\varepsilon^0). \quad (3.23)$$

Последняя выкладка на самом деле является излишней, поскольку результат усреднения слагаемого  $\dot{f}/N$  фиксируется условием галилеевской инвариантности. Действительно, все точные выражения имеют один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчёта, в частности, они не меняются при одновременном изменении скорости газа и фронта пламени согласно  $u \rightarrow u + V_0$ ,  $\dot{f} \rightarrow \dot{f} + V_0$ , где  $V_0 = \text{const}$  не зависит ни от координат, ни от времени. В силу независимости  $V_0$  от координат, после выполнения усреднения это требование инвариантности переносится именно на медленно меняющиеся в пространстве функции  $u_0, f_0$ :  $u_0 \rightarrow u_0 + V_0$ ,  $\dot{f}_0 \rightarrow \dot{f}_0 + V_0$ . Поэтому сдвиг  $u_{0-} \rightarrow u_{0-} + V_0$  в выражении (3.21) с необходимостью приводит к (3.23). Таким образом, в результате усреднения уравнение эволюции сводится к следующему уравнению для  $\mathbf{v}_0$

$$(\mathbf{v}_{0-} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{\dot{f}_0}{N} = \beta, \quad (3.24)$$

где  $N = \sqrt{1+(f'_0)^2}$ , а  $\boldsymbol{\nu} = (-f'_0/N, 1/N)$  есть единичный вектор нормали к среднему положению фронта  $f_0$ . При этом относительная величина отброшенных членов есть  $O(\varepsilon^{1/2})$ . Этот результат доказывает, что с точки зрения крупномасштабной структуры пламени наличие его мелкомасштабного искривления приводит к “перенормировке” нормальной компоненты средней скорости газа, которая в обычных единицах оказывается равной  $\beta U_f$ .

Как видно из проделанных выше вычислений, повышение порядка по  $\varepsilon$  при усреднении данной величины происходит в том случае, когда подынтегральное выражение оказывается полной производной. Совершенно аналогично обстоит дело и в трёхмерном случае.

Общий вид уравнения эволюции [95, 97, 145, 152–155]

$$\mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} - \frac{\dot{f}}{N} = 1 - \mathcal{L}_1 \left( \frac{\nabla_{\perp}(\mathbf{w}_- N)}{N} + \frac{\dot{N}}{N} \right) + \mathcal{L}_2 \frac{\nabla_{\perp}^2 f}{N}, \quad (3.25)$$

где  $\mathcal{L}_{1,2} = O(\varepsilon)$  – независимые параметры длины,  $\mathbf{w}$  – проекция скорости газа на плоскость  $(x, z)$ ,  $\nabla_{\perp}$  – градиент в этой плоскости и  $N = \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} f)^2}$ . Усреднение по поверхности фронта производится согласно

$$\langle A \rangle_s(x, z) = \frac{1}{\mathcal{S}(x, z)} \int_x^{x+\Delta} \int_z^{z+\Delta} ds A(\tilde{x}, \tilde{z}), \quad (3.26)$$

где  $ds = Nd\tilde{x}d\tilde{z}$  есть элемент его площади, а

$$\mathcal{S}(x, z) = \int_x^{x+\Delta} \int_z^{z+\Delta} ds = O(\varepsilon).$$

Далее, формулы (3.20) заменяются на

$$\mathbf{v}_0 = \text{rot } \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{v}_1 = \text{rot } \mathbf{a}_1, \quad (3.27)$$

где

$$\mathbf{a}_0 = O(\varepsilon^0), \quad \mathbf{a}_1 = O(\varepsilon).$$

В выборе потенциалов  $\mathbf{a}_{1,2}$  имеется произвол, связанный с возможностью прибавить к ним градиент произвольной функции координат. Имея в виду, что уравнение фронта записывается как  $F(x, y, z, t) \equiv y - f(x, z, t) = 0$ , удобно зафиксировать этот произвол наложением условий

$$(a_0)_y = 0, \quad (a_1)_y = 0.$$

Тогда имеем, обозначив  $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} &= (\text{rot } \mathbf{a})_- \cdot \frac{\nabla F}{N} = \frac{1}{N} \left[ - \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} \right)_- \frac{\partial f}{\partial x} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)_- + \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)_- \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[ \frac{\partial(a_x)_-}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)_-}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Поэтому усреднение нормальной скорости даёт [аргументы  $(x, z)$  для краткости опуска-

ются]

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n} \rangle_s &= \frac{1}{\mathfrak{S}} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} \int_z^{z+\Delta} d\tilde{z} (\text{rot } \mathbf{a})_- \cdot \nabla F = \frac{1}{\mathfrak{S}} \left[ \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} (a_x)_- \Big|_z^{z+\Delta} - \int_z^{z+\Delta} d\tilde{z} (a_z)_- \Big|_x^{x+\Delta} \right] \\
 &= \frac{1}{\mathfrak{S}} \left[ \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} (a_{0x})_- \Big|_z^{z+\Delta} - \int_z^{z+\Delta} d\tilde{z} (a_{0z})_- \Big|_x^{x+\Delta} \right] + O(\varepsilon^{1/2}) = \frac{\Delta^2}{\mathfrak{S}} \left[ \frac{\partial (a_{0x})_-}{\partial z} - \frac{\partial (a_{0z})_-}{\partial x} \right] + O(\varepsilon^{1/2}) \\
 &= \frac{\Delta^2}{\mathfrak{S}} \mathbf{v}_{0-} \cdot \nabla F_0 + O(\varepsilon^{1/2}) \equiv \mathbf{v}_{0-} \cdot \mathbf{n}_0 + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\Delta^2}{\mathfrak{S}} \nabla F_0, F_0(x, y, z, t) = y - f_0(x, z, t),
 \end{aligned}$$

где при переходе к третьей строке использована формула (3.28), применённая к медленным функциям  $\mathbf{a}_0, \mathbf{v}_0, F_0$ . Эта формула обобщает (3.21), причём обратная норма вектора  $\mathbf{n}_0$  теперь имеет вид

$$\|\mathbf{n}_0\|^{-1} = \frac{\mathfrak{S}(x, z)}{\Delta^2 \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} f)^2}} \equiv \beta(x, z) \quad (3.29)$$

и представляет собой относительное увеличение площади фронта за счёт его мелкомасштабной структуры. Усреднение правой части уравнения (3.25) производится аналогично и, как в двумерном случае, даёт  $1 + O(\varepsilon^{1/2})$ . Например,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \mathcal{L}_1 \frac{\nabla_{\perp} (\mathbf{w}_- N)}{N} \right\rangle_s &= \frac{\mathcal{L}_1}{\mathfrak{S}} \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} \int_z^{z+\Delta} d\tilde{z} \nabla_{\perp} (\mathbf{w}_- N) \\
 &= \frac{\mathcal{L}_1}{\mathfrak{S}} \left[ \int_x^{x+\Delta} d\tilde{x} (v_z - N) \Big|_z^{z+\Delta} + \int_z^{z+\Delta} d\tilde{z} (v_x - N) \Big|_x^{x+\Delta} \right] = O(\varepsilon^{1/2}).
 \end{aligned}$$

В результате уравнение эволюции принимает вид (3.24), где теперь

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\nabla F_0}{\mathcal{N}}, \quad \mathcal{N} = \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} f_0)^2},$$

а  $\beta$  даётся формулой (3.29).

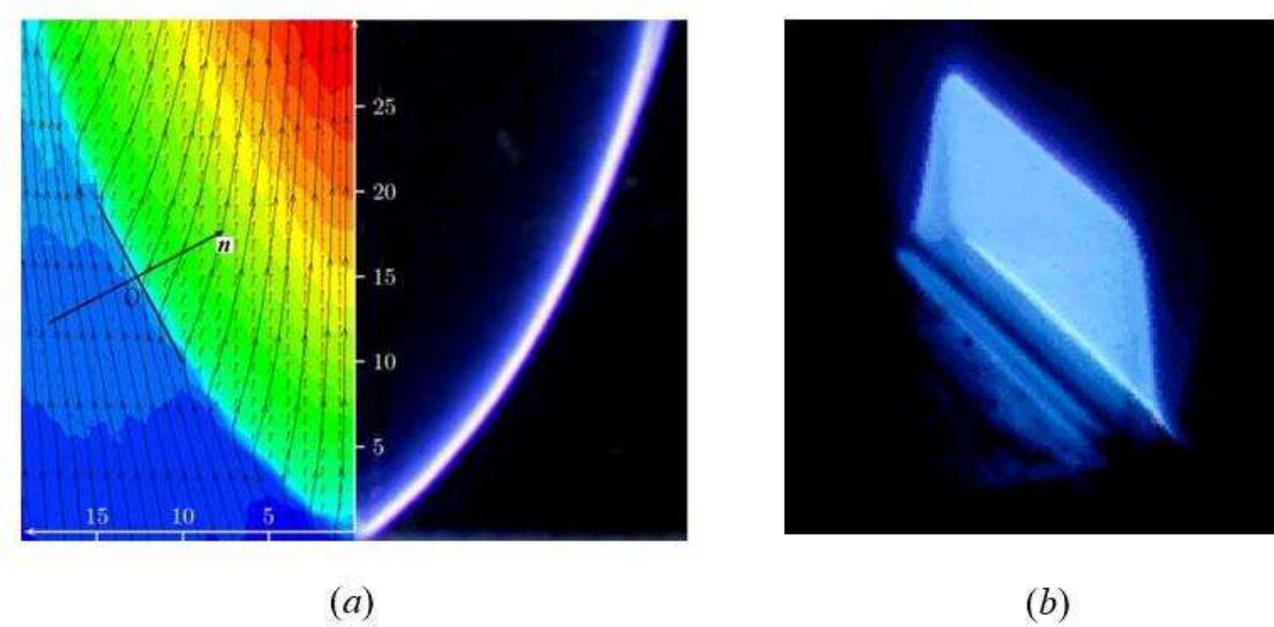


Рис. 6: (a) Пламя в пропано-воздушной смеси с коэффициентом избытка горючего  $\Phi = 0.64$  в прямоугольной трубе ширины 4.8 см, удерживаемое в её центре канталовой проволокой диаметром 0.4 мм; слева показаны линии тока и поле скорости газа [158]. (b) Двумерное бунзеновское пламя в пропано-воздушной смеси с  $\Phi = 0.6$ , выходящей через прямоугольное сопло шириной 8 мм [159].

#### 4. ОБОЛОЧЕЧНОЕ ОПИСАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПЛАМЁН [A4,A5]

На практике часто встречаются пламёна, однородные в каком-либо направлении. В этом случае существует система координат, в которой поле скоростей газа не зависит от одной из пространственных координат, то есть является двумерным. Например, если в однородный поток газа ввести прямой стержень, то при поджиге смеси он может удерживать пламя, так что получается двумерная структура, называемая V-пламенем, Рис. 6(a). Её обращением является пламя прямоугольной горелки Бунзена, Рис. 6(b). Двумерность пламени может также возникать под влиянием внешних полей, как в случае распространения в горизонтальной трубе при наличии сильного поля тяжести, рассматриваемом в главе 9.

**§4.1. Уравнения движения газа и граничные условия**

Рассмотрим стационарное (установившееся) распространение двумерного пламени в изначально покоившейся газовой смеси, заполняющей бесконечную прямую двумерную трубу (канал). Стационарность пламени означает, что в системе отсчёта, связанной с пламенем, его форма и поля скоростей холодного газа и продуктов горения не зависят от времени. Выберем декартовы координаты  $(x_1, x_2) \equiv (x, y)$  так, чтобы ось  $y$  совпадала с одной из стенок трубы, причём  $y = -\infty$  находилась в холодном газе, Рис. 7. Если не оговорено обратное, в дальнейшем используются естественные единицы измерения: длины (координаты) измеряются в единицах ширины трубы  $b$ , скорость газа  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \equiv (w, u)$  – в единицах  $U_f$ , плотность газа  $\rho$  – в единицах плотности холодного газа  $\rho_-$  (при этом плотность сгоревшего газа равна  $1/\theta$ ), и давление газа  $p$  – в единицах  $\rho_- U_f^2$ .

На практике горение обычно происходит в трубах настолько широких ( $b \gtrsim 1$  см), что эффект трения газа о стенки трубы является пренебрежимо малым. Что касается эффектов вязкости в основном объёме газа, то в случае пламени с гладким фронтом ими также можно пренебречь и пользоваться уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{4.1}$$

$$v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \tag{4.2}$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Действительно, как и эффекты конечной ширины фронта, вязкие эффекты становятся существенными, лишь когда характерная длина поля скорости газа оказывается порядка  $l_f$ , тогда как характерной длиной для гладкого пламени является  $b \gg l_f$ . С другой стороны, как доказано в главе 3, при наличии у пламени мелкомасштабной ячеистой структуры уравнениям идеальной газодинамики удовлетворяют усреднённые поля. В обоих этих случаях, следовательно, оболочечное описание пламени можно строить пренебрегая вязкостью газа в основном объёме газа, а вязкие эффекты внутри фронта (где градиенты скорости относительно велики) могут быть учтены в условиях скачка скорости и давления газа. Действие вязкости, однако, может проявляться косвенно (помимо её вклада в образование мелкомасштабной структуры) через влияние на устойчивость решений идеальных уравнений (пример этого влияния рассмотрен в Приложении D).

Таким образом, универсальным граничным условием на скорость газа является обра-



Тогда нечётность  $w$  по  $x$  гарантирует выполнение граничного условия на стенке  $x = 0$ . Более того, эта стенка может быть удалена, то есть исходное течение газа в трубе  $x \in (0, 1)$  может рассматриваться как ограничение симметричного течения в трубе удвоенной ширины  $x \in (-1, 1)$ . Действительно, в силу предполагаемой идеальности течения условие прилипания  $u = 0$  на стенках трубы не ставится, и поэтому удаление стенки не меняет физических условий течения. Затем течение в области  $x \in (-1, 1)$  периодически продолжается на всю ось  $x$ , то есть рассматривается как ограничение на  $x \in (-1, 1)$  периодического по  $x$  течения в формально бесконечно широкой трубе. Тогда выполнение граничного условия на второй стенке  $[w(1, y) = 0]$  оказывается следствием нечётности и периодичности функции  $w(x, y)$  относительно  $x$ :

$$w(1, y) = -w(-1, y), \quad w(1, y) = w(-1, y).$$

Другой вывод оболочечных уравнений, учитывающий граничное условие  $w = 0$  с помощью функции Грина, будет дан в главе 5.

Что касается граничных условий на  $f'$ , то они не являются универсальными и зависят от глобальных свойств течения, порождаемого пламенем. В достаточно узких трубах, когда скорость искривлённого пламени не сильно превосходит нормальную скорость, изменения внутренней структуры фронта пламени, вызываемые его кривизной и растяжением, не приводят к прекращению горения на каких-либо участках фронта, то есть  $v_-^n$  нигде не обращается в нуль (химическая реакция прекращается лишь внутри пограничного слоя непосредственно у стенки трубы из-за падения температуры смеси до температуры стенки). Если при этом за фронтом не происходит отрыва линий тока элементов газа,двигающихся вблизи стенки, то на стенке имеем  $w_- = w_+ = 0$ . С другой стороны, как следует из условий (2.5), (2.6) для скачка скорости газа, скачок поперечной компоненты скорости

$$[w] = -(\theta - 1)v_-^n \frac{f'}{N}.$$

Поэтому при  $v_-^n \neq 0$  должны выполняться граничные условия

$$f'(0) = f'(1) = 0. \quad (4.4)$$

Если же они не выполняются, за фронтом пламени образуются зоны стагнации – примыкающие к стенкам области сгоревшего газа, неподвижного относительно пламени, Рис. 7.

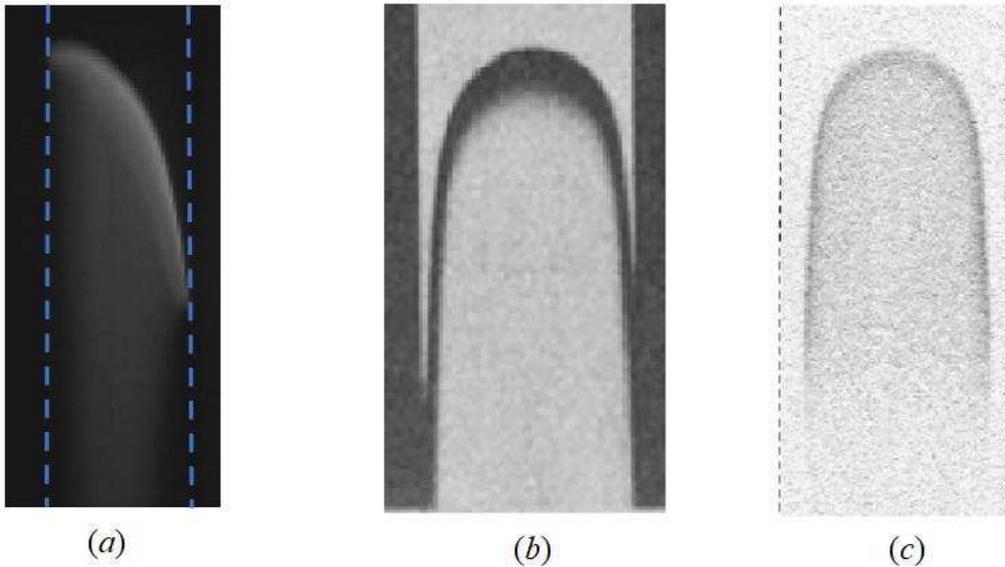


Рис. 8: (a) Пламя в пропано-воздушной смеси в вертикальной трубе диаметром 10 см; области стагнации видны как затемнения вблизи стенок, показанных пунктиром (снимок сделан в Лаборатории горения и детонации, Пуатье, Франция). (b) и (c) Предельные метано-воздушные пламёна в вертикальной трубе квадратного сечения со стороной 5.1 см [17] и в трубе кругового сечения диаметром 5 см [12]; в последнем случае горение прекращается на конечном расстоянии от стенок трубы.

Газ, проходящий через фронт, обтекает эти области. Такая картина течения часто наблюдается, когда скорость пламени существенно превышает нормальную скорость, Рис. 8(a). При этом наибольший градиент скорости имеется вблизи той стенки, где линии тока сходятся, что может приводить к гашению пламени, Рис. 8(b). Конец фронта, на котором  $v_z^n \rightarrow 0$ , вытягивается вдоль трубы, и поэтому граничным условием для  $f'$  в этом случае является

$$f' = \infty.$$

Развиваемый метод предполагает, что фронт пламени полностью разделяет исходную смесь и продукты горения, то есть отсутствует их перемешивание [такое перемешивание заметно на Рис. 8(c)]. Поэтому он применим при условии, что ширина области с  $v_z^n = 0$  пренебрежимо мала.

*A. Завихрённость газа*

Действуя на (4.2) оператором  $\varepsilon_{kl}\partial/\partial x_l$ , где  $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$ ,  $\varepsilon_{12} = +1$ , и используя (4.1), получаем двумерную версию теоремы Томсона о циркуляции скорости, то есть сохранение завихрённости

$$\sigma \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.5)$$

вдоль линий тока газа:

$$v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0. \quad (4.6)$$

Непосредственным следствием теоремы Томсона и условия изначального покоя холодного газа является потенциальность его течения вплоть до фронта пламени. Заметим, что в силу (4.3) завихрённость является нечётной функцией  $x$ :

$$\sigma(-x, y) = -\sigma(x, y). \quad (4.7)$$

Отметим важное общее свойство рассматриваемых течений, которое неоднократно будет использовано в дальнейших построениях. Ввиду того, что завихрённость газа порождается пламенем и переносится от него вдоль трубы движущимся газом, продольная компонента скорости  $u$  всегда положительна в тех точках, где  $\sigma \neq 0$ . Поскольку же для искривлённого пламени  $\sigma$  фактически не равна нулю нигде, кроме зон стагнации, то везде вне этих зон имеем

$$u(x, y) > 0. \quad (4.8)$$

Нижеследующий анализ будет проведен в предположении достаточной гладкости всех рассматриваемых функций. Более точно, будет предполагаться, что  $f(x)$ ,  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$ , рассматриваемые как функции комплексного  $x$ , являются аналитическими в некоторой окрестности вещественной оси. Физически это означает устойчивость пламени по отношению к возмущениям со сколь угодно малой длиной волны. Эта устойчивость обычно обеспечивается процессами переноса во фронте и запрещает развитие сингулярностей типа излома фронта, которые могут возникать у пламен нулевой ширины.

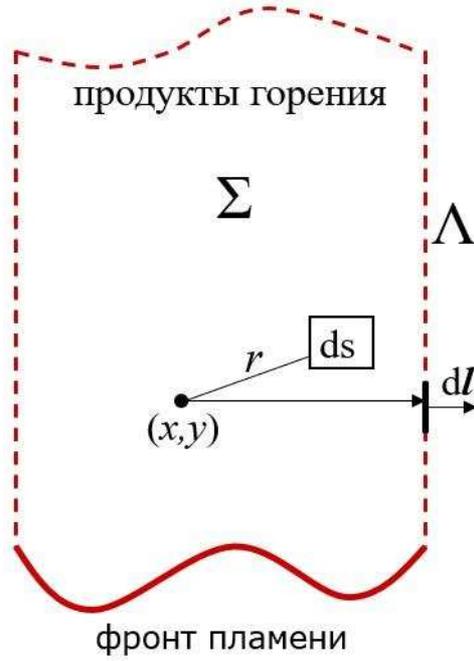


Рис. 9: К выводу тождества (4.10).

#### §4.2. Интегральное представление поля скорости газа

Рассмотрим поле

$$a_i(x_1, x_2) = \Delta^{-1} v_i = \int_{\Sigma} ds v_i \frac{\ln r}{2\pi},$$

где  $r$  есть расстояние от точки наблюдения  $(x_1, x_2) \equiv (x, y)$  до элемента газа объёмом  $ds$  в точке  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ ,  $r^2 = (x_i - \tilde{x}_i)^2$ , а интегрирование ведётся по любой области  $\Sigma$  сгоревшего газа. С учётом (4.1) имеем для дивергенции  $a_i$ :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \int_{\Sigma} ds v_i \partial_i \left( \frac{\ln r}{2\pi} \right) = - \int_{\Sigma} ds v_i \tilde{\partial}_i \left( \frac{\ln r}{2\pi} \right) = - \int_{\Sigma} ds \tilde{\partial}_i \left( v_i \frac{\ln r}{2\pi} \right) = - \int_{\Lambda} dl_i v_i \frac{\ln r}{2\pi}, \quad (4.9)$$

где  $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ ,  $\tilde{\partial}_i \equiv \partial/\partial \tilde{x}_i$ ,  $\Lambda$  обозначает границу  $\Sigma$ , а  $dl_i$  её элемент, направленный наружу от  $\Sigma$ , Рис. 9.

Вычислим, далее,  $\varepsilon_{ik}\partial_k\varepsilon_{lm}\partial_l a_m$ . С помощью (4.9) имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1k}\partial_k\varepsilon_{lm}\partial_l a_m &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial a_1}{\partial x} - \int_{\Lambda} dl_i v_i \frac{\ln r}{2\pi} \right) - \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} \\ &= -\Delta a_1 - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Lambda} dl_i v_i \frac{\ln r}{2\pi}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\varepsilon_{2k}\partial_k\varepsilon_{lm}\partial_l a_m = -\Delta a_2 - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\Lambda} dl_i v_i \frac{\ln r}{2\pi}.$$

Эти два соотношения могут быть записаны вместе как

$$\varepsilon_{ik}\partial_k\varepsilon_{lm}\partial_l a_m = -\Delta a_i - \partial_i \int_{\Lambda} dl_k v_k \frac{\ln r}{2\pi}.$$

Подставляя сюда определение  $a_i$  и интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}v_i &= -\varepsilon_{ik}\partial_k\varepsilon_{lm}\partial_l \Delta^{-1} v_m - \partial_i \int_{\Lambda} dl_k v_k \frac{\ln r}{2\pi} \\ &= \varepsilon_{ik}\partial_k \int_{\Lambda} dl_l \varepsilon_{lm} v_m \frac{\ln r}{2\pi} - \partial_i \int_{\Lambda} dl_k v_k \frac{\ln r}{2\pi} - \varepsilon_{ik}\partial_k \int_{\Sigma} ds \frac{\ln r}{2\pi} \sigma.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Интегрирование в последнем слагаемом фактически ведётся по областям вне зон стагнации, поскольку в этих зонах  $\sigma \equiv 0$ .

Первые два слагаемых в правой части (4.10) являются потенциальными полями в  $\Sigma$ . Для первого члена это следует из того, что его ротор  $\sim \varepsilon_{li}\partial_l \varepsilon_{ik}\partial_k \ln r = -\Delta \ln r = 0$  внутри  $\Sigma$ , а второй член является градиентом некоторой функции, однозначной и дифференцируемой в  $\Sigma$ . Кроме того, каждый из них имеет нулевую дивергенцию. Третий же член, также имеющий нулевую дивергенцию, является вихревым. Как будет показано в следующем разделе путём последовательного упрощения этого слагаемого, оно может быть преобразовано в интеграл по поверхности (линии) фронта пламени.

Нетрудно установить общий вид потенциального поля скорости с нулевой дивергенцией. Рассматривая компоненты скорости как функции координаты  $x$  и учитывая их периодичность и чётность, имеем для них следующие разложения Фурье

$$u(x, y) = u_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \cos(\pi n x), \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \sin(\pi n x).$$

Подстановка в уравнение  $\Delta \mathbf{v} = 0$  даёт

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 u_n}{dy^2} - (\pi n)^2 u_n = 0, \quad \frac{d^2 w_n}{dy^2} - (\pi n)^2 w_n = 0,$$

откуда

$$u_0(y) = \tilde{u}_0 + by, \quad u_n(y) = \tilde{u}_n \exp(\pm \pi n y), \quad w_n(y) = \tilde{w}_n \exp(\pm \pi n y),$$

где  $\tilde{u}_0, b, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n$  – вещественные числа. Из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  следует  $b = 0, \tilde{w}_n = \mp \tilde{u}_n$ .

Таким образом,

$$u = \tilde{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n \exp(\pm \pi n y) \cos(\pi n x), \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp) \tilde{u}_n \exp(\pm \pi n y) \sin(\pi n x). \quad (4.11)$$

В частности, ограниченное при  $y \rightarrow \infty$  поле скорости имеет вид

$$u = \tilde{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n \exp(-\pi n y) \cos(\pi n x), \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n \exp(-\pi n y) \sin(\pi n x). \quad (4.12)$$

### §4.3. Структура вихревой компоненты скорости газа

Сперва преобразуем вихревой член с помощью теоремы Томсона следующим образом. Возьмём в качестве  $\Sigma$  область  $\Sigma_A^T$ , заполняемую элементами газа, которые пересекают фронт между точками с абсциссами  $\tilde{x} = \pm A$  и двигаются в течение времени  $< T$  после пересечения фронта, где параметры  $A > 0, T > 0$  в конце концов будут устремлены к бесконечности, так что  $\Sigma_A^T$  охватит всю область сгоревшего газа:  $\Sigma_\infty = \{x, y : y > f(x)\}$ . Объём (площадь) элемента газа, пересекающего фронт между точками с абсциссами  $\tilde{x}$  и  $\tilde{x} + d\tilde{x}$  за время  $d\tau$ , есть  $ds = N(\tilde{x}) d\tilde{x} v_+^n(\tilde{x}) d\tau$ , где  $N = \sqrt{1 + (f')^2}$ , а  $v_+^n(x) \equiv v^n(x, f(x))$  – нормальная скорость продуктов горения на фронте. Поэтому с помощью законов сохранения объёма элемента газа и завихренности последний интеграл в (4.10) может быть записан как

$$\int_{\Sigma_A^T} ds \sigma \ln r = \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} \int_0^T d\tau N(\tilde{x}) v_+^n(\tilde{x}) \sigma_+(\tilde{x}) \ln \{ [x - X(\tilde{x}, \tau)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, \tau)]^2 \}^{1/2}, \quad (4.13)$$

где  $(X(\tilde{x}, \tau), Y(\tilde{x}, \tau))$  – координаты элемента газа, который двигался в течение времени  $\tau$  после пересечения фронта в точке  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ , а  $\sigma_+(\tilde{x}) \equiv \sigma(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$  – значение завихренности в этой точке. Таким образом, (4.10) принимает вид

$$v_i(x, y) = \varepsilon_{ik} \partial_k \int_{\Lambda} dl_l \varepsilon_{lm} v_m \frac{\ln r}{2\pi} - \partial_i \int_{\Lambda} dl_k v_k \frac{\ln r}{2\pi} - \frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} M(\tilde{x}) K(x, y, \tilde{x}), \quad (4.14)$$

где  $M(x) \equiv N(x)v_+^n(x)\sigma_+(x)$ , а интегральное ядро

$$K(x, y, \tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T d\tau \ln \{ [x - X(\tilde{x}, \tau)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, \tau)]^2 \}. \quad (4.15)$$

Заметим для дальнейшего, что функция  $M(x)$  является нечётной:

$$M(-x) = -M(x).$$

Действительно, согласно (4.3) имеем  $f'(-x) = -f'(x)$ ,  $N(-x) = N(x)$ , и поэтому

$$v_+^n(-x) = \frac{u_+(-x) - f'(-x)w_+(-x)}{N(-x)} = \frac{u_+(x) - f'(x)w_+(x)}{N(x)} = v_+^n(x),$$

а в силу (4.7)

$$\sigma_+(-x) = \sigma(-x, f(-x)) = -\sigma(x, f(x)) = -\sigma_+(x).$$

Напишем скорость газа в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^p + \mathbf{v}^v, \quad (4.16)$$

где  $\mathbf{v}^v$  – вихревое поле, а  $\mathbf{v}^p$ , в дальнейшем называемое для краткости потенциальной компонентой, удовлетворяет следующим условиям:

- (a)  $\operatorname{div} \mathbf{v}^p = 0$  в  $\Sigma_A^T$  для любых  $A, T$ ,
- (b)  $\operatorname{rot} \mathbf{v}^p = 0$  в  $\Sigma_A^T$  для любых  $A, T$ ,
- (c)  $\partial \mathbf{v}^p$  ограничена в  $\Sigma_\infty$ ,

где  $\partial \mathbf{v}^p$  обозначает любую первую производную  $\mathbf{v}^p$ . Разумеется, разбиение (4.16) может быть произведено бесконечным числом способов. Смысл последующих преобразований состоит в том, чтобы путём выделения из  $\mathbf{v}$  потенциальных компонент привести  $\mathbf{v}^v$  к виду, в котором оно будет представляться однократным интегралом по  $\tilde{x}$ . Явный вид поля  $\mathbf{v}^p$  при этом остаётся неизвестным, но оно может быть исключено из рассмотрения с помощью теоремы Коши.

Поскольку первые два слагаемых в (4.14) имеют нулевые дивергенцию и ротор, они удовлетворяют (a) и (b) при любых  $A, T$ . Далее, простой подсчёт степеней показывает, что условие (c) также выполнено. Действительно, обозначим фронт пламени через  $F$  и представим дополнение  $\Lambda \setminus F$  контура  $\Lambda$  до  $F$  полуокружностью радиуса  $A$ . Тогда в пределе

$A \rightarrow \infty$  область, охватываемая  $\Lambda$ , совпадёт с  $\Sigma_\infty$ . Обозначив через  $\partial^2$  любую вторую производную по координатам, имеем  $\partial^2 \ln r = O(1/A^2)$  для любого  $(x, y)$ , когда  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Lambda \setminus F$ . Учитывая, что  $\mathbf{v} = O(1)$ ,  $dl = Ad\varphi$ , где  $\varphi \in (0, \pi)$  есть азимут точки на полуокружности, отсюда следует, что после выполнения дифференцирований интегралы по  $\Lambda \setminus F$  в (4.14) исчезают в пределе  $A \rightarrow \infty$ . Совершенно аналогично показывается сходимость тех же интегралов по  $F$ . Наконец, в силу периодичности поля скорости, рассматриваемые слагаемые периодичны по  $x$  и стремятся к нулю при  $y \rightarrow \infty$ , что доказывает ограниченность  $\partial \mathbf{v}^p$  в  $\Sigma_\infty$ .

Введём обозначение  $\mathbf{v}_1 \stackrel{\circ}{=} \mathbf{v}_2$ , если разность двух полей  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  удовлетворяет условиям (a)–(c). Тогда, по доказанному, (4.14) можно переписать как

$$v_i(x, y) \stackrel{\circ}{=} -\frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} M(\tilde{x}) K(x, y, \tilde{x}). \quad (4.17)$$

Заметим, что в этом интеграле ненулевой вклад в завихренность в данной точке  $(x, y)$  даёт лишь произвольно малая окрестность такого  $\tilde{x}$ , что траектория  $(X(\tilde{x}, \tau), Y(\tilde{x}, \tau))$  в некоторый момент  $\tau = \tau(x, y)$  проходит через  $(x, y)$ . В свою очередь, в интеграле по  $\tau$ , определяющем ядро  $K$ , ненулевой вклад в завихренность даёт произвольно малая окрестность точки  $\tau(x, y)$ . Действительно, ротор вклада участков траекторий, находящихся на любом конечном расстоянии  $r$  от точки  $(x, y)$ , обращается в нуль так же, как и для первого слагаемого в (4.10).

Рассмотрим теперь выражение  $\ln \{[x - X(\tilde{x}, \tau)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, \tau)]^2\}$  как функцию комплексного  $\tau$  и обозначим через  $\tau_+(x, y, \tilde{x})$  и  $\tau_-(x, y, \tilde{x})$  нули аргумента логарифма, причём  $\text{Im } \tau_+ \geq 0$ ,  $\text{Im } \tau_- \leq 0$ . В силу вещественности функций  $X(\tilde{x}, \tau), Y(\tilde{x}, \tau)$  при вещественных  $\tau$ , имеем  $\tau_-(x, y, \tilde{x}) = \overline{\tau_+(x, y, \tilde{x})}$  (черта сверху означает комплексное сопряжение). Рассмотрим, далее, траекторию, проходящую через произвольную точку с координатами  $(\eta, \xi)$ . Поскольку через любую точку проходит лишь одна траектория, координаты  $\eta, \xi$  однозначно определяют точку на фронте с абсциссой  $\tilde{x} = \tilde{x}(\eta, \xi)$ , в которой эта траектория пересекает фронт. Элемент газа, двигающийся по данной траектории, проходит точку  $(\eta, \xi)$  через вполне определённый интервал времени  $\tau(\eta, \xi)$  после пересечения фронта. Как было только что отмечено, завихренность в точке  $(x, y)$  определяется интегрированием по траекториям, проходящим в её произвольно малой окрестности. Любая траектория в достаточно малой окрестности какой-либо своей точки  $(\eta, \xi)$  может быть представлена в

виде

$$X(\tilde{x}, \tau) = \eta + w(\eta, \xi)[\tau - \tau(\eta, \xi)], \quad Y(\tilde{x}, \tau) = \xi + u(\eta, \xi)[\tau - \tau(\eta, \xi)]. \quad (4.18)$$

В этом случае аргумент логарифма принимает вид

$$\begin{aligned} & [x - X(\tilde{x}, \tau)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, \tau)]^2 \\ &= v^2(\eta, \xi)\tau^2 - 2\tau \{w(\eta, \xi)[x - \eta + w(\eta, \xi)\tau(\eta, \xi)] + u(\eta, \xi)[y - \xi + u(\eta, \xi)\tau(\eta, \xi)]\} \\ &+ [x - \eta + w(\eta, \xi)\tau(\eta, \xi)]^2 + [y - \xi + u(\eta, \xi)\tau(\eta, \xi)]^2, \quad v^2(\eta, \xi) = w^2(\eta, \xi) + u^2(\eta, \xi). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тот факт, что при фиксированном  $\tau$  левые части равенств (4.18) зависят лишь от одной переменной  $\tilde{x}$  означает, что и их правые части также могут быть выражены как функции этой переменной. Наличие в них двух параметров связано с тем, что в качестве начальной точки  $(\eta, \xi)$  разложения траектории по  $\tau$  может быть выбрана любая точка на данной траектории, принадлежащая рассматриваемой окрестности. Изменение координат  $(\xi, \eta)$  в пределах окрестности компенсируется соответствующим приращением времени  $\tau(\eta, \xi)$  (при достаточной малости окрестности изменением скоростей  $w(\eta, \xi)$ ,  $u(\eta, \xi)$  можно пренебречь). Указанный произвол может быть зафиксирован с помощью какого-либо дополнительного предписания. Например, можно потребовать, чтобы начальные точки разложения для всех траекторий в рассматриваемой окрестности имели одну и ту же ординату:  $\xi = \xi_*$ , причём  $\xi_*$  может выбираться независимо для каждой окрестности. Более естественное предписание – равенство времён прибытия элементов газа,двигающихся по близким траекториям, в соответствующие точки:  $\tau(\eta, \xi) = \tau_*$ , причём окрестность точки определяется как содержащее её множество таких  $(\eta, \xi)$ , что  $\tau < \tau(\eta, \xi) < \tau + \delta\tau$ ,  $\tilde{x} < \tilde{x}(\eta, \xi) < \tilde{x} + \delta\tilde{x}$ , где  $\delta\tau$  и  $\delta\tilde{x}$  достаточно малы. Для определённости, ниже будет использоваться именно это предписание. Вместе с уравнением  $\tilde{x} = \tilde{x}(\eta, \xi)$  оно однозначно определяет координаты  $\eta, \xi$  начальной точки разложения, то есть задаёт функции  $\eta(\tau_*, \tilde{x}), \xi(\tau_*, \tilde{x})$ .

Согласно выполненному построению, для каждой точки  $(x, y)$  можно выбрать достаточно малую её окрестность, в которой справедливы выражения (4.18). То обстоятельство, что при каждом таком выборе должно быть зафиксировано и некоторое значение  $\tau_*$  будет учтено добавлением к  $\tau_*$  аргументов  $(x, y)$ :  $\tau_* = \tau_*(x, y)$ . Подставляя  $\eta = \eta(\tau_*(x, y), \tilde{x})$ ,

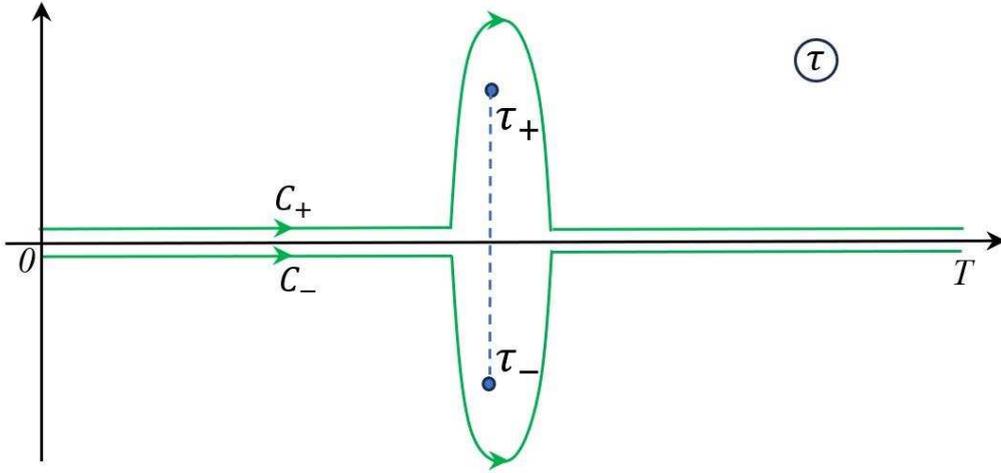


Рис. 10: Деформация контура интегрирования в комплексной плоскости  $\tau$  в формуле (4.15). Интеграл по  $\tau \in (0, T)$  заменяется полусуммой интегралов по контурам  $C_+$ ,  $C_-$ . Вертикальный пунктир изображает разрез, на котором логарифм в интеграле  $K(x, y, \tilde{x})$  испытывает скачок.

$\xi = \xi(\tau_*(x, y), \tilde{x})$  в правую часть (4.19), получим её как функцию от  $x, y, \tilde{x}$ . Обозначив

$$\begin{aligned} \tau(\eta, \xi) + v^{-2}(\eta, \xi)[w(\eta, \xi)(x - \eta) + u(\eta, \xi)(y - \xi)] &\equiv \tau_1(x, y, \tilde{x}), \\ v^{-2}(\eta, \xi) |u(\eta, \xi)(x - \eta) - w(\eta, \xi)(y - \xi)| &\equiv \tau_2(x, y, \tilde{x}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

представим её в виде

$$[x - X(\tilde{x}, \tau)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, \tau)]^2 = v^2(\eta, \xi)[\tau - \tau_+(x, y, \tilde{x})][\tau - \tau_-(x, y, \tilde{x})], \quad (4.21)$$

где

$$\tau_{\pm}(x, y, \tilde{x}) = \tau_1(x, y, \tilde{x}) \pm i\tau_2(x, y, \tilde{x}). \quad (4.22)$$

Поскольку интегрирование в (4.15) производится по вещественным  $\tau$ , а завихрённость связана с особенностями логарифма, ненулевой вклад в  $\text{rot } \mathbf{v}$  в данной точке  $(x, y)$  соответствует произвольно малой окрестности такого  $\tilde{x}$ , что  $\tau_2(x, y, \tilde{x}) = 0$ .

Следующий шаг состоит в преобразовании контура интегрирования в комплексной плоскости  $\tau$  как показано на Рис. 10. Исходный интеграл по вещественной оси может быть выражен через полусумму интегралов по двум контурам, симметрично расположенным относительно вещественной оси, один из которых обходит точку  $\tau_+$  сверху, а другой – точку  $\tau_-$  снизу (использование симметричного контура оставляет выражение

явно вещественным). Учитывая, что при обходе вокруг точки  $\tau_+$  ( $\tau_-$ ) в отрицательном (положительном) направлении логарифм получает приращение  $-2\pi i$  ( $+2\pi i$ ), имеем

$$v_i(x, y) \stackrel{\circ}{=} -\frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} M(\tilde{x}) K_C(x, y, \tilde{x}) + \frac{\varepsilon_{ik}}{4} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} M(\tilde{x}) i(\tau_+ - \tau_-), \quad (4.23)$$

где

$$K_C(x, y, \tilde{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_+ \cup C_-} d\tau \ln \{ [x - X(\tilde{x}, \tau)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, \tau)]^2 \}. \quad (4.24)$$

Ядро  $K_C(x, y, \tilde{x})$  имеет те же свойства, что и  $K(x, y, \tilde{x})$ , за исключением того, что особенность логарифма никогда не оказывается в области интегрирования, поскольку в силу теоремы Коши контур  $C_+ \cup C_-$  может быть отведен от особых точек логарифма на произвольное конечное расстояние. Следовательно, соответствующий вклад в поле скорости не только ограничен и имеет нулевую дивергенцию, но и нулевой ротор, то есть удовлетворяет всем условиям (a)–(c). Таким образом,

$$v_i(x, y) \stackrel{\circ}{=} -\frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} M(\tilde{x}) \tau_2(x, y, \tilde{x}). \quad (4.25)$$

Выражение (4.20) для  $\tau_2$  справедливо для таких  $\tilde{x}$ , что траектория  $(X(\tilde{x}, \tau), Y(\tilde{x}, \tau))$  проходит в достаточно малой окрестности точки  $(x, y)$ . Однако в (4.25) его можно распространить на все  $\tilde{x}$ , что опять сводится к добавлению некоторой потенциальной компоненты. Действительно, дивергенция скорости (4.25) при этом остаётся тождественно равной нулю, а поле её ротора не меняется, т.к. оно определяется интегрированием в произвольно малой окрестности точки  $(x, y)$ , где справедливо выражение (4.20). Наконец, для доказательства выполнения условия (c) замечаем, во-первых, что ни левая, ни правая части (4.25) не зависят от  $T$ . Поэтому от него не зависит и потенциальное поле  $\mathbf{v}^p$ , на которое они отличаются, и следовательно, это поле остаётся ограниченным в пределе  $T \rightarrow \infty$ . Для доказательства его ограниченности в пределе  $A \rightarrow \infty$  рассмотрим сначала большие  $y$ . По определению  $\tau_*(x, y)$  как времени движения элемента газа от пересечения фронта до произвольно малой окрестности точки  $(x, y)$ , при  $y \rightarrow \infty$  имеем  $\tau_*(x, y) \rightarrow \infty$ . Далее, по определению функций  $\eta(\tau_*(x, y), \tilde{x})$ ,  $\xi(\tau_*(x, y), \tilde{x})$  как координат элемента газа, пересекшего фронт в точке  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$  и двигавшегося в течение времени  $\tau_*(x, y)$ , при  $\tau_*(x, y) \rightarrow \infty$  имеем также и  $\xi \rightarrow \infty$ , а  $\eta \rightarrow \eta(\infty, \tilde{x}) \equiv \eta_\infty(\tilde{x})$ . При этом  $w(\eta, \xi) \rightarrow 0$ ,

$u(\eta, \xi) \rightarrow u(\eta(\infty, \tilde{x}), \infty) \equiv u_\infty(\tilde{x})$ . Пусть  $y \geq y_0$ , где  $y_0$  настолько велико, что  $w(\eta, \xi)$ ,  $u(\eta, \xi)$  сколь угодно мало отличаются от своих предельных значений. Тогда (4.25) с  $\tau_2$  из (4.20) сводится к

$$v_i(x, y) \stackrel{\circ}{=} -\frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} M(\tilde{x}) \frac{|x - \eta_\infty(\tilde{x})|}{u_\infty(\tilde{x})},$$

или, в компонентах,

$$(w(x, y), u(x, y)) \stackrel{\circ}{=} \left( 0, \frac{1}{2} \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} M(\tilde{x}) \frac{\chi(x - \eta_\infty(\tilde{x}))}{u_\infty(\tilde{x})} \right), \quad (4.26)$$

где

$$\chi(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Непосредственно видно, что область произвольно больших  $|\tilde{x}|$  не даёт вклада в производные по  $x, y$  правой части (4.26), то есть при достаточно больших  $y$  производные рассматриваемой потенциальной компоненты  $\mathbf{v}^p(x, y)$  ограничены и остаются таковыми в пределе  $A \rightarrow \infty$ . В силу же потенциальности поля  $\partial \mathbf{v}^p(x, y)$  оно тогда будет ограниченным и при конечных  $y$ , что завершает доказательство. Таким образом, в правой части (4.25) неограниченной в пределе  $A \rightarrow \infty$  может становиться лишь аддитивная постоянная. Предельное значение правой части (4.25) на фронте будет явно вычислено в §4.5.

#### §4.4. Дисперсионное соотношение для потенциальной компоненты поля скорости

Свойства (а), (б) потенциальной компоненты скорости позволяют ввести потенциал скорости  $\phi_v$  и функцию тока  $\psi$  согласно

$$u^p = \frac{\partial \phi_v}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w^p = \frac{\partial \phi_v}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (4.27)$$

Эти соотношения означают, что  $\Phi_v \equiv \psi + i\phi_v$  является аналитической функцией переменной  $z = x + iy$ , а следовательно, её производные  $d\Phi_v/dz \equiv \omega^p = u^p + iw^p$  и  $d^2\Phi_v/dz^2 = d\omega^p/dz$  также являются аналитическими. Далее, согласно (4.11) периодическое по  $x$  в  $\Sigma_\infty$  поле  $\mathbf{v}^p$  либо экспоненциально растёт при  $|y| \rightarrow \infty$ , либо экспоненциально

убывает, если отбросить аддитивную постоянную. Поскольку в силу условия (с)  $\partial v^p$  ограничено в  $\Sigma_\infty$ , то из этого следует, что  $d\omega^p/dz$  стремится к нулю при  $y \rightarrow \infty$ . Эти свойства функции  $d\omega^p/dz$  позволяют получить интегральное соотношение дисперсионного типа, связывающее её значения на фронте пламени. А именно, на основании теоремы Коши имеем для любого  $z$  внутри контура  $\Lambda$

$$\frac{d\omega^p}{dz}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Lambda} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z} - z} \frac{d\omega^p}{dz}(\tilde{z}). \quad (4.28)$$

Как и в §4.3, выбираем контур  $\Lambda$  как объединение части фронта  $F$  между точками с абсциссами  $\pm A$  и его дополнения, представляемого полуокружностью радиуса  $A \rightarrow \infty$ . Интеграл по полуокружности

$$\int_0^\pi d\varphi \frac{d\omega^p}{dz}(Ae^{i\varphi}) \rightarrow 0,$$

поскольку  $d\omega^p/dz(Ae^{i\varphi}) \rightarrow 0$  для любого  $\varphi \in (0, \pi)$ . Устремляя точку  $z$  к фронту, получаем

$$\frac{d\omega^p}{dz}(z_+) = \frac{1}{\pi i} \int_F \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z} - z_+} \frac{d\omega^p}{dz}(\tilde{z}), \quad (4.29)$$

где  $z_+ = x + if(x)$  и интеграл понимается в смысле главного значения. Далее, используя аналитичность функции  $\omega^p(z)$ , пишем

$$(\omega_+^p)' = \left( \frac{\partial \omega^p}{\partial x} \right)_+ + f' \left( \frac{\partial \omega^p}{\partial y} \right)_+ = (1 + if') \left( \frac{d\omega^p}{dz} \right)_+.$$

Подставив в (4.29)  $\tilde{z} = \tilde{x} + if(\tilde{x})$  и перейдя к интегрированию по  $\tilde{x}$ , окончательно перепишем это тождество в виде

$$(1 + i\hat{\mathcal{H}})(\omega_+^p)' = 0, \quad (4.30)$$

где оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  определён на непрерывных периодических функциях  $a(x)$  как

$$(\hat{\mathcal{H}}a)(x) = \frac{1 + if'(x, t)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \frac{a(\tilde{x})}{\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}, t) - f(x, t)]}. \quad (4.31)$$

Заметим, что сходимость этого интеграла при  $|\tilde{x}| \rightarrow \infty$  обеспечивается тем, что в (4.30)  $\hat{\mathcal{H}}$  действует на периодическую функцию с нулевым средним, поэтому и в общем случае

функция  $a(x)$  должна удовлетворять

$$\int_{-1}^{+1} dx a(x) = 0.$$

Как показано в Приложении А1, на множестве таких функций оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  удовлетворяет тождеству

$$\hat{\mathcal{H}}^2 = -1. \quad (4.32)$$

Для периодической функции  $a(x)$  интеграл по бесконечной прямой  $x$  в (4.31) может быть сведён к интегралу по отрезку  $[-1, 1]$  с помощью известного разложения котангенса

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{x} + 2n - x + i[f(\tilde{x}, t) - f(x, t)]} = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\}.$$

Это приводит к формуле

$$\left( \hat{\mathcal{H}} a \right) (x) = \frac{1 + if'(x)}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} a(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\}. \quad (4.33)$$

Тождество, аналогичное (4.29), имеет место и для поля скорости холодного газа, которое само по себе является потенциальным:

$$\frac{d\omega^p}{dz}(z_+) = -\frac{1}{\pi i} \int_F \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z} - z_+} \frac{d\omega^p}{dz}(\tilde{z}), \quad (4.34)$$

где по-прежнему  $z_+ = x + if(x)$ . Соответственно, (4.30) заменяется на

$$\left( 1 - i\hat{\mathcal{H}} \right) (\omega_-)' = 0. \quad (4.35)$$

Соотношение (4.30) позволяет исключить из рассмотрения неизвестную потенциальную компоненту скорости продуктов горения.

#### §4.5. Распределение вихревой компоненты скорости газа на фронте пламени

Для того чтобы использовать соотношение (4.30), необходимо найти производную вихревой компоненты скорости газа вдоль фронта пламени, то есть на множестве  $(x, f(x))$ . В этом случае выражение для функции  $\tau_2(x, y, \tilde{x})$  существенно упрощается. Согласно уравнению (4.25) вихревая компонента скорости определяется первыми производными  $\tau_2$  по

координатам. Поэтому для нахождения значений этой компоненты на фронте достаточно, чтобы точка  $(x, y)$  принадлежала сколь угодно малой его окрестности. Следовательно, можно выбрать  $\tau_*(x, y) = 0$ . Тогда  $\eta(\tau_*(x, y), \tilde{x}) = \eta(0, \tilde{x}) = \tilde{x}$ ,  $\xi(\tau_*(x, y), \tilde{x}) = \xi(0, \tilde{x}) = f(\tilde{x})$ , и (4.20) даёт

$$\tau_2(x, y, \tilde{x}) = v^{-2}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) |u(\tilde{x}, f(\tilde{x}))(x - \tilde{x}) - w(\tilde{x}, f(\tilde{x}))(y - \xi)|.$$

Далее, поскольку ограниченными в пределе  $A \rightarrow \infty$  остаются лишь производные потенциальной компоненты поля скорости, для работы в этом пределе с представлением (4.25) поля скорости необходимо ввести какую-либо промежуточную регуляризацию несобственного интеграла по  $\tilde{x}$ . Удобным вариантом является

$$v_i^v(x, y, \mu) = -\frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} M(\tilde{x}) \tau_2(x, y, \tilde{x}), \quad r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - f(\tilde{x}))^2}. \quad (4.36)$$

Введение экспоненциального фактора  $e^{-\mu r}$  с любым  $\mu > 0$  делает интеграл сходящимся, поскольку при больших  $|\tilde{x}|$  подынтегральное выражение является величиной  $O(\tilde{x})$ . При этом правая часть (4.36) является явно периодической по  $x$ . Поле  $\partial v_i(x, y)$  может быть получено отсюда переходом к пределу  $\mu \rightarrow 0+$ :

$$\partial v_i(x, y) \stackrel{\circ}{=} \lim_{\mu \rightarrow 0+} \partial v_i^v(x, y, \mu).$$

Полагая в (4.36)  $y = f(x)$  и заменяя  $w(x, f(x))$  на  $w_+(x)$  и т.д., имеем

$$v_{i+}^v(x, \mu) = -\frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} |u_+(\tilde{x})(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x})(y - f(\tilde{x}))| \Big|_{y=f(x)}.$$

Вводя обозначения  $\omega_+^v(x, \mu) = u_+^v(x, \mu) + i w_+^v(x, \mu)$ ,  $e_k = \varepsilon_{2k} + i \varepsilon_{1k}$  и явно выполняя дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} \omega_+^v(x, \mu) &= \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} \frac{e_k r_k}{r} \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} |u_+(\tilde{x})(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x})(f(x) - f(\tilde{x}))| \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} \chi \{u_+(\tilde{x})(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x})(f(x) - f(\tilde{x}))\} \omega_+(\tilde{x}), \end{aligned} \quad (4.37)$$

где  $\mathbf{r} = (x - \tilde{x}, f(x) - f(\tilde{x}))$ . В пределе  $\mu \rightarrow 0$  в первом интеграле ненулевой вклад даёт лишь область  $|\tilde{x}| \rightarrow \infty$ , поэтому его можно переписать как

$$\frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|x-\tilde{x}|} \frac{e_1(x - \tilde{x}) + e_2(f(x) - f(\tilde{x}))}{|x - \tilde{x}|} \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} |u_+(\tilde{x})(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x})(f(x) - f(\tilde{x}))| \equiv I(x).$$

Ниже нам понадобится лишь производная  $d\omega_+(x)/dx \equiv (\omega_+(x))'$ , являющаяся по доказанному в §4.3 ограниченной функцией. Выполняя дифференцирование  $I(x)$  и отбрасывая вклады, которые явно обращаются в нуль при  $\mu \rightarrow 0$ , находим

$$\begin{aligned}
 I'(x) = & -\frac{\mu^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|\tilde{x}|} e_1 |\tilde{x}| \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} u_+(\tilde{x}) + \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|\tilde{x}|} e_2 f'(x) \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} u_+(\tilde{x}) \\
 & + \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|\tilde{x}|} e_1 \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} [u_+(\tilde{x}) - w_+(\tilde{x}) f'(x)]. \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Для достаточно малого  $\mu$  имеем

$$\mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|\tilde{x}|} e_1 |\tilde{x}| \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} u_+(\tilde{x}) = e_1 \left\langle \frac{Mu_+}{v_+^2} \right\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-|z|} |z| = 2e_1 \left\langle \frac{Mu_+}{v_+^2} \right\rangle,$$

где введено среднее значение периодической функции

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} F(\tilde{x}).$$

Но ввиду нечётности функции  $M(\tilde{x})$

$$\left\langle \frac{Mu_+}{v_+^2} \right\rangle = 0,$$

так что в правой части (4.38) остаётся лишь последнее слагаемое:

$$I'(x) = -e_1 f'(x) \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|\tilde{x}|} \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} w_+(\tilde{x}) = \frac{f'(x)}{2} \left\langle \frac{Mw_+}{v_+^2} \right\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-|z|} = f'(x) \left\langle \frac{Mw_+}{v_+^2} \right\rangle.$$

Аналогично вычисляется производная от второго интеграла в (4.37)

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} \chi \{u_+(\tilde{x})(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x})(f(x) - f(\tilde{x}))\} \omega_+(\tilde{x}) \\
 & = -\frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} \chi(x - \tilde{x}) \frac{M(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} \chi \{u_+(\tilde{x})(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x})(f(x) - f(\tilde{x}))\} \omega_+(\tilde{x}) + \frac{M(x)}{v_+^2(x)} \omega_+(x) \\
 & = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-|z|} + \frac{M(x)}{v_+^2(x)} \omega_+(x) = -i \left\langle \frac{Mw_+}{v_+^2} \right\rangle + \frac{M(x)}{v_+^2(x)} \omega_+(x).
 \end{aligned}$$

Объединяя эти результаты, окончательно получаем для производной комплексной скорости вдоль фронта

$$(\omega_+(x))' = (\omega_+^p(x))' + \frac{M(x)}{v_+^2(x)} \omega_+(x) - (1 + if'(x)) \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle. \quad (4.39)$$

### §4.6. Мастер-уравнение

Уравнение для  $\omega_-$  получается подстановкой  $(\omega_+^p)'$  из (4.39) в (4.30). Написав также  $\omega_+ = \omega_- + [\omega]$  и используя тождество (4.35) для  $(\omega_-)'$ , получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение, называемое мастер-уравнением

$$2(\omega_-)' + (1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ [\omega]' - \frac{Nv_+^n \sigma_+ \omega_+}{v_+^2} + (1 + if'(x)) \left\langle \frac{Nv_+^n \sigma_+ \omega_+}{v_+^2} \right\rangle \right\} = 0. \quad (4.40)$$

Поскольку течение холодного газа потенциально, имеем  $\sigma_+ = [\sigma]$ . Значения скачков скорости газа и завихренности на фронте являются известными функциями формы фронта и распределения на нём скорости холодного газа. Поэтому комплексное уравнение (4.40) даёт два независимых уравнения для трёх функций  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$  и  $f(x)$ . Вместе с уравнением эволюции, записанным в виде

$$\frac{u_- - f'w_-}{N} = 1 - \mathcal{L}_s \frac{(v_-^r)'}{N} - \mathcal{L}_c \left( \frac{f'}{N} \right)' \quad (4.41)$$

мастер-уравнение образует замкнутую систему для этих функций. Заметим, что в рассматриваемом случае выражение (2.9) для завихренности существенно упрощается. Используя формулу  $u_- - f'w_- = v_-^n N$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{Dw_-}{Dt} + f' \frac{Du_-}{Dt} + \frac{v_-^n}{N} \frac{Df'}{Dt} &= w'_- w_- + \frac{v_-^n f' w'_-}{N} + \frac{v_-^n (f')^2 u'_-}{N} + f' u'_- w_- + \frac{v_-^n f'' w_-}{N} + \frac{(v_-^n)^2 f' f''}{N^2} \\ &= w_- w'_- + \frac{v_-^n (u_- - v_-^n N)'}{N} + \frac{v_-^n (N^2 - 1) u'_-}{N} + u'_- (u_- - v_-^n N) + \frac{(v_-^n)^2 N'}{N} \\ &= u'_- u_- + w'_- w_- - v_-^n (v_-^n)' = (v_-^r)' v_-^r. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta N v_-^n} \{ (v_-^r)' v_-^r + \theta v_-^n (v_-^n)' + \phi'_- \} - \frac{2\mathcal{L}_\sigma}{N} \left( \frac{f''}{N^3} \right)'. \quad (4.42)$$

Далее, согласно формулам (2.5), (2.6) скачок комплексной скорости имеет вид

$$[\omega] = \frac{\theta - 1}{N} v_-^n (1 - if'). \quad (4.43)$$

Наконец, в случае  $l_f = 0$ ,  $g = 0$  выражение для завихренности упрощается до

$$\sigma_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta N} (v_-^r)' v_-^r = -\frac{\theta - 1}{2\theta N} \frac{d}{dx} \{ (u_-)^2 + (w_-)^2 \}. \quad (4.44)$$

## 5. ВЫВОД МАСТЕР-УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ГРИНА [A10]

### §5.1. Представление функции тока с помощью функции Грина

Мастер-уравнение может быть получено также из рассмотрения симметричного течения в области  $x \in (-1, 1)$ , не прибегая к его периодическому продолжению вдоль оси  $x$ . Гарантировать выполнение граничных условий в этом случае можно путём использования функции Грина оператора Лапласа в области  $x \in (-1, 1)$  с заданными граничными условиями на стенках трубы. Для этого введём функцию тока  $\psi$  согласно

$$w = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (5.1)$$

Тогда уравнение непрерывности (4.1) выполняется тождественно, а определение завихрённости (4.5) принимает вид

$$\Delta\psi = \sigma, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (5.2)$$

Для того чтобы построить неявное интегральное представление скорости продуктов горения, рассматриваем последнее соотношение как уравнение Пуассона для  $\psi$  с заданным полем завихрённости  $\sigma(x, y)$ . Поскольку функция тока должна быть постоянна на стенках трубы, функция Грина  $G(x, y; \tilde{x}, \tilde{y})$  оператора Лапласа должна удовлетворять

$$\Delta G(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) = \delta(x - \tilde{x})\delta(y - \tilde{y}), \quad G(\pm 1, y; \tilde{x}, \tilde{y}) = \text{const},$$

где  $\delta(\cdot)$  есть  $\delta$ -функция Дирака. Проверим, что можно принять

$$G(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} (z - \tilde{z}) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} (z + \bar{\tilde{z}}) \right\}} + \text{c.c.}, \quad (5.3)$$

где  $z = x + iy$ ,  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ , а “с.с.” обозначает комплексное сопряжение предыдущего выражения. Действительно, первое слагаемое в правой части (5.3) является аналитической функцией везде, исключая точку  $z = \tilde{z}$ , следовательно, оно удовлетворяет уравнению Лапласа. С другой стороны, в достаточно малой окрестности  $z = \tilde{z}$  имеем

$$G(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{4\pi} \ln(z - \tilde{z}) + R(z, \tilde{z}) + \text{c.c.},$$

где  $R(z, \tilde{z})$  является аналитической функцией  $z$  в окрестности  $\tilde{z}$ . Обозначая  $r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} = \sqrt{(z - \tilde{z})(\bar{z} - \bar{\tilde{z}})}$ , имеем поэтому  $G(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) = (2\pi)^{-1} \ln r$  плюс члены, удовлетворяющие уравнению Лапласа. Следовательно, данная функция  $G$  правильно

воспроизводит  $\delta$ -особенность при  $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ . Наконец,

$$G(\pm 1, y; \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} (\pm 1 + iy - \tilde{z}) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} (\pm 1 + iy + \tilde{z}) \right\}} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} (\pm 1 - iy - \tilde{z}) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} (\pm 1 - iy + \tilde{z}) \right\}} = 0. \quad (5.4)$$

Таким образом, общее решение уравнения (5.2) может быть записано как

$$\psi(x, y) = \int_{\Sigma} ds G(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) \sigma(\tilde{x}, \tilde{y}) + \psi_0(x, y) \quad (5.5)$$

$$\equiv \psi^v(x, y) + \psi_0(x, y), \quad (5.6)$$

где  $\Sigma$  обозначает область, заполненную продуктами горения,  $ds = d\tilde{x}d\tilde{y}$ , а  $\psi_0(x, y)$  есть общее решение уравнения  $\Delta\psi = 0$ , удовлетворяющее граничным условиям

$$\psi_0(-1, y) = \text{const}_-, \quad \psi_0(+1, y) = \text{const}_+. \quad (5.7)$$

Разность постоянных  $\text{const}_{\pm}$  даёт полный поток газа через фронт. Заметим, что вихревое слагаемое  $\psi^v(x, y)$  порождает поле скорости, удовлетворяющее условиям симметрии (4.3). Действительно, делая замену переменной интегрирования  $\tilde{x} \rightarrow -\tilde{x}$  одновременно с отражением  $x \rightarrow -x$  и учитывая нечётность  $\sigma_+(\tilde{x})$ , получаем

$$w^v(-x, y) = -w^v(x, y), \quad u^v(-x, y) = u^v(x, y), \quad (5.8)$$

а следовательно, этим свойством обладает и потенциальное поле, порождаемое  $\psi_0(x, y)$ .

Переходя к интегрированию по траекториям элементов газа аналогично формуле (4.13), переписываем (5.5) как

$$\psi(x, y) = \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} N(\tilde{x}) v_+^n(\tilde{x}) \sigma_+(\tilde{x}) \int_0^{\infty} d\tau \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} (z - Z(\tilde{x}, \tau)) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} (z + \overline{Z(\tilde{x}, \tau)}) \right\}} + \text{c.c.} + \psi_0(x, y), \quad (5.9)$$

где  $Z(\tilde{x}, \tau) = X(\tilde{x}, \tau) + iY(\tilde{x}, \tau)$ ,  $\overline{Z(\tilde{x}, \tau)} = X(\tilde{x}, \tau) - iY(\tilde{x}, \tau)$ .

## §5.2. Дисперсионное соотношение для потенциальной компоненты на фронте конечной длины

Назовём поле  $\mathbf{v}^p$  потенциальной компонентой, если оно удовлетворяет в  $\Sigma$  следующим условиям:

$$(a') \quad \text{div } \mathbf{v}^p = 0, \quad \text{rot } \mathbf{v}^p = 0,$$

(b')  $\mathbf{v}^p$  ограничена,

(c')  $\mathbf{v}^p(-1, y) = \mathbf{v}^p(+1, y)$ .

Как и в §4.4, условие (a') означает, что  $\omega^p = u^p + iw^p$  является аналитической функцией  $z = x + iy$  при  $(x, y) \in \Sigma$ . Условие ограниченности теперь накладывается на само поле  $\mathbf{v}^p$ , а не на его производные, условие же (c') позволяет получить дисперсионное соотношение для  $\omega^p$  на фронте конечной длины, то есть на отрезке  $x \in [-1, 1]$ . Для его вывода используем следующее тождество, справедливое в силу теоремы Коши для  $z \in \Sigma$

$$\frac{1}{4i} \int_{\Lambda} d\tilde{z} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{z} - z) \right\} \omega^p(\tilde{z}) = \omega^p(z), \quad (5.10)$$

где  $\Lambda$  обозначает границу  $\Sigma$ , которую переменная интегрирования  $\tilde{z}$  пробегает против часовой стрелки. Поскольку  $\omega^p(z)$  удовлетворяет (c'), вклады от стенок трубы сокращают друг друга в силу периодичности котангенса. Далее, в силу (b') в интеграле по бесконечно удалённому отрезку  $[-1 + i\infty, +1 + i\infty]$  контура  $\Lambda$  в аргументе котангенса можно опустить  $z$ , заменив котангенс его предельным значением  $(-i)$ . После этого переход к пределу  $z \rightarrow z_+ = x + if(x)$  даёт

$$\frac{1}{2i} \oint_F d\tilde{z} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{z} - z_+) \right\} \omega^p(\tilde{z}) + \frac{1}{2} \int_{-1+i\infty}^{+1+i\infty} d\tilde{z} \omega^p(\tilde{z}) = \omega^p(z_+),$$

где интеграл по фронту пламени  $F$  понимается в смысле главного значения. От неизвестного постоянного вклада на бесконечности можно избавиться путём дифференцирования этого уравнения по  $x$ . Преобразуя затем интеграл вдоль  $F$  по частям с учётом условия (c'), получаем

$$\frac{z'_+}{2i} \oint_F d\tilde{z} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{z} - z_+) \right\} \frac{d\omega(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = \frac{d\omega^p(z_+)}{dx} \equiv (\omega_+^p)'(x),$$

или

$$(\omega_+^p)'(x) + i \frac{1 + if'(x)}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} (\omega_+^p)'(\tilde{x}) = 0. \quad (5.11)$$

Это соотношение идентично (4.30) с оператором  $\hat{\mathcal{H}}$  в форме (4.33).

### §5.3. Структура вихревой компоненты функции тока

Будем по-прежнему использовать обозначение  $\mathbf{v}_1 \stackrel{\circ}{=} \mathbf{v}_2$ , если разность двух данных полей удовлетворяет условиям (a') – (c'). Для соответствующих им функций тока также

будем писать  $\psi_1 \stackrel{\circ}{=} \psi_2$ . По построению,  $\psi_0(x, y)$  в формуле (5.5) задаёт поле скорости, удовлетворяющее  $(a') - (c')$  и поэтому

$$\psi_0(x, y) \stackrel{\circ}{=} 0.$$

Преобразования вихревого слагаемого в (5.5) аналогичны произведённым в §4.3. Переходя к рассмотрению переменной интегрирования  $\tau$  как комплексной переменной, обозначим через  $\tau_0 = \tau_0(x, y, \tilde{x})$  корень уравнения  $z = Z(\tilde{x}, \tau)$ . В этой точке синус под знаком логарифма в функции Грина обращается в нуль. Выразим исходный интеграл по вещественной оси через полусумму интегралов по двум контурам  $C_+$  и  $C_-$ , симметрично расположенным относительно вещественной оси так, чтобы  $\tau_0$  оказался между ними. Учитывая вклад комплексной фазы аргумента логарифма как в §4.3, получаем

$$\psi(x, y) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} M(\tilde{x}) |\operatorname{Im} \tau_0| + \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} M(\tilde{x}) K_C(x, y, \tilde{x}), \quad (5.12)$$

где

$$K_C(x, y, \tilde{x}) = \int_{C_+ \cup C_-} d\tau \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z - Z(\tilde{x}, \tau) \right) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z + \overline{Z(\tilde{x}, \bar{\tau})} \right) \right\}} + \text{c.c.} \quad (5.13)$$

и  $\overline{Z(\tilde{x}, \bar{\tau})} = X(\tilde{x}, \tau) - iY(\tilde{x}, \tau)$ . В отличие от §4.3, однако, функция Грина  $G$  имеет и другие точки ветвления, причём эти точки могут оказаться бесконечно близко от  $\tau_0$ . Именно, когда точка  $(x, y)$  приближается к стенке трубы, скажем  $x \rightarrow +1$ , имеем  $Z(1, \tau_0) = 1 + iY(1, \tau_0) \rightarrow 1 + iy$ , и следовательно,  $z + \overline{Z(\tilde{x}, \bar{\tau}_0)} \rightarrow (1 + iy) + (1 - iy) = 2$ , что соответствует нулю косинуса. Поэтому для  $(x, y)$  вблизи стенки  $x = 1$  контур  $C_+ \cup C_-$  будет охватывать и этот нуль, и для того чтобы обеспечить непрерывность выделяемого вклада, необходимо продолжить деформацию контура до тех пор, пока он не окажется между  $C_+$  и  $C_-$  при всех  $(x, y) \in \Sigma$ . Обозначим этот нуль косинуса как  $\sigma_0 = \sigma_0(x, y, \tilde{x})$ . Таким образом,  $\sigma_0(1, y, 1) = \tau_0(1, y, 1)$ . Так же обстоит дело и с другими точками ветвления функции Грина. Обозначим через  $\tau_n = \tau_n(x, y, \tilde{x})$  нуль синуса, в котором  $z - Z(\tilde{x}, \tau) = 4n$ , и через  $\sigma_n = \sigma_n(x, y, \tilde{x})$  нуль косинуса, в котором  $z + \overline{Z(\tilde{x}, \bar{\tau})} = 4n + 2$ . Здесь  $n$  – любое положительное или отрицательное целое число. Эти нули сливаются на стенках трубы согласно

$$\tau_n(1, y, 1) = \sigma_n(1, y, 1), \quad \tau_n(-1, y, -1) = \sigma_{n-1}(-1, y, -1).$$

При изменении  $\tilde{x}$  ни один из  $\sigma_n$  или  $\tau_n$ , кроме  $\tau_0$ , не пересекает вещественную ось, то есть остаётся либо в верхней, либо в нижней полуплоскости комплексного  $\tau$ . Действительно, если бы  $\text{Im } \tau_n$  обратился в нуль при некотором  $\tilde{x}$ , то определение вещественной части определения  $z - Z(\tilde{x}, \tau_n) = 4n$  дало бы  $x - X(\tilde{x}, \tau_n) = 4n$ , что невозможно, поскольку  $x, X \in (-1, 1)$ . Для определения знака мнимой части замечаем, что в достаточно малой окрестности точки  $(x, y)$  траектории элементов газа могут быть аппроксимированы линейными функциями (4.18):

$$\begin{aligned} Z(\tilde{x}, \tau) &= \eta + w(\eta, \xi)[\tau - \tau(\eta, \xi)] + i\{\xi + u(\eta, \xi)[\tau - \tau(\eta, \xi)]\} \\ &= \zeta + \{w(\eta, \xi) + iu(\eta, \xi)\}[\tau - \tau(\eta, \xi)], \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $\zeta \equiv \eta + i\xi$  и подразумевается, что  $\eta, \xi$  выражены в функции от  $x, y, \tilde{x}$  согласно §4.3. Подставляя (5.14) в определения  $\tau_n, \sigma_n$ , находим

$$\tau_n = \tau(\eta, \xi) + \frac{z - \zeta - 4n}{w(\eta, \xi) + iu(\eta, \xi)}, \quad \sigma_n = \tau(\eta, \xi) + \frac{(4n + 2) - z - \bar{\zeta}}{w(\eta, \xi) - iu(\eta, \xi)}. \quad (5.15)$$

С учётом того, что  $\tau(\eta, \xi)$  вещественно,  $|x - \eta|$  и  $|y - \xi|$  малы, а  $u > 0$  [см. (4.8)] из этих выражений следует, что при  $n \neq 0$  знак мнимой части  $\tau_n$  или  $\sigma_n$  совпадает со знаком  $n$ :

$$\begin{aligned} \text{Im } \tau_n &> 0, & \text{Im } \sigma_n &> 0 & \text{при } n > 0, \\ \text{Im } \tau_n &< 0, & \text{Im } \sigma_n &< 0 & \text{при } n < 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

а также что  $\text{Im } \sigma_0 > 0$ .

Далее, как и в §4.3, истинные функции  $Z(\tilde{x}, \tau)$  в интеграле (5.9) могут быть заменены на их линейные аппроксимации (5.14) при всех  $\tilde{x}$ . Действительно, поле завихрённости от этой замены не меняется, так как оно определяется интегрированием в произвольно малой окрестности точки  $(x, y)$ , где формула (5.14) справедлива. Поскольку  $u \neq 0$  на траекториях с  $\sigma \neq 0$ , интеграл по  $\tau$  остаётся экспоненциально сходящимся при  $\tau \rightarrow \infty$ , следовательно, производные  $\psi$  будут ограничены, то есть условие (b') выполнено. Наконец, (c') также выполнено, поскольку равенства (5.8), следствием которых является (c'), справедливы для любого набора траекторий, обладающих свойством  $Z(-\tilde{x}, \tau) = -\overline{Z(\tilde{x}, \tau)}$ .

Поскольку от пересечения контуром одной точки ветвления логарифма возникает конечный вклад от изменения комплексной фазы его аргумента, пересечение формально бесконечного числа точек ветвления приведёт к бесконечному ряду с неопределённой суммой, поскольку каждый член ряда конечен. Для того чтобы придать смысл этой сумме,

необходимо дополнительно регуляризовать интеграл по  $\tau$ . С этой целью запишем ядро (5.13) как

$$K_C(x, y, \tilde{x}) = \lim_{\nu \rightarrow 0} K_C(x, y, \tilde{x}, \nu),$$

где

$$K_C(x, y, \tilde{x}, \nu) = \int_{C_+ \cup C_-} d\tau \frac{e^{-\nu\tau}}{8\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z - Z(\tilde{x}, \tau) \right) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z + \overline{Z(\tilde{x}, \bar{\tau})} \right) \right\}} + \text{с.с.}, \quad (5.17)$$

а  $\nu$  – положительный параметр. Он играет роль кинематической вязкости газа и поэтому обозначен тем же символом. Действительно, какой бы малой ни была вязкость, ей нельзя пренебрегать на больших расстояниях от фронта из-за затухания завихрённости под действием вязких сил. При их учёте закон сохранения завихрённости (4.6) заменяется на

$$(\mathbf{v}, \nabla)\sigma = \nu \Delta \sigma,$$

откуда следует, что  $\sigma$  затухает вдоль линий тока экспоненциально с декрементом  $\sim \nu$ . Общий же вид решения (5.5) и функция Грина при учёте вязкости не меняются, поскольку они справедливы для любого поля  $\sigma(x, y)$ .

Для того чтобы просуммировать ряд по точкам ветвления, удобно рассматривать  $\nu$  как комплексный параметр и считать, что он не подвергается комплексному сопряжению в членах, обозначенных “с.с.” Для определения области аналитичности  $K_C(x, y, \tilde{x}, \nu)$  по  $\nu$  замечаем, что  $\text{Im } Z(\tilde{x}, \tau) = u(\eta, \xi)[\tau - \tau(\eta, \xi)]$ , и поэтому при  $\tau \rightarrow \infty$

$$\ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z - Z(\tilde{x}, \tau) \right) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z + \overline{Z(\tilde{x}, \bar{\tau})} \right) \right\}} = O \left( e^{-\pi u_m \tau / 2} \right),$$

где  $u_m = \min u(\eta, \xi) > 0$  [см. (4.8)]. Следовательно,  $K_C(x, y, \tilde{x}, \nu)$  является аналитической функцией  $\nu$  в области  $\mathcal{V} = \{\nu : |\nu| < \pi u_m / 2\}$ . Сначала выберем в этой области какое-либо  $\nu$  с  $\text{Im } \nu < 0$  и деформируем ветвь  $C_+$  контура интегрирования по  $\tau$  так, чтобы все  $\tau_n, \sigma_n$  с  $n \geq 0$  оказались под ней, Рис. 11.

Тогда ядро  $K_C$  примет вид

$$\begin{aligned} K_C(x, y, \tilde{x}, \nu) &= \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\infty} d\tau e^{-\nu\tau} - \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sigma_n}^{\infty} d\tau e^{-\nu\tau} \\ &+ \int_{C_+ \cup C_-} d\tau \frac{e^{-\nu\tau}}{8\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z - Z(\tilde{x}, \tau) \right) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} \left( z + \overline{Z(\tilde{x}, \bar{\tau})} \right) \right\}} + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (5.18)$$

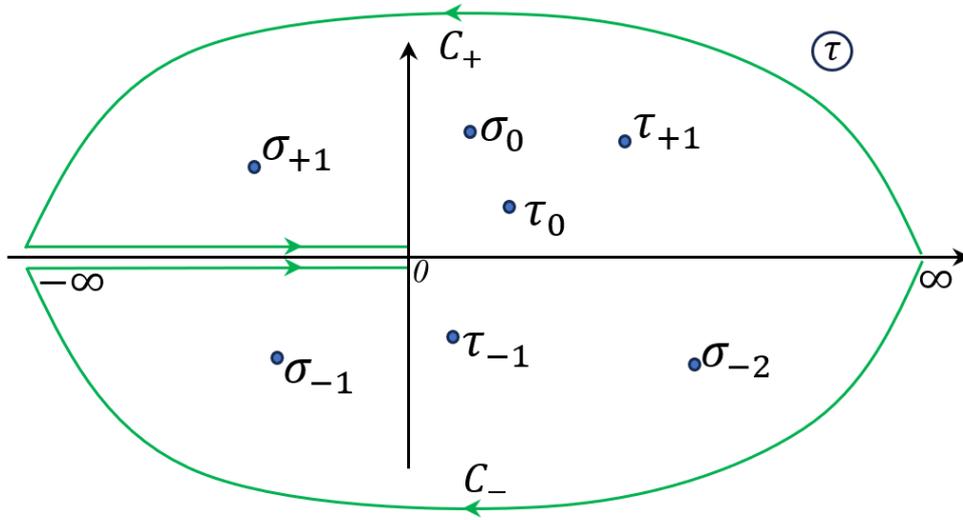


Рис. 11: Расположение особенностей подынтегрального выражения и контур интегрирования в формуле (5.17).

Поскольку  $\text{Im } \nu < 0$ , интеграл по бесконечно удалённой полуокружности обращается в нуль, а суммы по  $\tau_n$  и  $\sigma_n$  легко вычисляются с помощью (5.15). Обозначая

$$A = \tau(\eta, \xi) + \frac{z - \zeta}{w(\eta, \xi) + iu(\eta, \xi)} \quad B = -\frac{4}{w(\eta, \xi) + iu(\eta, \xi)},$$

находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\infty} d\tau e^{-\nu\tau} = \frac{1}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu\tau_n} = \frac{e^{-\nu A}}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu B n} = \frac{e^{-\nu(A+B)}}{\nu(1 - e^{-\nu B})}. \quad (5.19)$$

Аналогично,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sigma_n}^{\infty} d\tau e^{-\nu\tau} = \frac{e^{-\nu C}}{\nu(1 - e^{-\nu D})}, \quad C = \tau(\eta, \xi) + \frac{2 - z - \bar{\zeta}}{w(\eta, \xi) - iu(\eta, \xi)}, \quad D = \frac{4}{w(\eta, \xi) - iu(\eta, \xi)}.$$

Окончательные выражения для этих сумм являются аналитическими функциями  $\nu \neq 0$ . Подставляя их в (5.18) и аналитически продолжая всё выражение по  $\nu \in \mathcal{V}$  к значениям  $\nu$  с  $\text{Im } \nu > 0$ , деформируем ветвь  $C_-$  контура интегрирования так, чтобы все  $\tau_n, \sigma_n$  с  $n < 0$  оказались над ней. Поскольку теперь  $\text{Im } \nu > 0$ , интеграл по бесконечно удалённой полуокружности снова обращается в нуль, а суммы по  $\tau_n$  и  $\sigma_n$  вычисляются как выше. В

результате (5.18) переходит в

$$K_C(x, y, \tilde{x}, \nu) = \frac{i}{4\nu} \left[ \frac{e^{-\nu(A+B)}}{1 - e^{-\nu B}} - \frac{e^{-\nu(A-B)}}{1 - e^{\nu B}} - \frac{e^{-\nu C}}{1 - e^{-\nu D}} + \frac{e^{-\nu C}}{1 - e^{\nu D}} \right] + \\ + \int_0^{-\infty} d\tau \frac{e^{-\nu\tau}}{4\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} (z - Z(\tilde{x}, \tau)) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} (z + \overline{Z(\tilde{x}, \overline{\tau})}) \right\}} + \text{c.c.}$$

Наконец, переходя к пределу  $\nu \rightarrow 0$ , получаем

$$K_C(x, y, \tilde{x}) = \frac{i}{4} \left[ \frac{A^2}{B} - \frac{C^2}{D} \right] + \int_0^{-\infty} d\tau \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} (z - Z(\tilde{x}, \tau)) \right\}}{\cos \left\{ \frac{\pi}{4} (z + \overline{Z(\tilde{x}, \overline{\tau})}) \right\}} + \text{c.c.} \quad (5.20)$$

В последнем слагаемом интегрирование производится по отрицательным  $\tau$ , что соответствует формальному продолжению траекторий элементов продуктов горения в прошлое от момента пересечения фронта пламени. Поэтому особенности логарифма не попадают в область интегрирования ни при каком  $\tilde{x}$ , и следовательно, это слагаемое даёт вклад в скорость газа, удовлетворяющий условию (а'). В отношении же условий (b') и (c') свойства этого вклада такие же, как и у исходного выражения (5.9). Замечая также, что линейные по координатам  $x, y$  слагаемые в  $\psi$  выпадают из дисперсионного соотношения (5.11), от первого слагаемого в (5.20) достаточно оставить

$$-\frac{i}{16} \left[ \frac{z^2}{w(\eta, \xi) + iu(\eta, \xi)} + \frac{\bar{z}^2}{w(\eta, \xi) - iu(\eta, \xi)} \right] + \text{c.c.} = -\frac{i}{8} \frac{(z^2 + \bar{z}^2)w(\eta, \xi)}{w^2(\eta, \xi) + u^2(\eta, \xi)}.$$

Подставляя этот результат в (5.12), получаем окончательно

$$\psi(x, y) \stackrel{\circ}{=} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} M(\tilde{x}) \left\{ \frac{|(x - \eta)u(\eta, \xi) - (y - \xi)w(\eta, \xi)|}{2[w^2(\eta, \xi) + u^2(\eta, \xi)]} - \frac{i}{4} \frac{(x^2 - y^2)w(\eta, \xi)}{w^2(\eta, \xi) + u^2(\eta, \xi)} \right\} + L(x, y),$$

где  $L(x, y)$  есть некоторая линейная функция  $x, y$ .

#### §5.4. Мастер-уравнение

Мастер-уравнение получается подстановкой  $\omega_+^p = \omega_+ - \omega_+^v$  в дисперсионное соотношение (5.11), для чего следует найти распределение вихревой компоненты скорости сгоревшего газа вдоль фронта. Выбирая  $\tau_*(x, y) = 0$ , имеем  $\eta(\tau_*(x, y), \tilde{x}) = \eta(0, \tilde{x}) = \tilde{x}$ ,  $\xi(\tau_*(x, y), \tilde{x}) = \xi(0, \tilde{x}) = f(\tilde{x})$ , и для  $\omega_+ = (\partial\psi/\partial x)_+ - i(\partial\psi/\partial y)_+$  находим

$$\omega_+(x) = \omega_+^p(x) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} M(\tilde{x}) \left\{ \chi(x - \tilde{x}) \frac{\omega_+(\tilde{x})}{v_+^2(\tilde{x})} - (x + if(x)) \frac{iw_+(\tilde{x})}{v^2(\tilde{x})} \right\} + \text{const},$$

откуда

$$(\omega_+)'(x) = (\omega_+^p)'(x) + M(x) \frac{\omega_+(x)}{v_+^2(x)} - (1 + if'(x)) \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} M(\tilde{x}) \frac{iw_+(\tilde{x})}{v^2(\tilde{x})}.$$

Это выражение в точности совпадает с (4.39), и поэтому его подстановка в (5.11) приводит к мастер-уравнению (4.40) с оператором  $\hat{\mathcal{H}}$  в форме (4.33).

## Часть II

Тонкие ламинарные пламёна в  
слабонелинейном приближении

## 6. СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАСТЕР-УРАВНЕНИЯ [А4,А5]

Несмотря на то что коэффициент теплового расширения реальных пламён  $\theta = 5 - 10$ , рассмотрение слабого теплового расширения ( $\theta - 1 \ll 1$ ) имеет определённый теоретический интерес. Во-первых, это единственный случай когда классический способ учёта нелинейных эффектов, основанный на явном решении газодинамических уравнений, был реализован корректно. Сравнение результатов, получаемых разложением мастер-уравнения с классическими представляет весьма нетривиальную проверку нового подхода. Во-вторых, получающиеся интегро-дифференциальные уравнения для положения фронта пламени могут быть сведены к системе ОДУ и потому допускают довольно глубокое аналитическое исследование.

§6.1. Существенная нелинейность пламён с произвольным  $\theta$ 

Предположим, что при сгорании газ претерпевает произвольное конечное расширение, то есть  $(\theta - 1)$  не мало по сравнению с единицей, и пламя является при этом слабонелинейным. Слабая нелинейность означает, что наклон его фронта и отклонение скорости холодного газа от её значения для плоского пламени являются малыми величинами:

$$|f'| \ll 1, \quad |w_-| \ll 1, \quad |u_- - 1| \ll 1.$$

В низшем порядке малости по этим величинам имеем из (4.43), (4.44) для фронта нулевой ширины

$$[\omega] = (\theta - 1)(1 - if'), \quad \sigma_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta}u'_-$$

и мастер-уравнение (4.40) сводится к

$$2(\omega_-)' + \left(1 + i\hat{H}\right) \left\{ -i(\theta - 1)f'' + \frac{(\theta - 1)u'_-}{\theta^2} \right\} = 0, \quad (6.1)$$

где  $\hat{H}$  – оператор Гильберта

$$\left(\hat{H}a\right)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \frac{a(\tilde{x})}{\tilde{x} - x}. \quad (6.2)$$

Отделяя вещественную и мнимую части в (6.1), получаем

$$2u'_- + \frac{(\theta - 1)u'_-}{\theta^2} + (\theta - 1)\hat{H}f'' = 0, \quad (6.3)$$

$$w'_- = \hat{H}u'_-. \quad (6.4)$$

Из (6.3) следует, что  $(u_- - 1) \equiv \tilde{u}_- = O(f')$ , а согласно (6.4) и  $w_- = O(f')$ . С другой стороны, подставляя разложение  $N = 1 + (f')^2/2 + O((f')^4)$  в уравнение эволюции (4.41), заключаем, что  $\tilde{u}_-$  является величиной второго порядка относительно  $f'$ :

$$\tilde{u}_- = \frac{(f')^2}{2} + f'w_- + O((f')^3).$$

Это противоречие означает, что *стационарное пламя с конечным тепловым расширением газа не может быть слабонелинейным* [A1]. Этот вывод сделан здесь для фронта нулевой ширины, но он остаётся справедливым и при учёте эффектов конечной ширины фронта. Включение членов, пропорциональных ширине фронта, приводит к появлению во всех величинах вкладов порядка  $O(l_f)$ , в том числе и линейных по  $f'$ . Например, из уравнения (4.41) имеем

$$u_- = N + f'w_- - \mathcal{L}_s(v_-^T)' - \mathcal{L}_c N \left(\frac{f'}{N}\right)' = 1 - \mathcal{L}_s(w_- + f')' - \mathcal{L}_c f'' + O((f')^2).$$

Можно было бы подумать, что эти линейные вклады устраняют несоответствие порядков малости, имеющееся в случае  $l_f = 0$ . Это, однако, не так, поскольку параметром разложения на самом деле является отношение  $l_f/L$  ширины фронта к характерному размеру области, где распространяется пламя (например, ширине трубы). Хотя для каждой конкретной газовой смеси  $l_f$  фиксировано, длина  $L$  произвольна. Следовательно,  $l_f/L$  является независимым параметром, и поэтому члены нулевого порядка по  $l_f/L$  должны в них сокращаться независимо от членов более высокого порядка. Таким образом, стационарное пламя может быть слабонелинейным лишь при некоторых  $L$  вблизи границы неустойчивости плоского пламени (см., например, §12.2A). Общее же уравнение для положения фронта стационарного пламени, справедливое при произвольных  $L$ , не может быть слабонелинейным.

Из изложенного следует, что члены  $O((f')^2)$  могут оказаться сравнимыми по величине с членами  $O(f')$ , только если вклад последних подавляется малым коэффициентом. Тогда при некотором  $|f'| \ll 1$  между этими членами может возникнуть баланс, то есть произойдёт нелинейная стабилизация искривлённого пламени. Из (6.3) следует, что малым должен быть коэффициент  $(\theta - 1)$ . Тогда несоответствие порядков малости будет устранено, если положить

$$f' = O(\theta - 1), \quad \tilde{u}_- = O((\theta - 1)^2), \quad w_- = O((\theta - 1)^2). \quad (6.5)$$

## §6.2. Приближение Сивашинского–Клавена

### А. Вывод уравнения для положения фронта

Получим теперь уравнение для положения фронта пламени в предположении малости  $(\theta - 1)$ . Общая процедура состоит в том, что сначала мастер-уравнение интегрируется с целью получить  $u_-$  и  $w_-$  как функции  $f$ . Их подстановка в уравнение эволюции

$$u_- - f'w_- = \sqrt{1 + (f')^2}$$

даёт тогда замкнутое уравнение для  $f$ . В настоящем разделе это уравнение будет получено в приближении, когда в уравнении эволюции учитываются члены до третьего порядка по  $(\theta - 1)$  включительно. Поскольку  $w_-$  входит в мастер-уравнение с множителем  $f'$ , для него достаточно иметь выражение до членов второго порядка. Заметим, что поскольку  $w_+ = O((\theta - 1)^2)$ ,  $\sigma_+ = O((\theta - 1)^3)$ , то

$$\left\langle \frac{Nv_+^n \sigma_+ w_+}{v_+^2} \right\rangle = O((\theta - 1)^5).$$

Удерживая члены до третьего порядка в фигурных скобках в (4.40), получаем

$$(\omega_-)' + \frac{\theta - 1}{2} (1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left( \frac{1 - if'}{N} + \frac{u_-^2 + w_-^2}{2\theta} \right)' = 0. \quad (6.6)$$

Здесь ещё необходимо разложить оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  по малому отклонению фронта от плоского, где он сводится к вещественному оператору Гильберта  $\hat{H}$  [см. (6.2)]. Это сделано в Приложении В. Согласно полученной там формуле (В.7), первая поправка к  $\hat{H}$  является чисто мнимой. С другой стороны, вещественная часть выражения, на которое действует  $\hat{\mathcal{H}}$  в уравнении (6.6), является величиной второго порядка по  $(\theta - 1)$ , а мнимая часть – первого.

Поэтому поправка к  $\hat{H}$  в обоих случаях приводит к членам, которые в рассматриваемом приближении должны быть отброшены. Мастер-уравнение после этого непосредственно интегрируется. Подставляя с той же точностью

$$u_-^2 + w_-^2 = (1 + \tilde{u}_-)^2 + w_-^2 = 1 + (f')^2, \quad (6.7)$$

получаем

$$\omega_- - \frac{\theta - 1}{2} (1 + i\hat{H}) if' = C, \quad (6.8)$$

где  $C = C_1 + iC_2$  есть постоянная интегрирования. Отделение вещественной и мнимой частей даёт

$$u_- + \frac{\theta - 1}{2} \hat{H} f' = C_1, \quad (6.9)$$

$$w_- - \frac{\theta - 1}{2} f' = C_2. \quad (6.10)$$

Поскольку функции  $f'(x)$ ,  $w(x)$  являются нечётными, из (6.10) следует  $C_2 = 0$ . Далее, умножая (6.10) на  $f'$ , вычитая его из (6.9), и сравнивая с уравнением эволюции, приходим к замкнутому уравнению для положения фронта

$$\frac{\theta}{2} (f')^2 = -\frac{\theta - 1}{2} \hat{H} f' + C_1 - 1. \quad (6.11)$$

Константа  $C_1$  может быть выражена через скорость распространения пламени по трубе

$$U = \int_0^1 dx N(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx N(x). \quad (6.12)$$

Для этого в (6.12) следует подставить  $N = 1 + (f')^2/2$ , выразив  $(f')^2$  из уравнения (6.11), и учесть, что среднее по периоду от  $\hat{H} f' = (\hat{H} f)'$  обращается в нуль. Это даёт

$$\theta(U - 1) = C_1 - 1,$$

и уравнение для фронта приводится к виду

$$-\theta W + \frac{\theta}{2} (f')^2 = -\frac{\theta - 1}{2} \hat{H} f', \quad (6.13)$$

где  $W \equiv U - 1$  есть увеличение скорости пламени за счёт его искривления. Это уравнение в точности совпадает с уравнением Сивашинского–Клавена для стационарного пламени [107].

## В. Учёт конечной ширины фронта пламени

Нетрудно учесть эффекты переноса во фронте на структуру пламени, то есть включить в уравнение Сивашинского–Клавена члены, пропорциональные ширине фронта  $l_f$ . В первом порядке разложения по ширине фронта скачок комплексной скорости и завихренность на фронте имеют вид

$$[\omega] = (\theta - 1) \frac{1 - i f'}{N} v_-^n, \quad \sigma_+ = -\frac{1}{N v_-^n} \left\{ \frac{\theta - 1}{2\theta} (v_-^\tau)^2 + \frac{\theta - 1}{2} (v_-^n)^2 + 2\mathcal{L}_\sigma \frac{f''}{N^3} \right\}',$$

где

$$v_-^n = 1 - \mathcal{L}_c \frac{f''}{N^3} - \mathcal{L}_s \frac{(v_-^\tau)'}{N}. \quad (6.14)$$

С появлением нового параметра длины возникает вопрос о том, какой порядок малости следует приписать производным основных величин в рамках разложения по  $(\theta - 1) \equiv \alpha$ . Наименьшей характерной длиной, определяющей структуру пламени, является длина волны обрезания неустойчивых возмущений пламени,  $\lambda_c$ , которая как раз пропорциональна ширине фронта. Как известно из линейной теории устойчивости пламени,  $\lambda_c = O(1/\alpha)$  [см. обсуждение формулы (1.4)]. Отсюда следует, что дифференцирование по  $x$  любого поля повышает его порядок малости по  $(\theta - 1)$  на единицу. Например, поскольку  $f' = O(\alpha)$ ,  $\tilde{u}_- = O(\alpha^2)$ , то  $f'' = O(\alpha^2)$ ,  $\tilde{u}'_- = O(\alpha^3)$ . Имея это в виду и замечая, что в членах  $[\omega]'$  и  $\sigma_+$  достаточно написать  $v_-^\tau = f' + O(\alpha^2)$ ,  $v_-^n = 1 - (\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_s)f'' + O(\alpha^3)$ , получаем

$$\frac{N v_+^n \sigma_+ \omega_+}{v_+^2} = -\frac{\alpha}{\theta} f' f'' + \alpha [(\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_s) f''']' - 2\mathcal{L}_\sigma f''' + O(\alpha^5), \quad (6.15)$$

$$[\omega]' = -i\alpha f'' - \frac{\alpha}{2} (f'^2)' - \alpha [(\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_s) f''']' + O(\alpha^5), \quad (6.16)$$

Подставляя эти разложения в (4.40) и действуя как в §6.2А, приходим к системе двух вещественных уравнений

$$\begin{aligned} 2u_- - 2[\alpha(\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_s) - \mathcal{L}_\sigma] f'' + \alpha \hat{H} f' &= C, \\ 2w_- - \alpha f' &= 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Остаётся подставить  $u_-$  и  $w_-$ , найденные из этих уравнений, в уравнение эволюции, разложенное до третьего порядка. Для этого пишем

$$v_-^\tau = \frac{w_- + f' u_-}{N} = f' + w_- + O(\alpha^3) = \frac{\theta + 1}{2} f' + O(\alpha^3), \quad (6.18)$$

и поэтому

$$v_-^n = \frac{u_- - f'w_-}{N} = 1 - \left[ \mathcal{L}_c f'' + \mathcal{L}_s \frac{\theta + 1}{2} f'' \right] + O(\alpha^4).$$

Таким образом, окончательно получаем следующее уравнение

$$-\theta W + \frac{\theta}{2}(f')^2 = \frac{\theta - 1}{2} \left( -\hat{H} f' + \frac{\lambda_c}{2\pi} f'' \right), \quad (6.19)$$

где

$$\lambda_c = \frac{4\pi}{\theta - 1} \left[ \theta \mathcal{L}_c + \frac{3\theta - 1}{2} \mathcal{L}_s - \mathcal{L}_\sigma \right]. \quad (6.20)$$

Во втором порядке по  $(\theta - 1)$  оно сводится к уравнению Сивашинского [106]

$$-W + \frac{(f')^2}{2} = \frac{\theta - 1}{2} \left( -\hat{H} f' + \frac{\lambda_c}{2\pi} f'' \right). \quad (6.21)$$

### §6.3. Приближение четвёртого порядка

Покажем теперь, что и в следующем, четвертом порядке по  $(\theta - 1)$  мастер-уравнение вместе с уравнением эволюции может быть сведено к уравнению для положения фронта. Попутно будет продемонстрировано, что результат в точности совпадает с уравнением, полученным совершенно иным способом. Для краткости, вывод проводится для пламени нулевой ширины. Эффекты конечной ширины обычно учитываются в линеаризованном виде, и поэтому соответствующие члены в получаемом уравнении легко могут быть восстановлены путём сравнения с линейной теорией устойчивости плоского пламени.

#### A. Уравнение для положения фронта пламени

Во-первых, уточнения требует формула (6.7)

$$u_-^2 + w_-^2 = 1 + \frac{(f'u_- + w_-)^2}{N^2} = 1 + (f')^2 + 2f'w_- + O(\alpha^4). \quad (6.22)$$

Подставляя это выражение в мастер-уравнение и используя формулу (B.6) для разложения оператора  $\hat{\mathcal{H}}$ , имеем после однократного интегрирования по  $x$

$$\begin{aligned} & \omega_- + \frac{\theta - 1}{2} (1 + i\hat{H}) \left\{ \frac{1 - if'}{N} + \frac{(f')^2 + 2f'w_-}{2\theta} \right\} \\ & - i \frac{\theta - 1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{x}}{\bar{x} - x} f''(\bar{x}) [f(\bar{x}) - f(x)] = C. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Далее, выражая  $w_-$  в фигурных скобках с помощью уравнения третьего порядка (6.17), находим с нужной точностью

$$\omega_- - \frac{\theta - 1}{2} (1 + i\hat{H}) \left( \frac{if'}{N} \right) - i \frac{\theta - 1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{x}}{\bar{x} - x} f''(\bar{x}) [f(\bar{x}) - f(x)] = C.$$

Последний член в левой части является чисто мнимым и поэтому появляется лишь в выражении для  $w_-$ . Но поскольку он является величиной  $O(\alpha^4)$ , а в уравнении эволюции  $w_-$  умножается на  $f'$ , то его можно опустить. Таким образом,

$$u_- + \frac{\theta - 1}{2} \hat{H} \left( \frac{f'}{N} \right) = C_1, \quad (6.24)$$

тогда как для  $w_-$  можно использовать уравнение третьего порядка (6.17) (с  $C_2 = 0$ ).

Подстановка в уравнение эволюции даёт

$$N - C_1 = \frac{\theta - 1}{2} \left\{ - (f' + \hat{H}) \left( \frac{f'}{N} \right) \right\}.$$

Здесь в левой части следует подставить

$$N = 1 + \frac{(f')^2}{2} - \frac{(f')^4}{8},$$

а в правой части в этом разложении достаточно удержать первые два члена. Усредняя результат по  $x$  как в §6.2А, константа  $C_1$  может быть выражена через  $W$ . В итоге получается

$$\frac{\theta}{2}(f')^2 - \frac{(f')^4}{8} - \frac{\theta - 1}{4} \hat{H}(f')^3 - \theta W = -\frac{\theta - 1}{2} \hat{H} f'. \quad (6.25)$$

### В. Решение уравнения (6.25)

Замечательно, что с той же точностью четвёртого порядка функциональная структура уравнения (6.25) может быть сведена к виду (6.13). Для этого воспользуемся уравнением Сивашинского (для пламени нулевой ширины) для того, чтобы понизить степень по  $f'$  в членах третьего и четвёртого порядка. Именно, записав (6.21) в виде

$$\frac{(f')^2}{2} = W - \frac{\theta - 1}{2} \hat{H} f' \quad (6.26)$$

и возведя обе части в квадрат, слагаемое  $(f')^4/8$  в левой части уравнения (6.25) заменяем на

$$\frac{1}{2} \left[ W^2 - W(\theta - 1) \hat{H} f' + \frac{(\theta - 1)^2}{4} (\hat{H} f')^2 \right].$$

Далее, умножая (6.26) на  $f'$  и действуя оператором Гильберта, член  $\hat{H}(f')^3/2$  переписывается как

$$\hat{H} \frac{(f')^3}{2} = W \hat{H} f' - \frac{\theta - 1}{4} \left[ (\hat{H} f')^2 - (f')^2 \right],$$

где было использовано тождество (A.15)

$$2\hat{H} (a\hat{H}a) = (\hat{H}a)^2 - a^2.$$

Подставляя эти выражения в (6.25) и восстанавливая линейное слагаемое с  $\lambda_c$ , получаем

$$\frac{2\theta^2 (f')^2}{(\theta + 1)^2} - \left( \theta W + \frac{W^2}{2} \right) = \frac{\theta - 1}{2} \left( -\hat{H} f' + \frac{\lambda_c}{2\pi} f'' \right). \quad (6.27)$$

Решения этого уравнения могут быть построены с помощью так называемого полюсного разложения [116]. Для этого ищем их в виде

$$f(x) = A \sum_{k=1}^{2P} \ln \sin \left[ \frac{\pi}{2} (x - x_k) \right]. \quad (6.28)$$

Поскольку функция  $f(x)$  вещественна, комплексные параметры (полюса)  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, 2P$  входят комплексно сопряжёнными парами ( $P$  обозначает число этих пар). Подставляя (6.28) в (6.27) с помощью формул

$$\begin{aligned} \hat{H} f' &= -\frac{\pi A}{2} \sum_{k=1}^{2P} \left\{ 1 + i \chi(\text{Im } x_k) \text{ctg} \left[ \frac{\pi}{2} (x - x_k) \right] \right\}, \\ \text{ctg } x \text{ctg } y &= -1 + \text{ctg}(x - y)(\text{ctg } y - \text{ctg } x) \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\lambda_c}{2\pi} \frac{\theta - 1}{4\theta^2} (\theta + 1)^2, \\ \theta W + \frac{W^2}{2} &= \frac{(\theta^2 - 1)^2}{8\theta^2} \frac{P\lambda_c}{2} \left( 1 - \frac{P\lambda_c}{2} \right), \end{aligned} \quad (6.29)$$

а для  $x_k$  имеем систему алгебраических уравнений

$$i \chi(\text{Im } x_k) + \frac{\lambda_c}{2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{2P} \text{ctg} \left[ \frac{\pi}{2} (x_k - x_m) \right] = 0, \quad k = 1, \dots, 2P. \quad (6.30)$$

Как видно из (6.29), решение (6.28) не единственно: в общем случае имеется набор решений, соответствующих различным числам пар полюсов  $P$ . Как показывает анализ устойчивости решений рассматриваемого типа уравнений [129, 130], устойчивым является решение, максимизирующее скорость пламени, то есть  $W$ , причём полюса оказываются расположенными в комплексной плоскости на одной вертикали. Для таких решений имеется

верхняя граница для числа полюсов, а именно, полагая в (6.30)  $k = k_0$ , для которого  $\text{Im } x_{k_0}$  является наибольшей, имеем

$$1 = \frac{\lambda_c}{2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k_0}}^{2P} \text{cth} \left[ \frac{\pi}{2} (\text{Im } x_{k_0} - \text{Im } x_m) \right] \geq \frac{\lambda_c}{2} (2P - 1).$$

(равенство достигается для  $\text{Im } x_{k_0} = \infty$ ). Тогда из (6.29) следует, что максимум  $W$  равен

$$W_{\max} = -\theta + \sqrt{\theta^2 + \frac{(\theta^2 - 1)^2}{16\theta^2}}$$

и достигается для

$$P_{\max} = \text{Int} \left( \frac{1}{\lambda_c} + \frac{1}{2} \right), \quad (6.31)$$

где  $\text{Int}(x)$  обозначает целую часть  $x$ . На Рис. 12 изображена зависимость максимального увеличения скорости пламени от коэффициента теплового расширения, даваемая решениями уравнения Сивашинского и его уточнений – уравнений третьего и четвёртого порядка (6.13), (6.27), где она сравнивается с результатами прямого численного эксперимента в узких трубах ( $b \sim \lambda_c$ ). Как видно, при увеличении порядка аппроксимации по  $(\theta - 1)$  теоретическая кривая  $W_{\max}(\theta)$  приближается к экспериментальным значениям даже при таких  $\theta$ , где разложение по  $(\theta - 1)$  заведомо неприменимо.

На практике, однако, в трубах шириной порядка  $\lambda_c$  (что обычно составляет несколько миллиметров) пламени не распространяются из-за тепловых потерь в стенки трубы. С другой стороны, в широких трубах ( $b \gg \lambda_c$ ) полученное выражение для скорости пламени противоречит наблюдениям. Дело в том, что  $W_{\max}$  оказалась независимой от  $\lambda_c$ , а следовательно, и от ширины трубы (напомним, что  $b$  присутствует в формулах неявно, так как  $\lambda_c$  измеряется в единицах ширины трубы). Но из (6.29) следует, что при увеличении  $b$  (то есть при  $\lambda_c \rightarrow 0$ )  $W$  стремится к постоянной величине  $W_{\max}$ , что резко противоречит наблюдаемому в реальном и численном экспериментах росту скорости пламени с шириной трубы [70, 71, 76, 77, 80, 81, 112–115].

Таким образом, применимость слабонелинейного разложения заведомо ограничена узкими трубами. Полученные результаты далее обсуждаются с точки зрения точного мастер-уравнения в главе 12.

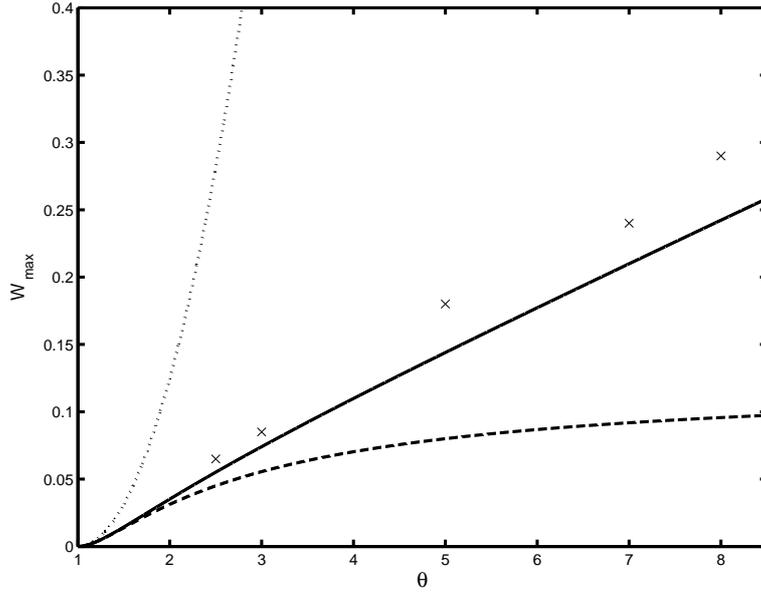


Рис. 12: Зависимость максимального увеличения скорости пламени от коэффициента теплового расширения газа согласно уравнению Сивашинского (точечная линия) и его уточнениям – уравнению Сивашинского–Клавена (пунктирная линия) и уравнению четвёртого порядка (6.27) (сплошная линия). Крестиками отмечены результаты прямого численного моделирования в трубах шириной  $\sim \lambda_c$  [112, 114] (погрешность моделирования  $\approx 10\%$ ).

## 7. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА [A1,A2,A3]

Уравнение для положения фронта пламени с учётом членов  $O(\alpha^4)$  можно получить и без использования мастер-уравнения. Этот вывод был дан до открытия мастер-уравнения и является более длинным, но доставляет ещё одну независимую проверку нового подхода.

### §7.1. Трансверсальное представление

Установим сперва два следствия основных уравнений, описывающих течения газа, порождаемые пламенем. Во-первых, из уравнения (4.2) имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \Delta p. \quad (7.1)$$

Поскольку завихрённость является величиной  $O(\alpha^4)$ , а каждое дифференцирование по координатам увеличивает порядок величины на единицу, то, разлагая обычным образом

поле скорости продуктов горения на потенциальную и вихревую компоненты  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_v$  (индексы  $p, v$  в настоящей главе удобнее писать снизу), имеем  $\mathbf{v}_v = O(\alpha^3)$ , а согласно §6.1

$$u_p = u_* + \tilde{u}_p, \quad u_* = \theta + O(\alpha^2), \quad \tilde{u}_p = O(\alpha^2), \quad w_p = \tilde{w}_p = O(\alpha^2). \quad (7.2)$$

Вклад порядка  $\alpha^2$  в константу  $u_*$  фиксируется условием  $\tilde{u}_p \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Подстановка (7.2) в (7.1) даёт

$$\frac{\partial(\tilde{v}_p)_i}{\partial x_k} \frac{\partial(\tilde{v}_p)_k}{\partial x_i} + O(\alpha^7) = -\frac{1}{\rho} \Delta p,$$

откуда следует, что с данной точностью поле давления определяется потенциальной компонентой скорости, так что уравнения Эйлера можно писать в виде

$$(v_p)_i \frac{\partial(v_p)_k}{\partial x_i} + O(\alpha^6) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k}.$$

Их интегрирование обычным образом [43] приводит к уравнению типа Бернулли

$$p + \frac{1}{2\theta} [(w_p)^2 + (u_p)^2] + O(\alpha^5) = \text{const}. \quad (7.3)$$

Во-вторых, покажем, что если точные уравнения Эйлера

$$w \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7.4)$$

$$w \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7.5)$$

ограничить на фронт пламени, то с точностью до членов  $O(\alpha^5)$  включительно одно из них будет следовать из другого. Для этого с помощью определения (4.5) и формулы (4.44) перепишем эти уравнения в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{w^2 + u^2}{2} \right)_+ + \frac{\theta - 1}{2} \frac{d}{dx} (w_-^2 + u_-^2) = -\theta \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_+ + O(\alpha^6), \quad (7.6)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{w^2 + u^2}{2} \right)_+ = -\theta \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_+ + O(\alpha^6). \quad (7.7)$$

Умножая (7.7) на  $f'$  и складывая с (7.6), получаем соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (w_+^2 + u_+^2)_+ + \frac{\theta - 1}{2} \frac{d}{dx} (w_-^2 + u_-^2) = -\theta \frac{dp_+}{dx} + O(\alpha^6),$$

которое с учётом условий скачка  $w_+^2 + u_+^2 = w_-^2 + u_-^2 + \theta^2 - 1$ ,  $p_+ = p_- - (\theta - 1)$  и уравнения Бернулли для течения холодной смеси

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{w_-^2 + u_-^2}{2} + p_- \right) = 0$$

превращается в верное тождество.

Ниже будет показано, что в приближении  $\alpha^4$  ограничения уравнений Эйлера на фронт достаточно для вывода уравнения для  $f(x)$ , а в силу только что доказанного для этого достаточно одного уравнения (7.5). С учётом (7.3) и равенств  $\operatorname{div} \mathbf{v}_p = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{v}_p = 0$  оно может быть переписано в виде

$$u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial x} - u^p \frac{\partial w^p}{\partial x} + w_p \frac{\partial u_p}{\partial x} = O(\alpha^6), \quad (7.8)$$

в котором переменная  $y$  играет роль параметра.

Далее, согласно (4.12) общий вид периодического  $[\tilde{\mathbf{v}}_p(x+2, y) = \tilde{\mathbf{v}}_p(x, y)]$  потенциального поля, убывающего при  $y \rightarrow \infty$ , есть

$$\begin{aligned} \tilde{u}_p &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_n \exp(-\pi|n|y + i\pi nx), \quad \tilde{u}_0 = 0, \\ \tilde{w}_p &= -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(n) \tilde{u}_n \exp(-\pi|n|y + i\pi nx). \end{aligned}$$

Заметим, что по построению  $\langle \tilde{\mathbf{v}}_p \rangle = 0$ . С помощью формулы (A.13) для оператора Гильберта связь между  $u_p$  и  $w_p$  также можно представить в виде, в котором  $y$  играет роль параметра:

$$\tilde{w}_p = -\hat{H} \tilde{u}_p. \quad (7.9)$$

Аналогичное соотношение имеет место для течения холодного газа:

$$\tilde{w} = \hat{H} \tilde{u}, \quad (7.10)$$

где  $\tilde{u} = u - U$ . В этой главе полям будет приписываться дополнительный верхний индекс “+” (“-”), указывающий, что данное поле описывает течение продуктов горения (холодного газа). Взяв ограничения уравнений (7.3), (7.8), (7.9), (7.10) на фронт пламени и дополнив их условиями скачка на фронте и уравнением эволюции, записываем полученную

систему уравнений в виде

$$\left( \begin{array}{r} u^+ - u^- = (\theta - 1)/N \\ w^+ - w^- = -(\theta - 1)f'/N \\ p^+ - p^- = -(\theta - 1) \\ u^- - f'w^- = N \\ w^- = \hat{H}\tilde{u}^- \\ p^- + \frac{1}{2}\{(u^-)^2 + (w^-)^2\} = \text{const}_1 \\ p^+ + \frac{1}{2\theta}\{(u_p^+)^2 + (w_p^+)^2\} = \text{const}_2 \\ \tilde{w}_p^+ = -\hat{H}\tilde{u}_p^+ \\ u^+ \frac{\partial w^+}{\partial x} - w^+ \frac{\partial u^+}{\partial x} - u_p^+ \frac{\partial w_p^+}{\partial x} + w_p^+ \frac{\partial u_p^+}{\partial x} = 0 \end{array} \right)_{y=f(x)} \quad (**)$$

Эта система имеет точность до членов  $O(\alpha^5)$  включительно, а символы  $O(\alpha^6)$  для краткости опущены. Переменная  $y$  играет в ней роль параметра, и это свойство *трансверсальности* позволяет получить из неё уравнение для функции  $f(x)$ .

### §7.2. Сведение системы (\*\*) к уравнению для $f(x)$

Предположим, что найдено решение  $f = f(x)$ ,  $\mathbf{v}^- = \mathbf{v}^-(x, y)$ ,  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^+(x, y)$  и т.д. системы уравнений в больших скобках (\*\*). Тогда, в частности, эти уравнения удовлетворяются и при  $y = f(x)$ . С другой стороны, поскольку переменная  $y$  играет в ней роль параметра, то есть никаких операций с зависимостью полей от  $y$  в ней не производится, функция  $f(x)$  должна быть одной и той же для всех возможных решений системы (\*\*). Поскольку истинное решение ей также удовлетворяет, то при условии, что уравнений этой системы достаточно для получения замкнутого уравнения для  $f(x)$ , это уравнение будет истинным. Поскольку в силу сказанного можно делать любые предположения о зависимости полей от  $y$ , выберем решение, в котором все поля являются независимыми от  $y$ . Тогда символ перехода на фронт пламени можно опустить, и мы приходим к следующей

системе

$$v^+ - v^- = (\theta - 1)/N \quad (7.11)$$

$$\omega^+ - \omega^- = -(\theta - 1)f'/N \quad (7.12)$$

$$\pi^+ - \pi^- = -(\theta - 1) \quad (7.13)$$

$$v^- - f'\omega^- = N \quad (7.14)$$

$$\omega^- = \hat{H}\tilde{v}^- \quad (7.15)$$

$$\pi^- + \frac{1}{2}\{(v^-)^2 + (\omega^-)^2\} = \text{const}_1 \quad (7.16)$$

$$\pi^+ + \frac{1}{2\theta}\{(v_p^+)^2 + (\omega_p^+)^2\} = \text{const}_2 \quad (7.17)$$

$$\tilde{\omega}_p^+ = -\hat{H}\tilde{v}_p^+ \quad (7.18)$$

$$v^+ \frac{d\omega^+}{dx} - \omega^+ \frac{dv^+}{dx} - v_p^+ \frac{d\omega_p^+}{dx} + \omega_p^+ \frac{dv_p^+}{dx} = 0, \quad (7.19)$$

где  $v, \omega, \pi$  обозначают независящие от  $y$  поля  $u, w, p$ , соответственно. Покажем теперь, что следствием этой системы является замкнутое уравнение для  $f(x)$ . С геометрической точки зрения уравнения (7.13), (7.16), (7.17) определяют амплитуду  $\Omega$  комплексной функции

$$v_p^+ + i\omega_p^+ \equiv \Omega e^{i\phi_p}, \quad (7.20)$$

тогда как (7.19) даёт скорость изменения её фазы  $\phi_p$  вдоль фронта. Действительно, (7.19) можно переписать как

$$\frac{d\phi_p}{dx} = \frac{v^+ d\omega^+/dx - \omega^+ dv^+/dx}{(v_p^+)^2 + (\omega_p^+)^2}. \quad (7.21)$$

Тогда уравнения (7.11), (7.12), (7.14) и (7.15) позволяют выразить правую часть (7.21) через  $f(x)$ , а уравнение (7.18) играет роль условия самосогласованности, которое даёт уравнение для самой функции  $f(x)$ . А именно, из (7.13), (7.16), (7.17) следует

$$\Omega^2 = (v_p^+)^2 + (\omega_p^+)^2 = \theta \{(v^-)^2 + (\omega^-)^2 + A\}, \quad (7.22)$$

с некоторой постоянной  $A$ . Поскольку с точностью до величин  $O(\alpha^2)$  включительно течение продуктов горения потенциально ( $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p$ ), то, вычисляя обе части этого равенства на стенке трубы ( $u_- = 1, w_- = 0, u_+ = \theta, w_+ = 0$ ), заключаем, что  $A = \alpha + O(\alpha^3)$ . Далее, решая (7.11), (7.12) относительно  $v^+, \omega^+$  и используя (7.22), получаем

$$\frac{d\phi_p}{dx} = \frac{(U + \tilde{v}^- + \frac{\theta-1}{N}) \left( \hat{H}\tilde{v}^- - f' \frac{\theta-1}{N} \right)' - \left( \hat{H}\tilde{v}^- - f' \frac{\theta-1}{N} \right) (\tilde{v}^- + \frac{\theta-1}{N})'}{\theta \left\{ (U + \tilde{v}^-)^2 + (\hat{H}\tilde{v}^-)^2 + A \right\}}. \quad (7.23)$$

Из уравнений (7.14) и (7.15) следует, что функция  $\tilde{v}^-(x)$ , входящая в это равенство, может быть выражена через  $f(x)$  обращением оператора  $(1 - f'\hat{H})$  :

$$\tilde{v}^- = (1 - f'\hat{H})^{-1}(N - U) = (1 + f'\hat{H} + f'\hat{H}f'\hat{H} + \dots)(N - U). \quad (7.24)$$

По определению числа  $V$  функция  $(N - U)$  имеет нулевое среднее, так что действие оператора  $\hat{H}$  на неё определено корректно. В нижеследующих вычислениях удобно использовать расширение этого оператора, в котором он доопределён нулём на постоянных функциях (помня при этом, что тождество  $\hat{H}^2 = -1$  справедливо лишь на функциях с нулевым средним). Наконец, уравнение для  $f(x)$  следует из (7.18), которое в терминах  $\Omega$  и  $\phi_p$  принимает вид

$$(\text{Im} + \text{Re}\hat{H})(\Omega e^{i\phi_p} - u_*) = 0. \quad (7.25)$$

Для того чтобы объединить (7.22), (7.23), (7.25) в одно уравнение, требуется разрешить (7.25) относительно  $\phi_p$ . Как показано в Приложении А3, результат имеет вид

$$\phi_p = -\hat{H}(\ln \Omega - \langle \ln \Omega \rangle). \quad (7.26)$$

Для функции  $f(x)$  получаем таким образом уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2} \frac{d}{dx} \ln \left\{ (U + v)^2 + (\hat{H}v)^2 + A \right\} \\ &= \hat{H} \left\{ \frac{(U + v + \frac{\theta-1}{N}) \left( \hat{H}v - f' \frac{\theta-1}{N} \right)' - \left( \hat{H}v - f' \frac{\theta-1}{N} \right) (v + \frac{\theta-1}{N})'}{(U + v)^2 + (\hat{H}v)^2 + A} \right\}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

где обозначено

$$v \equiv (1 - f'\hat{H})^{-1}(N - U). \quad (7.28)$$

### §7.3. Уравнение (7.27) в четвёртом порядке разложения по $(\theta - 1)$

Согласно формуле (7.28) имеем  $v = O(\alpha^2)$ , следовательно,

$$\left( \hat{H}v - f' \frac{\theta-1}{N} \right)' = O(\alpha^3), \quad \left( v + \frac{\theta-1}{N} \right)' = v' + O(\alpha^4).$$

Поэтому постоянную  $A$  в (7.27) достаточно заменить на  $\alpha$  и разложить знаменатель с точностью до членов  $O(\alpha^2)$  включительно. Это даёт

$$\frac{(U + v + \frac{\theta-1}{N}) \left( \hat{H}v - f' \frac{\theta-1}{N} \right)'}{(U + v)^2 + (\hat{H}v)^2 + A} = (1 - W - v) \left( \hat{H}v - f' \frac{\theta-1}{N} \right)' + O(\alpha^6),$$

$$\frac{(\hat{H}v - f' \frac{\theta-1}{N}) (v + \frac{\theta-1}{N})'}{(U+v)^2 + (\hat{H}v)^2 + A} = v' \hat{H}v - \alpha v' f' + O(\alpha^6).$$

Аналогичным образом для левой части (7.27) находим

$$\frac{\theta}{2} \frac{d}{dx} \ln \left\{ (U+v)^2 + (\hat{H}v)^2 + A \right\} = v' - (W+v)v' + (\hat{H}v) \hat{H}v' + O(\alpha^6).$$

После подстановки этих разложений в уравнение (7.27) оно интегрируется по  $x$ :

$$2v - 2Wv - \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} (\hat{H}v)^2 + \hat{H} (v \hat{H}v) + \alpha(1-W) \hat{H} \left( \frac{f'}{N} \right) - \alpha \hat{H} \left( \frac{v f'}{N} \right) = C + O(\alpha^5),$$

где постоянная интегрирования  $C$  будет найдена усреднением по  $x$  окончательного уравнения. Выполняя теперь подстановку

$$v = \frac{f'^2}{2} - W - \frac{f'^4}{8} + \frac{f'}{2} \hat{H} f'^2 + \frac{f'}{2} \hat{H} (f' \hat{H} f'^2)$$

в каждом члене и применяя тождество (A.15), получаем

$$\begin{aligned} f'^2 - 2W + f' \hat{H} f'^2 - \frac{f'^4}{2} + W^2 + f' \hat{H} (f' \hat{H} f'^2) + \frac{1}{4} (\hat{H} f'^2)^2 + \alpha \hat{H} f' - \alpha \hat{H} f'^3 \\ = C + O(\alpha^5). \end{aligned} \quad (7.29)$$

В третьем порядке это уравнение сводится к

$$f'^2 - 2W + f' \hat{H} f'^2 + \alpha \hat{H} f' = C + O(\alpha^4),$$

или, выразив отсюда  $f'^2$  и подставив в член третьего порядка,

$$\theta f'^2 - 2W = -\alpha \hat{H} f' + C + O(\alpha^4),$$

где было использовано тождество  $\hat{H}^2 f' = -f'$ . Усреднением по  $x$  находим отсюда  $C = 2\alpha W + O(\alpha^4)$ , и уравнение третьего порядка совпадает с уравнением Сивашинского–Клавена (6.13). С его помощью аналогичным образом упрощаются члены высших порядков в уравнении (7.29), которое в результате принимает вид

$$\left( 1 + \frac{\alpha}{\theta} + \frac{3}{4} \alpha^2 \right) f'^2 - 2W + W^2 = -\alpha \hat{H} f' + C + O(\alpha^4).$$

Но

$$1 + \frac{\alpha}{\theta} + \frac{3}{4} \alpha^2 = \frac{4\theta^2}{(\theta+1)^2} + O(\alpha^3)$$

и поэтому полученное уравнение в точности совпадает с уравнением четвертого порядка (6.27) для пламени нулевой ширины ( $\lambda_c = 0$ ).

## Часть III

# Сильнонелинейные режимы распространения тонких ламинарных пламён

### 8. ПЛАМЯ В БЫСТРОМ ПОТОКЕ ГАЗА [A8,A9]

Оболочечное описание, развитое в главе 4, относится к тонким ламинарным пламёнам, свободно распространяющимся в трубах. Однако оно легко обобщается на тонкие ламинарные пламёна, удерживаемые в потоках газа с помощью различного рода стержней. Каждый такой стержень играет роль ведущей точки пламени, от которой поджигающий импульс распространяется вниз по течению газа. Пламя удерживается стержнем потому, что в непосредственной его окрестности скорость газа сильно падает, причём стержень может располагаться как перед фронтом пламени, так и за ним, то есть в продуктах горения.

Впервые задача этого рода была рассмотрена Я.Б. Зельдовичем в 1944 г. для случая горения быстрого потока газа в трубе [160]. Ввиду её большой практической важности данная конфигурация независимо исследовалась в середине XX века и другими специалистами [161, 162]. С целью получить замкнутое уравнение для положения фронта во всех этих исследованиях принималось без доказательства, что давление газа постоянно в каждом поперечном сечении трубы, и соответственно, поперечной компонентой скорости газа можно пренебречь. Позже было показано, что это допущение оправдывается, если предположить, что поля давления и скорости газа некоторым простым образом зависят от начальной скорости потока [163]. Это предположение критически анализируется ниже, а затем задача о пламени, удерживаемом в быстром потоке газа, решается без каких-либо дополнительных предположений о структуре течения газа.

## §8.1. Подход Зельдовича–Скарлока–Тзяна

При большой скорости  $U$  натекающего потока пламя вытягивается вдоль трубы, что в предположении постоянства давления в каждом сечении трубы позволяет существенно упростить уравнения Эйлера и получить интегральное уравнение для положения фронта. Эквивалентность различных форм этого уравнения, полученных в работах [160–162], продемонстрировал Г.Г. Черный, который дал следующую математическую формулировку физической идеи, лежащей в его основе [163]. Используя обозначения §4.1 и считая, что стержень находится в точке  $(0, 0)$  [см. Рис. 7], введём новые координаты и поля (отмеченные тильдой) согласно

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y/U, \quad \tilde{u} = u/U, \quad \tilde{w} = w, \quad \tilde{p} = p/U^2, \quad (8.1)$$

где скорость натекающего потока газа  $U \gg 1$ . Если перейти к новым независимым переменным  $(\tilde{y}, \psi)$ , где функция тока  $\psi$  определена как

$$\rho\tilde{u} = \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{x}}, \quad \rho\tilde{w} = -\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{y}}, \quad \psi(0, y) = 0, \quad (8.2)$$

то уравнения (4.2), (8.2) примут вид

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} - \tilde{w}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\psi} = 0, \quad \frac{1}{U^2}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{y}} = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\psi} = \frac{1}{\rho\tilde{u}}, \quad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\tilde{y}} = \frac{\tilde{w}}{\tilde{u}}. \quad (8.3)$$

Основное предположение состоит в том, что при возрастании  $U$  величины  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{p}$  должны оставаться ограниченными вместе со своими производными по  $\tilde{y}, \psi$ . Тогда в пределе  $U \rightarrow \infty$  уравнения (8.3) сводятся к

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\psi} = 0, \quad \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\psi} = \frac{1}{\rho\tilde{u}}, \quad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\tilde{y}} = \frac{\tilde{w}}{\tilde{u}}. \quad (8.4)$$

Первое из них даёт  $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{y})$ , воспроизводя предположение [160–162] о поле давления газа. Решением второго из уравнений является интеграл Бернулли

$$\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = i(\psi), \quad (8.5)$$

в котором функция  $i(\psi)$  произвольна и отсутствует поперечная компонента скорости ( $\tilde{w}$ ). Таким образом, при сделанном предположении о поведении полей скорости и давления газа в пределе  $U \rightarrow \infty$  компонента  $w$  выпадает из динамических уравнений; с помощью последнего из уравнений (8.4) эта компонента выражается через решение  $\tilde{u}(\tilde{y}, \psi)$ ,  $\tilde{p}(\tilde{y})$ ,  $\tilde{x}(\tilde{y}, \psi)$

первых трёх уравнений. Наконец, в [163] показывается, что учёт граничных условий и условий скачка  $\tilde{u}_+ = \tilde{u}_-$ ,  $\tilde{p}_+ = \tilde{p}_-$ ,  $\psi_+ = \psi_-$  приводит к следующему уравнению для положения фронта нулевой ширины как функции продольной скорости газа  $\tilde{y}(\tilde{u}_-)$  [160–162]

$$(\theta - 1) \int_1^{u_1} \frac{u \tilde{y}(u) du}{\sqrt{\theta u_1^2 - (\theta - 1)u^2}} = \frac{(u_1 - 1)^2}{2}, \quad u_1 \equiv \tilde{u}_-. \quad (8.6)$$

Нетрудно, однако, видеть, что в данном подходе зона стагнации в продуктах горения, которая неизбежно образуется при высоких скоростях пламени, не может существовать (для пламени нулевой ширины зона стагнации образуется при любом  $U > 1$  [164]). Это является прямым следствием того факта, что поперечная компонента скорости газа выпала из динамических уравнений, то есть оказалась пассивной. Во-первых, из третьего уравнения (8.4) для течения продуктов горения следует

$$\tilde{x}(\tilde{y}, \psi) = \int_0^\psi d\psi' \frac{\theta}{\tilde{u}(\tilde{y}, \psi')},$$

где учтено граничное условие  $\tilde{x}(\tilde{y}, 0) = 0$ . Тогда из последнего уравнения (8.4) получаем

$$\tilde{w}(\tilde{y}, \psi) = -\theta \tilde{u}(\tilde{y}, \psi) \int_0^\psi d\psi' \tilde{u}^{-2}(\tilde{y}, \psi') \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{y}, \psi')}{\partial \tilde{y}}. \quad (8.7)$$

Но при условии постоянства давления газа в каждом поперечном сечении трубы должно быть  $\partial \tilde{u}(\tilde{y}, \psi) / \partial \tilde{y} = 0$  при  $\tilde{y} > 1$ . Действительно, при  $\tilde{y} > 1$  должна располагаться зона стагнации, примыкающая к стенке  $\tilde{x} = 1$ , (см. §4.1 и Рис. 7). В этой зоне давление газа постоянно, а следовательно, в силу его предполагаемого постоянства в каждом сечении трубы,  $\tilde{p} = \text{const}$  во всей области  $\tilde{y} > 1$ . Поэтому из (8.5) следует  $\tilde{u} = \tilde{u}(\psi)$ , то есть,  $\partial \tilde{u}(\tilde{y}, \psi) / \partial \tilde{y} = 0$ . Из уравнения (8.7) тогда следует  $\tilde{w}(\tilde{y}, \psi) = 0$  при всех  $\psi$  и  $\tilde{y} > 1$ , то есть течение газа параллельно стенкам трубы по всему её сечению, что невозможно при наличии области стагнации. Полученное противоречие указывает на неадекватность сделанного предположения о том, что зависимость полей от  $U$  сводится к простому масштабированию (8.1). Хотя соотношение  $|\partial p / \partial x| \ll |\partial p / \partial y|$ , следующее из условия  $w \ll u$ , имеет место на всём протяжении трубы, неоднородность течения газа, вносимая пламенем, делает зависимость полей от  $U$  более сложной.

**§8.2. Мастер-уравнение при наличии удерживающего стержня**

Рассмотрим простейший и практически наиболее важный случай, когда имеется один тонкий металлический стержень, расположенный в какой-либо точке  $(x_0, y_0)$  потока. Математически это означает, что в этой точке комплексная скорость имеет особенность, которая может быть описана следующим образом. Пусть на исходное поле комплексной скорости  $\omega_0(z)$ , которое имелось бы в отсутствие стержня, наложено поле  $\omega^d(z)$  диполя, расположенного в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\omega_0(z) + \frac{d}{(z - z_0)^2} \equiv \omega(z), \quad (8.8)$$

где  $z_0 = x_0 + iy_0$ , а  $d = d_1 + id_2$  есть комплексная постоянная, задающая силу и ориентацию диполя. Для достаточно малого  $|d|$  вызываемое стержнем возмущение исходного поля скорости заметно лишь в малой окрестности диполя. Поскольку  $\omega_0(z)$  аналитична в точке  $z = z_0$ , имеем

$$\omega_0(z) = \omega_0(z_0) + O(|z - z_0|),$$

и следовательно, полная скорость в этой окрестности

$$\omega(z) \approx \omega_0(z_0) + \frac{d}{(z - z_0)^2}. \quad (8.9)$$

Линии тока получаются из условия

$$\psi = \operatorname{Re} \left\{ \omega_0(z_0)(z - z_0) - \frac{d}{z - z_0} \right\} = \operatorname{const},$$

или

$$u_\star(x - x_0) - w_\star(y - y_0) - \frac{d_1(x - x_0) + d_2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \operatorname{const},$$

где  $u_\star$  и  $w_\star$  – вещественная и мнимая части  $\omega_0(z_0)$ . Видно, что если положить  $d_1 = u_\star R^2$ ,  $d_2 = -w_\star R^2$  с произвольным вещественным  $R$ , то семейство линий тока содержит окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$ . Таким образом, добавление члена  $\omega^d(z) = \overline{\omega_0(z_0)} R^2 / (z - z_0)^2$  к  $\omega_0(z)$  описывает изменение поля скорости данного течения при внесении в него цилиндрического стержня радиуса  $R$  с центром в  $z_0$ .

В отсутствие удерживающего стержня мастер-уравнение получается из следующей си-

стемы

$$(1 - i\hat{\mathcal{H}})(\omega_-)' = 0, \quad (8.10)$$

$$(1 + i\hat{\mathcal{H}})(\omega_+^p)' = 0, \quad (8.11)$$

$$(\omega_+^v(x))' = \frac{M(x)}{v_+^2(x)}\omega_+(x) - (1 + if'(x)) \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle, \quad (8.12)$$

$$\omega_+^p = -\omega_+^v + \omega_- + [\omega]. \quad (8.13)$$

Уравнения (8.10), (8.11) являются следствием аналитичности комплексной скорости. При введении стержня одно из них теряет силу в зависимости от того, располагается ли стержень выше или ниже по течению относительно фронта. Если стержень оказывается в холодном газе, то нарушается (8.10). Однако этому уравнению удовлетворяет  $\omega_0(z) = \omega(z) - \omega^d(z)$ , потому что эта функция является аналитической и ограниченной в области холодного газа. С другой стороны, поскольку функция  $\omega^d(z)$  аналитична и ограничена в области продуктов горения, она удовлетворяет уравнению (8.11). Итак, имеем

$$\begin{aligned} (1 - i\hat{\mathcal{H}})(\omega_- - \omega_-^d)' &= 0, \\ (1 + i\hat{\mathcal{H}})(\omega_+^d)' &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\omega_-^d = \omega_+^d$ , заключаем, что в рассматриваемом случае уравнение (8.10) должно быть заменено на

$$(1 - i\hat{\mathcal{H}})(\omega_-)' = 2(\omega_-^d)'.$$

Соответственно, действуя на (8.13) оператором  $(1 + i\hat{\mathcal{H}})$ , получаем искомое обобщение мастер-уравнения

$$2(\omega_-)' + (1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ [\omega]' - \frac{M(x)}{v_+^2(x)}\omega_+(x) + (1 + if'(x)) \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle \right\} = 2(\omega_-^d)'. \quad (8.14)$$

В случае когда стержень расположен в области продуктов горения, что обычно имеет место на практике и будет предполагаться ниже, аналогичное рассмотрение показывает, что уравнение (8.11) заменяется на

$$(1 + i\hat{\mathcal{H}})(\omega_+^p - \omega_+^d)' = 0,$$

а  $\omega^d$  удовлетворяет

$$(1 - i\hat{\mathcal{H}})(\omega_+^d)' = 0.$$

При этом окончательный вид мастер-уравнения оказывается тем же (8.14).

**§8.3. Замена стержня эквивалентными граничными условиями. Сведение (8.14) к системе ОДУ**

В быстром потоке скорость натекающего холодного газа велика:  $U \gg 1$ . Поскольку нормальная скорость газа при любом  $U$  остаётся вблизи единицы ( $v_n^* = 1$  для фронта нулевой ширины), то при  $U \gg 1$  пламя сильно вытягивается вдоль стенок. В настоящем разделе будет доказано, что в этом случае уравнение (8.14) может быть заменено обычным мастер-уравнением (с нулевой правой частью), а наличие стержня учтено заданием граничного условия для распределения скорости вдоль фронта в точке нахождения стержня.

*А. Скорость газа на фронте пламени вблизи стержня*

Практически наиболее важными являются конфигурации, когда удерживающий стержень располагается либо в центре трубы, либо на её стенке. Их математическое описание одинаково, так как первая конфигурация сводится ко второй в трубе вдвое меньшей ширины. Для определённости далее предполагается, что стержень расположен в точке  $(0, 0)$ , Рис. 13(а). Согласно построению в §8.2, поле скорости тонкого ( $R \ll 1$ ) кругового стержня радиуса  $R$ , помещённого в точку, где скорость газа равна  $U$ , имеет вид

$$\mathbf{v}^d = \frac{UR^2}{r^4}(-2xy, x^2 - y^2), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8.15)$$

Из (8.15) следует, что поперечная ( $w$ ) компонента поля скорости диполя велика лишь при  $r \lesssim R$  и быстро уменьшается при удалении от диполя. В этих условиях решение уравнения (8.14) можно строить, рассматривая две области:  $r \ll 1$ , где зависимость поля скорости от координат определяется вкладом диполя, а исходный поток можно считать однородным, и  $r \gg R$ , где вклад диполя пренебрежимо мал. Решения в этих областях должны сшиваться на расстояниях порядка  $R_0$ , где  $R \ll R_0 \ll 1$ . В частности, в результате сшивания должно определиться значение  $w_-$  в промежуточной области

$$w_-|_{r \sim R_0} = w_0. \quad (8.16)$$

Оценим, далее, зависимость  $R_0$  от  $U$ . При  $r \sim R_0$  и  $y = f(x)$  имеем  $x \simeq R$ ,  $y \sim R_0$ , так что

$$w_-^d|_{r \sim R_0} \sim \frac{UR^2}{R_0^4} R R_0 = \frac{UR^3}{R_0^3}.$$

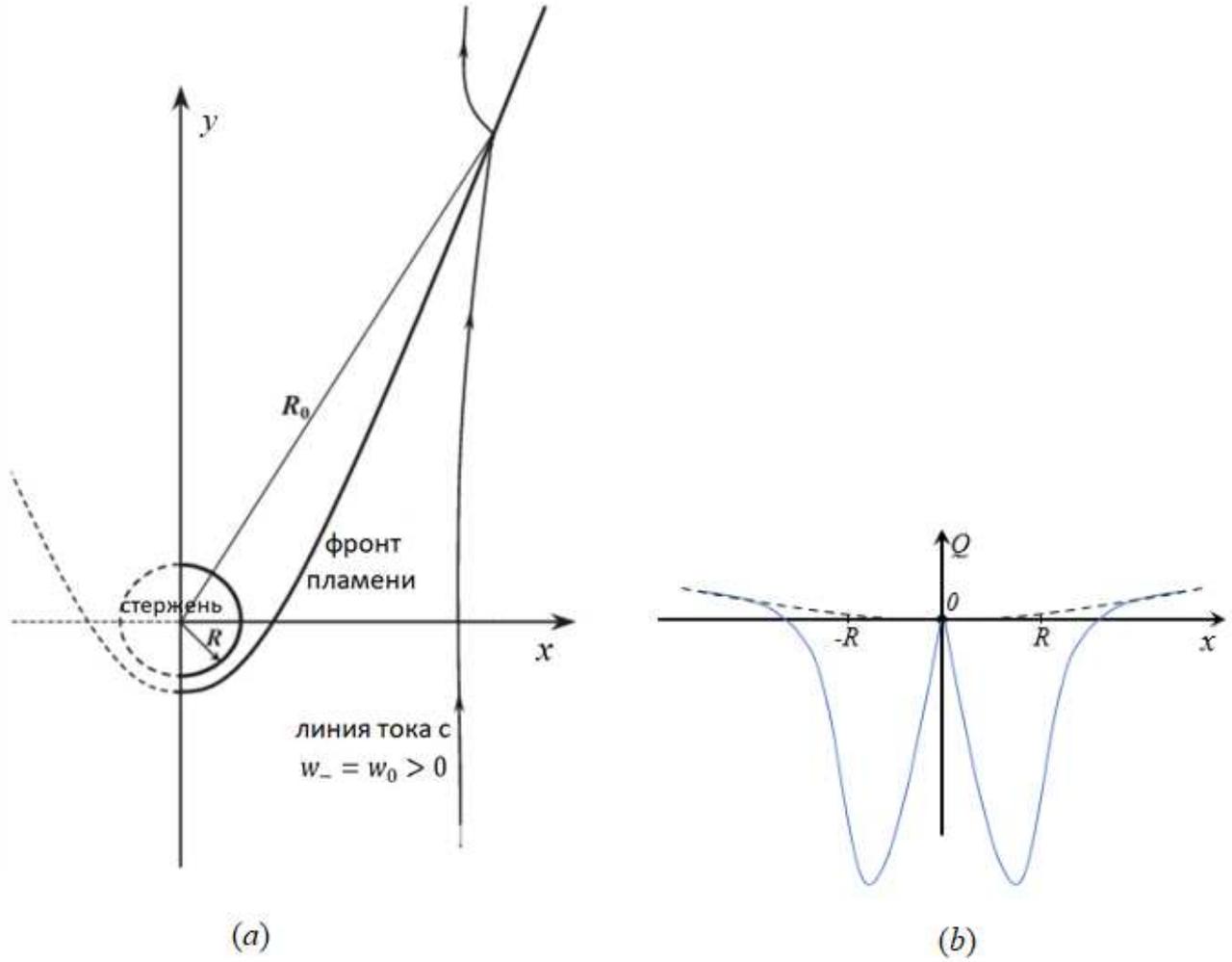


Рис. 13: (a) схематическое изображение пламени вблизи удерживающего стержня малого радиуса  $R$ . Решение, описывающее пламя на расстояниях  $\ll b$ , должно сшиваться с искомым внешним решением на расстояниях  $R_0 \gg R$ , давая в результате значение  $w_0$ . (b) Качественный ход изменения величины  $Q$  из (8.21) вблизи стержня. Сплошная кривая изображает истинный ход функции  $Q(x)$ , пунктирная – экстраполяцию  $Q(x)$ , вычисляемой на медленно меняющемся внешнем решении.

Следовательно, оценка  $w_0 \sim 1$  означает, что  $R_0 \sim U^{1/3} R$ . Учитывая это, находим также

$$u_-^d|_{r \sim R_0} \sim \frac{UR^2}{R_0^4} R_0^2 = U^{1/3}.$$

При достаточно большом  $U$  можно пренебречь  $U^{1/3}$  по сравнению с  $U$ , откуда заключаем, что в ведущем порядке по  $U$  продольная скорость удовлетворяет

$$u_-|_{r \sim R_0} = U. \quad (8.17)$$

## В. Уравнение для продольной компоненты скорости

Прежде всего, определим порядок по  $U$  основных величин, входящих в мастер-уравнение. При  $|f'| \gg 1$  имеем  $N = \sqrt{1 + (f')^2} = |f'| + O(1/f')$ . Поскольку  $U = \int_0^1 dx N$ , то  $|f'| = O(U)$ , за исключением малой окрестности точек  $x = \pm 1$ , в которых  $f' = 0$ , и точки  $x = 0$ , где фронт имеет излом. Уравнение эволюции для пламени нулевой ширины при  $|f'| \gg 1$  принимает вид

$$u_- = f'(w_- + 1), \quad x > 0, \quad (8.18)$$

Так как по условию  $u_- = O(U)$ , то из (8.18) следует, что  $w_- = O(1)$ . Далее,  $[u] = (\theta - 1)/N = O(1/U)$ ,  $[w] = -(\theta - 1)f'/N = O(1)$ , и поэтому  $w_+ = O(1)$ ,  $u_+ = O(U)$ . Используя также (4.44), находим

$$M = Nv_+^n \sigma_+ = O(U^2).$$

Следовательно, для выражения в фигурных скобках в (8.14) имеем оценки

$$\operatorname{Re} \left\{ [\omega]' - \frac{M\omega_+}{v_+^2} + (1 + if'(x)) \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle \right\} = O(U), \quad (8.19)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ [\omega]' - \frac{M\omega_+}{v_+^2} + (1 + if'(x)) \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle \right\} = O(1). \quad (8.20)$$

Выражения (8.19) и (8.20) являются нечётной и чётной функциями  $x$ , соответственно. Поэтому из формул (С.9), (С.10) следует, что вещественная часть  $i\hat{\mathcal{H}}\{\dots\}$  есть величина  $O(U)$ . Следовательно, вещественная часть слева в (8.14) также  $O(U)$ . С другой стороны, как было показано в §8.3А, продольная компонента поля скорости диполя есть  $o(U)$  на расстояниях  $r \gtrsim R_0$ . Таким образом, на этих расстояниях  $u_-^d$  справа в (8.14) действительно может быть опущена в ведущем порядке по  $U$ .

Для вычисления  $\hat{\mathcal{H}}\{\dots\}$  замечаем, что поскольку  $[\omega] \approx -i(\theta - 1)\chi(x)$ , то  $[\omega]' = -2i(\theta - 1)\delta(x)$ , где  $\delta(x)$  есть дельта-функция Дирака. Что касается второго слагаемого в фигурных скобках, он также содержит производную, а именно фактор  $(u_-^2 + w_-^2)'$ , входящий в  $\sigma_+$ . Хотя это производная чётной функции, она также приводит к  $\delta$ -образному вкладу, потому что  $(u_-^2 + w_-^2)'$  умножается на  $\omega_+$ , мнимая часть которой является нечётной функцией. Для выяснения происхождения этого  $\delta$ -образного вклада проследим за изменением величины  $Nw_+\sigma_+/v_+^2 \equiv Q$  в окрестности стержня [см. Рис. 13(b)]. На расстояниях  $r \sim R_0$  слева от стержня  $v_+^2$  велико, но изменяется медленно, тогда как

$0 < w_+ = -w_0 + (\theta - 1) = O(1)$ . Поскольку давление газа падает вниз по течению,  $|v_+|$  увеличивается при удалении от стержня, то есть  $(v_+^2)' < 0$ , так что

$$0 < Q = -w_+ \frac{(\theta - 1)}{2\theta} (\ln v_+^2)' = O(1). \quad (8.21)$$

В результате торможения газа стержнем  $|\sigma_+|$  увеличивается и для  $|x| \lesssim R$  величина  $Q$  становится  $O(U/R)$ . Здесь кривизна фронта велика, и поэтому (8.21), как выражение нулевого порядка по  $l_f$ , может быть использовано лишь для грубой оценки. Оно показывает, что поскольку в этой области  $w_+ < 0$ , а  $\sigma_+ > 0$ , то  $Q$  отрицательно. При дальнейшем движении к точке  $x = 0$   $Q$  должна меняться быстро, чтобы обратиться в нуль в самой точке  $x = 0$ , как произведение нечётных функций  $w_+(x)$  и  $\sigma_+(x)$ . При переходе к положительным  $x \lesssim R$   $Q$  снова становится отрицательной величиной  $O(U/R)$ , так как  $w_+ > 0$ ,  $\sigma_+ < 0$ . Для ещё бóльших  $x$  её модуль уменьшается и становится  $O(1)$  на расстояниях  $r \sim R_0$  справа от стержня. С точки зрения внешнего решения, получаемого в пределе  $R \rightarrow 0$ , описанное поведение означает, что  $Q$  содержит член  $q\delta(x)$  с отрицательным коэффициентом  $q = O(1)$ , точное значение которого может быть найдено, в принципе, из точного решения задачи. Таким образом, выражение в фигурных скобках в (8.14) может быть записано в виде

$$-i(q + 2\alpha)\delta(x) + (\theta - 1) \frac{(u_-^2 + w_-^2)'\omega_+}{2v_+^2} + (1 + if') \left\langle \frac{Mw_+}{v_+^2} \right\rangle,$$

где подразумевается, что из второго слагаемого  $\delta$ -образный вклад исключён.

С помощью формул (С.9), (С.10) и тождества (А.8) вещественная часть уравнения (8.14) в итоге приводится к виду

$$u'_-(x)(1 + \alpha|x|) - \frac{q + \alpha}{2} f'(x) - \frac{\alpha}{2} f' \int_0^1 d\tilde{x} \frac{u'_-(\tilde{x})}{u_-(\tilde{x})} [w_-(\tilde{x}) - \alpha] \chi(\tilde{x} - |x|) - f' \left\langle \frac{Mw_+}{v_+^2} \right\rangle = 0. \quad (8.22)$$

### С. Уравнение для поперечной компоненты скорости

С мнимой частью уравнения (8.14), однако, положение дел иное. В этом случае согласно сделанным оценкам обе части являются величинами  $O(1)$ . Кроме того, разложения оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  до членов  $O(1)$  недостаточно для выделения мнимой части этого уравнения. В самом деле, неопределённый остаток в формуле есть величина  $O(1/U)$ , и при

этом может содержать как вещественную, так и мнимую части. Поскольку выражение под знаком  $\hat{\mathcal{H}}$  есть величина  $O(U)$ , неопределённый остаток содержит члены порядка  $O(1/U) \cdot O(U) = O(1)$ , то есть того же порядка, что и искомая функция  $w_-(x)$ . Оба эти затруднения могут обойдены, если воспользоваться тождеством (8.10), которое выражает потенциальность течения холодного газа и играет роль условия самосогласованности мастер-уравнения. Отделяя его вещественную часть с помощью (С.9), получаем

$$u'_-(x) - f'(x)\{w_-(|x|) - w_-(-|x|)\} + u'_-(-x)(2|x| - 1) = 0,$$

или, ввиду  $u'_-(-x) = -u'_-(x)$ ,  $w_-(-x) = -w_-(x)$ ,

$$w_-(|x|) = (1 - |x|) \frac{u'_-(x)}{f'(x)}. \quad (8.23)$$

*D. Сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

Уравнение (8.23) является обыкновенным дифференциальным. Уравнение же (8.22), как и точное мастер-уравнение, является интегро-дифференциальным. При этом его последний член зависит от распределения скорости газа вдоль всего фронта пламени, включая область вблизи стержня. Другими словами, в такой форме оно пока не даёт замкнутого описания распределения скорости на фронте на расстояниях  $r \gtrsim R_0$  от стержня. Чтобы получить такое описание, разделим (8.22) на  $f'$  и продифференцируем по  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{u'_-(x)}{f'(x)} (1 + \alpha|x|) \right] + \alpha \frac{u'_-(x)}{u_-(x)} [w_-(x) - \alpha] = 0. \quad (8.24)$$

Вместе с (8.23) и (8.18), уравнение (8.24) теперь образует замкнутую систему трёх ОДУ для трёх функций  $f(x)$ ,  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$ .

Выполним, наконец, предельный переход  $R \rightarrow 0$ . Тогда  $R_0 = O(U^{1/3}R) \rightarrow 0$ , так что полученная система оказывается определённой на множестве  $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ . При этом соотношения (8.16), (8.17) вместе с очевидной оценкой  $f(0) = O(R)$  становятся для неё граничными условиями

$$w_-(0+) = w_0, \quad u_-(0+) = U, \quad f(0+) = 0. \quad (8.25)$$

Заметим, что хотя значение  $w_0$  может быть, в принципе, явно найдено с помощью описанной выше процедуры сшивания решений, оно зависит от формы сечения стержня. В

частности,  $w_0$  может быть выражено через параметр  $q$ , связанный со структурой течения вблизи стержня. Для этого в уравнении (8.22) следует перейти к пределу  $x \rightarrow 0$  и воспользоваться (8.23), что даёт  $w_0 = (q + \alpha)/2$ . Это соотношение явно указывает на зависимость  $w_0$  от формы стержня (для описания некруговых сечений потребовалось бы введение высших мультиполей). Таким образом, в общем случае семейство решений для пламени, удерживаемого в быстром потоке газа, параметризуется двумя независимыми величинами  $U$  и  $w_0$ .

#### §8.4. Сведение системы к одному дифференциальному уравнению. Численные решения

Введём вспомогательную функцию

$$\varphi = \frac{u'_-}{f'} = \frac{du_-}{df}.$$

Из системы (8.18), (8.23), (8.24) для неё получается уравнение

$$\frac{d}{dx} [\varphi(1 + \alpha x)] + \alpha \varphi \frac{(1-x)\varphi - \alpha}{(1-x)\varphi + 1} = 0, \quad x > 0, \quad (8.26)$$

а из условий (8.25) и уравнения (8.23) – граничное условие

$$\varphi(0+) = w_0.$$

Заметим также, что функции  $u_-(x)$ ,  $f(x)$  связаны простым алгебраическим соотношением. Из уравнений (8.18), (8.23) имеем

$$u_- = (1-x)u'_- + f', \quad (8.27)$$

или

$$[(1-x)u_-]' + f' = 0.$$

Интегрируя его и используя (8.25), получаем

$$f = U - (1-x)u_-. \quad (8.28)$$

Наконец, комбинируя (8.27), (8.28),  $\varphi$  можно выразить через  $f$

$$\varphi(x) = \frac{U - f(x)}{(1-x)^2 f'(x)} - \frac{1}{1-x}.$$

Если подставить это в (8.26), то получится дифференциальное уравнение второго порядка для положения фронта, а соответствующие граничные условия следуют из (8.25) и (8.18):

$$f(0) = 0, \quad f'(0^+) = \frac{U}{w_0 + 1}. \quad (8.29)$$

Для заданных значений  $w_0, \theta$  решения, соответствующие различным  $U$ , оказываются подобными. Действительно, уравнение (8.26) само по себе не содержит  $U$ , а изменением масштаба

$$f(x) = UF(x), \quad u_-(x) = Uu(x), \quad w_-(x) = w(x) \quad (8.30)$$

остальные уравнения и граничные условия к ним приводятся к виду

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - (1-x)u(x), \quad \varphi(x) = \frac{1-F(x)}{(1-x)^2 F'(x)} - \frac{1}{1-x}, \\ F(0) &= 0, \quad F'(0^+) = \frac{1}{w_0 + 1}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Графики численных решений уравнений (8.26), (8.31) для различных  $w_0$  и  $\theta$  приведены на Рис. 14 – 16. Функция  $f(x)$  является монотонной на интервале  $x \in (0, 1)$ , как и предполагалось при выводе этих уравнений. Интересно отметить, что решения существуют не только для всех  $w_0 > 0$ , когда линии тока расходятся вблизи стержня, но и для достаточно малых по величине  $w_0 < 0$ , то есть когда при обтекании стержня газом имеется подсосывание газа в область за стержнем (напомним, что мы имеем дело с решениями, полученными предельным переходом  $R \rightarrow 0$  с расстояний  $r \gtrsim R_0$  от стержня, где  $w_-$  может иметь оба знака;  $w_-$  всегда положительна лишь при  $0 < x < R$ ). При этом решения с  $w_0 < 0$  существуют лишь для достаточно малых значений коэффициента расширения. Например, решения с  $w_0 = -0.1$ , некоторые из которых показаны на Рис. 15, существуют при  $\theta \lesssim 3.5$ . Вообще, свойства решений сильно зависят от  $\theta$ . Именно, полное изменение скорости вдоль фронта быстро растёт с  $\theta$ , и оказывается значительным для реальных пламён ( $\theta = 5 \div 10$ ). С ростом  $\theta$  также меняется качественное поведение поперечной компоненты скорости. Практически важной характеристикой является полное падение давления вдоль пламени, которое легко вычисляется с помощью интеграла Бернулли для потока холодного газа. На Рис. 17 дан график функции  $P(x) \equiv (p_\infty - p_-(x))/\rho U^2$  (где  $p_\infty$  есть давление холодного газа вдали от пламени) для пламени с  $\theta = 6$  и различных  $w_0$ . Видно, что полное падение давления  $P(1)$  сильно зависит от  $w_0$ . Частный случай  $w_0 = 0$

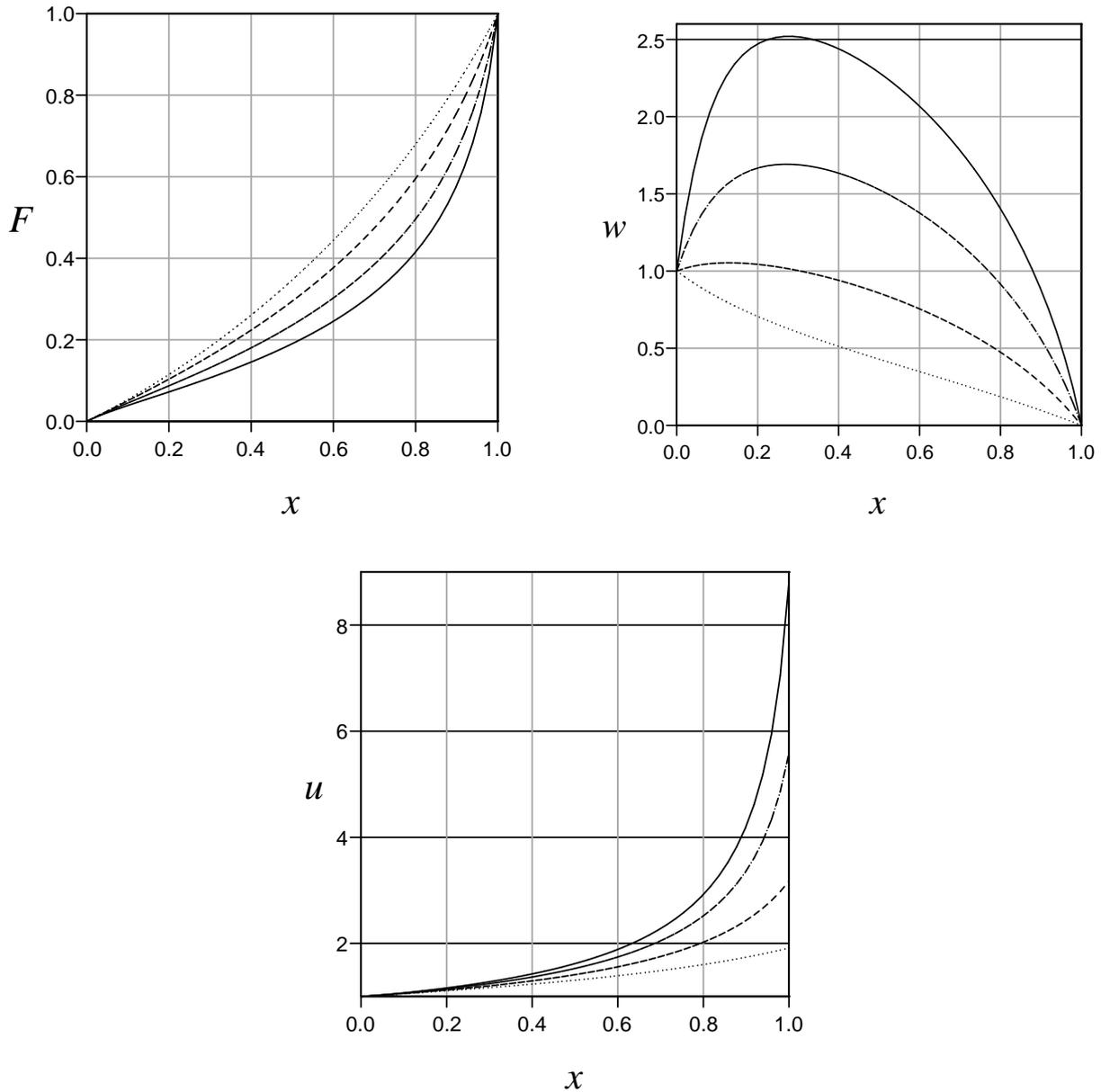


Рис. 14: Положение фронта пламени и распределение вдоль него скорости холодного газа, нормированные согласно (8.30), в случае  $w_0 = 1$  и различных значений коэффициента теплового расширения газа:  $\theta = 3$  (точки),  $\theta = 5$  (пунктир),  $\theta = 7$  (точка-пунктир) и  $\theta = 9$  (сплошные линии).

является тривиальным в том смысле, что скорость газа на фронте оказывается постоянной,  $u_-(x) = U$ , а фронт – прямой  $f(x) = Ux$ , что проверяется прямой подстановкой в уравнения (8.26), (8.31). Как показано в главе 14, это решение является неустойчивым.

На Рис. 18 численное решение с  $w_0 = 4$  сравнивается с экспериментальными данными,

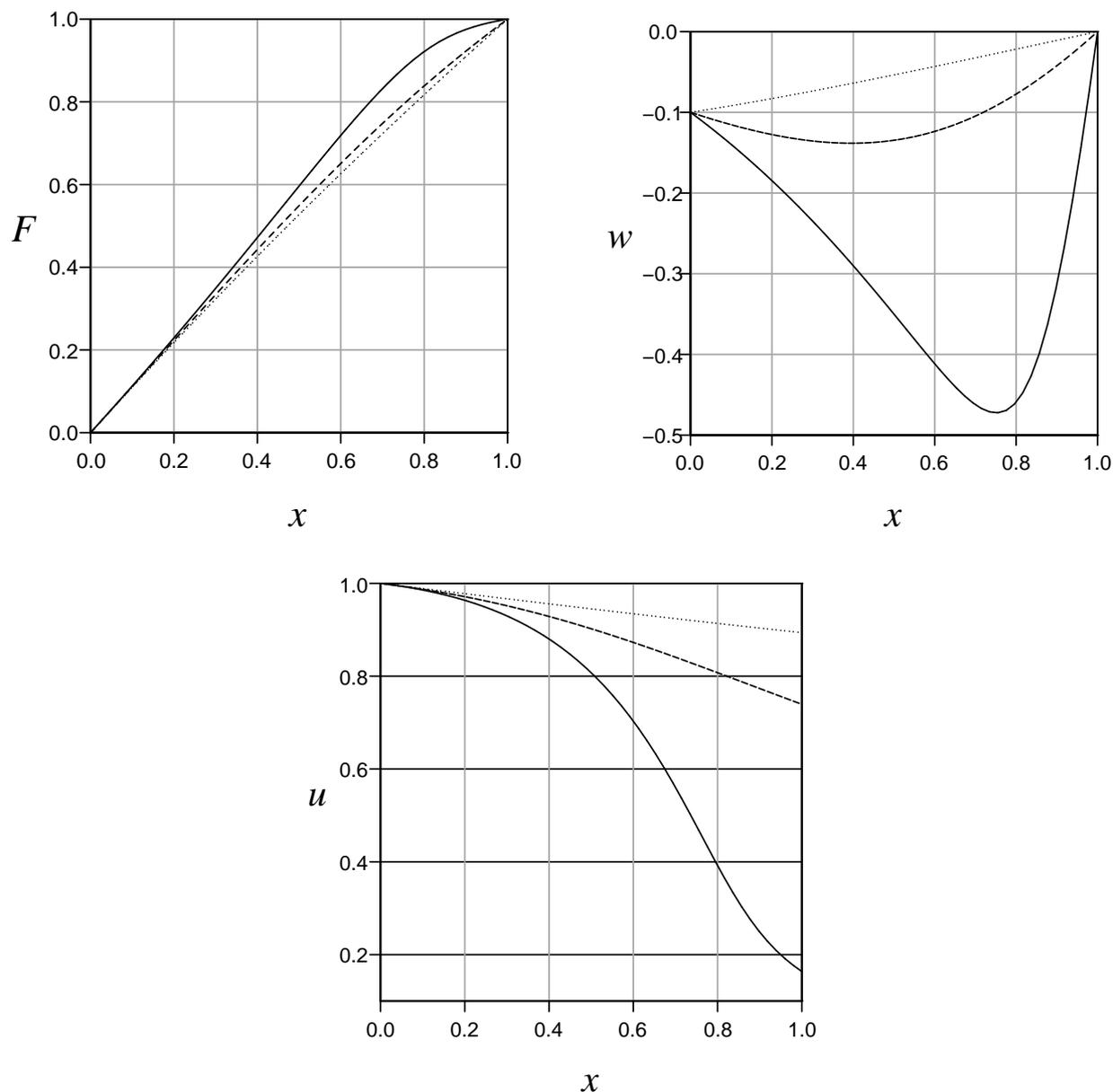


Рис. 15: То же для  $w_0 = -0.1$  и  $\theta = 2$  (точки),  $\theta = 3$  (пунктир),  $\theta = 3.5$  (сплошные линии).

полученными для пропано-воздушного пламени, удерживаемого с помощью стержня в центре прямоугольной камеры шириной 2.5 см [165]. Для смеси, использованной в этом эксперименте,  $\theta \approx 7$ , а скорость потока холодного газа  $U \approx 10$ . Значение  $w_0$  найдено из условия наилучшего совпадения численного решения для положения фронта с определённым по фотографии. Для этого фотография была обработана с помощью программы DigitizeIt [166]. Приведённая на графике экспериментальная кривая получена как среднее от положений фронта слева и справа от стержня. Разность соответствующих пар

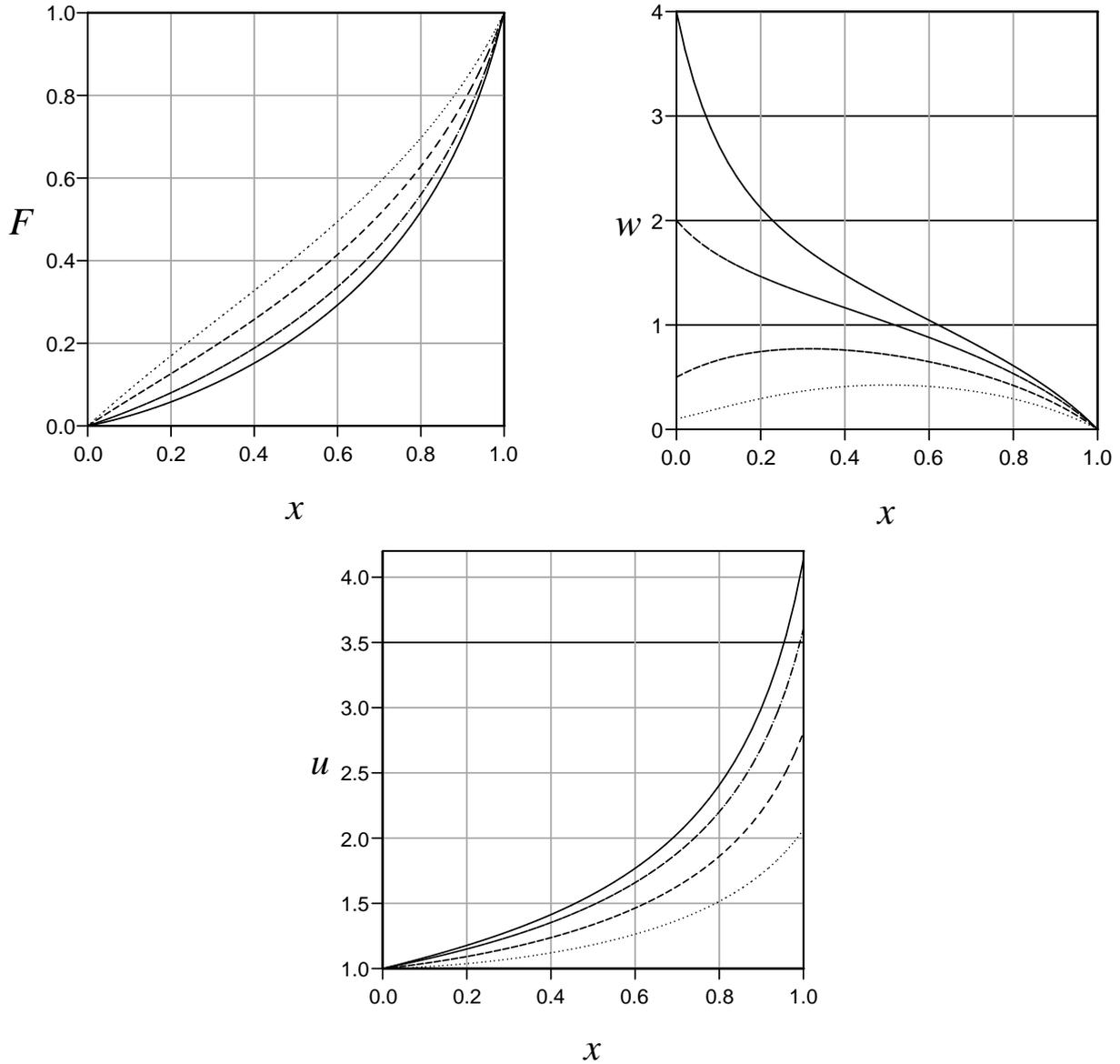


Рис. 16: То же для  $\theta = 5$  и различных  $w_0 = 0.1$  (точки),  $w_0 = 0.5$  (пунктир),  $w_0 = 2$  (точка-пунктир),  $w_0 = 4$  (сплошные линии).

значений достигает 10% от среднего, что даёт оценку экспериментальной погрешности. Чтобы оценить точность численного решения, заметим, что оператор  $\mathcal{H}$ , сам по себе не включает больших коэффициентов типа  $\theta$ , а относительная ошибка, вносимая его разложением, есть  $O(1/U^2)$  [см. (С.9)]. Поэтому погрешность в его вычислении можно оценить как 1%. По тем же причинам, это есть также погрешность уравнений (8.18), (8.23), и следовательно, (8.28). Однако при выводе (8.26) пренебрегается  $\alpha$  по сравнению с  $U$ , причём относительная ошибка пропорциональна  $(\alpha/U)^2$ . Хотя формально условия  $U \gg 1$  и

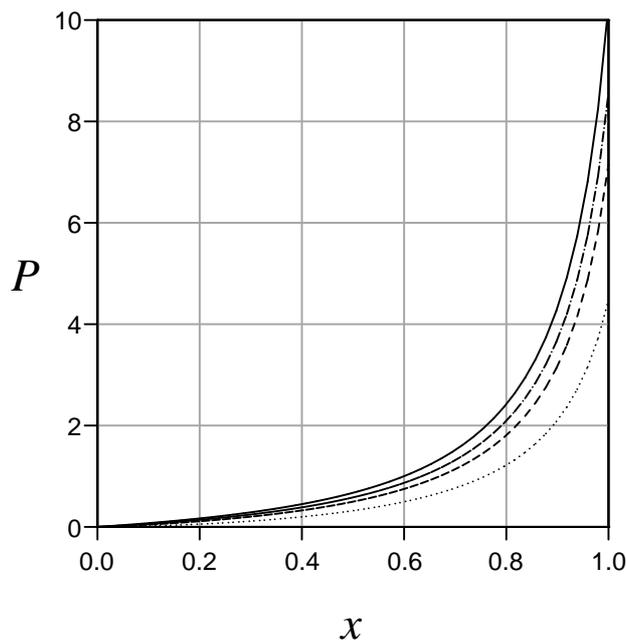


Рис. 17: Падение безразмерного давления в случае  $\theta = 6$  и различных  $w_0 = 0.1$  (точки),  $w_0 = 0.5$  (пунктир),  $w_0 = 1$  (точка-пунктир),  $w_0 = 2$  (сплошная линия).

$U \gg \alpha$  эквивалентны, практически второе из них выполняется значительно хуже первого, поскольку в рассматриваемом случае отношение  $U/\alpha$  не велико. В результате точность теоретических результатов должна оказаться ниже, чем экспериментальных. Несмотря на это, Рис. 18 указывает на то, что теория согласуется с наблюдениями именно с экспериментальной точностью.

### Вывод

Важнейший вывод проведённого анализа состоит в том, что уравнения, определяющие структуру пламени, в ведущем порядке  $1/U$ -разложения оказываются обыкновенными дифференциальными. Это означает локальность пламени в том смысле, что поведение функций  $f'(x)$ ,  $u_-(x)$  в окрестности любой точки определяется лишь их значениями в этой точке и не зависит от структуры удалённых участков пламени. В частности, структура пламени не зависит от деталей течения газа вблизи удерживающего стержня. Влияние стержня параметризуется одной величиной  $w_0$ , задание которой (вместе со скоростью натекающего газа  $U$ ) полностью определяет решение. Обратное,  $w_0$  может быть найдено по

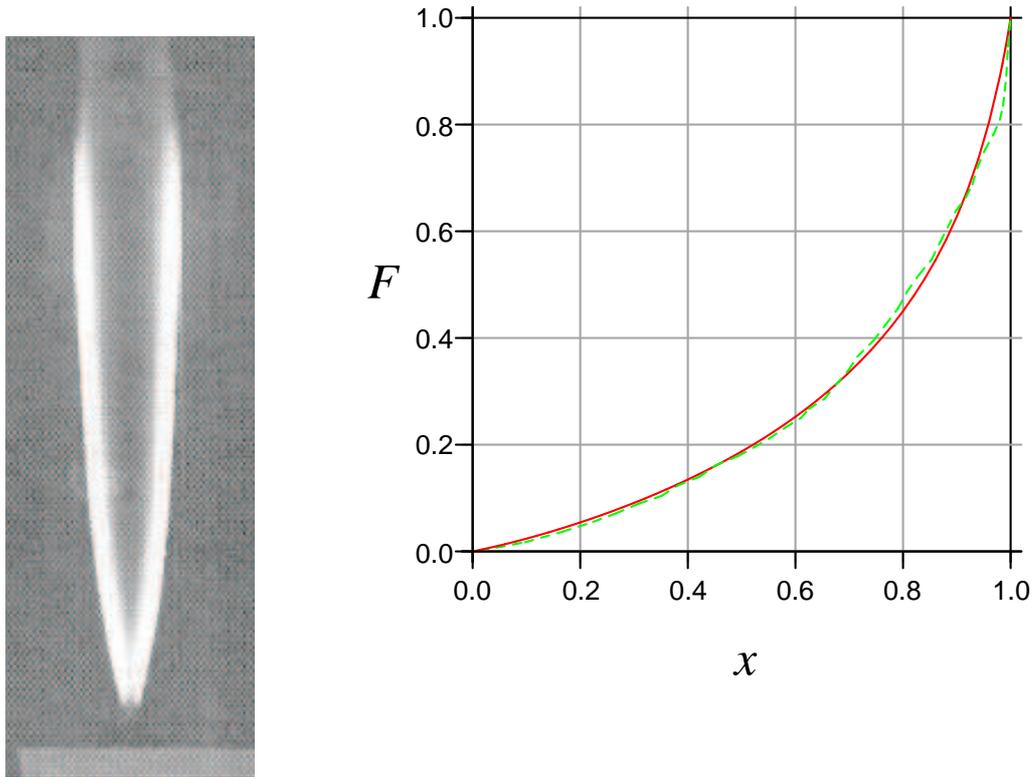


Рис. 18: Слева: фотография пропано-воздушного пламени (воспроизведена с рисунка 10 работы [165]). Справа: положение фронта пламени, определённое по фотографии слева (пунктирная линия) и найденное как решение системы (8.26), (8.31) для  $\theta = 7$ ,  $w_0 = 4$  (сплошная линия).

значениям функций  $f'(x)$ ,  $u_-(x)$  в любой точке пламени или по виду одной функции  $f(x)$  вдали от стержня, как это было сделано выше на примере пропано-воздушного пламени.

## 9. ЛАМИНАРНОЕ ПЛАМЯ В ШИРОКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЕ [A11]

### §9.1. Экспериментальные предпосылки теоретического описания

С момента появления науки о горении газовых смесей одним из важнейших направлений исследования являлось распространение пламени в горизонтальных трубах большого диаметра (порядка одного метра) и большой длины (десятки и сотни метров). Эта задача поставлена практикой добычи угля, при которой в угольные шахты неизбежно поступает метан, создавая угрозу его возгорания при смешивании с воздухом и последующего распространения пламени по шахте. Углеводородо-воздушные пламена вообще, и метано-воздушные в частности, имеют сравнительно небольшие нормальные скорости распространения, от  $6 \div 10$  см/с вблизи пределов воспламенения до  $40 \div 50$  см/с для стехиометрических смесей [51, 144]. Поэтому число Фруда, то есть значение ускорения поля тяжести  $g$  в естественных единицах, в широких трубах велико:

$$\text{Fr} = \frac{gb}{U_f^2} \gg 1.$$

Например, уже в трубе диаметром 10 см пламена с  $U_f \approx 20$  см/с имеют  $\text{Fr} \approx 25$ . Это значит, что глобальные свойства пламени полностью определяются действием поля тяжести.

Прямое численное моделирование пламен в широких трубах требует огромных вычислительных ресурсов и недоступно даже для современных компьютеров. С другой стороны, в теоретических исследованиях часто применяются сильно упрощённые модели, такие как модель пузыря [142, 143], в которой фронт пламени рассматривается как непроницаемый раздел между исходной смесью и продуктами горения, или уравнение Франкеля [134], в котором течение газа предполагается потенциальным как перед фронтом, так и за ним. В обоих случаях, таким образом, полностью пренебрегается завихренностью продуктов горения, которая неизбежно порождается при прохождении газа через фронт пламени. Эта завихренность имеет два источника – неоднородность распределения скорости газа вдоль фронта, связанная с его искривлением, и бароклиный эффект [167–169]. Как будет продемонстрировано ниже, именно баланс этих двух вкладов и определяет структуру стационарного пламени.

Как показывает эксперимент, при распространении пламени по трубе кругового сечения его фронт стремится принять двумерную форму, а именно, форму поверхности, образующая которой ортогональна оси трубы. Это иллюстрируется Рис. 19, на котором



Рис. 19: Фотографии пламени в смеси 10% метана с воздухом, сделанные через одинаковые промежутки времени в стеклянной трубе диаметром 10 см сразу после поджига [80]. Пламя распространяется слева направо.

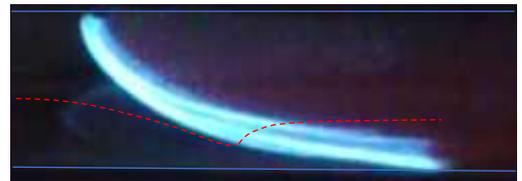
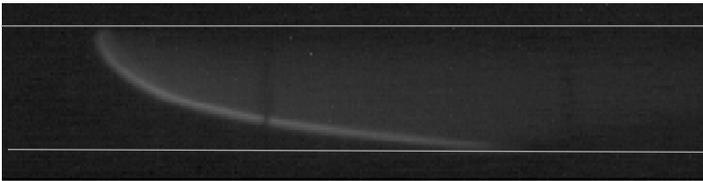


Рис. 20: Стационарные пламена в горизонтальной трубе диаметром 10 см. Слева: смесь 3.6% этана и воздуха, скорость фронта  $U = 62$  см/с (снимок высокоскоростной камерой FASTCAM). Справа: смесь 8% метана и воздуха,  $U = 80$  см/с (снимок камерой смартфона, красный пунктир качественно показывает ход линий тока газа). Пламена распространяются налево. Поджиг с помощью электрического разряда. Фотографии сделаны в Лаборатории горения и детонации (Пуатье, Франция).

приведён ряд фотографий начальной стадии эволюции пламени [80]. Как видно из рисунка, исходный полусферический фронт, образовавшийся сразу после поджига, не только быстро вытягивается вдоль трубы, но его проекция на вертикальное осевое сечение трубы уменьшается. Это наблюдение указывает на возможность количественного описания установившегося распространения пламени в рамках двумерной теории, в которой ширина двумерной трубы полагается равной диаметру  $d$  физической трубы:  $b = d$ .

Далее, как было установлено уже в самом начале экспериментального исследования пламен в горизонтальных трубах, скорость их установившегося движения значительно превышает нормальную скорость:  $U \gg U_f$ , причём в трубах диаметром  $b \lesssim 10$  см фронт установившегося пламени является гладким [80]. Поскольку скорость пламени пропорциональна длине фронта, это означает, что пламя вытягивается вдоль трубы на расстояния, значительно превышающие её диаметр, Рис. 20. Следовательно, практически на всём про-

тяжении пламени можно пренебречь эффектами конечной ширины и описывать пламя в рамках  $1/U$ -разложения. В более широких трубах, однако, у пламени развивается ячеистая структура, и вдали от стенок трубы условие  $|f'| \gg 1$ , вообще говоря, не выполняется. Поэтому результаты, полученные в рамках  $1/U$ -разложения, должны применяться после усреднения ячеистой структуры. Как было доказано в главе 3, усреднённые величины удовлетворяют уравнениям для пламени нулевой ширины, причём происходит “перенормировка” нормальной скорости  $U_f \rightarrow \beta U_f$ , где  $\beta$  может зависеть от координат. Таким образом, в обоих случаях адекватным средством описания оказывается  $1/U$ -разложение мастер-уравнения для пламени нулевой ширины.

Другим следствием большой величины  $U$  является невозможность выполнения условия  $f' = 0$  на нижней стенке трубы: вблизи  $x = 1$  линии тока сходятся и происходит гашение пламени, то есть  $v_-^n \rightarrow 0$ , так что фронт пламени касается нижней стенки, Рис. 20. Вблизи же верхней стенки линии тока расходятся, отклоняясь от ведущей точки вдоль фронта, так что в ней по-прежнему выполняется условие  $f'(0) = 0$ . Таким образом, для функции  $f(x)$  имеем на стенках следующие граничные условия

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = \infty. \quad (9.1)$$

Характер эволюции пламени в трубе существенно зависит от условий на её концах. Если оба конца открыты (закрыты), то говорят об открытых (закрытых) трубах, если же один конец открыт, а другой закрыт, то труба называется полуоткрытой. Скорость газа на выходе из трубы обычно настолько велика, что на её торце происходит отрыв линий тока. Поэтому граничным условием на открытом конце является равенство давления газа атмосферному (jet condition) [43, 170]:

$$p = p_0. \quad (9.2)$$

Возможны также и промежуточные условия, когда на конце трубы устанавливаются сужения или сетки для подавления акустической неустойчивости. Во всех случаях важно также место поджига смеси.

### §9.2. Уравнения для вытянутого пламени. Продолжение решения

Ввиду вытягивания пламени вдоль трубы, мастер-уравнение для пламени в горизонтальной трубе может быть упрощено так же, как в случае пламени, удерживаемого в

быстром потоке посредством стержня. Существенное отличие, однако, имеется в структуре окрестности ведущей точки ( $x = 0$ ), где условие  $|f'| \gg 1$  не выполняется, и следовательно, в смысле граничных условий в этой точке. Теперь ширина этой окрестности не может быть сделана произвольно малой, как в случае со стержнем (где она стремилась к нулю вместе с радиусом стержня). Она зависит от конкретных условий горения, в частности, от топологии получаемых решений. Как показывает эксперимент, ширина этой окрестности всё же значительно меньше ширины трубы, и поэтому её вклад в значения таких интегральных величин, как  $U$ , будет относительно мал. Дальнейшее рассмотрение ведётся именно в этом предположении и имеет своей целью построение решений, которые совпадали бы с истинными вне указанной окрестности.

Для получения выражения для завихрённости замечаем, что для того чтобы условия (4.3) продолжали выполняться при наличии поля тяжести,  $\mathbf{g}$  должно менять знак при отражении течения относительно оси  $y$ . Поэтому следует положить  $\phi(x, y) = -g|x|$ . Подставляя  $\phi_- = -g|x|$  в (4.42), находим в приближении пламени нулевой ширины

$$\sigma_+ = -\frac{\theta - 1}{2\theta N}(u_-^2 + w_-^2)' + \frac{\theta - 1}{\theta N}g\chi(x). \quad (9.3)$$

Подставляя это выражение в мастер-уравнение и применяя формулу (С.10), имеем для  $x$  таких, что  $|f'(x)| \gg 1$

$$2u'_-(1 + \alpha|x|) - \frac{2\alpha gx}{u_-(x)} - f' \left\langle \frac{Mw_+}{v_+^2} \right\rangle + f' \int_0^1 d\tilde{x} \left[ \frac{Mw_+}{v_+^2} + \alpha \left( \frac{f'}{N} \right)' \right] (\tilde{x}) \chi(\tilde{x} - |x|) = 0. \quad (9.4)$$

В отличие от пламени, удерживаемого стержнем, разложение по  $1/U$  в интегральном слагаемом не произведено, поскольку в него даёт вклад также и окрестность точки  $x = 0$ , где условие  $|f'| \gg 1$  не выполнено. С учётом (9.1) вклад второго слагаемого в интеграле может быть вычислен явно:

$$\int_0^1 d\tilde{x} \left( \frac{f'}{N} \right)' (\tilde{x}) \chi(\tilde{x} - |x|) = -\frac{f'}{N} \Big|_0^{|x|} + \frac{f'}{N} \Big|_{|x|}^1 = -1. \quad (9.5)$$

Однако вклад первого члена в интеграл не может быть найден в рамках  $1/U$ -разложения, в частности, значение постоянной  $\langle Mw_+/v_+^2 \rangle \equiv \gamma$  остаётся неопределённым. В результате уравнение (9.4) принимает вид

$$2u'_-(1 + \alpha|x|) - \frac{2\alpha gx}{u_-(x)} - (\gamma + \alpha)f' + f' \int_0^1 d\tilde{x} \frac{Mw_+}{v_+^2} (\tilde{x}) \chi(\tilde{x} - |x|) = 0. \quad (9.6)$$

Как и в §8.3, делением на  $f'$  и дифференцированием по  $x$  уравнение (9.6) может быть сведено к обыкновенному дифференциальному. Заметим, что уравнение (8.23), являющееся следствием потенциальности течения холодного газа, остаётся справедливым и при наличии поля тяжести, так же как и уравнение эволюции (8.18). Тот факт, что основные уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным, весьма важен, поскольку он позволяет обойти то затруднение, что интеграл в уравнении (9.6) содержит неизвестный вклад от точек, в которых  $|f'|$  не велико. Для этого возьмём какое-либо истинное решение мастер-уравнения, то есть решение, справедливое для всех  $x \in (0, 1)$ , и рассмотрим его в области, где  $|f'(x)| \gg 1$ . В этой области разложение по  $1/U$  справедливо, и поэтому данное решение удовлетворяет в ней уравнению (9.6). В частности, явной подставкой решения в (9.6) можно было бы найти неизвестную константу  $\gamma$ . Введём в рассмотрение вспомогательный набор функций  $f(x)$ ,  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$ , которые совпадают с истинным решением для всех  $x$ , где  $|f'(x)| \gg 1$ , и которые удовлетворяют уравнениям (9.6), (8.23), (8.18), распространённым на все  $|x| \in (0, 1)$ :

$$2u'_-(1 + \alpha|x|) - \frac{2\alpha gx}{u_-(x)} - (\gamma + \alpha)f' + f' \int_0^1 d\tilde{x} \frac{Mw_+(\tilde{x})}{v_+^2} \chi(\tilde{x} - |x|) = 0, \quad (9.7)$$

$$w_-(|x|) = (1 - |x|) \frac{u'_-(x)}{f'(x)}, \quad u_- = f'(w_- + 1), \quad (9.8)$$

где константа  $\gamma$  и интеграл в (9.7) вычисляются на истинном решении. Этими условиями вспомогательные функции определяются единственным образом независимо от значения  $\gamma$ . Действительно, делением на  $f'$  и дифференцированием по  $x$  уравнение (9.7) сводится к

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{u'_-}{f'} (1 + \alpha x) - \frac{\alpha gx}{f'u_-} \right] + \alpha \left( \frac{u'_-}{u_-} - \frac{g}{u_-^2} \right) (w_- - \alpha) = 0, \quad x > 0, \quad (9.9)$$

которое вместе с уравнениями (9.8) образует систему ОДУ для функций  $f(x)$ ,  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$ . Поскольку теперь  $|f'| \gg 1$  при всех  $x \in (0, 1)$ , то эти функции удовлетворяют тем же условиям (8.25), что и в случае пламени, удерживаемого тонким стержнем. Более того, переходя в (9.7) к пределу  $x \rightarrow 0+$ , имеем

$$2u'_-(0+) + \alpha f'(0+) = 0.$$

Учитывая (9.8), получаем отсюда граничное условие для  $x$ -компоненты вспомогательного решения

$$w_-(0) = \frac{\alpha}{2}.$$

Оно не зависит от значения неизвестной константы  $\gamma$ . Таким образом, в силу теоремы о существовании и единственности решения ОДУ, вспомогательные функции  $f(x)$ ,  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$  однозначно определяются условиями

$$w_-(0) = \frac{\alpha}{2}, \quad u_-(0) = U, \quad f(0) = 0 \quad (9.10)$$

и, по построению, совпадают с истинными вне некоторой окрестности  $x = 0$ . Равенство  $f(0) = 0$  является здесь просто соглашением о выборе начала отсчёта системы координат. Из полученной системы уравнений можно сделать важное заключение о зависимости скорости распространения пламени от нормальной скорости  $U_f$ . Именно, заменой

$$u_- \rightarrow \sqrt{g}u_-, \quad f \rightarrow \sqrt{g}f, \quad w_- \rightarrow w_-, \quad U \rightarrow \sqrt{g}U$$

параметр  $g$  исключается из системы уравнений (9.9), (9.8) и граничных условий к ним. На основании соображений размерности заключаем отсюда, что

$$U = C(\theta)\sqrt{gb},$$

где  $C(\theta)$  – безразмерная функция от  $\theta$ . Таким образом, в ведущем порядке  $1/U$ -разложения скорость пламени оказывается независимой от  $U_f$ . При этом оба члена в выражении (9.3) для завихрённости – вклады искривления фронта и бароклинного эффекта – оказываются одного порядка  $O(\sqrt{g})$ . Нетривиальный факт, обсуждаемый ниже в §9.3, §9.6, состоит в том, что функция  $C(\theta)$  имеет несколько ветвей, то есть не является однозначной.

### §9.3. Численные решения. Два типа пламён. Физические решения

Численный анализ системы ОДУ (9.9), (8.23), (8.18) показывает, что для каждого набора параметров  $U_f, \theta, g, b$  существует бесконечно много решений, которые отличаются значением  $U$ . А именно, в практически важном диапазоне значений  $\theta, g$  ( $\theta = 4 - 10$ ,  $g = 3 - 1000$ ), допустимые значения  $U$  заполняют две непересекающиеся области значений. Одна из них конечна:  $U \in (U_0, U_1)$ , где  $U_{0,1}$  зависят от  $\theta, g$ . На Рис. 21 показаны положение фронта и распределение скорости холодного газа на фронте для пламён с  $\theta = 5$  и  $\theta = 4.5$ , распространяющихся с нормальной скоростью  $U_f = 10$  см/с в трубе шириной 40 см. В обоих случаях  $U = 11.28$  принадлежит соответствующим интервалам  $(U_0, U_1)$ . Как видно, фронт пламени в этом случае имеет точку перегиба при  $x \approx 0.2$ . Оказывается, что

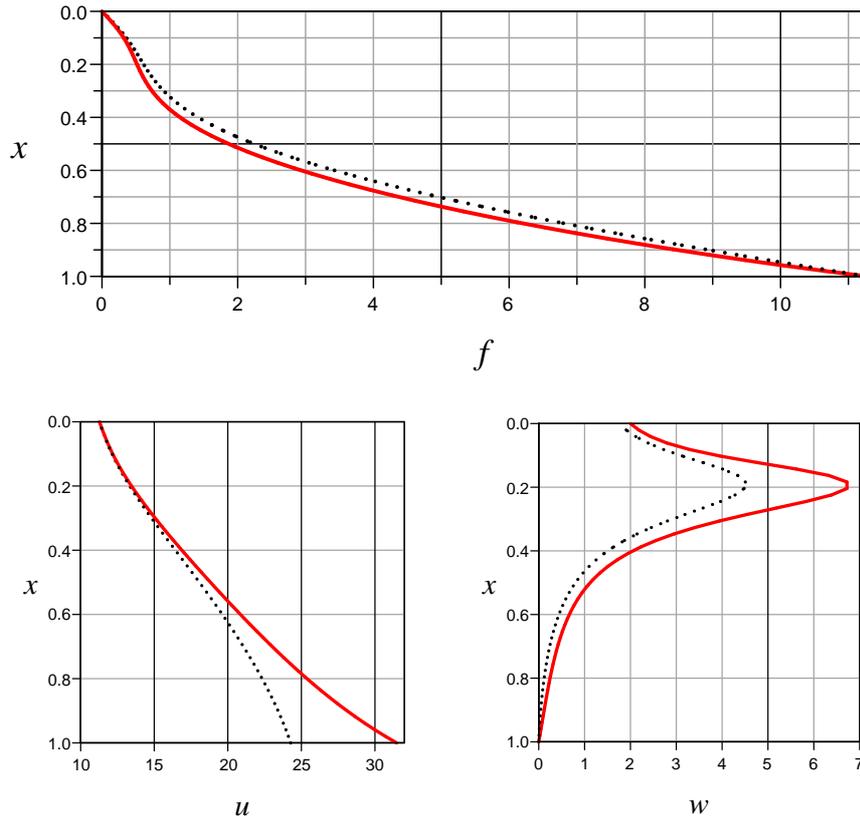


Рис. 21: Положение фронта и распределение на нём скорости холодного газа для пламени типа I с  $\theta = 5$  (сплошные линии) и  $\theta = 4.5$  (точечные линии), распространяющегося в трубе шириной 40 см; нормальная скорость пламени  $U_f = 10$  см/с, безразмерная скорость пламени  $U = 11.28$ .

этим свойством обладают все решения с  $U \in (U_0, U_1)$ , которые в дальнейшем называются решениями типа I. В решениях второго типа (типа II)  $U$  принадлежит неограниченному сверху интервалу  $(U_2, \infty)$ , где  $U_2 > U_1$  также зависит от  $\theta, g$ . В этом случае фронт является выпуклым. На Рис. 22 показаны решения типа II для пламён с  $\theta = 7.5$  и  $\theta = 5$ , оба имеющие  $U_f = 40$  см/с,  $U = 3.9$  и распространяющиеся в трубе шириной 30 см. Следует отметить, что для обоих типов пламён продольная скорость газа на фронте монотонно возрастает в направлении течения газа, за исключением значений  $U$ , отличающихся от граничных  $U_1$  и  $U_2$  на 1–2%: для этих значений у функции  $u_-(x)$  появляется локальный максимум.

Наличие континуума возможных значений  $U$  связано со следующим обстоятельством. В отличие от пламени, удерживаемого в потоке газа заданной скорости, скорость  $U$  распространения пламени по трубе сама должна определяться по данным  $U_f, \theta, g, b$ . В конеч-

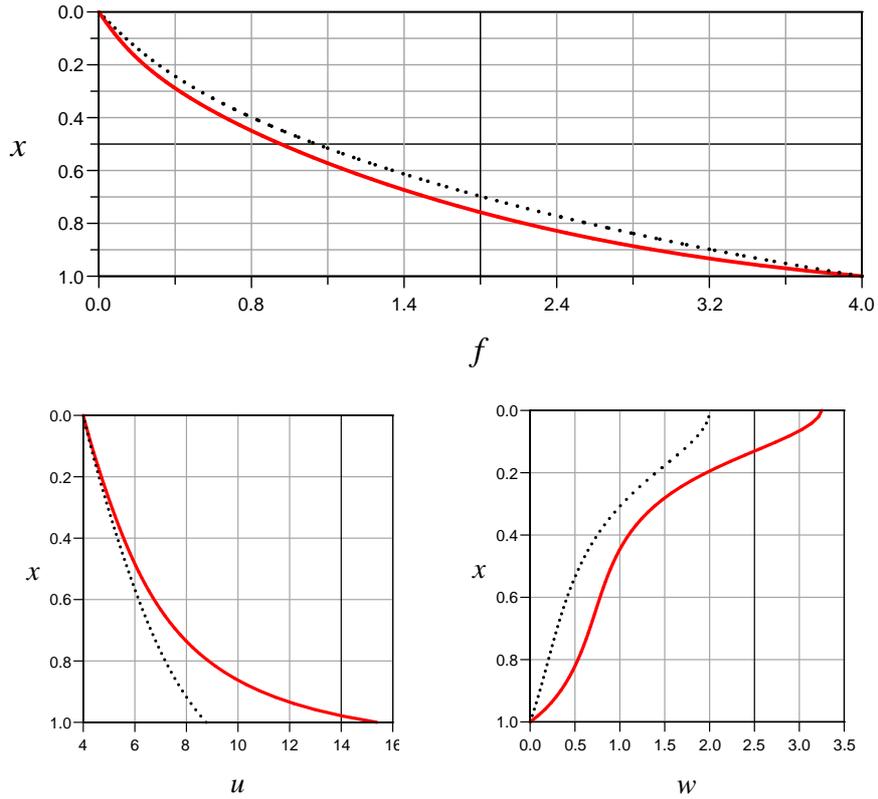


Рис. 22: То же для пламени типа II с  $\theta = 7.5$  (сплошные линии) и  $\theta = 5$  (точечные линии);  $b = 30$  см,  $U_f = 40$  см/с,  $U = 3.9$ .

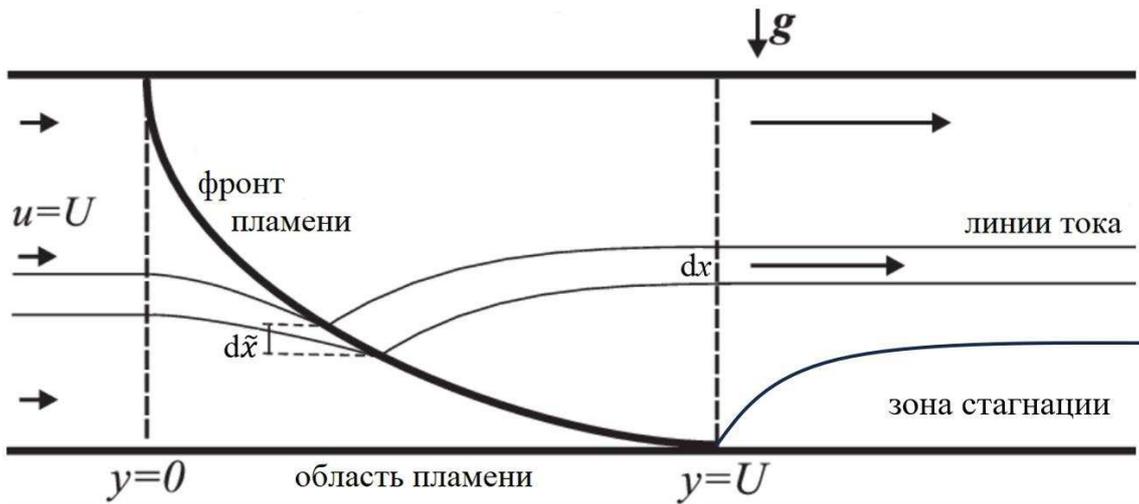


Рис. 23: Схема установившегося пламени в горизонтальной трубе. Вне области пламени [ $y \in (0, U)$ ] давление постоянно по сечению трубы в ведущем порядке  $1/U$ -разложения.

ном итоге, она фиксируется условием  $f'(0) = 0$ , которому должны удовлетворять истинные решения. Поскольку, однако, решения  $f(x)$ ,  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$  совпадают с истинными лишь вне некоторой окрестности точки  $x = 0$ , это условие для них не может быть реализовано, и как следствие,  $U$  остаётся неопределённым. Для нахождения истинных значений  $U$  на решения  $f(x)$ ,  $w_-(x)$ ,  $u_-(x)$  следует наложить некоторое интегральное условие, которое для истинных решений выполнялось бы тождественно. Это условие не должно содержать производных скорости газа, чтобы вклад относительно малой окрестности точки  $x = 0$ , где градиент скорости относительно велик, оставался относительно малым. Таким условием является сохранение продольной компоненты полного импульса газа при сгорании, то есть постоянство её потока вдоль трубы [43, 170]. Для этого удобно ввести приведённые давления  $\tilde{p} = p + \phi$  и  $\tilde{p} = p + \phi/\theta$  для холодного газа и продуктов горения, соответственно. Тогда закон сохранения продольного импульса в области пламени ( $y \in [0, U]$ ) для холодного газа ( $y \in [0, f(x)]$ ) и для продуктов горения ( $y \in [f(x), U]$ ) имеет вид

$$\tilde{p}|_{y=0} + U^2 = \int_0^1 d\tilde{x} [\tilde{p}_-(\tilde{x}) + N(\tilde{x})v_-^n u_-(\tilde{x})], \quad (9.11)$$

$$\int_0^1 d\tilde{x} [\tilde{p}_+(\tilde{x}) + \frac{N(\tilde{x})}{\theta} v_+^n u_+(\tilde{x})] = \tilde{p}|_{y=U} + \frac{1}{\theta} \int_0^1 dx u^2(x, U), \quad (9.12)$$

где  $N = \sqrt{1 + (f')^2}$ . Приведённое давление может быть исключено с помощью интегралов Бернулли по обе стороны фронта (пренебрегая, как и везде ранее,  $w$  по сравнению с  $u$  в ведущем порядке  $1/U$ -разложения)

$$\tilde{p}_-(\tilde{x}) + \frac{u_-^2(\tilde{x})}{2} = \tilde{p}|_{y=0} + \frac{U^2}{2}, \quad (9.13)$$

$$\theta \tilde{p}_+(\tilde{x}) + \frac{u_+^2(\tilde{x})}{2} = \theta \tilde{p}|_{y=U} + \frac{u^2(x(\tilde{x}), U)}{2}, \quad (9.14)$$

где  $(x(\tilde{x}), U)$  есть пересечение линии  $y = U$  с линией тока, которая пересекает фронт в точке  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ , Рис. 23. Наконец, написав (в силу несжимаемости продуктов горения)

$$v_+^n N(\tilde{x}) d\tilde{x} = u(x(\tilde{x}), U) dx, \quad (9.15)$$

и учитывая, что для пламени нулевой ширины  $v_-^n = 1$ ,  $v_+^n = \theta$ , из уравнений (9.11), (9.12) получаем искомое условие

$$\int_0^1 d\tilde{x} N(\tilde{x}) u(x(\tilde{x}), U) = \frac{u_1^2 + U^2}{2} + \frac{\alpha g}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} [f(\tilde{x}) - U] + \alpha. \quad (9.16)$$

Здесь  $u_1$  обозначает величину продольной скорости холодного газа в конечной точке фронта  $(1, U)$ , а

$$u(x(\tilde{x}), U) = \{\theta u_1^2 - \alpha u_-^2(\tilde{x}) + 2\alpha g[f(\tilde{x}) - U]\}^{1/2} \quad (9.17)$$

есть распределение скорости продуктов горения по сечению  $y = U$ . Как показывает численный анализ, условием (9.16) выделяется конечное число решений типов I и II.

#### §9.4. Оценка тепловых потерь

В широких трубах учёт тепловых потерь в стенки трубы для пламён, фронт которых является в среднем плоским, не требуется. В этом случае относительная величина потерь падает с увеличением диаметра трубы и при  $d \gtrsim 5$  см становится пренебрежимо малой. Например, при вертикальном распространении вниз метано-воздушных пламён вблизи пределов воспламенения (где тепловые потери должны быть наиболее существенны) неустойчивость Ландау-Дарье подавляется полем тяжести, и их скорость оказывается одной и той же при  $d = 5$  см и  $d = 23$  см [76]. Однако положение дел меняется, когда пламя вытягивается вдоль трубы, поскольку поток тепла из области пламени теперь пропорционален площади фронта. Этот поток можно оценить как

$$\bar{q} = K\Sigma\Delta T,$$

где  $\Sigma \approx \pi d \times (U/U_f)d/2$  есть площадь поверхности трубы, охватываемая пламя со стороны продуктов горения,  $\Delta T$  – разность температур стенки и продуктов горения, и  $K$  – коэффициент теплопередачи. С другой стороны, поток тепла, выделяемого во фронте, в направлении холодного газа есть

$$q = \rho Q \times U \times \pi d^2/4,$$

где  $Q$  обозначает удельную теплоту сгорания смеси. Безразмерное отношение

$$\delta \equiv \frac{\bar{q}}{q} = \frac{2K}{\rho c_p U_f}, \quad (9.18)$$

где  $c_p \equiv Q/\Delta T$  есть средняя теплоёмкость смеси, даёт оценку относительного уменьшения скорости пламени из-за потерь тепла в стенки трубы. Как видно, эта величина не зависит ни от ширины трубы  $d$ , ни от скорости пламени  $U$ . В применении к пламёнам в метано-воздушных смесях при нормальных условиях  $\rho \approx 1.2$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_p$  лежит в пределах от 1.3 до

1.8 кДж/кг·К, в зависимости от концентрации метана, а коэффициент теплопередачи для труб кругового сечения изменяется от 5 до 35 Вт/м<sup>2</sup>·К в зависимости от свойств течения [171]. Поскольку более точных значений  $K$  в анализируемых ниже экспериментальных работах не приводится, в дальнейших оценках параметра  $\delta$  используется среднее значение  $K = 20$  Вт/м<sup>2</sup>·К. Подстановка приведённых выше значений в (9.18) показывает, что относительное падение скорости может достигать 25% (оно максимально вблизи пределов воспламенения).

### §9.5. Оценка точности решений в рамках $1/U$ -разложения

Для справедливости асимптотической формулы (С.10) для  $\mathcal{H}$  и (8.18) требуется лишь  $f' \gg 1$ , или  $U \gg 1$ . Относительная величина отброшенных в них членов есть  $1/U^2$ . Но вывод уравнения (9.9) существенно использует оценки  $u_- = O(U)$ ,  $w_- = O(1)$  для того, чтобы пренебречь  $w_-$  в сравнении с  $u_-$ . Учитывая, что  $w_- \lesssim \alpha$  (поскольку  $w_0 = \alpha/2$ ), это предполагает выполнение более сильного условия  $U \gg \alpha$ . Возвращаясь на время к обычным единицам и вспоминая, что  $U \sim \sqrt{gd}$ , получаем условие применимости используемого приближения:

$$\frac{\alpha U_f}{\sqrt{gd}} \ll 1.$$

Погрешность же в самом значении  $U$  существенно меньше, чем в  $u_-(x)$ , поскольку  $U$  является интегральной величиной. Основной вклад в неё происходит от области, где  $|f'|$  велико, то есть из нижней половины трубы. В решениях типа II  $u_-(x)$  растёт с  $x$ , достигая в итоге значений  $\approx \alpha U$ , тогда как  $w_-(x)$  монотонно уменьшается, так что условие  $u_- \gg w_-$  практически выполняется, если  $u_- \gtrsim w_-$  на верхней стенке, то есть

$$U \gtrsim \frac{\alpha}{2}. \quad (9.19)$$

При переходе к решениям типа I поведение  $u_-$  качественно не меняется, тогда как  $w_-$  сначала растёт, достигая максимума при  $x \approx 0.2$ , где она, вообще говоря, не мала по сравнению с  $u_-$ , а затем быстро уменьшается. Поскольку максимум находится в верхней части трубы, условие (9.19) применимо также и к пламёнам типа I. Количественная оценка погрешности  $\epsilon$  в теоретическом значении  $U$  может быть теперь получена следующим образом. Эта погрешность происходит, в основном, от области где  $w_-/u_- \gtrsim \epsilon$ . С другой стороны, поскольку  $U$  равняется длине фронта,  $\epsilon$  примерно равно отношению длины дуги

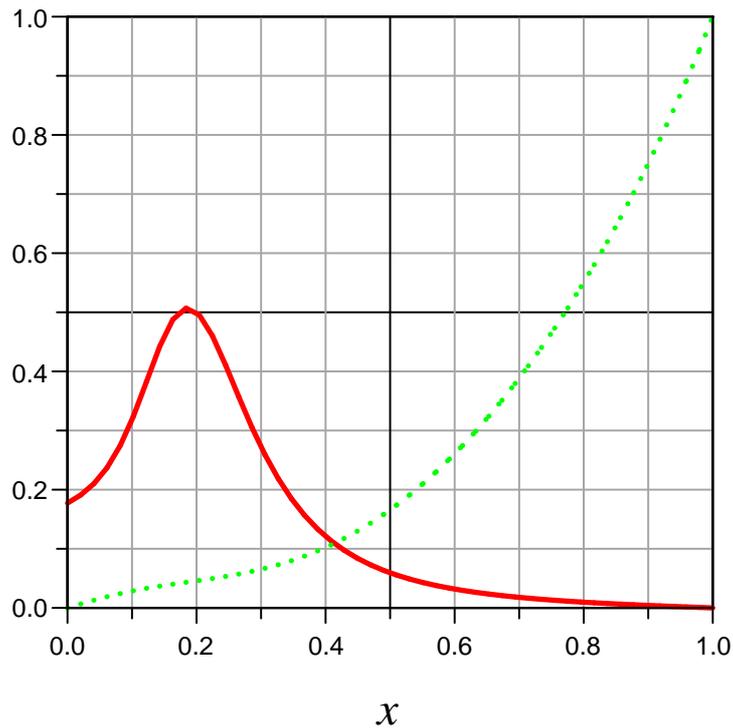


Рис. 24: Нахождение относительной погрешности в значении  $U$  для решения типа I с  $\theta = 5$ ,  $b = 40$  см,  $U_f = 10$  см/с,  $U = 11.3$ . Сплошной кривой показан график  $w/u$ , точечной кривой –  $f/U$ . Ордината их пересечения  $\approx 0.11$ .

фронта, лежащей в этой области, к полной длине фронта. Следовательно,  $\epsilon$  может быть найдено как ордината точки пересечения кривых  $w_-/u_-$  и  $f/U$ . Пример такого вычисления дан на Рис. 24 для пламени типа I с  $\theta = 5$ ,  $b = 40$  см,  $U_f = 10$  см/с и  $U = 11.3$ , где  $\epsilon$  получается равным 11%.

Вообще говоря, относительная погрешность в вычисляемых величинах уменьшается с ростом диаметра трубы и с уменьшением нормальной скорости пламени, будучи  $\approx 20\%$  на границе, определяемой условием (9.19).

### §9.6. Сравнение теории с экспериментальными данными по пламёнам в метано-воздушных смесях

Наиболее обширное экспериментальное исследование метано-воздушных пламён в широких горизонтальных трубах было проведено в классических работах Коварда и Хартве-

Tube diameter, 20 cm.				Tube diameter, 10 cm.			
CH <sub>4</sub> , %.	S.U.M.	CH <sub>4</sub> , %.	S.U.M.	CH <sub>4</sub> , %.	S.U.M.	CH <sub>4</sub> , %.	S.U.M.
6.04	64	10.10	127	5.87	43	10.01	106
6.13	63	10.38	130	6.80	56	10.17	105
7.22	81	11.02	111	7.25	62	10.21	109
7.23	80	11.87	93	7.26	64	10.27	105
8.02	102	11.90	88	7.64	72	10.41	102
8.15	103	12.04	81	8.14	82	10.64	98
8.99	128	12.05	84	8.21	84	11.30	84
9.49	127	12.14	84	8.63	92	11.94	68
9.90	130	12.20	79	8.67	96	12.22	61
9.93	126	12.92	64	9.08	100	12.85	48
10.04	131	13.11	64	9.15	105	13.56	43
10.05	128			9.63	110		

FIG. 2.

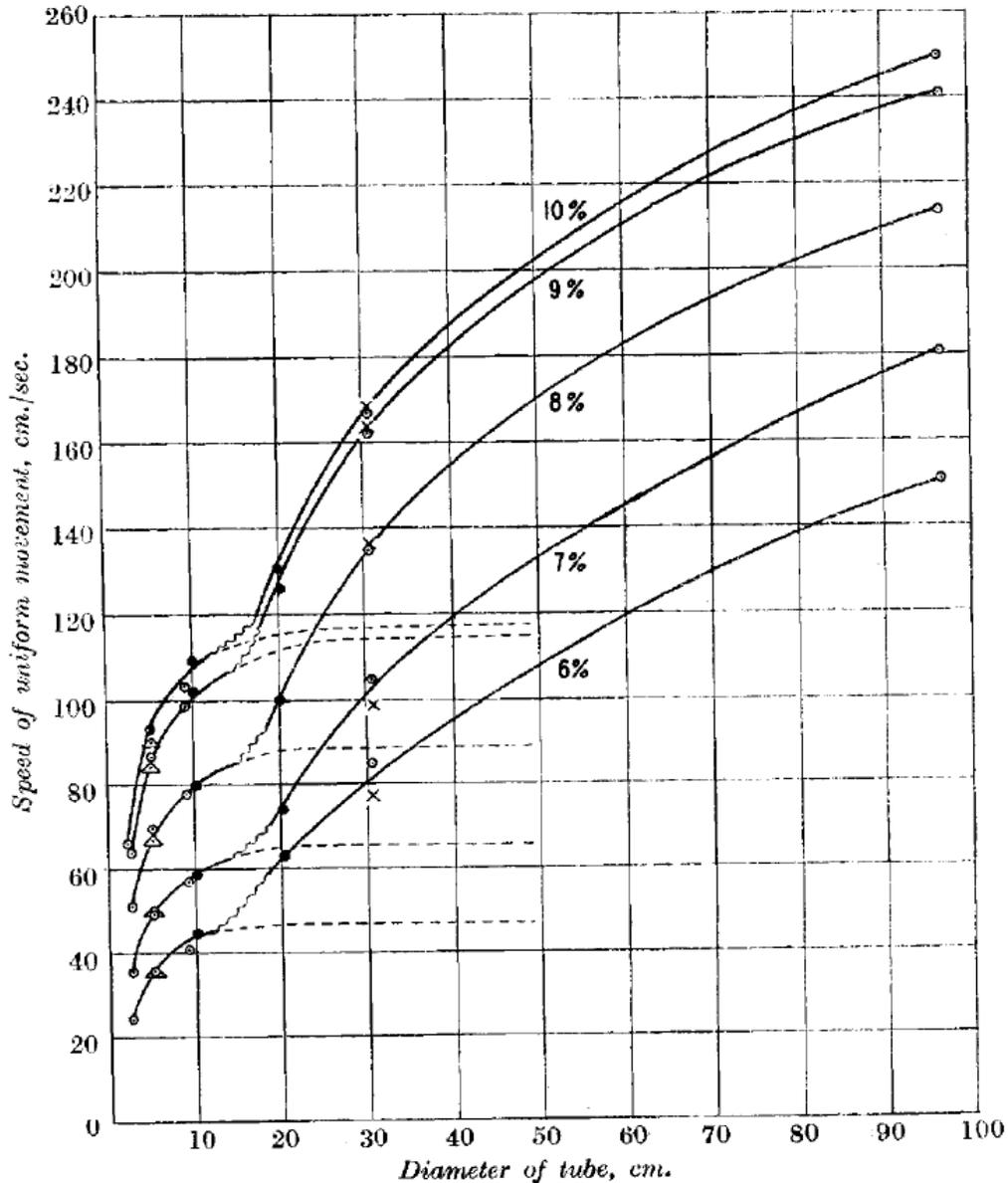


Рис. 25: Экспериментальные данные по скорости установившегося движения (S.U.M.) пламен в трубах различных диаметров. Воспроизведено из [80], стр.1999.

ла [80, 81]. Рисунок 2 из [80] с данными по скорости установившегося пламени воспроизведён на Рис. 25. Он содержит также результаты более ранних исследований [71, 78–80].

Приступая к сравнению теории с экспериментом заметим прежде всего, что из данных таблицы на Рис. 25 следует важный вывод о том, что скорость установившегося пламени (обозначенная в таблице как S.U.M.) не может быть аппроксимирована *единой* функцией вида

$$U = C(\theta)\sqrt{gb}, \quad (9.20)$$

чего можно было бы ожидать на основании простого анализа размерности. Именно, рассмотрим пару пламён, распространяющихся в смесях с концентрацией метана  $c = 8.02\%$  и  $c = 12.05\%$  в трубе диаметром 20 см. Согласно таблице их скорости равны 102 см/с и 84 см/с, соответственно. В то же время, оба пламени имеют одинаковый  $\theta = 6.8 \pm 0.1$  [101, 172]. Более того, поскольку они имеют одну и ту же температуру и распространяются в одной и той же трубе, потери тепла также должны быть одинаковы (в самом деле, параметр  $\delta$  в обоих случаях равен 0.07). Следовательно, в соответствии с формулой (9.20) скорости этих пламён должны быть одинаковы. Аналогично, в трубе диаметром 10 см пламёна с  $c = 8.21\%$  и  $c = 11.94\%$  имеют одинаковые  $\theta = 6.9 \pm 0.1$  и  $\delta = 0.064$ , но существенно различные скорости 84 см/с и 68 см/с. Наблюдаемые различия в скоростях пламён существенно превышают экспериментальную погрешность, что ясно видно из сравнения данных той же таблицы для близких концентраций. Например, указанное выше значение  $U$  для  $c = 8.02\%$  находится рядом со значением для  $c = 8.15\%$  ( $U = 103$  см/с), а значение скорости для  $c = 12.05\%$  близко к значению для  $c = 12.04\%$  ( $U = 81$  см/с).

Непосредственно связанным с этим является наличие точек перегиба при  $c \approx 8\%$  and  $c \approx 11.4\%$  у скорости пламени, рассматриваемой как функция концентрации метана. Как видно из данных Рис. 25, за умеренным ростом скорости между  $c = 6\%$  и  $c \approx 7.2\%$ ,  $U(c)$  растёт значительно быстрее на интервале  $c \in (7.2\%, 9\%)$ , после которого она остаётся практически постоянной до  $c = 10.4\%$ . Аналогично, уменьшение  $U(c)$  на интервале  $c \in (11\%, 12.2\%)$  значительно больше, чем на  $(12.2\%, 13.5\%)$ .

Переходя к объяснению описанных особенностей, перечислим факторы, влияющие на зависимость скорости пламени от концентрации горючего:

- ( $\alpha$ ) зависимость скорости пламени от коэффициента теплового расширения,
- ( $\beta$ ) потери тепла в стенку трубы,

( $\gamma$ ) существование двух различных режимов установившегося распространения пламени.

Что касается ( $\alpha$ ), численный анализ дифференциальных уравнений, полученных в §9.2, показывает, что скорость пламени физических решений типа I (типа II) растёт (уменьшается) с ростом  $\theta$ , хотя эта зависимость является сравнительно слабой. Далее, потери тепла существенно уменьшают скорость пламени лишь вблизи пределов воспламенения, а в смесях, близких к стехиометрической, поправка к скорости пламени составляет несколько процентов. Наконец, именно существование двух типов пламен является ключевым для объяснения наблюдаемых свойств функции  $U(c)$ . Как будет показано ниже, точки перегиба у  $U(c)$  соответствуют переходам от режима распространения пламени типа I к типу II и обратно. Таким образом, поведение  $U(c)$  качественно объясняется следующим образом. Распространение пламен в смесях вблизи пределов воспламенения и вблизи стехиометрии описывается решениями типа I и типа II, соответственно. Суммарный эффект факторов ( $\alpha$ ) и ( $\beta$ ) объясняет умеренный рост скорости пламени на интервале  $c \in (6\%, 7.2\%)$ , а также её умеренное снижение на интервале  $c \in (12.2\%, 14\%)$ . С другой стороны, вблизи стехиометрии эти факторы действуют разнонаправленно, частично компенсируя друг друга, в результате чего при  $U(c) \in (9\%, 10.4\%)$  образуется плато. Наконец, переходы между двумя режимами распространения объясняют быстрые изменения скорости пламени на интервалах  $c \in (7.2\%, 9\%)$  и  $c \in (11\%, 12.2\%)$ .

Для проведения количественного сравнения теории с экспериментом требуются некоторые вспомогательные экспериментальные данные. Значения нормальной скорости  $U_f$  могут быть взяты из [105, 173]. Согласно оценке, данной в [81], относительное увеличение площади фронта за счёт ячеистой структуры в трубах диаметром  $\geq 20$  см составляет 1.4 – 1.5. В отсутствие более детальной информации в нижеследующих вычислениях нормальная скорость пламени в таких трубах полагается равной  $\beta U_f$  с  $\beta = 1.45$ . Значения коэффициента теплового расширения легко определяются с помощью онлайн-калькулятора адиабатической температуры пламени [172]. Тепловые потери учитываются путём умножения теоретического значения  $U$  на  $(1 - \delta)$ , где  $\delta$  даётся (9.18). В этой формуле  $\rho$  полагается равной  $1.2 \text{ кг/м}^3$  (пренебрегая её зависимостью от концентрации метана),  $K$  во всех случаях равен  $20 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$ ,  $c_p$  вычисляется в каждом случае с помощью данных, предоставляемых калькулятором [172].

В качестве примера процедуры расчёта рассмотрим пламя вблизи нижнего предела

воспламенения. На Рис. 25 они представлены нижней интерполирующей кривой, отмеченной символом 6%. Учитывая, что стехиометрический состав достигается при  $c = 9.5\%$ , находим сначала безразмерный коэффициент избытка горючего  $\Phi = 0.61$ . Для этого значения калькулятор [172] даёт 1680 К для температуры пламени при нормальных условиях (1 атм, 300 К). Отсюда  $\Delta T = 1380$  К и  $\theta = 5.64$ . Функции (9.20) для пламён типов I и II, полученные численным интегрированием основной системы уравнений с этим значением  $\theta$ , имеют вид

$$U_I = 18.2\sqrt{b}, \quad U_{II} = 29.3\sqrt{b},$$

где ширина  $b$  должна быть выражена в сантиметрах. Далее, для вычисления тепловых потерь используем значение 0.9 МДж/моль для теплоты горения метана вместе с найденным  $\Delta T$  для того, чтобы найти  $c_p \approx 1.3$  кДж/кг·К. Нормальная скорость пламени  $U_f = 11$  см/с находится из Рис. 2 работы [105]. С учётом перенормировки  $U_f \rightarrow \beta U_f$  в широких трубах подстановка в (9.18) даёт  $\delta = 0.16$  и  $\delta = 0.23$  для труб диаметрами  $\geq 20$  см и  $\leq 10$  см, соответственно. Наконец, условие (9.19) означает, что численные решения применимы при  $U \gtrsim 2.3$ , или в обычных единицах,  $U \gtrsim 2.3 \times 11$  см/с  $\approx 25$  см/с для  $b \leq 10$  см и  $U \gtrsim 40$  см/с для  $b \geq 20$  см. Как видно из Рис. 25, при данной концентрации метана область применимости теории охватывает все имеющиеся экспериментальные данные.

Графики вычисленных таким образом скоростей пламён типов I и II приведены на Рис. 26(a), из которого следует, что при нормальных начальных условиях распространение пламён в рассматриваемой смеси происходит в режиме типа I в трубах любого диаметра. Этот вывод остаётся справедливым и для 7% смеси, Рис. 26(b), где  $U_f = 20$  см/с,  $\theta = 6.26$ . В этом случае условие (9.19) требует  $U \gtrsim 53$  см/с, поэтому на рисунке показаны результаты лишь для  $b \geq 10$  см. С другой стороны, горение в смесях, близких к стехиометрической, происходит в режиме II, как это следует из Рис. 27, на котором представлены зависимости  $U(b)$  для смесей 9% и 10% метана: в пределах погрешности вычислений, все экспериментальные значения лежат на кривых типа II (точечные линии). Значения параметров, использованных в построении кривых для различных смесей, собраны в Таблице I. Они включают постоянные  $U(b)/\sqrt{b}$  для каждого типа решения и погрешность вычисления, определённую согласно §9.5. В последних двух столбцах даны пары значений этой погрешности:  $r_m$  для  $b = 10$  см и  $r_w$  для  $b = 100$  см. Значения параметра тепловых потерь  $\delta$  относятся к трубам  $b \geq 10$  см; в трубах с  $b \leq 10$  см они должны быть умножены на 1.45. Из условия (9.19) следует, что в смесях с концентрацией мета-

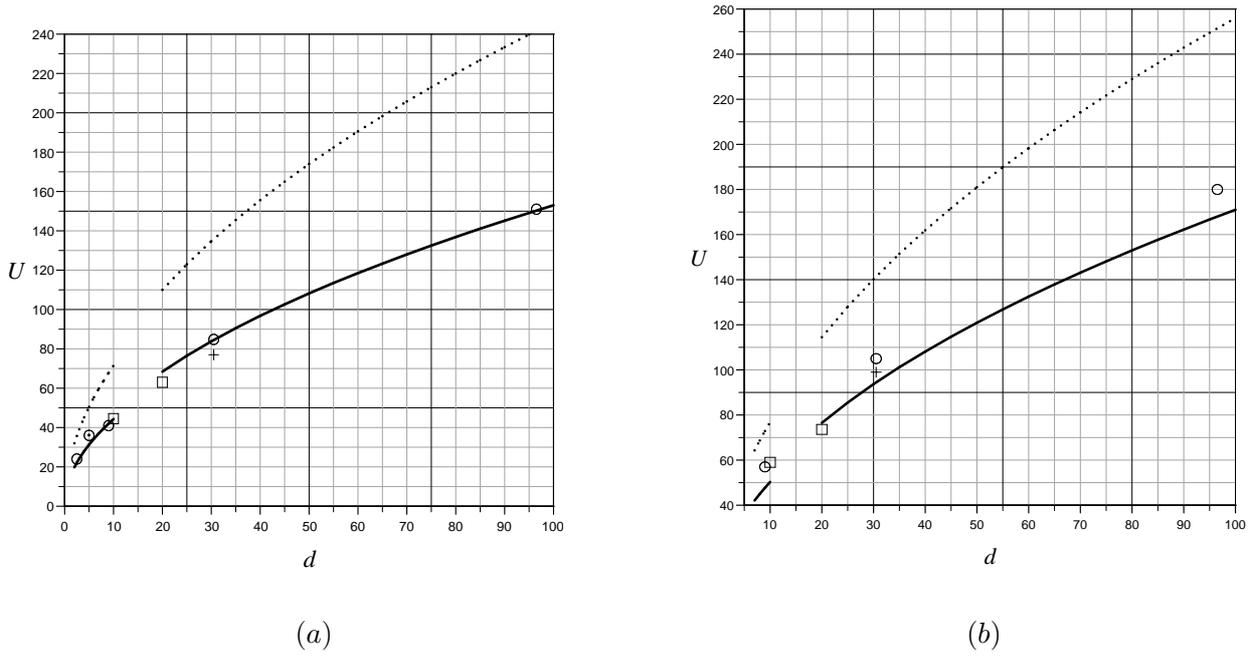


Рис. 26: Сравнение решений типа I (сплошные линии) и типа II (точечные линии) с экспериментальными данными для скорости пламени в смеси 6% метана с воздухом (a) и 7% метана с воздухом (b). Теоретические значения включают фактор  $(1 - \delta)$ , учитывающий потери тепла в стенке трубы. Скорость пламени измеряется в см/с, диаметр трубы  $b = d$  – в см.

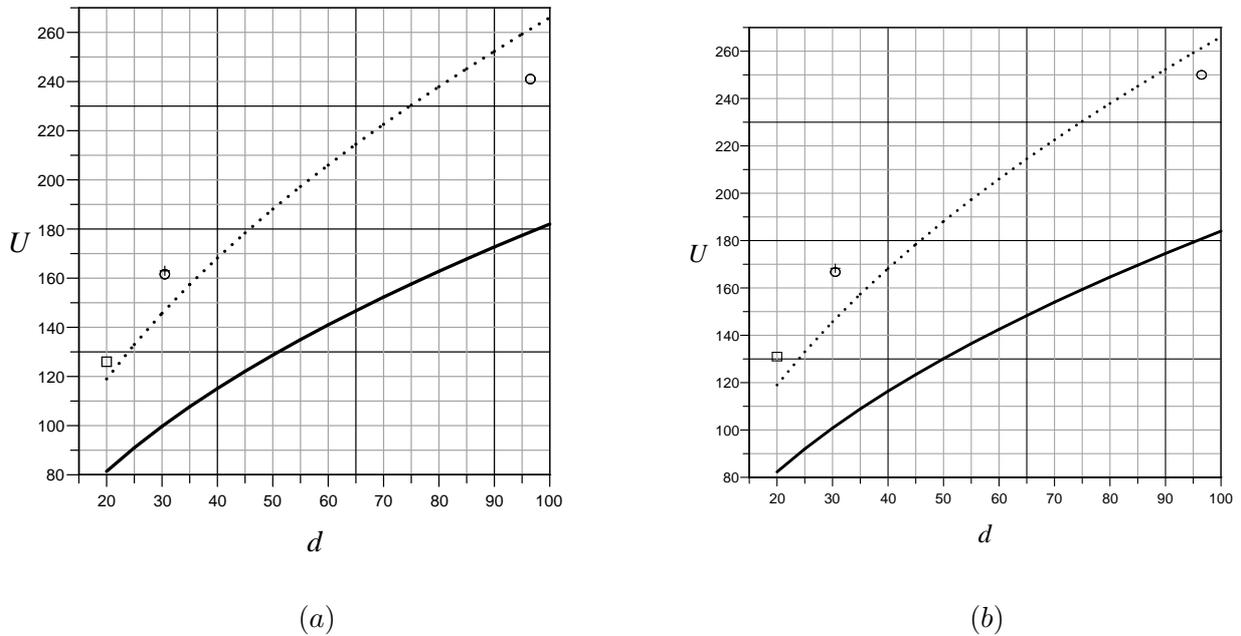


Рис. 27: То же для смеси 9% (a) и 10% (b) метана с воздухом.

$c$ , %	$\theta$	$U_f$ , см/с	$c_p$ , кДж/кг·К	$\delta$	$U_I/\sqrt{b}$ , $\sqrt{\text{см}}/\text{с}$	$U_{II}/\sqrt{b}$ , $\sqrt{\text{см}}/\text{с}$	$r_m$ , %	$r_w$ , %
6	5.64	11	1.33	0.16	18.2	29.3	15	9
7	6.26	20	1.37	0.08	18.6	28.5	18	11
8	6.85	30	1.42	0.05	18.8	27.9	22	13
9	7.31	37	1.47	0.04	19.0	27.7	21	12
10	7.48	43	1.52	0.03	19.1	27.6	23	13
11	7.23	38	1.57	0.04	19.0	27.7	22	12
12	6.90	26	1.64	0.05	18.9	27.9	20	12
13	6.59	12	1.71	0.11	18.7	28.1	14	8
14	6.27	5	1.79	0.25	18.6	28.5	10	6

Таблица I: Значения параметров, использованные при построении теоретических кривых на Рис. 26–28. Значение  $U_f = 5$  см/с для  $c = 14\%$  получено экстраполяцией данных [105, 173].

на от 8% до 12% погрешность вычислений допускает результативное сравнение теории с экспериментом лишь в трубах с  $b \geq 20$  см. Например, для  $c = 10\%$  имеем  $U_f = 43$  см/с,  $\theta = 7.5$ ,  $U_I = 1.4$ ,  $U_{II} = 2.03$  в трубе диаметром 10 см, тогда как  $\alpha/2 = 3.25$ .

Эти результаты приводят к выводу, что быстрое изменение скорости пламени, наблюдаемое в интервале концентраций от  $c = 7.2\%$  до  $c = 9\%$ , является результатом перехода от режима распространения пламени типа I к режиму типа II. Причина этого перехода должна лежать в относительной устойчивости этих режимов. Рассмотрение поведения скорости пламени в смесях с концентрацией метана  $> 10.4\%$  вполне аналогично проведённому. Именно, сравнение теоретических и экспериментальных данных для смеси 11% метана с воздухом на Рис. 28(a) показывает, что в данной смеси пламени относятся к типу II, тогда как пламени в смесях 13% и 14% метана относятся к типу I в трубах любого диаметра, как это видно из Рис. 28(c), 28(d) и ожидалось на основании проведённого выше качественного анализа. Рисунок 28(b) указывает на то, что в соответствии с этим анализом в интервале концентраций  $c \in (11\%, 12.2\%)$  происходит переход между двумя режимами.

Несмотря на то что этот вывод сделан из сравнения теории с результатами наблюдений пламени при нормальных условиях, на его основе можно ожидать, что переход режима

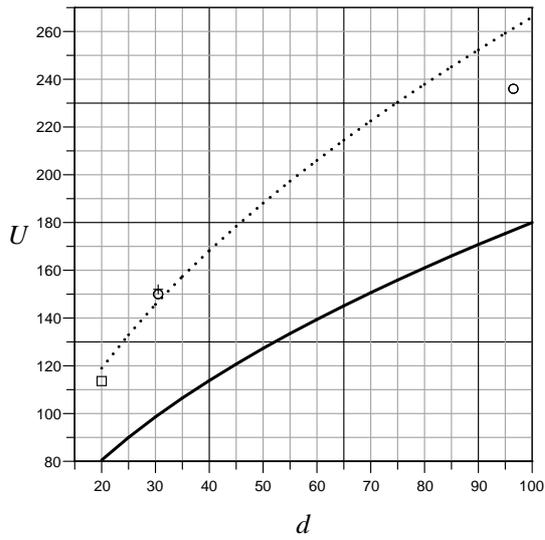
распространения типа I в режим типа II будет наблюдаться также и при прогреве исходной смеси. Действительно, хотя при этом уменьшается коэффициент расширения газа, но нормальная скорость пламени увеличивается быстрее, и следовательно, число Фруда  $Fr \sim U_f^{-2}$  резко уменьшается. Например, при увеличении начальной температуры бедных метано-воздушных смесей на 300 К значение  $\theta$  уменьшается в 1.7–1.8 раз, но  $U_f$  увеличивается в 3–4 раза [108]. В результате число Фруда уменьшается на порядок до значений, характерных для смесей, близких к стехиометрической, которые в нормальных условиях распространяются в режиме типа II. Однако для учёта влияния уменьшения коэффициента расширения газа, как и эффектов конечной ширины фронта, требуется исследование устойчивости решений обоих типов.

Наконец, форма фронта пламени с фотографии на Рис. 19 сравнивается с теоретической на Рис. 29. При этом экспериментальное положение фронта отождествляется с точками наибольшей яркости, отмеченными на Рис. 29(a) крестиками, координаты которых автоматически определяются с помощью программы DigitizeIt. На Рис. 29(b) полученный результат наложен на решение типа II, соответствующее наблюдаемой скорости пламени  $U = 110$  см/с.

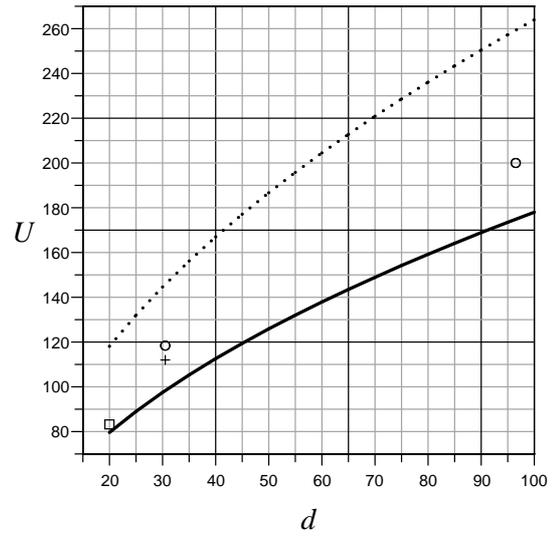
### Вывод

Важнейшим выводом данной главы является существование двух существенно различных стационарных режимов распространения ламинарного пламени в горизонтальных трубах. Детальное сравнение с экспериментом в §9.6 показало, что на практике реализуются оба режима: при нормальных начальных условиях ламинарные пламена вблизи пределов воспламенения распространяются только в режиме типа I, тогда как в смесях, близких к стехиометрической, – только в режиме типа II. Смена режима происходит при промежуточных концентрациях. Этот результат естественным образом разрешает указанную в §9.6 проблему неоднозначности зависимости скорости пламени от диаметра трубы. А именно, два пламени с одинаковым  $\theta$  имеют различные скорости в одной и той же трубе потому, что они распространяются в разных режимах.

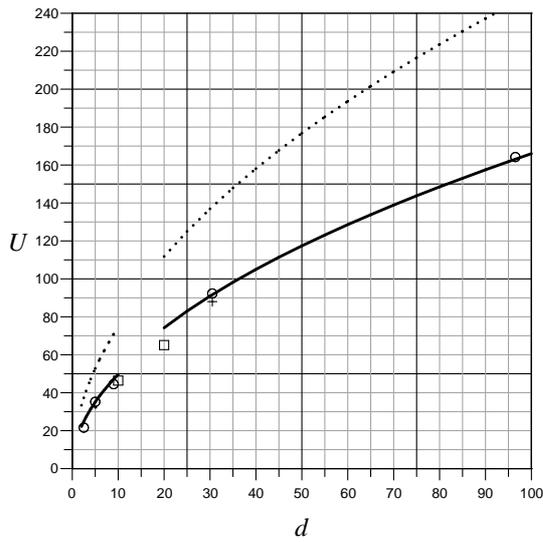
Согласие, в пределах погрешности, теоретических предсказаний с экспериментальными данными подтверждает адекватность двумерной модели для описания установившегося распространения пламени в горизонтальных трубах и, в частности, оправдывает сде-



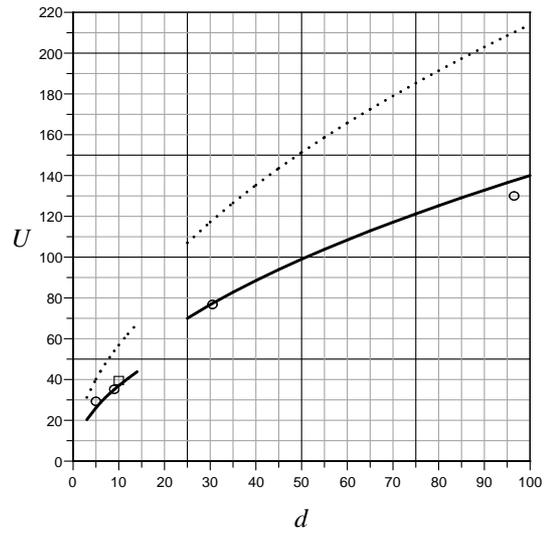
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 28: То же для смеси 11% (a), 12% (b), 13% (c) и 14% (d) метана с воздухом.

ланное выше отождествление  $b = d$ .

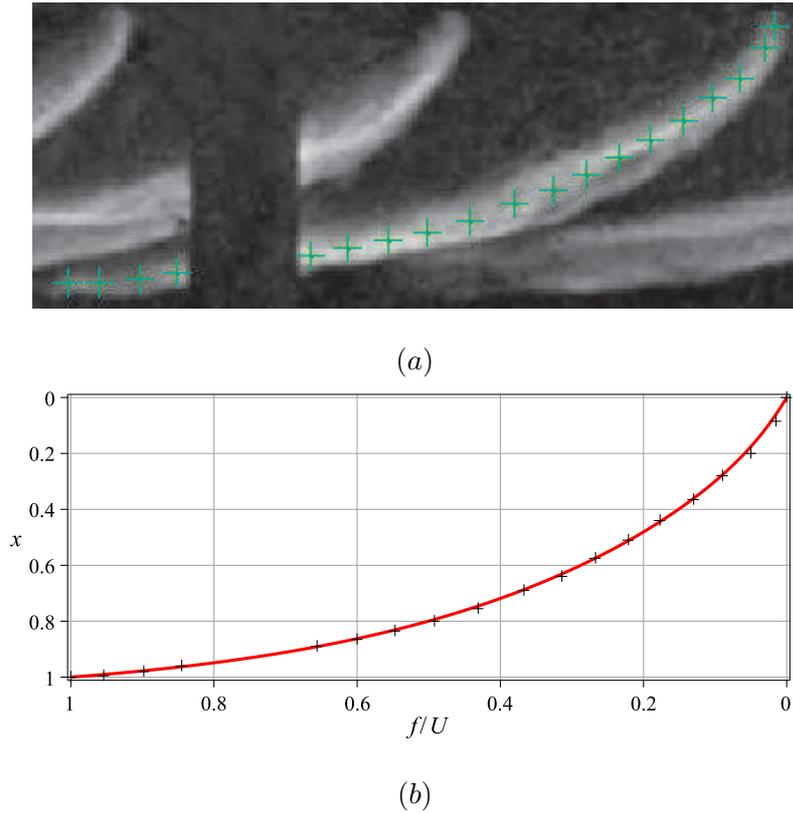


Рис. 29: Сопоставление профилей фронта двумерной модели и реального пламени. (a) Обработка центральной части фотографии с Рис. 19. (b) Наложение результата этой обработки (крестики) на решение типа II для  $U = 110$  см/с (сплошная линия). Использованы естественные единицы.

## 10. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОТКРЫТИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПЛАМЁН С ПЕРЕГИБОМ ФРОНТА [A13]

### §10.1. Предпосылки практической реализации пламён с перегибом фронта

Как было показано в §9.3, уравнения для стационарного пламени нулевой ширины в горизонтальной трубе имеют решения с точкой перегиба фронта (решения типа I), то есть часть фронта пламени является вогнутой относительно холодного газа. Сравнение значений скорости пламени в решениях типа I с экспериментальными данными, проведённое в §9.6, показало, что этот режим распространения пламени реализуется вблизи пределов воспламенения. С другой стороны, в многочисленных экспериментах в прошлом пламён с перегибом фронта не наблюдалось. Ввиду этого до недавнего времени считалось, что фронт стационарного пламени (пренебрежимо малой ширины) должен быть выпук-

лым в сторону холодной смеси [164], хотя попытки доказать это аналитически оказались безуспешными. Чтобы разрешить это кажущееся противоречие, следует напомнить, что численные решения, найденные в §9.3, были получены в рамках  $1/U$ -разложения путём продолжения истинных решений из области  $|f'| \gg 1$  к верхней стенке трубы, и поэтому применимы вне некоторой окрестности точки  $x = 0$ , в которой  $|f'|$  не велико. Размер этой окрестности зависит от конкретного пламени и может быть определён либо теоретическим расчётом, не основанным на  $1/U$ -разложении, либо экспериментально. Перегиб фронта должен наблюдаться, если он находится вне этой окрестности. Хотя этот вопрос пока недоступен точному теоретическому расчёту, условия появления перегиба можно определить качественно, рассуждая следующим образом.

Реальные пламена имеют фронт малой, но конечной ширины, следовательно, для экспериментальной реализации перегиба необходимо обеспечить достаточную малость эффектов конечной ширины фронта. В отсутствие мелкомасштабной (ячейстой) структуры эти эффекты заведомо пренебрежимо малы в области  $|f'| \gg 1$ , где форма фронта и распределение скорости газа вдоль него меняются сравнительно медленно, то есть на протяжении большей части фронта. Однако они становятся значительными как раз в указанной окрестности, где  $|f'|$  быстро падает от значений  $\gg 1$  до нуля на стенке. Вогнутость фронта в направлении холодного газа выше точки перегиба делает течение сгоревшего газа принципиально отличным от случая, когда фронт является выпуклым на всём его протяжении, как это иллюстрируется Рис. 30. Из-за скачка нормальной скорости газа с  $U_f$  до  $\theta U_f$  линии тока круто загибаются вверх, а на некотором расстоянии от фронта происходит их выравнивание параллельно стенке трубы. Именно наличие этой области затрудняет экспериментальную реализацию перегиба фронта, поскольку требует наличия обратного перегиба фронта, прежде чем он достигнет стенки (на Рис. 30(b) этот отрезок фронта обозначен пунктирной линией). Поскольку структура пламени вблизи стенки определяется эффектами конечной ширины фронта, размер области обратного перегиба имеет порядок  $\lambda_c$ .

Оказывается, далее, что эффекты конечной ширины фронта в самой точке перегиба также могут влиять на его образование. На врезке Рис. 31 приведена относительная поправка к нормальной скорости газа, вычисленная на решениях для пламени нулевой ширины в 6% метано-воздушной смеси. Как видно из этого графика, эффект растяжения пламени (величина которого пропорциональна  $\mathcal{L}_s$ ) приводит к увеличению (уменьшению)

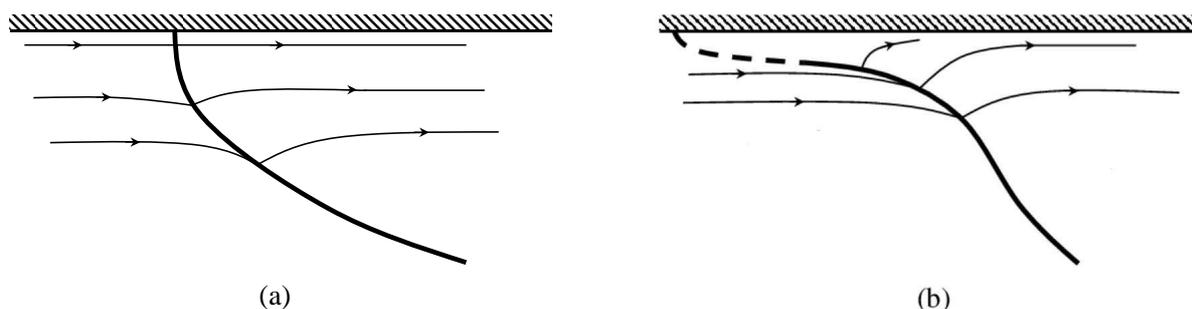


Рис. 30: Схематическое изображение фронта пламени без перегиба (a) и с перегибом фронта вблизи стенки (b).

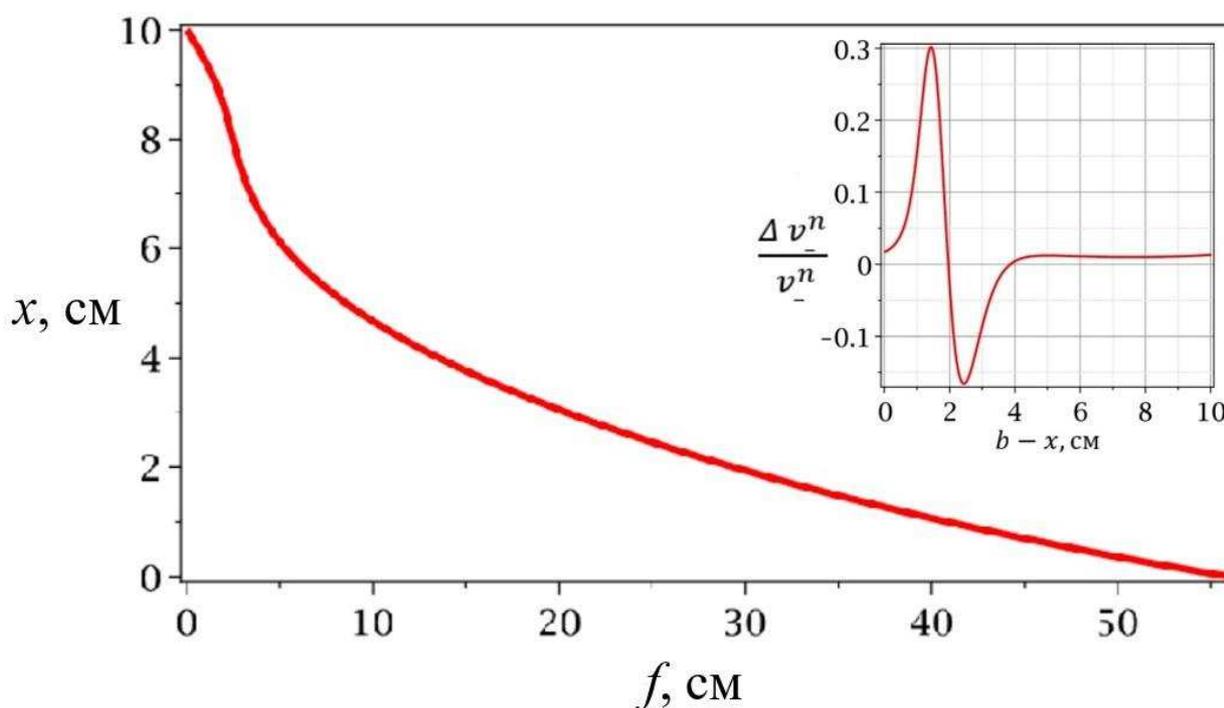


Рис. 31: Положение фронта пламени типа I нулевой ширины с  $\theta = 5.64$ ,  $U_f = 11$  см/с. Врезка: относительное отклонение нормальной скорости пламени от  $U_f$  за счёт эффекта растяжения пламени для  $\mathcal{L}_s = -0.45$  мм.

нормальной скорости над (под) точкой перегиба. В результате вогнутость фронта над точкой перегиба должна уменьшаться, то есть перегиб должен ослабляться.

Из этого рассуждения следует, что наиболее благоприятные условия для наблюдения перегиба фронта имеются у пламён с достаточно малым  $\theta$  и в смесях, в которых  $\mathcal{L}_s$  имеет знак, противоположный  $\mathcal{L}_s$  в 6% метано-воздушной смеси. Знак  $\mathcal{L}_s$  совпадает

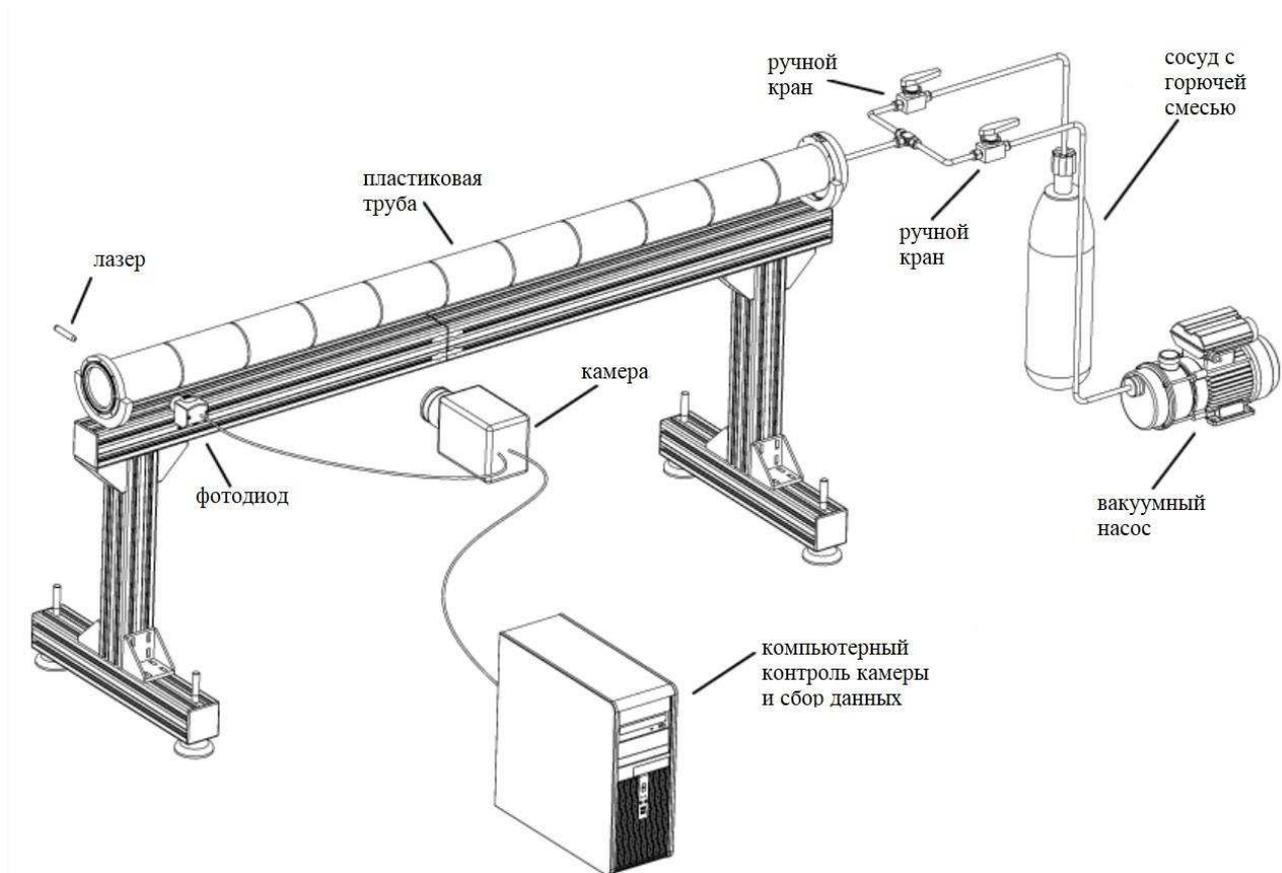


Рис. 32: Схема экспериментальной установки.

со знаком ( $Le - 1$ ), где число Льюиса  $Le$  есть отношение температуропроводности смеси к коэффициенту диффузии реагента, лимитирующего реакцию [2, 97]. Следовательно, предпочтительными являются либо обеднённые смеси высших углеводородов с воздухом, либо богатые водородо- или метано-воздушные смеси. При этом наименьшие значения  $\theta \approx 2$  достигаются у так называемых холодных пламён (*cool flames*), которые наблюдаются во многих газовых смесях, включая углеводородо-воздушные [109–111]. Поэтому в экспериментах использовались смеси этана и бутана с воздухом вблизи нижнего предела воспламенения. Пламёна в них имеют  $\lambda_c \approx 3$  мм, так что в трубе диаметром  $b = 10$  см условие  $b \gg \lambda_c$  выполняется достаточно хорошо.

### §10.2. Описание экспериментальной установки

Эксперименты проводились в нормальных условиях (давление 1 атм, начальная температура смеси  $300 \text{ K} \pm 5 \text{ K}$ ) в горизонтальной трубе диаметром 10 см, один конец которой

был закрыт. Поджиг смеси производился у её открытого конца. Схема установки показана на Рис. 32. Она включала высокоскоростную камеру, компьютер для её контроля и записи данных, вакуумный насос, металлический баллон, лазер, фотодиод, термопару и устройство поджига. Труба была изготовлена из прозрачного пластика (полиметилметакрилат), имела длину 6 м, внутренний диаметр 10 см и стенки толщиной 5 мм. Исследуемые смеси готовились методом парциального давления, заполняя металлический баллон начиная с вакуума до давления 4 бар. Содержимого одного баллона было достаточно для трёхкратного заполнения трубы. Перед каждым экспериментом труба закрывалась с обоих концов и из неё откачивался воздух до остаточного давления 1 мбар. Затем труба заполнялась смесью до давления 1 бар, после чего выдерживалась пауза в несколько минут для того, чтобы в смеси затухли внутренние движения. Затем фланец, закрывающий один конец трубы, осторожно поднимался, оставаясь в вертикальной плоскости, и смесь поджигалась. Поджиг производился либо с помощью бытовой газовой зажигалки, медленно подносимой снаружи к открытому концу трубы, либо с помощью электрического разряда между двумя электродами, расположенными внутри трубы на расстоянии 5 см от её открытого конца. Распространение пламени фиксировалось с помощью высокоскоростной камеры (Photron RS 3000), оптическая ось которой располагалась горизонтально перпендикулярно оси трубы. Изображения пламени собирались с частотой 125 Гц и временем накопления 3 мс. Система запуска камеры состояла из лазерного луча, проходящего сквозь трубу перпендикулярно её оси на расстоянии 10 см от открытого конца и направленного на фотодиод. Триггером для камеры служил сигнал фотодиода, порождаемый отклонением лазерного луча из-за прохождения фронта пламени. Относительная погрешность экспериментального определения положения пламени и его скорости составляет 5%. Прямое измерение температуры пламени с помощью термопары, однако, оказалось значительно менее точным: в силу малости времени измерения погрешность в значениях температуры пламени составляет  $\approx 100^\circ\text{C}$ , Рис. 33.

### §10.3. Экспериментальные результаты

Сравнение решений типа I с результатами измерений подтвердило приведённый выше качественный анализ свойств пламени в окрестности его ведущей точки. А именно, в случае обычного горячего пламени ( $\theta \gtrsim 5$ ) перегиб его фронта сглаживается, как это

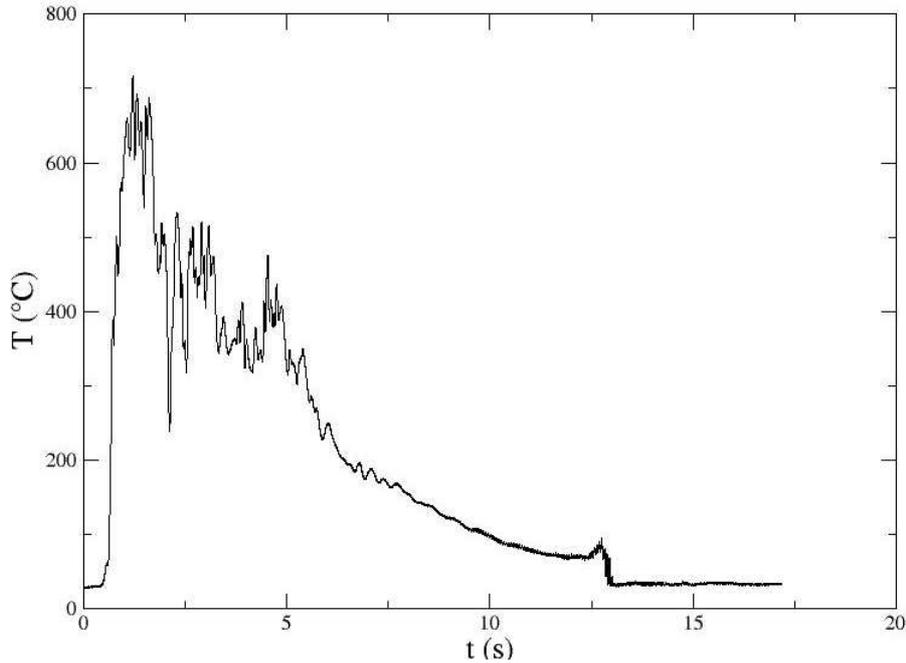


Рис. 33: Зависимость температуры продуктов горения от времени при распространении холодного пламени в смеси 6% метана с воздухом в трубе диаметром 10 см длиной 6 м, измеренная с помощью термопары Doliprane; термопара расположена в верхней части трубы в 5 см от её открытого конца; начальный пик температуры ( $t \approx 2$  с – 4 с) соответствует нагреву смеси пропановой зажигалкой.

иллюстрируется Рис. 34. С другой стороны, перегиб наблюдается при сравнительно малых  $\theta$ . Как и ожидалось, режим холодного пламени возникает при достаточно малом энерговыделении во время поджига смеси. Экспериментальные результаты вполне воспроизводимы. Для проверки воспроизводимости было проведено несколько серий измерений, в каждой из которых поджиг смеси производился газовой зажигалкой либо для первого и третьего заполнения трубы смесью из данного баллона, либо для второго. Во всех случаях поджиг с помощью электрического разряда приводил к обычному пламени с  $\theta \approx 5$  без перегиба фронта, а при поджиге газовой зажигалкой возникало холодное пламя с перегибом фронта. Последовательность изображений на Рис. 35 показывает процесс формирования и распространения пламени типа I в 2% смеси n-бутана с воздухом. Как видно, после короткой переходной стадии, следующей за поджигом, формируется вытянутое пламя без перегиба фронта. Но эта стадия также оказывается переходной, и вскоре у пламени формируется перегиб, после чего оно распространяется стационарно.

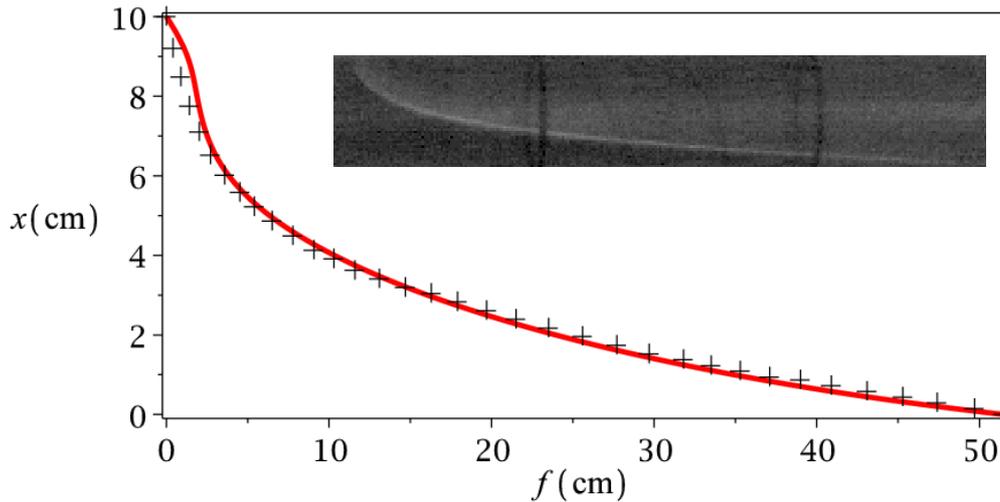


Рис. 34: Положение фронта, даваемое решением типа I для ламинарного пламени нулевой ширины с  $\theta = 5.64$ ,  $U_f = 11$  см/с в трубе шириной 10 см (сплошная линия), и полученное цифровой обработкой фотографии пламени в смеси 6% метана с воздухом, представленной на врезке (крестики). Вертикальные затемнения на трубе – разметка для определения положения пламени.



Рис. 35: Последовательные положения холодного пламени в смеси 2% n-бутана с воздухом в трубе. Пламя распространяется справа налево. Вертикальные затемнения на трубе – разметка для определения положения пламени.

Наблюдаемая форма пламени сравнивается с теоретической на Рис. 36.

Для вычисления формы и скорости пламени нулевой ширины требуются значения двух параметров –  $U_f$  и  $\theta$ . Определение  $U_f$  вблизи пределов воспламенения затруднительно, и в литературе имеется большой разброс в экспериментальных данных даже для обычных пламён. Но как было показано в §9.2, в случае вытянутого пламени его форма и скорость не зависят от  $U_f$  в ведущем порядке  $1/U$ -разложения. С другой стороны, они заметно меняются при изменении  $\theta$ , то есть температуры пламени. Как известно, температура холодных пламён в смесях n-бутана с воздухом находится в интервале  $200^\circ\text{C} - 400^\circ\text{C}$  [110, 111], а как было указано выше, получить более точные результаты в описываемых экспериментах оказалось невозможно. Поэтому сплошная кривая на Рис. 36(b) получена

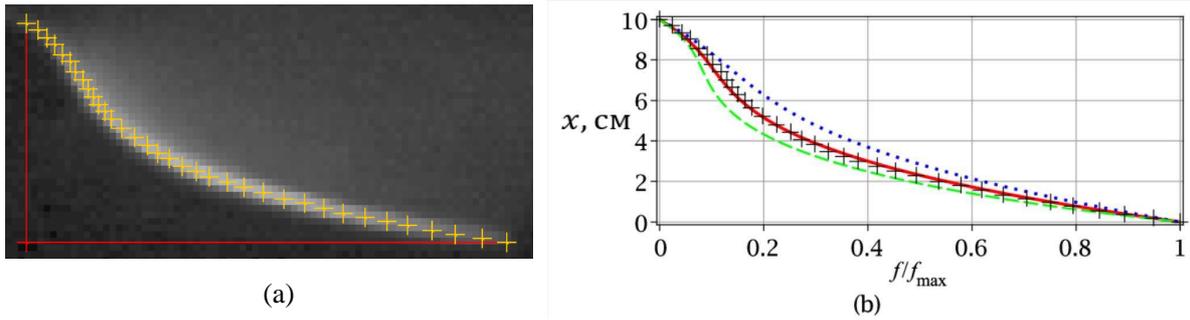


Рис. 36: (а) Обработка одного из изображений на Рис. 35 с помощью программы DigitizeIt. (б) Положение фронта пламени типа I с  $\theta = 2.2$  (сплошная линия),  $\theta = 2.5$  (пунктир) и  $\theta = 1.8$  (точки). Скорость пламени 26.5 см/с. Экспериментальные данные (крестики) перенесены из (а).

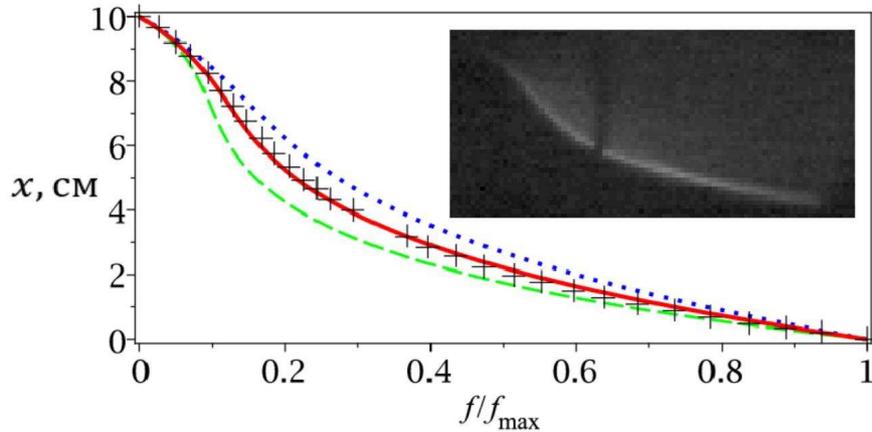


Рис. 37: Наблюдаемое положение фронта пламени в смеси 3.6% этана с воздухом (крестики) и вычисленное для тонкого пламени типа I с  $\theta = 1.8$  (сплошная линия),  $\theta = 2.0$  (пунктир) и  $\theta = 1.6$  (точки). Скорость пламени  $U = 21.5$  см/с. Врезка: фотография пламени.

как наилучшая аппроксимация при варьировании  $\theta$  в ожидаемом интервале. Это даёт  $\theta = 2.2$ , что соответствует температуре пламени  $360^\circ\text{C}$ . Для иллюстрации вариаций формы фронта в зависимости от  $\theta$  на том же рисунке показаны два решения с несколько отличными значениями  $\theta$ .

Эксперименты с этано-воздушными смесями дали совершенно аналогичные результаты. В качестве примера на Рис. 37 сравниваются наблюдаемая форма пламени в смеси 3.6% этана с воздухом с вычисленной для пламен типа I с  $\theta = 1.6, 1.8, 2.0$ .

## Вывод

Проведённые эксперименты подтвердили существование режима установившегося распространения пламени с перегибом фронта. Условия возникновения перегиба как раз те, что предполагались в главе 9 при выводе уравнений для вытянутого пламени нулевой ширины – достаточная малость окрестности точки  $x = 0$ , где  $|f'|$  не велико, и сравнительная малость эффектов конечной ширины фронта. Относительная малость окрестности точки  $x = 0$  достигнута использованием трубы достаточно большого диаметра, а эффект растяжения пламени подавлен использованием обеднённых смесей с достаточно большой молекулярной массой углеводородного соединения. Полученные результаты демонстрируют, в частности, неадекватность модели пузыря [128, 142, 143], в которой имеется единственный режим распространения пламени и не допускается перегиб фронта.

## 11. ЛАМИНАРНОЕ ПЛАМЯ В ШИРОКОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ [A14,A15]

### §11.1. Пределы воспламенения

Распространение пламени в вертикальной трубе занимает особое место среди классических проблем горения. Как наиболее простая и практически важная, эта конфигурация была выбрана для определения стандарта воспламеняемости смесей [7, 8]. Для этого используется вертикальная труба диаметром 5 см и длиной 1.8 м, верхний конец которой закрыт, причём смесь считается способной поддерживать распространение пламени (воспламеняемой), если при поджиге у её нижнего, открытого, конца пламя проходит всю длину трубы. Если пламя затухает раньше достижения верхнего конца трубы, то говорят о его частичном распространении. Нахождение пределов воспламенения, то есть границ концентраций горючего, при которых возможно распространение пламени в данной смеси, является одним из важнейших вопросов безопасности. Поэтому его изучению было посвящено множество экспериментальных и теоретических работ [7–9, 14–30]. Пределы воспламенения измеряются в достаточно широких трубах, чтобы сделать потери тепла в её стенки пренебрежимо малыми, и достаточно длинных, чтобы влияние начального возмущения смеси, вызванное поджигом, успело исчезнуть. Эти предосторожности необходимы для того, чтобы о пределах воспламенения можно было говорить как о внутренних свойствах смеси. Однако хорошо известно, что динамика практически всех лабораторных

пламён зависит от поля тяжести, а вблизи пределов воспламенения гравитационный эффект выражен наиболее сильно ввиду малости нормальной скорости пламени. Результаты измерения пределов воспламенения оказываются, таким образом, зависящими от характера эволюции пламени под действием сильного поля тяжести, в частности, от диаметра трубы. Например, нижний предел воспламенения метано-воздушной смеси, который в трубе диаметром 9.5 см составляет 5.6% метана, уменьшается до 5.3% в трубе диаметром 5.1 см [9, 17], и далее до 4.9% в трубе диаметром 2.4 см [21].

Как показывают наблюдения, вблизи пределов воспламенения фронт углеводородо-воздушного пламени сильно вытягивается вдоль трубы (в некоторых смесях возможен также “развал” фронта пламени на несвязанные друг с другом очаги горения; такие конфигурации здесь не рассматриваются). Поэтому их свойства могут быть теоретически исследованы в рамках  $1/U$ -разложения. В отличие от случая горизонтальной трубы, однако, критические пламёна в вертикальной трубе являются практически осесимметричными. Поэтому результаты двумерного описания, вообще говоря, имеют к ним лишь качественную применимость. Указанная симметрия означает, что в этом описании ширина двумерной трубы должна полагаться равной половине диаметра  $d$  физической трубы:  $b = d/2$ . Важное следствие симметрии состоит в том, что отпадает необходимость в учёте тепловых потерь в стенки трубы. В отличие от распространения в горизонтальной трубе, горячие продукты горения симметричного пламени приходят в контакт со стенками только после выхода из области пламени ( $y \in [0, U]$ ), и поэтому теплотери существенно меньше влияют на скорость пламени.

### §11.2. Наблюдаемые свойства частичного распространения пламени

Наиболее исследованными являются предельные пламёна в метано-воздушных и пропано-воздушных смесях в трубах диаметром 5.1 см, 9.5 см, 10 см и 20 см [7–9, 17, 18]. Эти пламёна имеют  $\theta$  в интервале от 4.7 до 5.3, различные нормальные скорости и существенно различные соотношения молекулярных масс горючего и окислителя. Несмотря на различия в физико-химических параметрах, в поведении предельных пламён наблюдается большое сходство:

(i) Перед затуханием пламя может стационарно распространяться на расстояния, много бóльшие длины фронта. В момент начала затухания скорость пламени несколько увели-

чивается.

(ii) Интервал концентраций горючего, в котором смесь воспламеняется, сужается при увеличении диаметра трубы (нижний предел повышается, а верхний понижается).

(iii) Скорость распространения предельного пламени в трубе данного диаметра совпадает с экспериментальной точностью со скоростью пузыря воздуха, поднимающегося в той же трубе, заполненной водой.

(iv) Затухание пламени начинается в его центре и быстро распространяется к стенкам трубы. После затухания пламени холодная смесь обтекает область горячего газа, которая продолжает подниматься со скоростью пламени до затухания.

Эти наблюдения составляют, на первый взгляд, противоречивую картину. С одной стороны, постоянство структуры пламени перед затуханием означает, что характерное время частичного распространения пламени много больше времени прохождения газа через область, занимаемую пламенем. С другой стороны, наблюдение (iv) говорит о том, что заключительная стадия процесса протекает гораздо быстрее, и вместе с (iii) указывает на статическую подъёмную силу (силу плавучести) как на механизм затухания. Но в этом случае пламя должно было бы затухать непосредственно в процессе перехода в установившийся режим движения, то есть на расстояниях порядка диаметра трубы над точкой поджига, в противоречии с первой частью наблюдения (i). Вторая же его часть труднообъяснима сама по себе, так как более естественным для процесса затухания было бы замедление пламени. Далее, потери тепла в стенки трубы, которые являются основным фактором затухания пламени в узких трубах, не могут быть причиной затухания в рассматриваемом случае. Действительно, их относительная величина уменьшается с увеличением диаметра трубы, так что они должны были бы приводить к зависимости, прямо противоположной (ii). Затухание не может быть объяснено также и эффектом растяжения пламени [16, 18]. В случае метано-воздушных пламен, например, этот эффект увеличивает скорость реакции в центре пламени [101], в противоречии с наблюдением (iv). Этот механизм также не может объяснить (ii), поскольку он приводит к противоположным результатам для пламен, в которых ограничивающий реакцию реагент является лёгким (бедные метано-воздушные смеси) и тяжёлым (бедные пропано-воздушные смеси).

Механизм частичного распространения и затухания пламени будет установлен ниже на основе анализа численных решений мастер-уравнения.

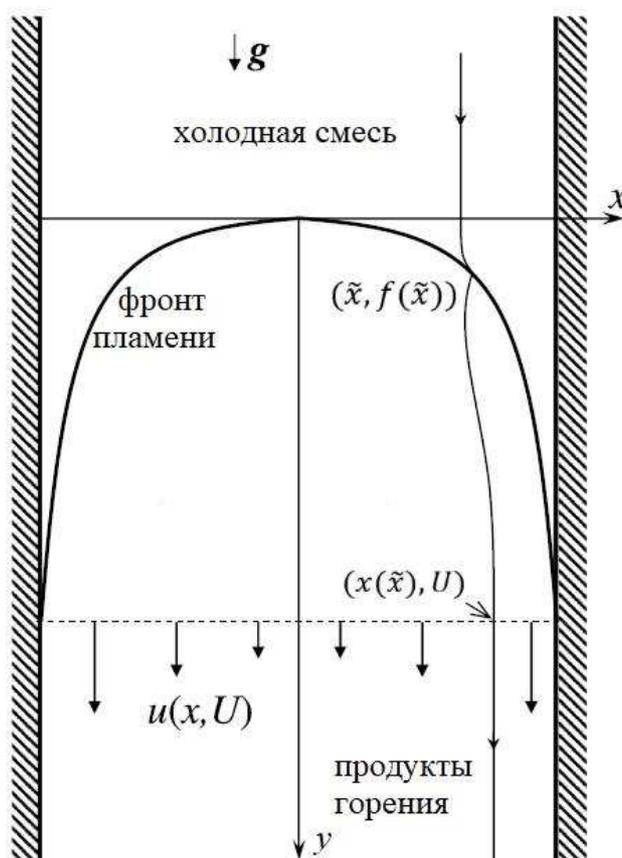


Рис. 38: Схема вертикального распространения пламени вверх по трубе. Вертикальные стрелки у нижней границы области пламени ( $y \in [0, U]$ ) качественно изображают распределение скорости продуктов горения в случае  $g \gg U_f/b$ .

### §11.3. Уравнения для предельного пламени в ведущем порядке $1/U$ -разложения

Конфигурация пламени, распространяющегося вверх в вертикальной трубе, схематически показана на Рис. 38. Поскольку механизм затухания пламени заранее не известен, описание распространения пламени вблизи пределов воспламенения, вообще говоря, требует учёта эффектов конечной ширины фронта. Согласно наблюдениям предельные пламена имеют гладкий фронт, радиус кривизны которого по порядку величины равен радиусу трубы. Поэтому в стандартной трубе или более широкой эффектами кривизны и компрессии можно с большой степенью точности пренебречь и положить  $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_\sigma = 0$ . Далее, при распространении пламени вверх потенциал поля тяжести  $\phi(x, y) = -gy$ , следовательно,

$\phi_-(x) = -gf(x)$ . Таким образом, формула (4.42) даёт

$$\sigma_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta N v_-^n} \{ (v^\tau)' v^\tau + \theta v_-^n (v_-^n)' - gf' \}, \quad (11.1)$$

где

$$v_-^n = 1 - \mathcal{L}_s \frac{(v^\tau)'}{N}.$$

Как и в случае пламени в горизонтальной трубе, в ведущем порядке  $1/U$ -разложения мастер-уравнения сводится к системе ОДУ. Именно, подставляя написанные выше выражения в (4.40) и отделяя его вещественную часть с помощью (С.10), получаем

$$2u'_- + 2\alpha|x| \left( u'_- - \frac{gf'}{u_-} \right) - f' \left\langle \frac{Mw_+}{v_+^2} \right\rangle + f' \int_0^1 d\tilde{x} \left\{ \frac{Mw_+}{v_+^2} - [w]' \right\} \chi(\tilde{x} - |x|) = 0. \quad (11.2)$$

Как и в случае горизонтальной трубы, разложение по  $1/f'$  произведено здесь во всех членах, кроме числа  $\gamma = \langle Mw_+/v_+^2 \rangle$  и последнего слагаемого, значения которых зависят от поведения функций  $w_-(x), u_-(x), f(x)$  в окрестности точки  $x = 0$ , где  $|f'|$  не велико. Вклад порядка  $O(l_f^0)$  в интеграл от члена  $[w]' = -\alpha(v_-^n f'/N)'$  найден в (9.5), а для вычисления вклада  $O(l_f)$  пишем, интегрируя по частям,

$$\int_0^1 d\tilde{x} \left( \frac{f'(v^\tau)'}{N} \right)' (\tilde{x}) \chi(\tilde{x} - |x|) = \frac{f'(v^\tau)'}{N^2} \chi(\tilde{x} - |x|) \Big|_0^1 - \frac{2f'(v^\tau)'}{N^2} (|x|).$$

Первый член справа исчезает при  $\tilde{x} = 0$ , поскольку в этой точке  $f' = 0$ , а

$$\frac{f'(v^\tau)'}{N^2} \Big|_{\tilde{x}=1} \approx \frac{du_-}{df} \Big|_{\tilde{x}=1} \equiv u'_1.$$

В последнем же члене достаточно заменить

$$\frac{f'v'_\tau}{N^2} \rightarrow \frac{u'_-}{f'}.$$

Подстановка в (11.2) даёт

$$2(1 + \alpha\mathcal{L}_s)u'_- + 2\alpha|x| \left( u'_- - \frac{gf'}{u_-} \right) - f'[\gamma + \alpha(1 + \mathcal{L}_s u'_1)] + f' \int_0^1 d\tilde{x} \frac{Mw_+}{v_+^2} \chi(\tilde{x} - |x|) = 0. \quad (11.3)$$

Делением на  $f'$  и дифференцированием по  $x$  это уравнение сводится к ОДУ

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 + \alpha\mathcal{L}_s) \frac{u'_-}{f'} + \alpha|x| \left( \frac{u'_-}{f'} - \frac{g}{u_-} \right) \right] - \frac{Mw_+}{v_+^2} \chi(x) = 0.$$

Поскольку последнее слагаемое слева вычисляется в точках  $x$  где  $|f'| \gg 1$ , оно может быть заменено своим ведущим членом. Ограничиваясь областью  $0 < x < 1$ , получающееся уравнение удобно переписать, выбрав  $f$  в качестве независимой переменной:

$$\frac{d}{df} \left[ (1 + \alpha \mathcal{L}_s) \frac{du_-}{df} + \alpha x(f) \left( \frac{du_-}{df} - \frac{g}{u_-} \right) \right] + \frac{\alpha}{u_-} \left( \frac{du_-}{df} - \frac{g}{u_-} \right) \left( w_- - \alpha + \alpha \mathcal{L}_s \frac{du_-}{df} \right) = 0. \quad (11.4)$$

Второе уравнение следует из условия потенциальности течения холодного газа и поэтому имеет тот же вид, что и в горизонтальной трубе:

$$w_- = (1 - x(f)) \frac{du_-}{df}. \quad (11.5)$$

Уравнения (11.4), (11.5) являются обыкновенными дифференциальными и могут быть сведены к уравнению второго порядка для  $u_-(f)$ , если функция  $x(f)$  известна. Коэффициент при второй производной функции  $u_-(f)$  в этом уравнении равен  $(1 + \alpha \mathcal{L}_s + \alpha x)$ , и поэтому при любых начальных условиях его решение будет единственным и гладкими при условии, что  $(1 + \alpha \mathcal{L}_s + \alpha x) > 0$  для всех  $x \in (0, 1)$ , то есть

$$1 + \alpha \mathcal{L}_s > 0. \quad (11.6)$$

Это условие практически всегда выполняется несмотря на то, что  $\mathcal{L}_s$  может быть отрицательным, а  $\alpha$  может быть большим. В силу единственности, любое решение может быть продолжено из области, где  $|f'| \gg 1$ , к точке  $x = 0$  считая, что условие  $|f'| \gg 1$  выполнено при всех  $x \in (0, 1)$ , так что уравнения (11.3), (11.4), (11.5) сохраняют свой вид. Продолженные таким образом решения будут обозначаться  $w_-(f)$ ,  $u_-(f)$ . Из уравнения (11.3) тогда следует начальное условие в точке  $f = 0$ . Обозначив  $du_-(0)/df \equiv u'_0$ , получаем

$$u'_0 = \frac{\alpha(1 + u'_1 \mathcal{L}_s)}{2(1 + \alpha \mathcal{L}_s)}. \quad (11.7)$$

Как и в случае горизонтальной трубы, это условие оказывается независимым от неизвестной постоянной  $\gamma$ , и поэтому продолженные решения могут быть найдены независимо от структуры течения в окрестности  $x = 0$ . Следует заметить, что при учёте эффекта растяжения пламени уравнение (11.7) связывает значения производной скорости в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ , то есть задача оказывается краевой.

Последним условием для продолженного решения является

$$u_-(0) = U, \quad (11.8)$$

которое всегда справедливо в ведущем порядке  $1/U$ -разложения.

Как было показано выше, продолжение решения единственно при заданной функции  $x(f)$ . Для её определения необходимо привлечь уравнение эволюции

$$u_- - f'w_- = N - \mathcal{L}_s \left( \frac{w_- + f'u_-}{N} \right)' \quad (11.9)$$

и переформулировать его в терминах продолженных решений. Для этого снова предполагаем условие  $|f'| \gg 1$  выполненным и замечаем, что в члене  $(w_-/N)'$  в правой части тогда достаточно дифференцировать лишь множитель  $w_-$ . Далее, имеем  $(f'u_-/N)' \approx (u_-)'$ . С другой стороны, с помощью уравнения (11.5) слагаемое  $f'w_-$  в левой части (11.9) может быть переписано как  $f'w_- = (1-x)u_-'$ , и следовательно, по сравнению с ним член  $\mathcal{L}_s(u_-)'$  равномерно мал в отношении  $\mathcal{L}_s$  к ширине трубы, так что в рассматриваемых широких трубах им можно пренебречь. Таким образом, уравнение эволюции принимает вид

$$u_- - f'w_- = |f'| - \mathcal{L}_s w_-'. \quad (11.10)$$

Исключая отсюда  $w_-$  с помощью (11.5), интегрируя получающееся уравнение и переобозначая  $f \rightarrow f$ ,  $w \rightarrow w$ ,  $u \rightarrow u$ , получаем

$$-u_-(1-x) = f - \mathcal{L}_s(1-x) \frac{du_-}{df} + \text{const.}$$

Постоянная интегрирования здесь фиксируется условиями (11.7), (11.8):

$$\text{const} = \frac{\alpha \mathcal{L}_s}{2(1 + \alpha \mathcal{L}_s)} - U.$$

В результате приходим к следующему выражению для функции  $x(f)$

$$x(f) = 1 - \frac{U - f - \alpha \mathcal{L}_s / 2(1 + \alpha \mathcal{L}_s)}{u_- - \mathcal{L}_s du_- / df}. \quad (11.11)$$

Существенно, что правая часть зависит лишь от  $u_-$  и  $du_-/df$ , но не от старших производных  $u_-$ . Следовательно, при подстановке (11.11), (11.5) в уравнение (11.4) получающееся уравнение для  $u_-(f)$  по-прежнему имеет второй порядок, так что условий (11.7), (11.8) достаточно для однозначного определения его решений.

#### §11.4. Численные решения

Как и в §9.3, численный анализ системы (11.4), (11.5), (11.11) показывает, что при заданных  $\theta, U_f, g, \mathcal{L}_s$  существует несколько решений. Соответствующие значения  $U$  заполняют две непересекающиеся области, но в отличие от случая горизонтальной трубы,

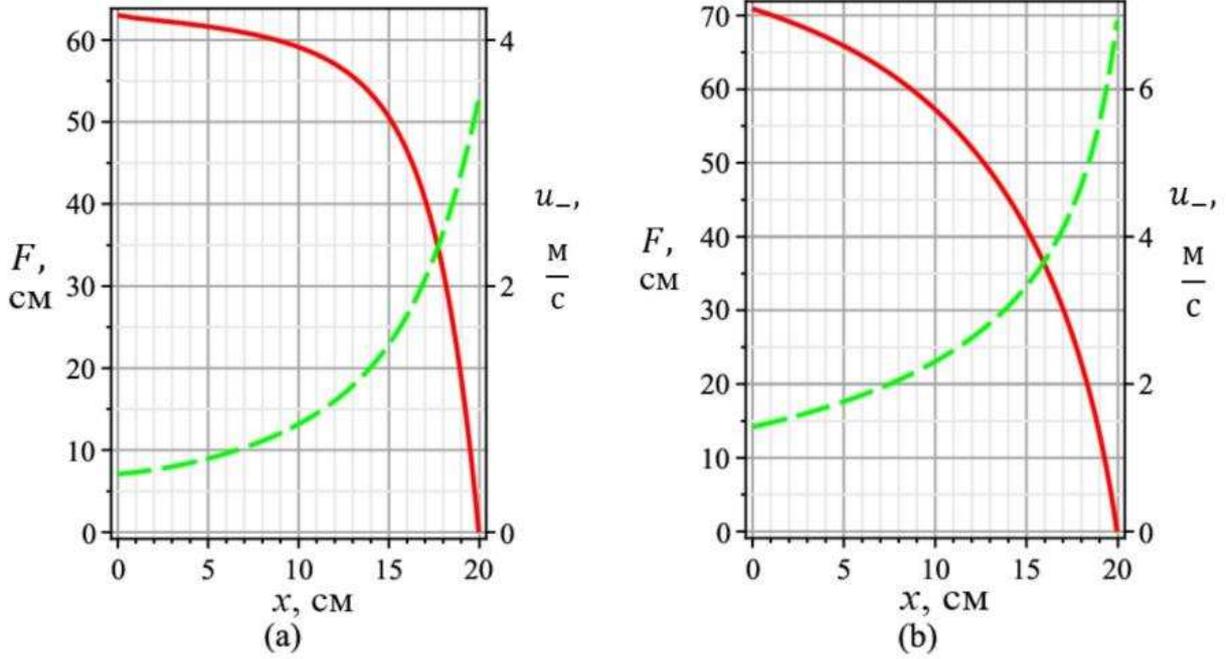


Рис. 39: Положение фронта  $F(x) = f(b) - f(x)$  (сплошные линии) и распределение на нём скорости газа  $u_-(x)$  (пунктирные линии) для пламён с  $\theta = 8$ ,  $\mathcal{L}_s/b = -0.01$  в трубе шириной 20 см. (a) Пламя типа I с  $U_f = 15$  см/с, (b) пламя типа II с  $U_f = 40$  см/с.

эти области значительно удалены друг от друга. Решения, у которых  $U$  принадлежат нижней (верхней) области, называются решениями типа I (II). Форма фронта и распределение вдоль него продольной скорости холодного газа для пламён обоих типов показаны на Рис. 39. Для выделения физических решений следует привлечь закон сохранения продольного импульса газа, вывод которого полностью повторяет данный в §9.3 для горизонтальной трубы и приводит к следующему условию

$$\int_0^1 d\tilde{x} N v_-^n u(x(\tilde{x}), U) = \frac{u_1^2 + U^2}{2} + \frac{\alpha g}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} [f(\tilde{x}) - U] + \alpha, \quad (11.12)$$

где  $u_1$  обозначает продольную скорость холодного газа в нижней точке фронта  $(1, U)$ ,

$$u(x(\tilde{x}), U) = \left\{ \theta u_1^2 - \alpha u_-^2(\eta) + 2\alpha g [f(\tilde{x}) - U] + 2\alpha \theta [1 - (v_-^n(\tilde{x}))^2] \right\}^{1/2} \quad (11.13)$$

есть скорость продуктов горения в сечении  $y = U$ , а  $(x(\tilde{x}), U)$  – абсцисса точки пересечения этого сечения с линией тока, которая пересекает фронт в точке  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ .

## §11.5. Теория частичного распространения пламени

## А. Свойства решений

Принципиальное значение имеет особая структура решений типа I, обнаруженная с помощью численного анализа. А именно, в области значений параметров  $\theta$ ,  $U_f$ ,  $\mathcal{L}_s$ , характерных для предельных пламён, решения этого типа образуют пары с близкими значениями  $U$ . Например, для пламени с  $\theta = 5$ ,  $U_f = 7.2$  см/с и  $\mathcal{L}_s = -0.45$  мм в трубе диаметром 9.5 см такими значениями являются  $U = 4.65$  и  $U = 4.94$ . Имеется также одно решение типа II, скорость которого, однако, очень велика:  $U = 30.7$ . Реализация этого режима, по-видимому, требует высокоэнергетического распределённого поджига и поэтому до сих пор не наблюдалось. Решения типа I с меньшим (большим) значением  $U$  будут называться решениями типа Ia (типа Ib). При достаточно близких значениях скорости распространения пламени более устойчивым является режим с большей скоростью. Аналитически это доказано для решений слабонелинейных уравнений [129, 130], а для рассматриваемых сильнонелинейных предельных пламён это показано прямым численным моделированием в Приложении D.

Следующее обстоятельство является ключевым для объяснения явления частичного распространения пламени. В отсутствие поля тяжести, на выходе из области пламени  $y \in [0, U]$  скорость продуктов горения в центре трубы оказывается выше, чем вблизи её стенок. Это следует из того, что при заданном перепаде давления в области пламени элементы газа ускоряются тем сильнее, чем раньше они сгорают. Действие же поля тяжести, описываемое членом  $2\alpha g[f(\tilde{x}) - U]$  в выражении (11.13), противоположно – гравитация тормозит газ тем сильнее, чем ближе он находится к центру трубы. Численный анализ показывает, что вблизи пределов воспламенения эффект поля тяжести начинает доминировать: при условии  $g \gg 1$  функция  $u(x(\tilde{x}), U) \equiv u(\tilde{x})$  оказывается возрастающей, Рис. 40. Далее, решения типа Ib оказываются сингулярными при достаточно малых  $U_f$  (то есть при достаточно больших значениях  $g$  в естественных единицах). Именно, при достижении  $U_f$  определённого критического значения (зависящего от  $\theta$ ),  $u(\tilde{x})$  обращается в нуль в центре трубы ( $\tilde{x} = 0$ ). Для ещё меньших значений  $U_f$  корень  $\tilde{x}_0$  функции  $u(\tilde{x})$  сдвигается от центра трубы к стенке, тогда как скорость  $u(\tilde{x})$  становится формально мнимой при  $\tilde{x} < \tilde{x}_0$ . Другими словами, данный стационарный режим распространения перестает

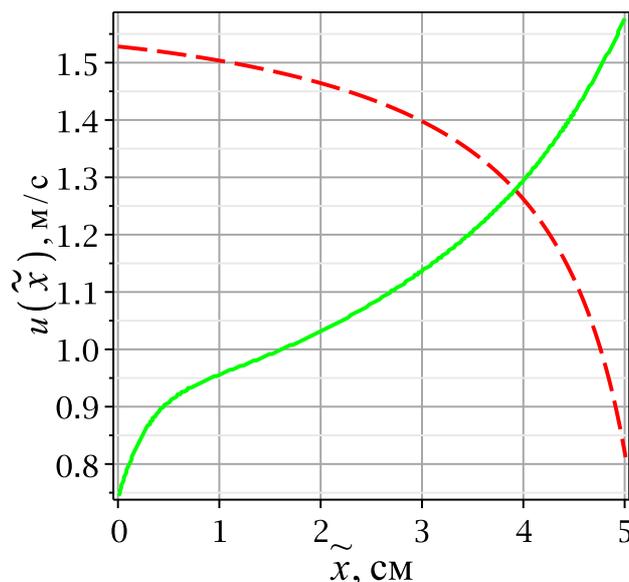


Рис. 40: Распределение скорости продуктов горения по сечению  $y = U$  в случае пламени типа I в сильном поле тяжести ( $g = 49$ , сплошная линия) и пламени, удерживаемого в быстром потоке газа (пунктир).  $b = 5$  см,  $U_f = 10$  см/с,  $\theta = 4$ .

существовать, поскольку продукты горения перестают отводиться из области  $\tilde{x} < \tilde{x}_0$ . Это также означает, что если по той или иной причине пламя совершило переход в такой режим распространения, оно не сможет существовать в нём дольше, чем время движения газа от фронта пламени до точки, где его скорость обращается в нуль. В результате пламя должно либо перейти в какой-то другой режим, либо затухнуть.

Падение скорости продуктов горения практически до нуля при их движении вдоль оси предельного пламени было зафиксировано экспериментально. На Рис. 41 приведены результаты измерения полей скорости продуктов горения предельных метано-воздушных смесей в трубах диаметрами 5.0 см и 5.4 см. Сильное замедление газа на оси трубы выражается сравнительной малостью длины стрелок, изображающих вектор скорости. Однако экспериментально связать обращение в нуль скорости газа с затуханием пламени затруднительно ввиду дополнительного движения газа, вызванного его постепенным остыванием. Стагнация продуктов горения на оси трубы наблюдалась также в работе [174], в которой обсуждалась её роль в затухании пламени с точки зрения вызываемых ею теплотерь в центре пламени.

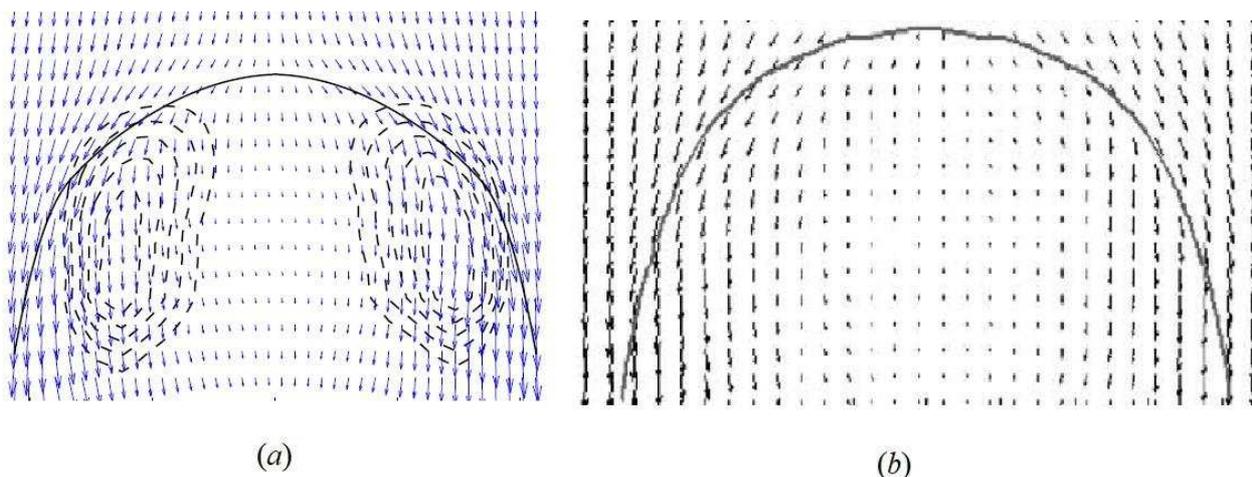


Рис. 41: (a) Поле скорости продуктов горения метано-воздушной смеси с  $\Phi = 0.53$  в трубе диаметром 5.4 см [175]. (b) То же для смеси 5.13% метана с воздухом в трубе диаметром 5.0 см [12].

### В. Критические диаграммы

Критические условия затухания пламён удобно описывать с помощью фазовых диаграмм на плоскости  $U_f$ – $\theta$ . Рисунок 42(a) представляет собой такую диаграмму для метано-воздушных пламён в трубе диаметром 20 см. Пунктирная и сплошная линии изображают приближения нулевого и первого порядка по  $l_f$ , соответственно. Докритические (то есть несингулярные) режимы типа Ib лежат справа от критической кривой, закритические – слева.  $U_f$  для предельных пламён трудно измерить достаточно точно, но скорость распространения пламён типа Ib оказывается практически постоянной вдоль критических кривых, если её измерять в сантиметрах в секунду. Числа около каждой кривой указывают значения этой скорости для  $\theta = 4, 5$  и  $6$ . В этом построении используется значение  $\mathcal{L}_s = -0.45$  мм, соответствующее коэффициенту избытка горючего  $\Phi \approx 0.6$  [101]. В естественных единицах  $\mathcal{L}_s = -0.0045$ , и тот факт, что столь малое значение приводит к заметному сдвигу в скорости пламени указывает на чувствительность предельных пламён к эффекту растяжения.

При изменении концентрации горючего меняются оба параметра  $U_f$ ,  $\theta$ , образуя траекторию на фазовой плоскости (локус). На Рис. 42(a) она изображена как линия из точек и построена согласно результатам [101]. Координаты предельного пламени определяются пересечением локуса с критической кривой. Как следует из диаграммы, предельное пламя

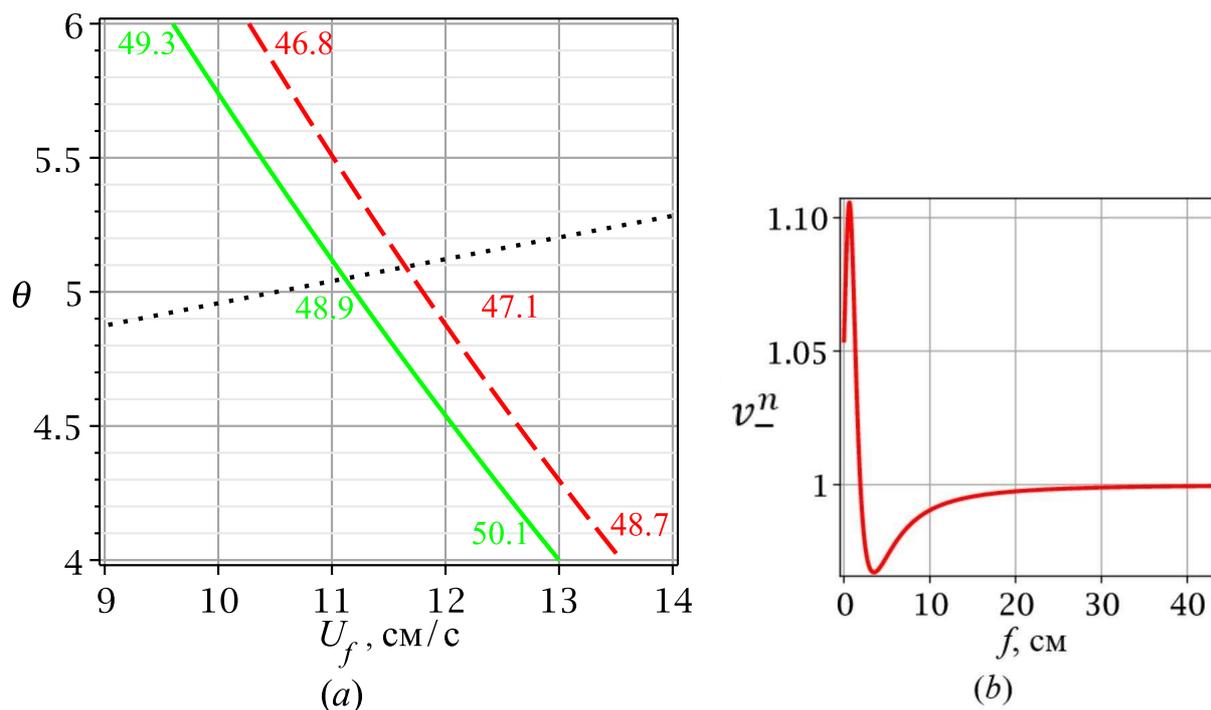


Рис. 42: (a) Критические условия затухания метано-воздушного пламени в трубе диаметром  $2b = 20$  см. Пунктирная и сплошная линии представляют кривые  $\tilde{x}_0 = 0$  для решений типа Ib с  $\mathcal{L}_s = 0$  и  $\mathcal{L}_s = -0.45$  мм, соответственно; числа у кривых указывают значения  $U_{Ib}$  в см/с при  $\theta = 4, 5, 6$ . Точечная линия есть фазовый локус для бедных метано-воздушных пламен, построенный по данным [101]. (b) Нормальная скорость предельного метано-воздушного пламени как функция ординаты фронта. Диаметр трубы 20 см, за единицу скорости принято значение  $U_f = 11.2$  см/с.

в трубе диаметром 20 см имеет скорость  $U = 48.9$  см/с. Рассчитанную скорость пламени можно сравнить с измеренной в работе [18], согласно которой минимальное зарегистрированное значение  $U$  равняется 50 см/с.

В случае труб диаметров  $2b = 9.5$  см и 10 см имеющиеся экспериментальные данные [9, 18] воспроизведены в Таблице II и дают возможность сравнения с теорией как в случае отрицательных  $\mathcal{L}_s$  (бедные метано-воздушные смеси), так и положительных (бедные пропано-воздушные смеси). Поскольку в литературе не имеется надёжных данных по  $\mathcal{L}_s$  для пламен в пропано-воздушных смесях, на Рис. 43(a) и 43(b) приведены критические условия для двух различных положительных  $\mathcal{L}_s$  (0.25 мм и 0.5 мм), наряду с данными для пламени нулевой ширины. Критические условия для метано-воздушных пламен в трубе

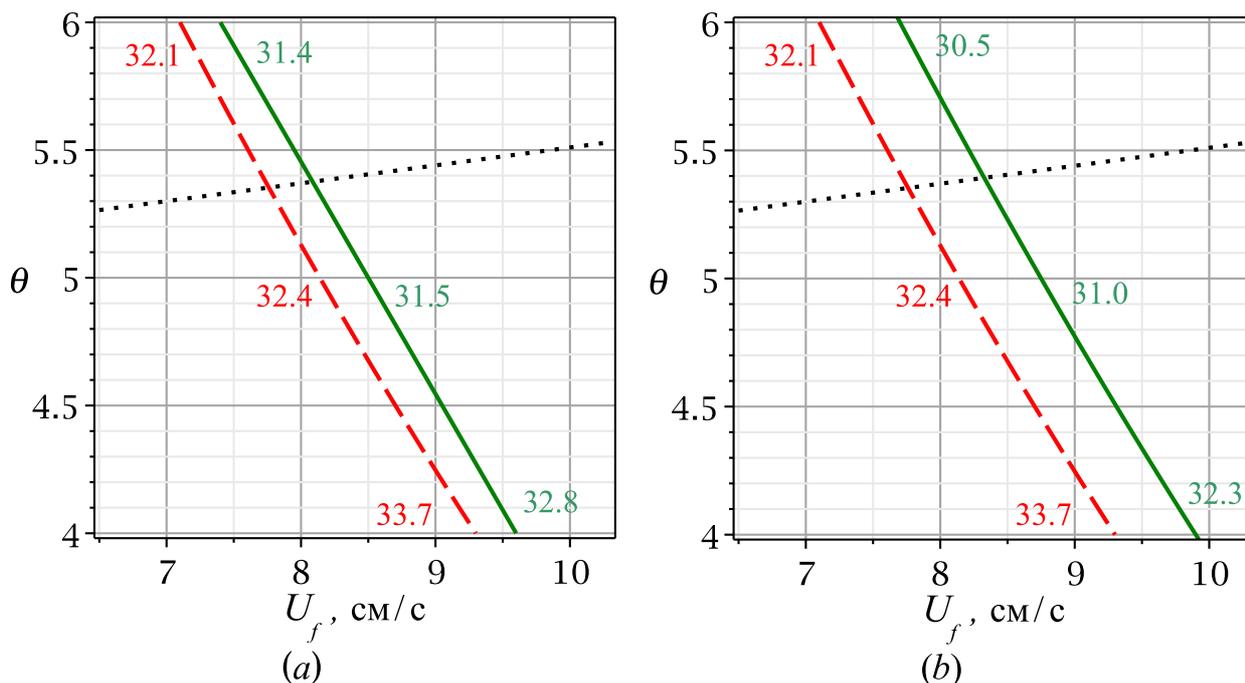


Рис. 43: Критические диаграммы для пламён с  $\mathcal{L}_s = 0.25$  мм (a) и  $\mathcal{L}_s = 0.5$  мм (b) в трубе диаметром 9.5 см. Обозначения Рис. 42. Фазовый locus бедных пропано-воздушных пламён (точки) построен по данным [172, 176]

диаметром  $2b = 9.5$  см показаны на Рис. 44(a). Как видно из этих рисунков, с увеличением  $\mathcal{L}_s$  критические кривые смещаются вправо, а скорость распространения пламени уменьшается. Этот вывод согласуется с наблюдениями [9], согласно которым предельные пропано-воздушные пламена распространяются несколько медленнее, чем метано-воздушные в трубах того же диаметра. Следует заметить, что прямо противоположная зависимость имела бы место, если бы за затухание пламени была ответственна сила выталкивания. Действительно, как нормальная скорость, так и коэффициент теплового расширения у пропано-воздушных пламён больше, чем у метано-воздушных. Но чем больше  $U_f$  и  $\theta$ , тем больше сила выталкивания, и поэтому скорость пламени должна была бы расти с увеличением  $U_f, \theta$ .

Наконец, рассмотрим распространение пламени в трубе диаметром 5.1 см. Критическая диаграмма для пропано-воздушного пламени с  $\mathcal{L}_s = 0.25$  мм приведена на Рис. 45 и имеет ту же структуру, что и в более широких трубах. Напротив, в случае метано-воздушного пламени учёт конечной ширины фронта сильно сдвигает критическую кри-

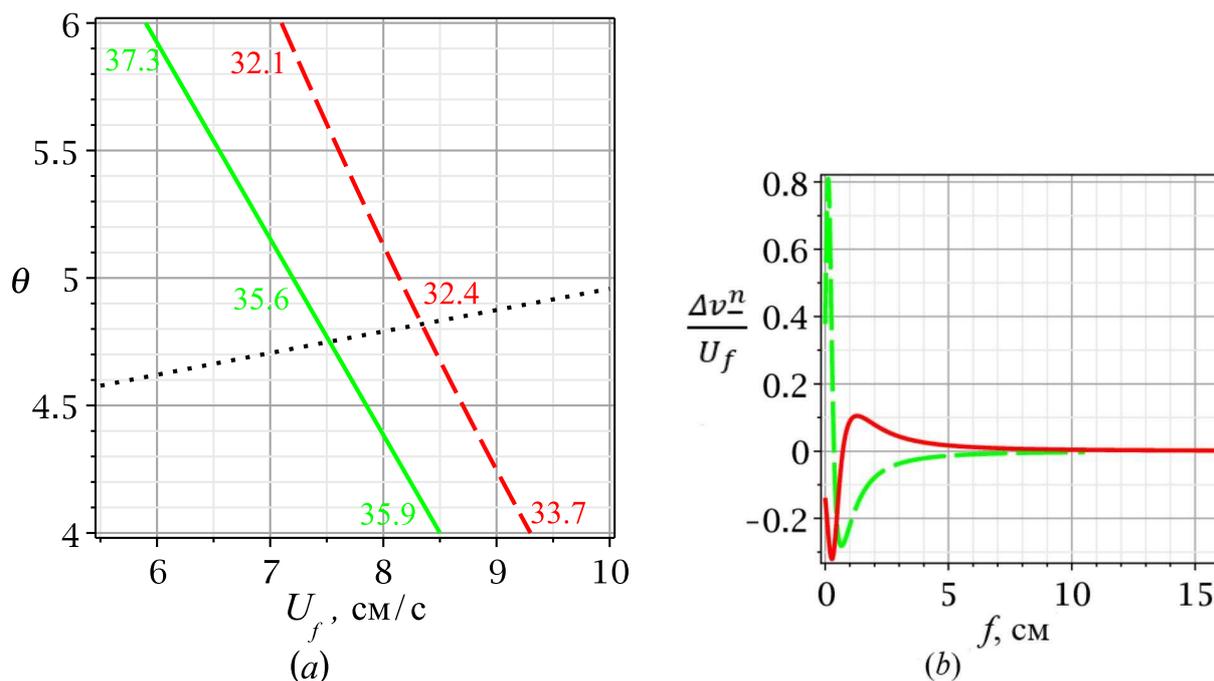


Рис. 44: (a) Критическая диаграмма для метано-воздушного пламени в трубе диаметром 9.5 см. Обозначения Рис. 42. (b) Относительная поправка к нормальной скорости предельного пламени в трубе диаметром 9.5 см (сплошная линия,  $\theta = 5.4$ ,  $U_f = 8.3$  см/с,  $\mathcal{L}_s = 0.5$  мм) и вычисленная на решении типа I для пламени нулевой ширины в трубе диаметром 5.1 см (пунктир,  $\theta = 6$ ,  $U_f = 5.2$  см/с,  $\mathcal{L}_s = -0.62$  мм).

смесь	$\theta$	$U_f$ (см/с)	$2\mathcal{L}_s/b$	$U_{Ia}$ (см/с)	$U_{Ib}$ (см/с)	$U_{exp}$ (см/с)
пропан/воздух	5.4	8.3	0.005	28.2	31.1	$31.7 \pm 1.6$ [9]
метан/воздух	4.75	7.5	-0.01	33.7	35.6	$\left\{ \begin{array}{l} 33.1 \pm 2.3$ [9] \\ $33.5 \pm 1.5$ [18] \end{array} \right.

Таблица II: Параметры и скорости предельных метано-воздушных и пропано-воздушных пламен в трубе диаметром 9.5 см.  $\theta$  и  $U_f$  соответствуют пересечениям критических кривых на Рис. 43(a), 44(a) с точечными линиями.  $U_{exp}$  есть измеренная скорость пламени [9, 18],  $U_{Ia}$  и  $U_{Ib}$  её значения, даваемые решениями типов Ia и Ib для  $2b = 9.5$  см.  $\pm$  символизирует стандартное отклонение.

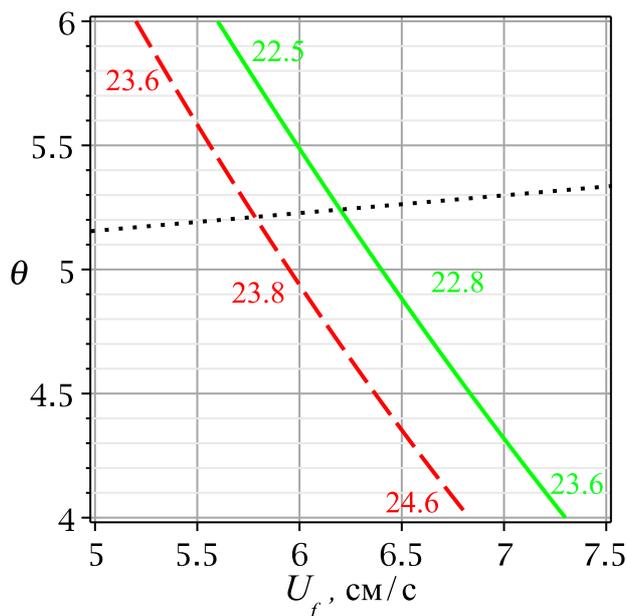


Рис. 45: Критическая диаграмма для пропано-воздушного пламени в трубе диаметром  $2b = 5.1$  см. Обозначения Рис. 42.

вую. Как видно из Рис. 44(b), относительная поправка к нормальной скорости при этом не мала по сравнению с единицей. Таким образом, асимптотическое разложение по  $l_f$  в данном случае оказывается неприменимым. В то же время из таблицы III следует, что приближение пламени нулевой ширины всё ещё даёт достаточно точные результаты. Разрушение разложения по  $l_f$  является следствием того, что в трубе диаметром 5.1 см один из внешних масштабов длины – гравитационная длина  $L_g = U_f^2/g$  – оказывается меньше модуля  $\mathcal{L}_s = -0.62$  мм (это значение соответствует  $\Phi \approx 0.55$  [101]). Действительно, из сравнения Рис. 42–45 следует, что при уменьшении диаметра трубы нормальная скорость критического пламени падает, причём критическая кривая для метано-воздушных смесей смещается влево. Поэтому длина  $U_f^2/g$  уменьшается ещё быстрее и в трубе диаметром 5.1 см отношение  $|\mathcal{L}_s|/L_g \approx 1.5$ , нарушая основное предположение разложения по ширине фронта.

### С. Динамика затухания пламени

Полная картина частичного распространения пламени теперь может быть описана следующим образом. В результате поджига смеси посредством источника с малым энерговы-

flame	$\theta$	$U_f$ (см/с)	$2\mathcal{L}_s/b$	$U_{Ia}$ (см/с)	$U_{Ib}$ (см/с)	$U_{exp}$ (см/с)
пропан/воздух	5.25	6.2	0.01	20.4	22.6	$23.1 \pm 1.3$ [9]
метан/воздух	4.65	6.3	0	22.3	24.0	$\left\{ \begin{array}{l} 23.5 \pm 0.6$ [9] \\ $22.8 \pm 0.5$ [18] \\ $22.7 \pm 0.5$ [175] \end{array} \right.

Таблица III: То же для  $2b = 5.1$  см. Данные [175] получены для трубы диаметром 5.4 см.

делением распространение пламени устанавливается в режиме с наименьшей скоростью, то есть в режиме типа Ia. Однако ввиду неустойчивости течения продуктов горения в этом режиме пламя в некоторый момент должно будет перейти в другой, более устойчивый режим распространения типа Ib. Если пламя является докритическим, оно продолжит распространение в этом режиме до верхнего конца трубы, то есть скоростью установившегося распространения пламени будет  $U_{Ib}$ . С другой стороны, в случае закритического пламени в момент достижения продуктами горения точки  $(0, U)$  должно произойти затухание пламени вблизи его центра. После этого либо затухание продолжит распространяться от центра к стенкам трубы, либо пламя перейдет в другой режим распространения, который будет существенно нестационарным, поскольку других близких по скорости стационарных режимов не существует. При уменьшении диаметра трубы нижний предел воспламенения уменьшается, и энерговыделение в предельном пламени падает, что облегчает затухание. Поэтому первый сценарий более вероятен в более узких трубах, и как показывает эксперимент [9, 18], он реализуется в трубах диаметром  $\lesssim 10$  см. В более широких трубах, с другой стороны, горение может продолжиться за счёт образования нестационарной ячеистой структуры.

В этой картине наблюдаемые свойства (i)–(iv) легко объясняются. Из Рис. 42–45 видно, что нормальная скорость критического пламени растёт при увеличении диаметра трубы. Следовательно, интервал концентраций горючего, при которых смесь является воспламеняемой, сужается, в согласии с наблюдением (ii). Существование режима типа Ia делает возможным сравнительно долгое установившееся распространение пламени перед его затуханием (характерные времена см. в Приложении D), что объясняет первую часть наблюдения (i), тогда как переход в несколько более быстрый, но короткоживущий режим

типа Ib объясняет вторую часть (i). Выше уже было показано как свойства решений типа Ib объясняют тот факт, что затухание пламени начинается в его центре [наблюдение (iv)]. В этой связи следует отметить, что затухание пламени не может ограничиться его центром, то есть оказаться частичным. Действительно, затухание части пламени качественно эквивалентно уменьшению ширины трубы. Поскольку при уменьшении ширины трубы скорость  $U_{Ib}$  критического пламени уменьшается, скорость распространения рассматриваемого пламени оказывается больше скорости критического пламени. В то же время, вычисления показывают, что параметр  $\tilde{x}_0$  очень быстро растёт при увеличении  $U$ . Например, в случае критического пропано-воздушного пламени в трубе диаметром 9.5 см ( $\theta = 5.4$ ,  $U_f = 8.3$  см/с,  $\mathcal{L}_s = 0.01$ ),  $\tilde{x}_0 = 0$  для  $U_{Ib} = 3.71$ , но увеличивается до 2.4 см уже при  $U = 3.9$ . Растущий  $\tilde{x}_0$  эффективно делает ширину трубы ещё меньше, что в свою очередь увеличивает разность между данным  $U$  и значением  $U_{Ib}$  для критического пламени. Процесс затухания пламени оказывается, таким образом, самоускоряющимся. Наконец, в результате описанного торможения продуктов горения в режиме типа Ib структура критического пламени оказывается такой же, как у пузыря газа, поднимающегося в более плотном газе или жидкости, что объясняет наблюдение (iii).

### Вывод

Проведённый в этой главе анализ показал, что при распространении ламинарного пламени вверх в вертикальной трубе вблизи пределов воспламенения имеется два различных стационарных решения типа I, свойства которых объясняют все наблюдаемые особенности частичного распространения предельных пламён. В отличие от случая горизонтального распространения, влияние эффекта растяжения пламени на его критические свойства оказывается значительным несмотря на малость длины Маркштейна  $\mathcal{L}_s$  по сравнению с диаметром трубы. Это влияние приводит к следующим зависимостям в поведении предельных пламён:

- При увеличении  $\mathcal{L}_s$  критические кривые, определяющие область воспламеняемости на плоскости  $U_f$ – $\theta$ , сдвигаются вправо (к большему  $U_f$ ).
- При увеличении  $\mathcal{L}_s$  скорость распространения предельного пламени уменьшается.

Последняя зависимость объясняет тот парадоксальный экспериментальный факт, что

несмотря на бóльшие значения  $U_f$  и  $\theta$ , критические пропано-воздушные пламёна ( $\mathcal{L}_s > 0$ ) медленнее критических метано-воздушных пламён ( $\mathcal{L}_s < 0$ ) в тех же трубах. Однако решающим фактором затухания пламени является торможение продуктов горения в центре трубы. Эффект растяжения пламени способен локально увеличить нормальную скорость пламени, как в случае метано-воздушных пламён, или уменьшить её (пропано-воздушные пламёна), но именно остановка оттока газа от пламени, возникающая в результате его перехода в закритический режим типа Ib, приводит к срыву горения в центре трубы, который затем быстро распространяется к её стенкам.

## 12. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ МАСТЕР-УРАВНЕНИЯ [A17]

За исключением предельных случаев сильновытянутого пламени или малого  $(\theta - 1)$ , мастер-уравнение не сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и должно решаться с самого начала численно. Численная схема будет построена в настоящем разделе в самом общем случае произвольных  $\theta$ ,  $\mathcal{L}_c$ ,  $\mathcal{L}_s$ ,  $\mathcal{L}_\sigma$ . В отличие от реальных экспериментов или прямого численного моделирования, в которых при изменении концентрации горючего все эти параметры меняются одновременно, в мастер-уравнении эти параметры являются независимыми, и потому его решение даёт возможность изучить отклик пламени на изменение каждого из них по-отдельности. Численные решения также позволяют оценить точность слабонелинейного разложения в случае малых  $(\theta - 1)$  и очертить область применимости уравнения Сивашинского и его обобщений.

### §12.1. Численная схема

Рассматриваемая система состоит из мастер-уравнения

$$(\omega_-)' = -\frac{1}{2} (1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ [\omega]' - \frac{M\omega_+}{v_+^2} + (1 + if'(x)) \left\langle \frac{M\omega_+}{v_+^2} \right\rangle \right\}, \quad (12.1)$$

в котором

$$M = Nv_+^n \sigma_+ = -\theta \left\{ \frac{\theta - 1}{2\theta} (v^\tau)^2 + \frac{\theta - 1}{2} (v_-^n)^2 + 2\mathcal{L}_\sigma \frac{f''}{N^3} \right\}', \quad (12.2)$$

и уравнения эволюции

$$v_-^n = 1 - S(f, \omega_-), \quad S(f, \omega_-) = \mathcal{L}_s \frac{(v_-^\tau)'}{N} - \mathcal{L}_c \left( \frac{f'}{N} \right)'. \quad (12.3)$$

Здесь предполагается, что поле тяжести отсутствует и потому пламя не является сильно вытянутым,  $|f'| \sim 1$ . В такой ситуации не происходит отрыва линий тока от стенок трубы в точках окончания фронта, и поэтому граничными условиями являются

$$f'(0) = f'(1) = 0. \quad (12.4)$$

Три длины Маркштейна  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_\sigma$  определяют длину волны обрезания  $\lambda_c$ , которую по соображениям размерности можно написать как

$$\lambda_c = \mathcal{L}_c F(\mathcal{L}_s/\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_\sigma/\mathcal{L}_c, \theta), \quad (12.5)$$

где  $F$  есть некоторая функция, явный вид которой определяется из анализа устойчивости пламени. Однако значение  $\lambda_c$  для каждого данного набора  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_\sigma$  может быть численно “измерено” используя тот факт, что при увеличении ширины трубы плоское пламя становится неустойчивым при  $b = \lambda_c/2$ . Таким образом,  $\lambda_c$  равно удвоенной ширине трубы, при которой скорость пламени достигает значения  $(1 + \varepsilon)$  с  $\varepsilon \ll 1$ , причём все параметры  $\theta, \mathcal{L}_c, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_\sigma$  фиксированы ( $\varepsilon$  обычно будет полагаться равным 0.005; в случаях, когда требуется повышенная точность,  $\varepsilon = 0.001$ ). Поскольку при использовании естественных единиц ширина трубы принимается за единицу длины, для нахождения значения  $F(\mathcal{L}_s/\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_\sigma/\mathcal{L}_c)$  следует зафиксировать отношения  $\mathcal{L}_s/\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_\sigma/\mathcal{L}_c$  и постепенно уменьшать  $\mathcal{L}_c$  до момента появления искривления фронта, как он определён выше. Согласно соотношению (12.5), найденное таким образом критическое значение  $\mathcal{L}_c$  даёт значение  $F = 2/\mathcal{L}_c$ .

Для формулировки численной схемы удобно объединить вещественное число  $u_-(0) \equiv u_0$  и положение фронта в вещественную чётную функцию

$$\varphi(x) = f(x) + u_0. \quad (12.6)$$

Считая, как обычно, что  $f(0) = 0$ , величины  $u_0, f$  можно выразить через  $\varphi$ :  $u_0 = \varphi(0)$ ,  $f(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ . Численная схема является итерационной и состоит в следующем. Рассмотрим приближение  $\varphi^{(p)}(x)$  функции  $\varphi^*(x)$ , которая является частью решения  $(w_-^*(x), u_-^*(x), \varphi^*(x))$  рассматриваемой системы уравнений. Для фиксированной  $\varphi = \varphi^{(p)}$  мастер-уравнение является интегро-дифференциальным уравнением относительно  $\omega_-(x)$ . Его решения могут быть найдены с помощью рекуррентного соотношения

$$\omega_-^{(m+1)}(x) = u_0 + \int_0^x d\xi K[\omega_-^{(m)}, \varphi](\xi), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.7)$$

где  $K$  обозначает нелинейный интегро-дифференциальный оператор, определяемый правой частью (12.1). Вычисления показывают, что итерация (12.7) быстро сходится к единственному решению  $\omega_-^*[\varphi]$  для любых разумно выбранных  $\varphi(x)$  и нулевого члена итерации  $\omega_-^{(0)}(x)$ . После этого строится новое приближение  $\varphi^{(p+1)}(x)$  функции  $\varphi^*(x)$  (то есть новая функция  $f^{(p+1)}(x)$  и новое значение  $u_0^{(p+1)}$ ) с помощью уравнения эволюции, записанного в виде

$$v_-^{n(p+1)} = 1 - S(f^{(p+1)'}, \omega_-^*[\varphi^{(p)}] + u_0^{(p+1)} - u_0^{(p)}), \quad (12.8)$$

левая часть которого понимается как

$$v_-^{n(p+1)} = \frac{u_-^*[\varphi^{(p)}] + u_0^{(p+1)} - u_0^{(p)} - f^{(p+1)'} w_-^*[\varphi^{(p)}]}{\sqrt{1 + f^{(p+1)'}{}^2}}. \quad (12.9)$$

$\omega_-^*[\varphi^{(p)}]$  здесь сдвинуто на  $(u_0^{(p+1)} - u_0^{(p)})$  с целью обеспечить совпадение  $u_0$  с его значением на следующем шаге итерации.  $f^{(p+1)}(x)$  является решением ОДУ (12.8), которое вместе с граничными условиями (12.4) образует переопределённую систему. Действительно, (12.8) является дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции  $f^{(p+1)'}(x)$ , которая должна удовлетворять двум граничным условиям  $f^{(p+1)'}(0) = f^{(p+1)'}(1) = 0$ . Поэтому решение данного уравнения существует лишь для определённого значения  $u_0^{(p+1)}$ . Более конкретно, если проинтегрировать его с начальным условием  $f^{(p+1)'}(0) = 0$ , то второе условие даёт алгебраическое уравнение для  $u_0^{(p+1)}$

$$f^{(p+1)'}[\omega_-^*[\varphi^{(p)}], u_0^{(p+1)}](1) = 0. \quad (12.10)$$

Таким образом, в данной схеме  $u_0$  играет роль собственного значения. Его приближение  $u_0^{(p+1)}$  находится методом пристрелки в окрестности  $u_0^{(p)}$ , то есть путём многократного решения уравнения (12.8) с различными  $u_0^{(p+1)}$  до тех пор, пока условие (12.10) не будет удовлетворено с нужной точностью. После того как  $u_0^{(p+1)}$  найдено, соответствующее  $\varphi^{(p+1)}$  вычисляется как

$$\varphi^{(p+1)}(x) = u_0^{(p+1)} + \int_0^x d\xi f^{(p+1)'}[\omega_-^*[\varphi^{(p)}], u_0^{(p+1)}](\xi) \equiv \mathcal{I}[\varphi^{(p)}](x). \quad (12.11)$$

Следовательно, если описанная итеративная процедура сходится, искомое решение  $(w_-^*, u_-^*, \varphi^*)$  может быть найдено как  $(w_-^*[\varphi^*], u_-^*[\varphi^*], \varphi^*)$ , где  $\varphi^*$  есть фиксированная точка отображения (12.11)

$$\mathcal{I}[\varphi^*] = \varphi^*. \quad (12.12)$$

Фиксированную точку  $\varphi^*$  можно также искать, несколько модифицировав итерационную процедуру с помощью весового параметра  $\beta \in (0, 1]$ :

$$\varphi_{p+1} = (1 - \beta)\varphi_p + \beta\mathcal{I}[\varphi_p]. \quad (12.13)$$

Известно, что как обычная, так и модифицированная итерационная процедура сходятся в достаточно малой окрестности фиксированной точки при условии, что  $\mathcal{I}$  является сжимающим отображением в этой точке:  $\|\mathcal{I}[\varphi] - \varphi^*\| < \lambda\|\varphi - \varphi^*\|$  для некоторого  $\lambda \in (0, 1)$  [178]. В настоящем случае, однако, это условие оказывается слишком жёстким, поскольку оно выполняется не для всех фиксированных точек. Для того чтобы обойти эту трудность, используем метод ускорения Андерсона [177], являющийся обобщением метода Крылова для нелинейных уравнений [178]. В этом методе  $(p + 1)$ -е приближение ищется как взвешенное среднее предыдущих  $d \geq 1$  итераций

$$\varphi_{p+1} = \alpha_{p,1}\varphi_p + \alpha_{p,2}\varphi_{p-1} + \dots + \alpha_{p,d}\varphi_{p-d+1}, \quad \sum_{k=1}^d \alpha_{p,k} = 1, \quad (12.14)$$

где  $\alpha_{p,k}$  – вещественные коэффициенты, определяющиеся из условия минимальности евклидовой нормы невязки  $\epsilon_{p+1} = \mathcal{I}[\varphi_{p+1}] - \varphi_{p+1}$ . В предположении достаточной близости к фиксированной точке  $\varphi^*$  [следовательно, и к  $\varphi_{p+1}$ ],  $\mathcal{I}$  может быть линеаризован, а норма невязки записана в виде квадратичной формы

$$\begin{aligned} \epsilon_{p+1} &\equiv \mathcal{I}[\varphi_{p+1}] - \varphi_{p+1} \approx \mathcal{I}[\varphi^*] + \mathcal{I}'[\varphi^*](\varphi_{p+1} - \varphi^*) - \varphi_{p+1} \\ &\equiv \mathcal{J} \cdot (\varphi_{p+1} - \varphi^*), \quad \mathcal{J} \equiv \mathcal{I}'[\varphi^*] - 1, \end{aligned} \quad (12.15)$$

$$\begin{aligned} \|\epsilon_{p+1}\|^2 &\approx \|\mathcal{J}(\varphi_{p+1} - \varphi^*)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^d \alpha_{p,k} \mathcal{J}(\varphi_{p-k+1} - \varphi^*) \right\|^2 \\ &= \sum_{k,l=1}^d g_{kl}^{(p)} \alpha_{p,k} \alpha_{p,l}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Коэффициенты этой квадратичной формы могут быть найдены путём вычисления скалярных произведений невязок:  $g_{kl}^{(p)} = (\epsilon_{p-k+1}, \epsilon_{p-l+1})$ . Проблема минимизации невязки тогда решается хорошо известным методом наименьших квадратов, то есть минимизации (12.16) относительно  $\alpha_{p,1}, \dots, \alpha_{p,d-1}$ , где последний аргумент  $\alpha_{p,d} = 1 - \sum_{k=1}^{d-1} \alpha_{p,k}$  (см., например, [179]).

Наиболее трудоёмкой частью данной схемы является вычисление интегрального преобразования (4.33), требующее  $O(n^2)$  действий для сетки из  $n$  узлов на отрезке  $x \in [-1, 1]$ .

Однако значения этого преобразования в разных точках независимы друг от друга и поэтому могут вычисляться параллельно. Представленные ниже результаты получены на персональном компьютере с двухядерным процессором Intel Atom D525 1.7 ГГц; поиск решения на сетке с  $n = 1000$  занимал около одной минуты.

### §12.2. Результаты численного интегрирования

В первую очередь рассмотрим наиболее распространённый механизм стабилизации пламени – эффект кривизны фронта. Для этого полагаем  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_\sigma = 0$  и варьируем  $\mathcal{L}_c$  при нескольких существенно различных значениях  $\theta$ . Это, в частности, позволит оценить влияние теплового расширения газа на структуру пламени, которым часто пренебрегается в теоретических рассуждениях. Затем будут исследованы эффекты растяжения и компрессии пламени и их взаимодействие с эффектом кривизны. В общем случае для каждого набора параметров  $(\theta, \mathcal{L}_c, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_\sigma)$  имеется несколько решений. Однако для краткости ниже рассматриваются лишь решения, максимизирующие скорость пламени, которые согласно анализу устойчивости слабонелинейного пламени являются устойчивыми [129, 130].

*А. Эффект теплового расширения газа. Область применимости слабонелинейного приближения*

Установившееся движение пламени в трубе конечной ширины может быть качественно описано как результат нелинейной стабилизации конечного числа неустойчивых мод, которые по мере роста взаимодействуют друг с другом и постепенно сливаются в более крупные и медленнее эволюционирующие структуры. Если  $(\theta - 1)$  не мал, в этом режиме наклон фронта  $|f'|$  не мал по сравнению с единицей в большей части сечения трубы. Тот факт, что он падает до нуля на её стенках (это имеет место в достаточно узких трубах) наводит на мысль, что стенки оказывают на пламя стабилизирующее действие и что, следовательно, в узких трубах слабонелинейная теория могла бы быть применимой к пламенам с немалым  $\alpha$ . Однако обратной стороной описанной стабилизации является сильная неоднородность распределения скорости газа по сечению трубы. Именно, для того чтобы удовлетворить условиям  $w = 0$ ,  $f' = 0$ , поля скорости должны быстро меняться вблизи стенок, что приводит к усилению завихренности продуктов горения в этих областях. Это

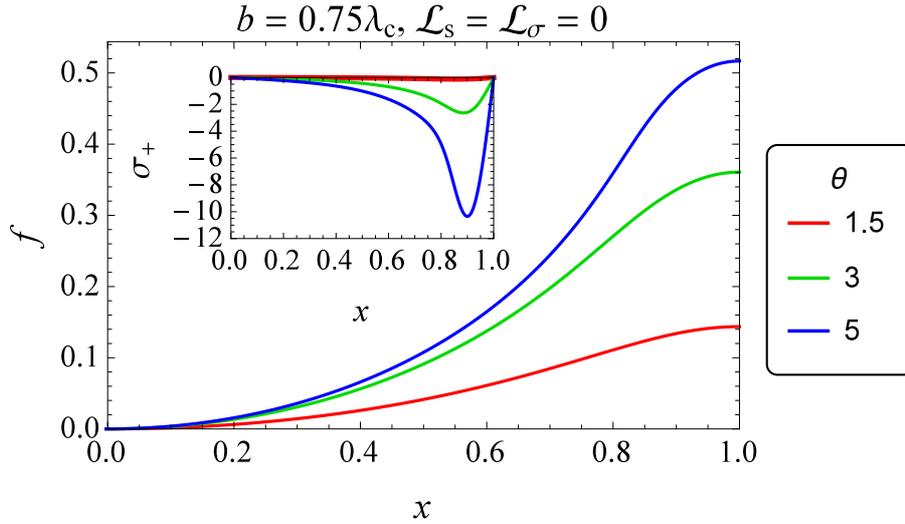


Рис. 46: Положение фронта и завихрённость продуктов горения на фронте (врезка) для пламён с различными  $\theta$  в трубе шириной  $0.75\lambda_c$ .

иллюстрирует Рис. 46, на котором показаны профили фронта и распределение на нём завихрённости сгоревшего газа для пламён с  $\theta = 1.5, 3$  и  $5$ , распространяющихся в трубе ширины  $b = 0.75\lambda_c$ . Несмотря на гладкую форму фронта, уже при таком сравнительно небольшом значении коэффициента теплового расширения, как  $\theta = 3$ , завихрённость имеет острый пик около стенки  $x = b$ , высота которого в естественных единицах существенно превосходит 1 (резкий рост завихрённости вблизи стенок наблюдался также в прямом численном моделировании [114]). В то же время, разложение по малому  $(\theta - 1)$  подразумевает малость завихрённости. В самом деле, предположение, что порождаемые пламенем вариации скорости газа  $|\Delta u| \ll 1, |\Delta w| \ll 1$  влечёт малость их производных, потому что  $\lambda_c$  и  $b$  являются единственными характерными масштабами длины, и потому в случае  $\lambda_c \simeq b = 1$  имеем, например,  $u'_+ \simeq \Delta u / \lambda_c \simeq \Delta u \ll 1$ . Таким образом, предположение малой завихрённости продуктов горения не выполняется для пламён с  $\alpha \gtrsim 1$  даже в узких трубах.

Нарушение основных предположений слабонелинейной теории иллюстрируется далее на Рис. 47 графиками скорости распространения пламени в зависимости от  $\lambda_c$ . Сравнение с теоретическими предсказаниями (пунктирные линии) выявляет существенные отклонения от характерной “арочной” структуры, которые быстро увеличиваются с ростом  $\theta$ . Будучи пропорциональной полной длине фронта, скорость пламени должна была бы

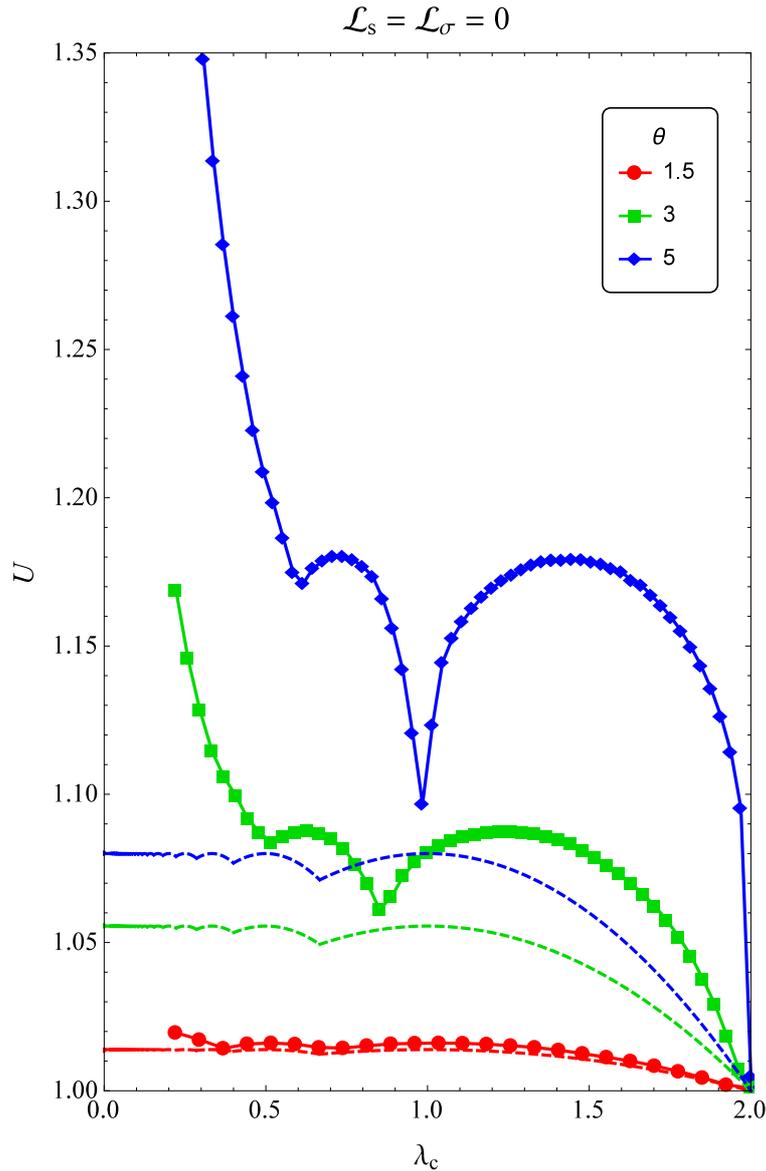


Рис. 47: Зависимость скорости пламени от длины волны обрезания для пламён с  $\theta = 1.5, 3, 5$ .  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_\sigma = 0$ . Результаты слабонелинейной теории (решения уравнения Сивашинского–Клавена (6.13)) показаны пунктирными линиями.

отклоняться от теоретической на величину  $\sim \mathcal{L}_c/b \ll 1$ , если бы пики завихрённости изменяли положение фронта лишь вблизи стенок. Следовательно, существенно бóльшие отклонения на Рис. 47 означают, что от свойств течения вблизи стенок зависит структура всего пламени. Этот вывод вполне ожидаем ввиду существенной нелокальности процесса медленного горения. Описанный нелокальный эффект является взаимным: узкие области вблизи стенок с пиками завихрённости сами по себе сформированы в результате развития

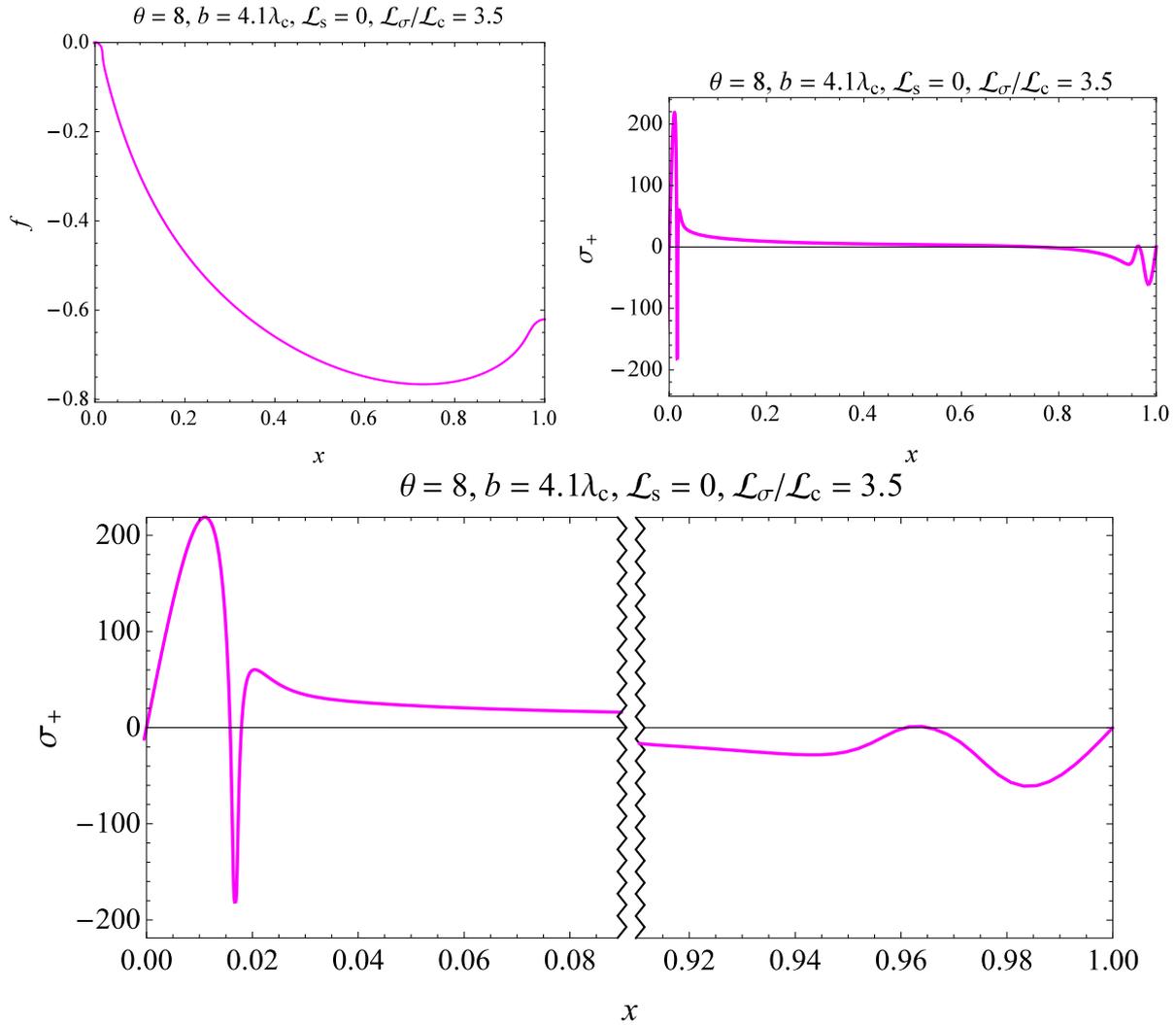


Рис. 48: Сверху: положение фронта и распределение вдоль него завихрённости продуктов горения для пламени с  $\theta = 8$ ,  $\mathcal{L}_c = 0.031$  в трубе шириной  $4.1\lambda_c$ . Снизу: распределение завихрённости вблизи стенок.

неустойчивости вдали от стенок. Действительно, кривизна фронта и градиенты скорости увеличиваются с ростом  $b$  и  $\theta$ , то есть при увеличении числа неустойчивых мод и их инкрементов. Для ещё бóльших значений  $\theta$  завихрённость сгоревшего газа существенно превосходит единицу не только вблизи стенок, но и по всему сечению трубы. Например, на Рис. 48 средняя по сечению завихрённость  $\approx 11$  (для адекватного разрешения структуры пламени при нахождении численных решений использовалась неравномерная сетка с шагом  $10^{-4}$  вблизи стенок; при этом проверялось, что найденные решения не меняются при перераспределении узлов сетки).

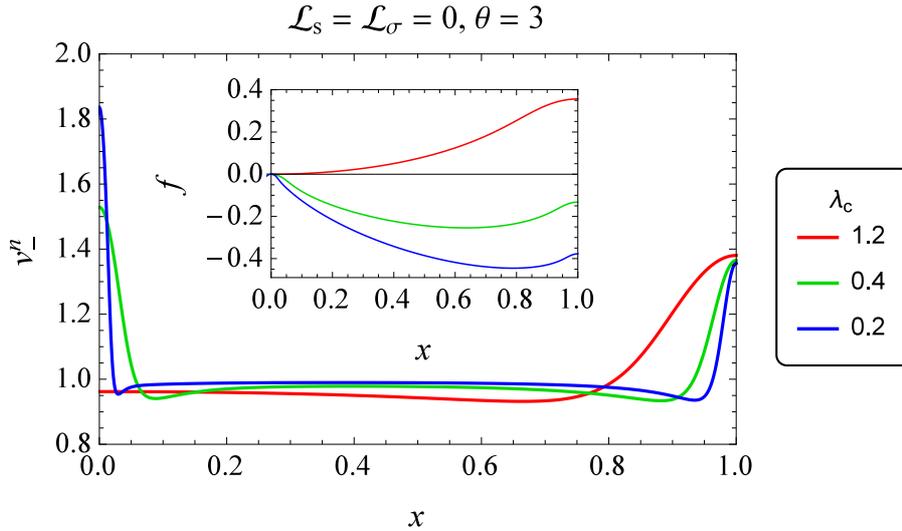


Рис. 49: Нормальная скорость пламени с  $\lambda_c = 1.2$  ( $\mathcal{L}_c = 0.064$ , красная линия),  $\lambda_c = 0.4$  ( $\mathcal{L}_c = 0.021$ , зелёная линия), и  $\lambda_c = 0.2$  ( $\mathcal{L}_c = 0.011$ , синяя линия). Соответствующие положения фронта пламени показаны на врезке. На всех графиках  $\theta = 3$  и  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_\sigma = 0$ .

В областях вблизи стенок, где расположены пики завихрённости, наибольшей величины достигают также эффекты конечной ширины пламени. Это видно из Рис. 49, на котором приведены графики нормальной скорости газа. Вне областей шириной порядка  $\mathcal{L}_c$  вблизи стенок нормальная скорость с большой точностью постоянна и практически равна единице, причём отличие от единицы уменьшается с уменьшением  $\mathcal{L}_c$ . Таким образом, нелинейная стабилизация пламён с немалыми  $\alpha$  приводит к минимизации эффекта кривизны на бóльшей части фронта за счёт его усиления вблизи стенок трубы.

Численные решения показывают, что пики завихрённости уменьшаются лишь при достаточно малых  $\alpha$ . Соответственно этому положение и высота двух правых арок на кривых  $U(\lambda_c)$  (что соответствует  $b \lesssim 2.5\lambda_c$ ) достаточно хорошо описываются полюсными решениями при  $\alpha \lesssim 0.5$ . Таким образом, практическая применимость слабонелинейного подхода ограничена  $\theta \lesssim 1.5$  и достаточно узкими трубами:  $b \lesssim 3\lambda_c$ .

### *B. Эффект растяжения пламени (flame stretch)*

В общем случае эффекты кривизны и растяжения пламени существенно различны по своей математической структуре и физическим проявлениям. В некоторых важных случа-

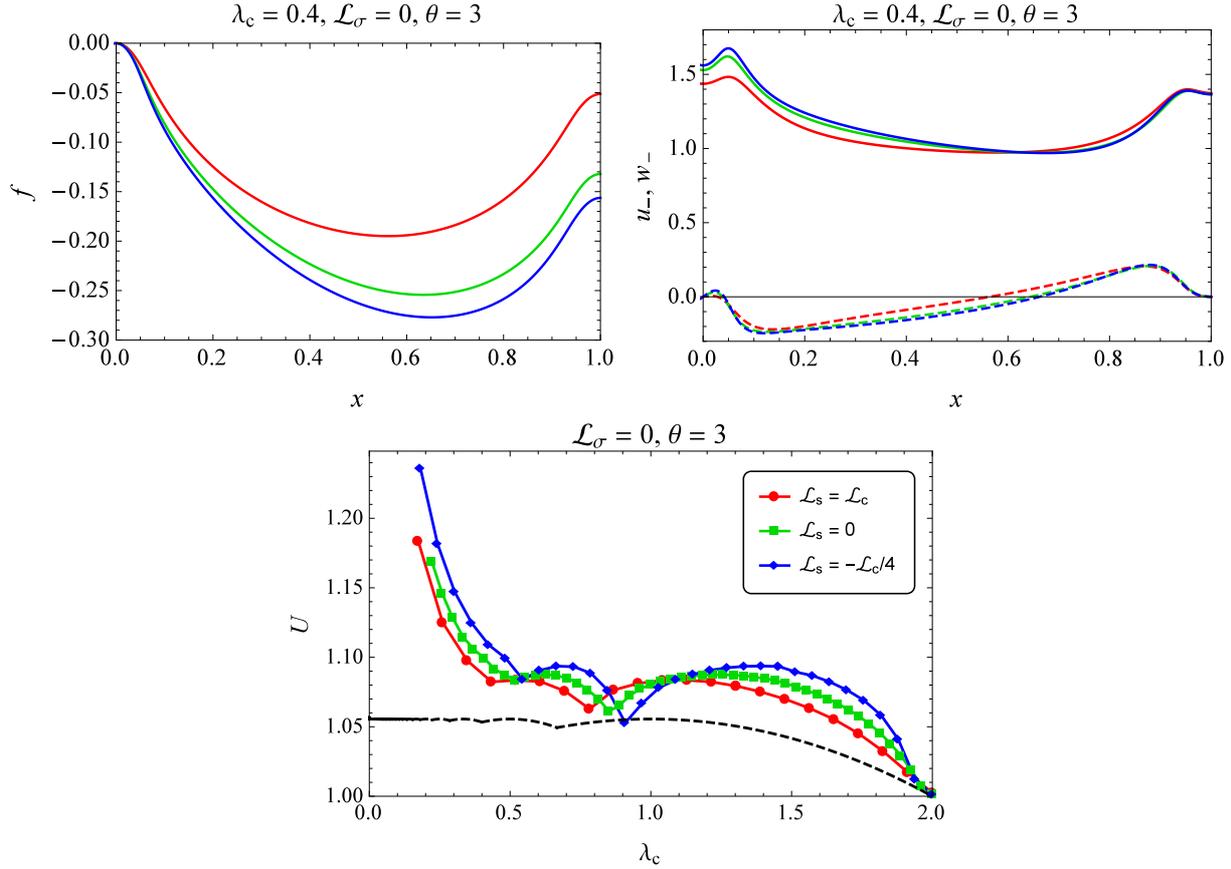


Рис. 50: Положение фронта, распределение на нём  $u_-$  (сплошные линии),  $w_-$  (пунктирные линии) и зависимость скорости пламени от  $\lambda_c$  для случаев  $\lambda_c = 0.4, \theta = 3$  и  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_c$  (красные линии),  $\mathcal{L}_s = 0$  (зелёные линии),  $\mathcal{L}_s = -\mathcal{L}_c/4$  (синие линии).

ях, однако, они оказываются неразличимыми. Например, в линейной теории неустойчивости плоского пламени, а также в низших порядках разложения по  $(\theta - 1)$  соответствующие длины Маркштейна входят в единственный внутренний масштаб длины – длину волны обрезания  $\lambda_c$  [см. (6.13), (6.20)]. С другой стороны, экспериментальная точность далеко не всегда даёт возможность отделить два эффекта друг от друга. Поэтому на практике для аналитического описания пламён и интерпретации результатов эксперимента часто ограничиваются одним параметром Маркштейна.

Результаты численного решения мастер-уравнения в целом подтверждают, что изменение отношения  $\mathcal{L}_c/\mathcal{L}_s$  при фиксированном значении  $\lambda_c$  не приводит к заметной перестройке структуры пламени. Это иллюстрируется Рис. 50, 51, где сравниваются основные характеристики пламён для трёх различных пар параметров  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_s$ . Из графиков видно,

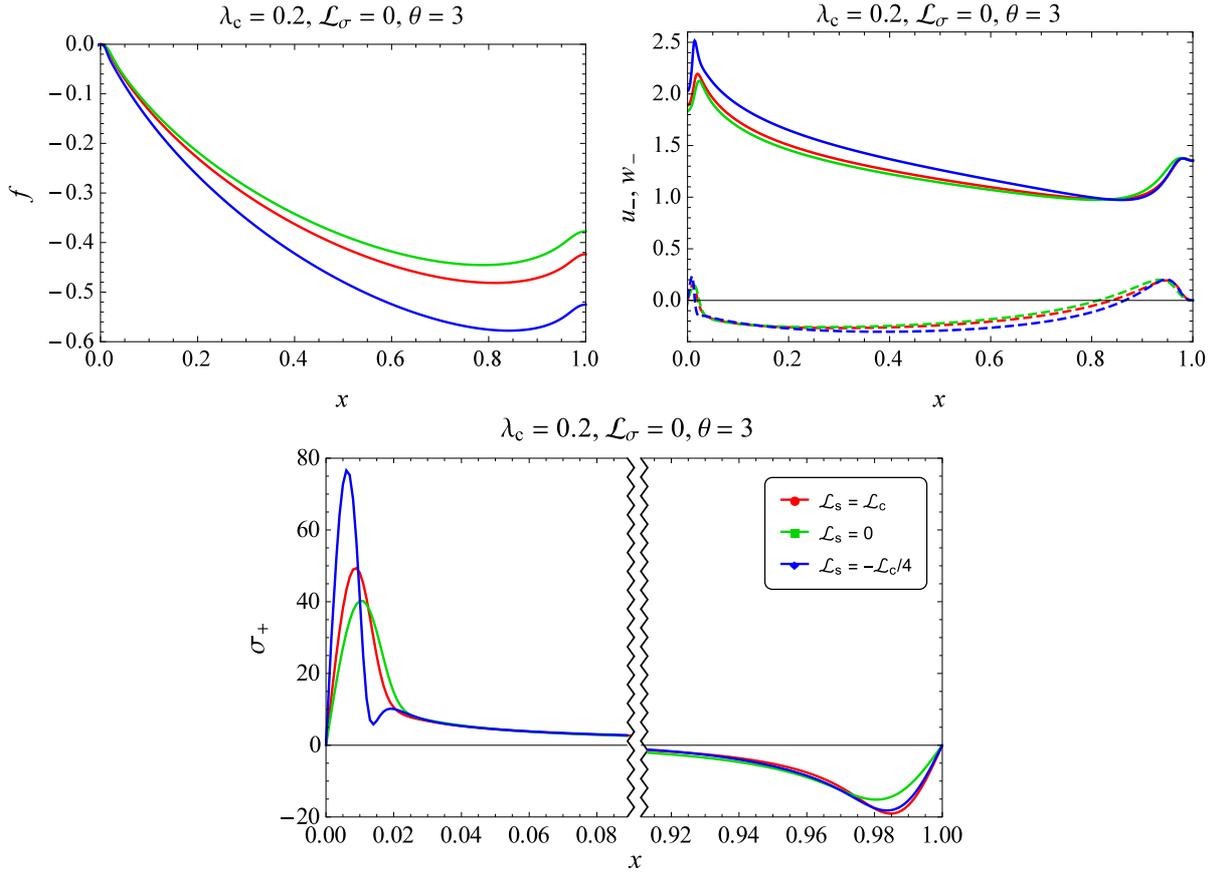


Рис. 51: Положение фронта, скорость холодного газа  $u_-$  (сплошные линии),  $w_-$  (пунктирные линии) и завихрённость продуктов горения вблизи стенок трубы для случаев  $\lambda_c = 0.2, \theta = 3$  и  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_c$  (красные линии),  $\mathcal{L}_s = 0$  (зелёные линии),  $\mathcal{L}_s = -\mathcal{L}_c/4$  (синие линии).

что эффект растяжения всё же порождает важный тренд в кривых скорости пламени, а именно, при уменьшении  $\mathcal{L}_s$  скорость пламени увеличивается везде, исключая провалы на кривых (например, при значении  $\lambda_c \approx 0.9$ ). Аналогичная зависимость при распространении пламени в сильном поле тяжести отмечалась в главе 11.

### C. Эффект компрессии пламени (*flame compression*)

В отличие от поправок конечной ширины в нормальную скорость, эффект компрессии пламени остаётся в литературе практически неисследованным. Это связано с тем, что нормальная скорость пламени, в принципе, непосредственно измерима и длины Маркштейна  $\mathcal{L}_c$ ,  $\mathcal{L}_s$  могут быть найдены сравнением (1.7), (1.8) с результатами эксперимента. Важно также, что аналогичные сравнения могут быть проведены в ситуациях, когда применима

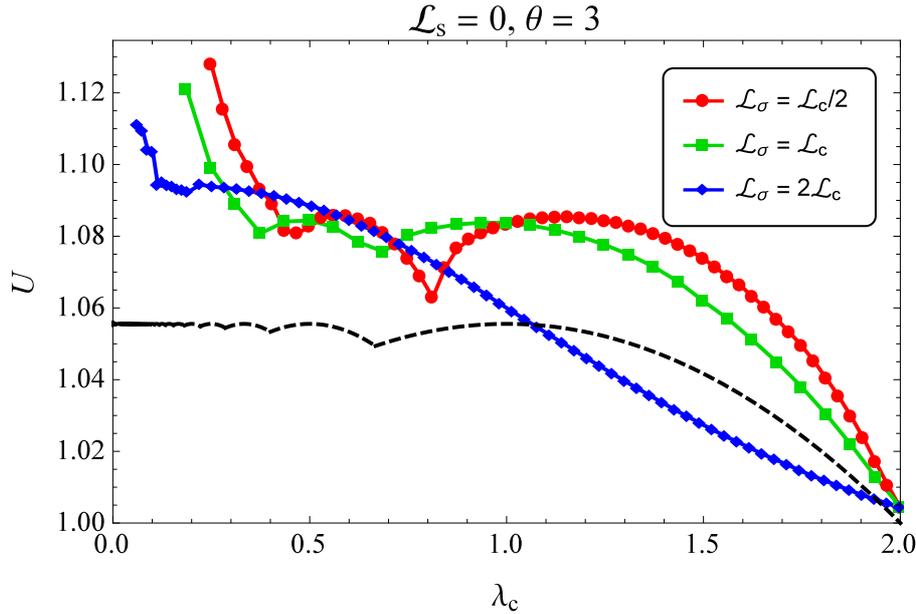


Рис. 52: Зависимость скорости пламени от длины волны обрезания для  $\theta = 3$  и различных значений отношения  $\mathcal{L}_\sigma/\mathcal{L}_c$  (везде  $\mathcal{L}_s = 0$ ). Красные, зелёные и синие кривые соответствуют  $\mathcal{L}_\sigma/\mathcal{L}_c = 0.5, 1$  и  $2$  (во втором случае выполняется условие (12.17)). Пунктирные кривые представляют решения уравнения Сивашинского–Клавена.

слабонелинейная теория, например, при исследовании динамики почти плоских пламён [86, 180, 181]. Наоборот, эффект компрессии проявляет себя через скачок на фронте давления газа, и следовательно, непосредственно влияет на величину завихрённости газа, а не скорости фронта. В слабонелинейной теории Сивашинского [106] завихрённостью газа пренебрегается полностью, а в следующем приближении (приближении Сивашинского–Клавена, §6.2) она считается малой [107]. В результате все три длины Маркштейна оказываются входящими в единственный параметр  $\lambda_c$  [см. (6.20)]. Таким образом, хотя эффект компрессии пламени влияет на величину  $\lambda_c$ , он маскируется двумя другими эффектами конечной ширины фронта. По этой причине любое качественно новое проявление этого эффекта должно быть непертурбативным. Как показывают полученные численные решения, это действительно так. Эффект компрессии существенно влияет на структуру именно пламён с достаточно большими  $\theta$ , и поэтому не улавливается разложением по  $(\theta - 1)$ .

Согласно (6.20) вклад компрессии пламени в длину волны обрезания отрицателен. Это означает, что на начальной стадии развития неустойчивости Ландау–Дарье эффект

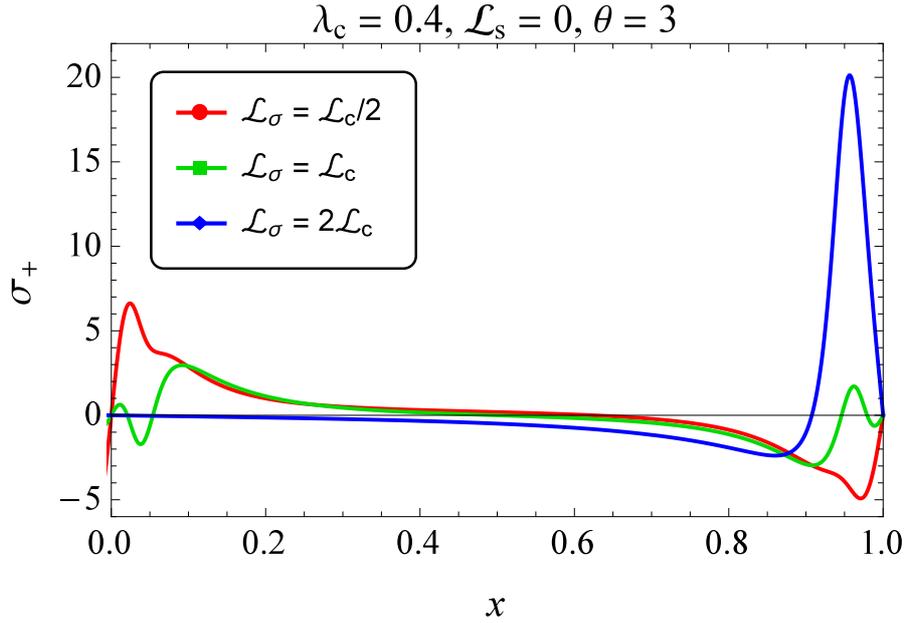


Рис. 53: Завихрённость продуктов горения на фронте пламени с  $\theta = 3$ ,  $\lambda_c = 0.4$ ,  $\mathcal{L}_s = 0$  и  $\mathcal{L}_\sigma = 0.5\mathcal{L}_c$  (красная кривая),  $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_c$  (зелёная кривая),  $\mathcal{L}_\sigma = 2\mathcal{L}_c$  (синяя кривая).

компрессии дополнительно дестабилизирует пламя, что должно усиливать нелинейность установившегося течения. Оказывается, однако, что в определённом интервале значений параметров включение этого эффекта улучшает применимость слабонелинейной теории. Именно, последовательность кривых скорости пламени на Рис. 52 демонстрирует, что при увеличении  $\mathcal{L}_\sigma$  от нуля до значений порядка  $\mathcal{L}_c$  решения точной системы уравнений сначала приближаются к решениям, полученным с помощью полюсного разложения. В частности, провалы на кривых скорости пламени смещаются в направлении точек  $b/\lambda_c = n + 1/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , которые соответствуют появлению новых членов в полюсном разложении [см. (6.31)]. Однако при дальнейшем увеличении  $\mathcal{L}_\sigma$  отклонения от результата слабонелинейной теории начинают расти, и зависимость скорости пламени от  $\lambda_c/b$  в конце концов становится совершенно отличной от арочной, предсказываемой слабонелинейной теорией.

Это поведение становится понятным, если заметить, что когда длины Маркштейна  $\mathcal{L}_c$  и  $\mathcal{L}_\sigma$  связаны соотношением

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{\alpha}{2}\mathcal{L}_c, \quad (12.17)$$

вклад компрессии пламени в ядро  $M$  (12.2) в точности сокращается вкладом кривизны фронта в нормальную скорость в слагаемом  $(v_-^n)'$ . Члены с высшими производными,

которые наиболее чувствительны к быстрым изменениям наклона пламени, таким образом исчезают из  $\sigma_+$ . В результате пики завихрённости вблизи стенок трубы оказываются сглаженными, и применимость слабонелинейной теории улучшается. Например, в случае  $\theta = 3$ ,  $\lambda_c = 0.4$ ,  $\mathcal{L}_s = 0$  и  $\mathcal{L}_\sigma = 0$  пиковое значение завихрённости вблизи стенки  $x = 0$  приближённо равно 15. Из Рис. 53 видно, что включение компрессии пламени с  $\mathcal{L}_\sigma = 0.5\mathcal{L}_c$  уменьшает это значение до  $\sigma_+ \approx 7$ . Пик ещё больше подавляется и разделяется на два пика противоположного знака с  $|\sigma_+| \approx 1 - 2$  в случае  $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_c$ , удовлетворяющем условию (12.17). Знакопеременность пиков снижает интегральный эффект завихрённости вблизи стенки на глобальную структуру пламени. Наконец, при ещё бóльших  $\mathcal{L}_\sigma$  вместо отрицательного пика с  $\sigma_+ \approx -9$ , имевшегося при  $\mathcal{L}_\sigma = 0$  вблизи стенки  $x = 1$ , появляется положительный пик с  $\sigma_+ \approx 20$ .

#### *D. Рост скорости пламени с шириной трубы. Роль шума*

Слабонелинейная теория предсказывает, что при увеличении ширины трубы скорость установившегося движения пламени стремится к постоянному значению (см. §6.3В). Но как хорошо известно из эксперимента, скорость пламени резко растёт с увеличением  $b$ . С другой стороны, в силу различных неконтролируемых факторов, таких как малые неоднородности смеси или турбулентные движения, развивающиеся в потоке продуктов горения, любое лабораторное пламя может рассматриваться как стационарное лишь приближённо. Аналогично, прямое численное моделирование также указывает на сильный рост скорости пламени начиная с некоторого критического значения  $b$ , но при этом оказывается невозможным получить истинно стационарное течение на достаточно широких сетках. А именно, ошибки округления и продольная конечность сетки создают слабые возмущения фронта пламени, которые могут стать заметными прежде, чем они будут снесены достаточно далеко течением газа. Это ведёт к заметному увеличению скорости пламени и может даже вызывать переходы между различными режимами распространения. На этом основании было высказано предположение, что именно эти нерегулярности, или *шум*, являются причиной несоответствия между слабонелинейной теорией и наблюдениями [115, 125, 126]. В частности, в работах [125, 126] было показано, что, вводя в уравнение Сивашинского источник шума с подходящим спектром и интенсивностью, можно получить скорость пламени, растущую с шириной трубы как  $U \sim b^\mu$ , где  $\mu$  может принимать

фактически любые значения, например, 0.35, 0.42, и даже  $\mu > 1.5$ .

Нет сомнений в том, что шум имеется в реальном и численном эксперименте, как и в том, что подбором нужной его интенсивности теоретическая скорость может быть увеличена до наблюдаемых значений. Однако возможно также, что рост скорости с шириной трубы не связан с шумом и присущ стационарным пламёнам, то есть является непертурбативным эффектом, который не описывается слабонелинейной теорией. Стационарное мастер-уравнение является удобным инструментом для исследования этого вопроса, поскольку оно по построению свободно от нестационарности, вносимой шумом, а с другой стороны, точно учитывает все нелинейные эффекты. Полученные решения мастер-уравнения позволяют утверждать, что по крайней мере начальный отрезок роста скорости пламени никак не связан с шумом. Из представленных выше графиков видно, что скорость пламени резко растёт слева от второго провала, который в полюсном разложении соответствует  $b = (2 + 1/2)\lambda_c$ . Для сравнения с результатами прямого численного моделирования используем серию работ [112–114]. В ранних работах [112, 113] было найдено, что численные решения качественно подтверждают предсказания слабонелинейной теории для достаточно узких труб. Но позже в более широких трубах были обнаружены значительные отклонения [114], в частности, было найдено, что скорость пламени резко растёт с шириной трубы начиная с  $b \gtrsim 3.4\lambda_c$ . Для нахождения значений основных параметров, соответствующих условиям [114], учтём, что эти расчёты проводились в гладких трубах для смесей с числом Льюиса  $Le = 1$  и числом Прандтля  $Pr = 0.5$ , не зависящей от температуры теплопроводностью и одноступенчатой химической реакцией. В этом случае длины Маркштейна имеют следующие значения [97]

$$\mathcal{L}_c = \frac{\theta \ln \theta}{\theta - 1} l_f, \quad \mathcal{L}_s = 0, \quad \mathcal{L}_\sigma = \frac{\theta \ln \theta}{2} l_f. \quad (12.18)$$

Непосредственно проверяется, что они удовлетворяют условию (12.17). На Рис. 54, 55 сравниваются результаты численного решения мастер-уравнения и прямого численного моделирования для скорости пламени. Небольшой горизонтальный сдвиг двух кривых, заметный по расположению провалов, связан с различием в измерении длины волны обрезания: в отличие от определения §12.1, в работе [114] она находилась по зависимости инкремента роста возмущения от волнового числа на ранней стадии развития неустойчивости плоского пламени (О.Пейль, частное сообщение). Та часть кривой прямого численного моделирования, которая описывает рост скорости пламени, изображена пунктиром

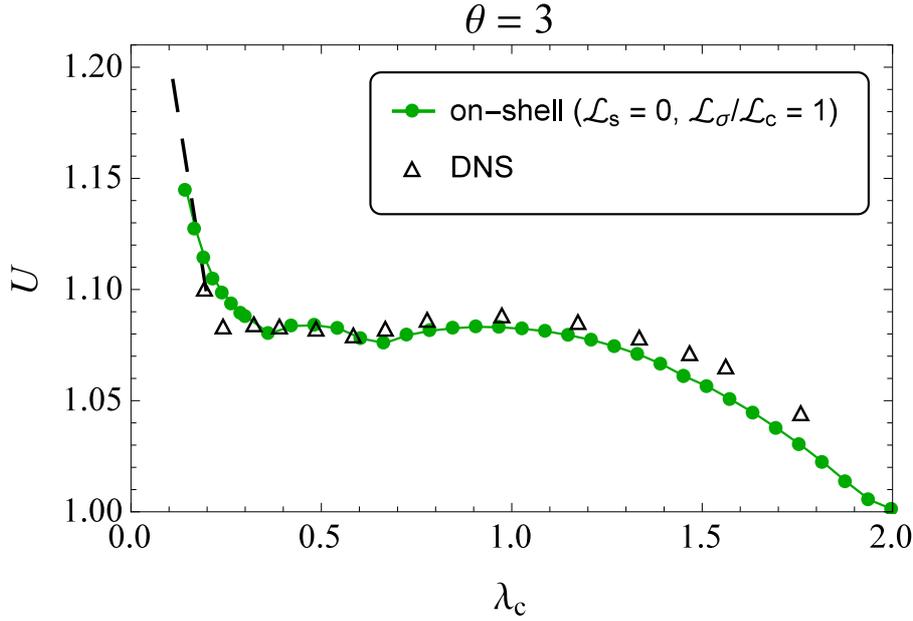


Рис. 54: Зависимость скорости пламени с  $\theta = 3$  от длины волны обрезания, даваемая решениями оболочечных уравнений с длинами Маркштейна (12.18) (кружки) и прямым численным моделированием [114] (треугольники).

из-за значительного разброса значений, вызванного шумом (О.Пейль, частное сообщение). Близость теоретических и экспериментальных кривых на Рис. 54, 55 свидетельствует о том, что резкий рост скорости пламени при  $b \gtrsim 3.4\lambda_c$  не связан с шумом, а является стационарным явлением.

Наконец, Рис. 56 демонстрирует, что это свойство является совершенно общим и не связано с частным выбором параметров (12.18). На этом рисунке представлен трёхмерный график скорости пламени как функции двух независимых параметров  $\mathcal{L}_c$ ,  $\mathcal{L}_s$ . Для достаточно малых  $\mathcal{L}_s$  [меньше значения, определяемого условием (12.17)], порог роста скорости находится при  $b \approx 2\lambda_c \div 3\lambda_c$ , но он заметно растёт с  $\mathcal{L}_s$  [см. случай  $\mathcal{L}_s = 2\mathcal{L}_c$  на Рис. 52, где он  $\approx 12\lambda_c$ ]. С другой стороны, этот порог оказывается значительно менее чувствительным к компрессии пламени, если его выразить через длины Маркштейна. При  $\mathcal{L}_s = 0$ , например, он равен  $b \approx 35\mathcal{L}_c$  практически независимо от значения  $\mathcal{L}_s$ .

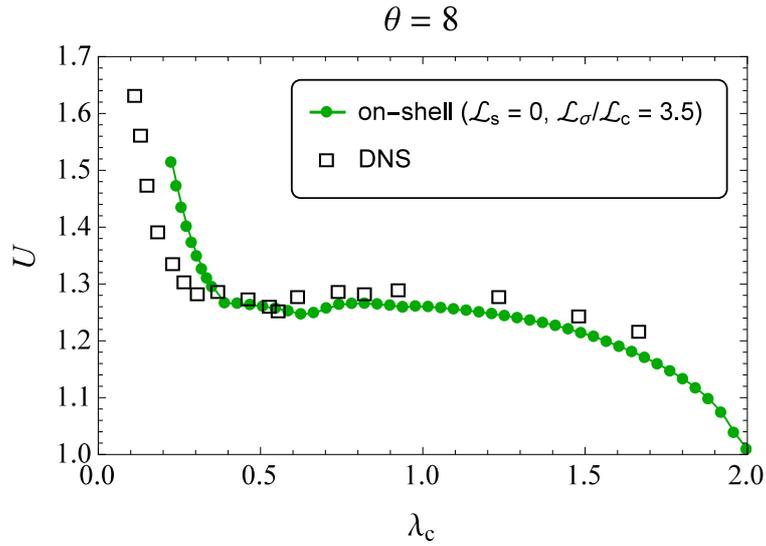


Рис. 55: То же для  $\theta = 8$ .

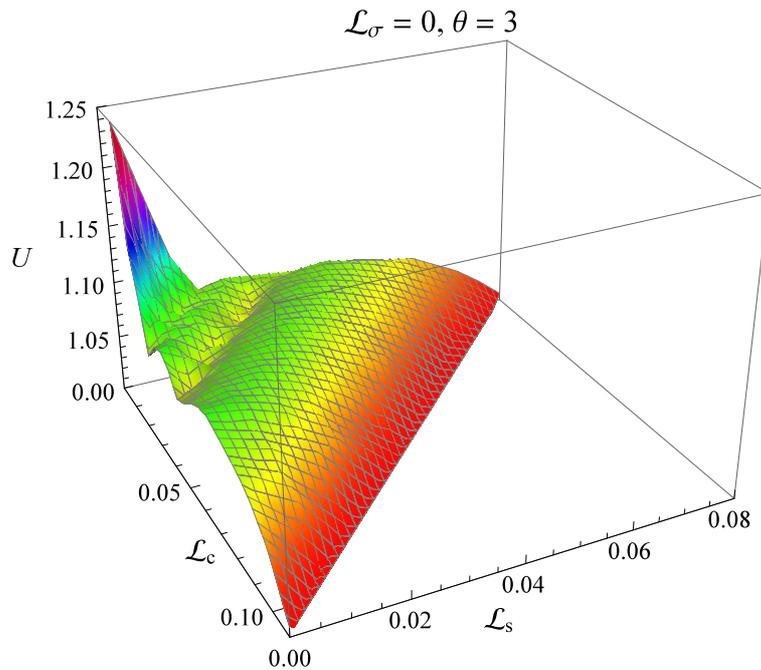


Рис. 56: Зависимость скорости пламени с  $\theta = 3$  от  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_s$ .

### Вывод

В отличие от реального эксперимента или прямого численного моделирования оболочечное описание позволяет исследовать каждый из трёх эффектов конечной ширины по-отдельности. Это исследование привело к следующим выводам:

- В результате нелинейной стабилизации тонкого ламинарного пламени в трубе вблизи её стенок образуются области ширины порядка  $\mathcal{L}_c$ , которые характеризуются большими значениями завихренности газа и кривизны фронта пламени, быстро увеличивающимися с ростом  $\theta$ . Наличие этих областей делает слабонелинейное приближение неприменимым к пламенам с  $\theta - 1 \gtrsim 1$  даже в узких трубах.
- Компрессия тонкого ламинарного пламени сильно влияет на величину и распределение завихренности продуктов горения, а тем самым и на всю структуру пламени. В частности, учёт эффекта компрессии полностью меняет зависимость скорости распространения пламени от ширины трубы.
- Резкий рост скорости ламинарного пламени, наблюдаемый при увеличении ширины трубы выше определённого порогового значения, не связан с реальным или численным шумом и является стационарным явлением по крайней мере до  $b = 200\mathcal{L}_c$ .

## Часть IV

# Нестационарные пламёна

### 13. ОБОЛОЧЕЧНОЕ ОПИСАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА [A6,A7,A16]

#### §13.1. Мастер-уравнение для тонкого ламинарного нестационарного пламени

Оболочечное описание нестационарных течений несжимаемого газа, в частности, нестационарных пламён строится так же, как и в стационарном случае, однако получающееся в результате мастер-уравнение оказывается существенно более сложным. Это связано с неизбежной нелокальностью динамики пламени во времени: поведение его фронта в данный момент времени зависит, вообще говоря, от всей предыдущей эволюции пламени.

Несмотря на то что поля скорости и положение фронта пламени теперь зависят от времени,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t)$ ,  $f = f(x, t)$ , интегральное тождество (4.10) для скорости продуктов горения сохраняет свой вид, поскольку оно является следствием несжимаемости газа и определения завихрённости. Отличие от стационарного случая появляется при переходе к интегрированию по траекториям элементов газа: теперь они зависят от двух независимых временных аргументов – момента времени  $t$ , в который рассматривается пламя, и момента времени  $t_0$ , в который данный элемент газа пересёк фронт. Именно, обозначим через  $(X(\tilde{x}, t, t_0), Y(\tilde{x}, t, t_0))$  текущее положение элемента газа, который пересёк фронт пламени в точке  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}, t_0))$ . Тогда (4.10) можно переписать как

$$v_i(x, y, t) \stackrel{\circ}{=} -\frac{\varepsilon_{ik}}{2} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} K(x, y, \tilde{x}, t), \quad (13.1)$$

с интегральным ядром

$$K(x, y, \tilde{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-T}^t dt_0 M(\tilde{x}, t_0) \ln \{ [x - X(\tilde{x}, t, t_0)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, t, t_0)]^2 \},$$

$$M(x, t) = N(x, t) \hat{v}_+^n(x, t) \sigma_+(x, t), \quad (13.2)$$

где  $\hat{v}_+^n$  – нормальная скорость сгоревшего газа относительно фронта, символ  $\stackrel{\circ}{=}$  понимается в смысле условий (a)–(c) из §4.3 и подразумевается, что в конце вычислений будет взят

предел  $T \rightarrow \infty$ . Заменой переменной интегрирования  $t_0 = t - \tau$  (13.2) приводится к виду

$$K(x, y, \tilde{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T d\tau M(\tilde{x}, t - \tau) \ln \{ [x - X(\tilde{x}, t, t - \tau)]^2 + [y - Y(\tilde{x}, t, t - \tau)]^2 \}, \quad (13.3)$$

причём  $\tau$  играет здесь ту же роль, что и в §4.3: это есть время движения элемента сгоревшего газа от момента пересечения фронта до момента  $t$ . Оно по-прежнему однозначно определяется координатами  $(\eta, \xi)$  данного элемента газа в момент  $t$ :  $\tau = \tau(\eta, \xi, t)$ . Точка пересечения его траектории с фронтом пламени также определена однозначно, в частности, абсцисса точки пересечения  $\tilde{x} = \tilde{x}(\eta, \xi, t)$ . Обратно, рассмотрим элементы газа, принадлежащие в момент времени  $t$  данной окрестности точки  $(x, y)$ . Условие  $\tau(\eta, \xi, t) = \tau_*$  выделяет из них те элементы, которые одновременно пересекли фронт в момент времени  $(t - \tau_*)$ . Каждая такая точка пересечения фронта однозначно определяется [в данный момент  $(t - \tau_*)$ ] своей абсциссой  $\tilde{x}$  и однозначно определяет траекторию движения элемента газа. В свою очередь, положение элемента газа на каждой траектории в момент времени  $t$ , то есть координаты  $(\eta, \xi)$ , однозначно определяется величиной  $\tau_*$ . Таким образом, уравнения  $\tilde{x} = \tilde{x}(\eta, \xi, t)$ ,  $\tau(\eta, \xi, t) = \tau_*$  однозначно определяют  $\eta, \xi$ , то есть функции  $\eta = \eta(\tau_*, \tilde{x}, t)$ ,  $\xi = \xi(\tau_*, \tilde{x}, t)$ . Далее, согласно определению  $t$  и  $t_0 = t - \tau$  имеем

$$X(\tilde{x}, t, t - \tau) = \tilde{x} + \int_{t-\tau}^t d\tilde{t} w(X(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), Y(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), \tilde{t}),$$

$$Y(\tilde{x}, t, t - \tau) = f(\tilde{x}, t - \tau) + \int_{t-\tau}^t d\tilde{t} u(X(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), Y(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), \tilde{t}).$$

В достаточно малой окрестности точки  $(\eta, \xi)$  правые части этих равенств можно линеаризовать по малому  $(\tau - \tau(\eta, \xi, t))$ . Учитывая, что по определению  $\tau(\eta, \xi, t)$  имеем тождественно  $X(\tilde{x}, t, t - \tau(\eta, \xi, t)) = \eta$ ,  $Y(\tilde{x}, t, t - \tau(\eta, \xi, t)) = \xi$ , получаем

$$X(\tilde{x}, t, t - \tau) = \tilde{x} + \int_{t-\tau(\eta, \xi, t)}^t d\tilde{t} w(X(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), Y(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), \tilde{t})$$

$$+ \left\{ w_+ (\tilde{x}, t - \tau(\eta, \xi, t)) + \int_{t-\tau(\eta, \xi, t)}^t d\tilde{t} \frac{d}{d\tau} w(X(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), Y(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), \tilde{t}) \right\} [\tau - \tau(\eta, \xi, t)]$$

$$\equiv \eta + W(\tilde{x}, t - \tau(\eta, \xi, t)) [\tau - \tau(\eta, \xi, t)], \quad (13.4)$$

где

$$W(\tilde{x}, t - \tau) \equiv w_+(\tilde{x}, t - \tau) + \int_{t-\tau}^t d\tilde{t} \frac{d}{d\tau} w(X(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), Y(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), \tilde{t}).$$

Аналогично,

$$Y(\tilde{x}, t, t - \tau) = \xi + U(\tilde{x}, t - \tau(\eta, \xi, t))[\tau - \tau(\eta, \xi, t)], \quad (13.5)$$

где

$$U(\tilde{x}, t - \tau) \equiv \hat{u}_+(\tilde{x}, t - \tau) + \int_{t-\tau}^t d\tilde{t} \frac{d}{d\tau} u(X(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), Y(\tilde{x}, \tilde{t}, t - \tau), \tilde{t}), \quad \hat{u}_+ = u_+ - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Соотношения (13.4), (13.5) обобщают (4.18) на нестационарный случай. Полагая теперь, что  $(\eta, \xi)$  принадлежит малой окрестности точки  $(x, y)$  и выбрав соответствующим образом  $\tau_* = \tau_*(x, y)$ , выразим  $\eta, \xi$  в функции от  $x, y, \tilde{x}, t$ :  $\eta = \eta(\tau_*(x, y), \tilde{x}, t)$ ,  $\xi = \xi(\tau_*(x, y), \tilde{x}, t)$ . Совершая затем деформацию контура интегрирования по  $\tau$  в (13.2) так же, как в §4.3, получаем вихревую компоненту поля скорости в виде

$$v_i^v(x, y, t) = \frac{i}{4} \varepsilon_{ik} \partial_k \int_{-A}^{+A} d\tilde{x} \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau M(\tilde{x}, t - \tau), \quad \tau_{\pm} = \tau_1 + i\tau_2, \quad (13.6)$$

где

$$\tau_1 = \tau(\eta, \xi, t) + V^{-2}(\eta, \xi, t)[W(\eta, \xi, t)(x - \eta) + U(\eta, \xi, t)(y - \xi)], \quad (13.7)$$

$$\tau_2 = V^{-2}(\eta, \xi, t) |U(\eta, \xi, t)(x - \eta) - W(\eta, \xi, t)(y - \xi)|, \quad V^2 = W^2 + U^2, \quad (13.8)$$

и для краткости обозначено  $W(\tilde{x}, t - \tau(\eta, \xi, t)) \equiv W(\eta, \xi, t)$ ,  $U(\tilde{x}, t - \tau(\eta, \xi, t)) \equiv U(\eta, \xi, t)$ . Эта сокращённая запись допустима, так как координаты  $(\eta, \xi)$  элемента газа в момент времени  $t$  однозначно определяют точку его пересечения с фронтом:  $\tilde{x} = \tilde{x}(\eta, \xi, t)$ . Поскольку  $\eta, \xi$ , в свою очередь, подразумеваются здесь как функции  $\eta = \eta(\tau_*(x, y), \tilde{x}, t)$ ,  $\xi = \xi(\tau_*(x, y), \tilde{x}, t)$ , выражения (13.7), (13.8) определяют  $\tau_{1,2}$  как функции от  $x, y, \tilde{x}, t$ .

Заметим, наконец, что поскольку дисперсионное соотношение для потенциальной компоненты является следствием одних лишь условий (а)–(с), оно справедливо в прежнем виде (4.30) в каждый момент времени  $t$ . Для того чтобы корректно выполнить предельный переход  $A \rightarrow \infty$ , как и в §4.5, вводим в (13.6) промежуточную регуляризацию интеграла по  $\tilde{x}$ . Значение вихревой компоненты на фронте получаем, полагая  $\tau_*(x, y) = 0$ , то есть

$\eta = \tilde{x}$ ,  $\xi = f(\tilde{x}, t)$ , в результате чего величины  $W, U$  сводятся к скорости сгоревшего газа на фронте:

$$W(\tilde{x}, t) = w_+(\tilde{x}, t), \quad U(\tilde{x}, t) = \hat{u}_+(\tilde{x}, t)$$

(крышечка над  $u_+$  означает скорость газа относительно фронта), а мастер-уравнение получается в виде

$$2(\omega_-)' + (1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ [\omega] - \frac{i}{4} e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu r} \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau M(\tilde{x}, t - \tau) \right\}'_{\mu=0+} = 0, \quad (13.9)$$

где  $r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - f(\tilde{x}, t))^2}$ ,

$$\tau_1 = \frac{1}{\hat{v}_+^2(\tilde{x}, t)} [w_+(\tilde{x}, t)(x - \tilde{x}) + \hat{u}_+(\tilde{x}, t)(y - f(\tilde{x}, t))], \quad (13.10)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\hat{v}_+^2(\tilde{x}, t)} |\hat{u}_+(\tilde{x}, t)(x - \tilde{x}) - w_+(\tilde{x}, t)(y - f(\tilde{x}, t))|, \quad \hat{v}_+^2 = w_+^2 + \hat{u}_+^2, \quad (13.11)$$

$e_k = \varepsilon_{2k} + i\varepsilon_{1k}$  и подразумевается, что  $y$  в последнем члене мастер-уравнения полагается равным  $f(x, t)$  после частного дифференцирования  $\partial/\partial x_k$ , но перед дифференцированием по  $x$ , обозначенного штрихом.

Как видно из уравнения (13.9), вся зависимость структуры пламени от его предыдущей эволюции содержится в функции  $M(\tilde{x}, t - \tau)$ , которая по этой причине называется ядром памяти.

### §13.2. Неустойчивость Ландау–Дарье

Рассмотрим классическую проблему устойчивости бесконечно тонкого плоского пламени [67–69]. Для этого достаточно линеаризовать мастер-уравнение и уравнение эволюции. В линейном приближении имеем  $N = 1$ , а завихрённость (2.9) с  $v_-^n = 1$ ,  $\mathcal{L}_\sigma = 0$  принимает вид

$$\sigma_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta} \left( \frac{\partial w_-}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \right).$$

Подставляя это в (13.6), получаем линеаризованную вихревую компоненту скорости

$$v_i^v = -\frac{i(\theta - 1)}{4} \varepsilon_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|x-\tilde{x}|} \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau \left( \frac{\partial w_-}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \right) \right\}'_{\mu=0+}. \quad (13.12)$$

Поскольку подынтегральное выражение здесь уже является величиной первого порядка малости,  $\tau_{\pm}$  достаточно вычислить для плоского фронта  $y = f = 0$ :

$$\tau_{\pm} = \frac{y}{\theta} \pm i \frac{|x - \tilde{x}|}{\theta}. \quad (13.13)$$

Рассмотрим периодическое по  $x$  возмущение пламени

$$f(x, t), u_-(x, t), w_-(x, t) \sim e^{ikx + \nu t}, \quad (13.14)$$

где  $k$  – волновое число, а  $\nu$  – инкремент возмущения. Поскольку мастер-уравнение комплексно, комплексная форма возмущения может быть использована при условии, что все изначально вещественные функции подставляются в него в виде, не содержащем явно мнимую единицу (альтернативный способ вычислений описан ниже в §14.1). Для того чтобы найти  $v_i^v$ , необходимо вычислить функции

$$I_k(x, y, t, \mu) = \frac{\partial I(x, y, t, \mu)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2,$$

где

$$I(x, y, t, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|x-\tilde{x}|} \int_{y/\theta - i|x-\tilde{x}|/\theta}^{y/\theta + i|x-\tilde{x}|/\theta} d\tau e^{ik\tilde{x} + \nu(t-\tau)}.$$

Непосредственное интегрирование даёт

$$I = \frac{i}{\nu} e^{ikx + \nu t - \nu y/\theta} \left\{ \frac{1}{-i\mu + k + \nu/\theta} - \frac{1}{-i\mu + k - \nu/\theta} + \frac{1}{i\mu + k + \nu/\theta} - \frac{1}{i\mu + k - \nu/\theta} \right\}.$$

Выполняя дифференцирования по  $x, y$ , переходя к пределу  $\mu = 0+$  и полагая затем  $y = 0$ , получаем

$$I_1(x, 0, t, 0+) = \frac{4}{\theta} e^{ikx + \nu t} \frac{k}{k^2 - \nu^2/\theta^2}, \quad I_2(x, 0, t, 0+) = \frac{4i}{\theta} e^{ikx + \nu t} \frac{\nu/\theta}{k^2 - \nu^2/\theta^2}. \quad (13.15)$$

Используя эти результаты в (13.12), находим

$$w_+^v = \frac{\nu/\theta}{k^2 - \nu^2/\theta^2} \frac{(\theta - 1)}{\theta} (\nu w_- + ik\nu f), \quad (13.16)$$

$$u_+^v = \frac{ik}{k^2 - \nu^2/\theta^2} \frac{(\theta - 1)}{\theta} (\nu w_- + ik\nu f). \quad (13.17)$$

Для того чтобы представить эти выражения в явно вещественном виде, достаточно написать

$$w_+^v = -\frac{\sigma_+ \nu/\theta}{k^2 - \nu^2/\theta^2}, \quad u_+^v = -\frac{\sigma'_+}{k^2 - \nu^2/\theta^2}.$$

Далее, в операторе  $\hat{\mathcal{H}}$  также достаточно положить  $f = 0$ , в результате чего он сводится к оператору Гильберта  $\hat{H}$ , который согласно (А.13) действует на гармонические функции мультипликативно:

$$\hat{H} \exp(ikx) = i\chi(k) \exp(ikx). \quad (13.18)$$

Таким образом, мастер-уравнение (13.9) принимает вид

$$2(\omega_-)' + \left(1 + i\hat{H}\right) \left\{ [\omega] + \frac{\sigma'_+ + i\sigma_+\nu/\theta}{k^2 - \nu^2/\theta^2} \right\}' = 0. \quad (13.19)$$

Отделяя в нём вещественную и мнимую части, получаем

$$2(u_-)' + \left\{ [u] - \hat{H}[w] + \frac{\sigma'_+ - \hat{H}\sigma_+\nu/\theta}{k^2 - \nu^2/\theta^2} \right\}' = 0, \quad (13.20)$$

$$(w_-)' = \hat{H}(u_-)'. \quad (13.21)$$

Последний член в (13.20) удобно упростить следующим образом:

$$\frac{\sigma'_+ - \hat{H}\sigma_+\nu/\theta}{k^2 - \nu^2/\theta^2} = \frac{ik\sigma_+ - i\chi(k)\sigma_+\nu/\theta}{(|k| - \nu/\theta)(|k| + \nu/\theta)} = \frac{i\chi(k)\sigma_+}{|k| + \nu/\theta}.$$

Наконец, подставляя  $\sigma_+ = -i(\theta - 1)(\chi(k)\nu^2 f + k\nu f)/\theta$ , а также линеаризованные условия скачка скорости и уравнение эволюции

$$[u] = \theta - 1, \quad [w] = -f'(\theta - 1), \quad u_- - \frac{\partial f}{\partial t} = 1, \quad (13.22)$$

приходим к уравнению

$$\frac{\theta + 1}{\theta} \nu^2 + 2\nu|k| - (\theta - 1)k^2 = 0. \quad (13.23)$$

Это не что иное, как соотношение Ландау–Дарье [69], определяющее зависимость инкремента возмущения от волнового числа и коэффициента теплового расширения газа

$$\nu = \frac{\theta}{\theta + 1} \left( \sqrt{1 + \theta - \frac{1}{\theta}} - 1 \right) |k|. \quad (13.24)$$

Из проведённого вычисления может быть сделан вывод о том, что необходимости в промежуточной регуляризации в рассматриваемом случае на самом деле нет, если результат несобственного интегрирования по  $\tilde{x}$  понимать в смысле обобщённых функций. Действительно, тогда от интегрирования по  $|\tilde{x}| \rightarrow \infty$  в выражениях (13.15) появятся члены, пропорциональные  $\delta(k + \nu/\theta)$  и  $\delta(k - \nu/\theta)$ . Они, однако, несущественны с физической

точки зрения, так как являются результатом предположения о строгой монохроматичности возмущения пламени. В реальности любое возмущение является волновым пакетом, содержащим континуум значений волнового числа  $k$ . Другими словами, физические решения  $f(x, t)$  получаются интегрированием монохроматических волн по некоторому конечному интервалу  $\Delta k$  волновых чисел. При этом интегрировании вклады, включающие  $\delta(k \pm \nu/\theta)$  исчезают, поскольку  $\nu = \pm k\theta$  не являются корнями соотношения Ландау–Дарье.

### §13.3. Уравнение Сивашинского–Клавена

Покажем, что в третьем порядке разложения по  $(\theta - 1)$  мастер-уравнение (13.9) сводится к нестационарному уравнению Сивашинского–Клавена [107]. Для проведения этого асимптотического разложения учитываем, что длина волны обрезания неустойчивых мод  $\lambda_c = O(\alpha^{-1})$ , вследствие чего при дифференцировании по  $x$  порядок малости любой функции, описывающей пламя, возрастает на единицу. С другой стороны, согласно (13.24) инкремент возмущения при  $\alpha \ll 1$  есть  $\nu = k\alpha/2 = O(\alpha^2)$ , так что дифференцирование по времени повышает порядок малости функции на два. Из уравнения эволюции поэтому следует, что  $u_- = 1 + O(\alpha^2)$ , а из дисперсионного соотношения (4.35) для течения холодного газа – что и  $w_- = O(\alpha^2)$ . Как было показано в §6.2, в приближении Сивашинского–Клавена оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  сводится к оператору Гильберта. Поэтому вещественная и мнимая части уравнения (13.9) легко отделяются:

$$2(u_-)' + \left\{ [u] - \hat{H}[w] + (\varepsilon_{1k}\hat{H} - \varepsilon_{2k}) \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau M(\tilde{x}, t - \tau) \right\}' = 0, \quad (13.25)$$

$$(w_-)' = \hat{H}(u_-)'. \quad (13.26)$$

В соответствии с выводами §13.2 здесь для простоты не введена промежуточная регуляризация интеграла по  $\tilde{x}$  и подразумевается, что интегрирование по бесконечно удалённым  $\tilde{x}$  не даёт вклада в смысле обобщённых функций. Для вычисления интегралов  $\partial_k \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau M \equiv J_k$  функция  $M(\tilde{x}, t)$  требуется с учётом членов  $O(\alpha^4)$ :

$$M = \sigma_+ = -(\theta - 1) \left( \dot{f}' + f' f'' \right), \quad \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Поскольку это выражение уже  $O(\alpha^4)$ ,  $\tau_{\pm}$  могут быть взяты в виде (13.13) с  $\theta = 1$ . Таким образом, производя дифференцирование по  $x, y$  и полагая  $y = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= i\chi(x - \tilde{x}) \{ \sigma_+(\tilde{x}, t - i|x - \tilde{x}|) + \sigma_+(\tilde{x}, t + i|x - \tilde{x}|) \}, \\ J_2 &= \{ \sigma_+(\tilde{x}, t - i|x - \tilde{x}|) - \sigma_+(\tilde{x}, t + i|x - \tilde{x}|) \}. \end{aligned}$$

Покажем, что мнимые члены в аргументе  $\sigma_+$  можно отбросить. Для этого замечаем, что в рамках разложения по  $\alpha$  зависимость  $\sigma_+$  от  $i|x - \tilde{x}|$  может вычисляться асимптотически как

$$\sigma_+(\tilde{x}, t - i|x - \tilde{x}|) = \sigma_+(\tilde{x}, t) - i|x - \tilde{x}| \dot{\sigma}_+(\tilde{x}, t) - \frac{1}{2}(x - \tilde{x})^2 \ddot{\sigma}_+(\tilde{x}, t) + \dots$$

Поэтому с нужной точностью имеем

$$J_1 = 2i\chi(x - \tilde{x})\sigma_+(\tilde{x}, t), \quad J_2 = 0,$$

и далее, используя формулу  $\partial\chi(x - \tilde{x})/\partial\tilde{x} = -2\delta(x - \tilde{x})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} J_1 &= -2i(\theta - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \chi(x - \tilde{x}) \left( \dot{f}' + f' f'' \right) (\tilde{x}, t) \\ &= -4i(\theta - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \delta(x - \tilde{x}) \left( \dot{f} + \frac{f'^2}{2} \right) (\tilde{x}, t) = -4i(\theta - 1) \left( \dot{f} + \frac{f'^2}{2} \right) (x, t). \end{aligned}$$

Подстановка в (13.25), (13.26) и интегрирование по  $x$  даёт

$$2u_- + (\theta - 1) \left( \hat{H} f' + \dot{f} \right) = C_1(t), \quad (13.27)$$

$$2w_- + (\theta - 1) \left( -f' + \hat{H} \dot{f} \right) = C_2(t), \quad (13.28)$$

где “константы интегрирования”  $C_{1,2}(t)$  являются некоторыми функциями времени. Поскольку левая часть (13.28) нечётна по  $x$ , имеем  $C_2 \equiv 0$ . Комбинируя эти выражения с уравнением эволюции, написанным как

$$u_- - \dot{f} - f' w_- = 1 + \frac{f'^2}{2},$$

получаем замкнутое уравнение для функции  $f(x, t)$

$$\frac{\theta + 1}{2} \dot{f} + \frac{\theta}{2} f'^2 + C(t) = -\frac{\theta - 1}{2} \hat{H} f', \quad (13.29)$$

где  $C(t) = 1 - C_1(t)/2$ . Функцию  $C(t)$  можно найти усреднением полученного уравнения вдоль фронта:

$$C(t) = -\frac{\theta + 1}{2}\langle \dot{f} \rangle - \frac{\theta}{2}\langle f'^2 \rangle.$$

Уравнение (13.29) без члена  $C(t)$  было получено Сивашинским и Клавенем [107]. Необходимость включения в него слагаемого  $C(t)$  была показана в работе [118]. Учёт эффектов конечной ширины добавит в него член, пропорциональный  $\lambda_c f''$ .

Отметим, что в данном приближении отсутствует эффект памяти: (13.29) не изменится, если в мастер-уравнении заменить  $M(\tilde{x}, t - \tau)$  на  $M(\tilde{x}, t)$ . Это обстоятельство связано с “медленностью” динамики пламени при  $\alpha \ll 1$ . Эффект памяти, однако, появляется уже в следующем приближении.

#### §13.4. Пламя в переменном поле тяжести

В зависимости от направления распространения пламени в вертикальной трубе поле тяжести может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее действие на развитие неустойчивости Ландау–Дарье. Важнейшим применением линейной теории распространения пламени в переменном поле тяжести является описание влияния на него длинных звуковых волн [87, 181]. Уравнение для положения фронта в этом случае было предложено Маркштейном без последовательного вывода. Чтобы получить его строго, рассмотрим вертикальное распространение пламени в поле тяжести, ускорение которого  $g(t)$  является периодической функцией времени. Согласно формуле (4.42) эффект поля тяжести описывается в мастер-уравнении бароклиным вкладом в завихрённость

$$\Delta\sigma_+ = -\frac{(\theta - 1)}{\theta N}g(t)f'(x, t). \quad (13.30)$$

Если периодическое поле тяжести подавляет неустойчивость Ландау–Дарье, приводя к слабонелинейному периодическому движению пламени, то в качестве элементарного возмущения естественно выбирать гармоническое, а не экспоненциально растущее со временем. Соответственно, произвольное решение ищется в виде разложения Фурье

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk f(k, \omega) e^{ikx - i\omega t}. \quad (13.31)$$

Оказывается удобным отдельно ввести Фурье-разложение функции  $G(x, t) \equiv g(t)f'(x, t)$ :

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk G(k, \omega) e^{ikx - i\omega t}. \quad (13.32)$$

Ввиду наличия в данной задаче независимых континуумов частот и волновых чисел, для корректного вычисления вихревой моды необходима промежуточная регуляризация интеграла по  $\tilde{x}$ . Для физических применений достаточно считать, что Фурье-образы  $f(k, \omega)$ ,  $G(k, \omega)$ , рассматриваемые как функции частоты  $\omega$ , исчезают вне широкого, но конечного интервала  $|\omega| \leq \omega_0$ . Тогда для вычисления предела  $\mu \rightarrow 0+$  в мастер-уравнении (13.9), выбираем  $\mu > \omega_0/\theta$  и производим для каждой моды  $(k, \omega)$  те же вычисления, что и в §13.2. Продолжая результат к  $\mu = 0+$  и интегрируя по всем модам, получаем

$$w_+^v = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk e^{ikx - i\omega t} \frac{\theta - 1}{i\theta} \frac{\omega/\theta}{k^2 + \omega^2/\theta^2} \{(-i\chi(k)\omega^2 + k\omega)f(k, \omega) + G(k, \omega)\},$$

$$u_+^v = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk e^{ikx - i\omega t} \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{ik}{k^2 + \omega^2/\theta^2} \{(-i\chi(k)\omega^2 + k\omega)f(k, \omega) + G(k, \omega)\}.$$

Естественно, что первые члены подынтегральных выражений получаются из выражений (13.16), (13.17) заменой  $\nu \rightarrow -i\omega$ . Как и в задаче Ландау–Дарье, мастер-уравнение даёт два вещественных уравнения

$$2(u_-)' + \left\{ [u] - \hat{H}[w] - u_+^v + \hat{H}w_+^v \right\}' = 0, \quad (w_-)' = \hat{H}(u_-)'$$

Подставляя сюда полученные выражения для  $w_+^v$ ,  $u_+^v$  и исключая  $w_-$ ,  $u_-$  с помощью (13.22), приходим к уравнению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk \frac{e^{ikx - i\omega t}}{\omega/\theta + ik} \left\{ \left[ \frac{\theta + 1}{\theta} \omega^2 + 2i\omega|k| + (\theta - 1)k^2 \right] kf(k, \omega) + \frac{\theta - 1}{\theta} ik\chi(k)G(k, \omega) \right\} = 0.$$

Действуя на него оператором

$$\left( \frac{i}{\theta} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \int dx$$

и используя определения (13.31), (13.32), приходим к уравнению Маркштейна

$$\frac{\theta + 1}{\theta} \ddot{f} - 2\hat{H}\dot{f}' + (\theta - 1)f'' - \frac{\theta - 1}{\theta} g(t)\hat{H}f' = C(t), \quad (13.33)$$

в котором функция  $C(t)$  может быть найдена усреднением (13.33) вдоль фронта. Это уравнение играет центральную роль в изучении обычного и параметрического резонансов пламени в акустическом поле [87, 181].

### §13.5. Оболочечное описание двумерной турбулентности

Уравнение для распределения скорости газа, вполне аналогичное мастер-уравнению (13.9), имеет место и для двумерных течений газа, плотность которого постоянна по всему его объёму. Рассмотрим развитый турбулентный поток газа единичной плотности между двумя параллельными стенками, расположенными на расстоянии  $b$ , одна из которых движется относительно другой со скоростью  $V$ . Как и выше, система координат выбирается так, что уравнения стенок суть  $x = 0$  (неподвижная) и  $x = b$  (подвижная). Далее, выполнение граничного условия  $v_x \equiv w = 0$  на стенках гарантируется отражением течения относительно оси  $y$  и периодическим его продолжением вдоль оси  $x$  (см. §4.1). Предполагается, что число Рейнольдса  $Re = bV/\nu \gg 1$ , а также что расстояние между стенками много больше ширины вязкого подслоя,  $b \gg \nu/v_*$ . Здесь параметр скорости  $v_*$  определён силой трения  $F_d$ , действующей на единицу площади стенки, согласно  $F_d = v_*^2$ . Тогда течение газа может рассматриваться как идеальное практически во всем его объёме.

Ввиду постоянства плотности газа по всему объёму, в качестве поверхности, заменяющей фронт пламени и называемой контрольной поверхностью, может быть выбрано любое поперечное сечение канала, например, плоскость  $y = 0$ . Это, в свою очередь, позволяет более просто произвести необходимые преобразования последнего слагаемого в выражении (4.10), поскольку аналитическое продолжение можно производить непосредственно по продольной переменной  $\tilde{y}$ . Пусть, как и выше,  $X(\eta, \tau, t)$ ,  $Y(\eta, \tau, t)$  обозначают  $x$ - и  $y$ -координаты в момент времени  $t$  элемента газа, который пересёк контрольную поверхность в точке  $(\eta, 0)$  в момент времени  $\tau$ . Тогда последний интеграл в (4.10) может быть представлен в виде

$$\int_{-A}^A d\tilde{x} \int_0^A d\tilde{y} \sigma[\eta(\tilde{x}, \tilde{y}, t), 0, \tau(\tilde{x}, \tilde{y}, t)] \ln \left\{ (x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 \right\}^{1/2}, \quad (13.34)$$

где функции  $\{\eta(\tilde{x}, \tilde{y}, t), \tau(\tilde{x}, \tilde{y}, t)\}$  являются решениями уравнений

$$X(\eta, \tau, t) = \tilde{x}, \quad Y(\eta, \tau, t) = \tilde{y}. \quad (13.35)$$

Это решение существует для любой точки  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , исключая множество меры нуль  $\tilde{y} = 2bn$ ,  $n \in Z$ , поскольку средняя скорость газа положительна вне этого множества. Оно также единственно, поскольку различные траектории не пересекаются. Как и в §4.3, особенно

стями подынтегрального выражения, рассматриваемого как функция комплексной переменной  $\tilde{y}$ , являются точки ветвления логарифма

$$y_+ = y + i|x - \tilde{x}|, \quad y_- = y - i|x - \tilde{x}|. \quad (13.36)$$

Деформация контура интегрирования по  $\tilde{y}$  как на Рис. 10 (с заменой  $\tau \rightarrow \tilde{y}$ ) приводит к следующему выражению для вихревой компоненты скорости

$$v_i \stackrel{\circ}{=} \frac{i}{4} \varepsilon_{ik} \partial_k \int_{-A}^A d\tilde{x} \int_{y_-}^{y_+} d\tilde{y} \sigma[\eta(\tilde{x}, \tilde{y}, t), 0, \tau(\tilde{x}, \tilde{y}, t)].$$

Предел при  $A \rightarrow \infty$  этого выражения может быть взят после введения промежуточной регуляризации в соответствии с §4.5. Далее, дисперсионное соотношение для потенциальной компоненты скорости имеет в точности тот же вид, что и в §4.4, в формулах которого следует положить  $f \equiv 0$ , соответственно чему оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  сводится к оператору Гильберта  $\hat{H}$ . Таким образом, ограничения на плоскость  $y = 0$  полей компонент скорости,  $v_x(x, 0, t) \equiv w(x, t)$ ,  $v_y(x, 0, t) \equiv u(x, t)$  и завихрённости  $\sigma(x, 0, t) \equiv \sigma(x, t)$  удовлетворяют следующему уравнению

$$(1 - i\hat{H}) \left[ u - iw + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|\tilde{x}-x|} \left\{ \sigma[\eta(\tilde{x}, i|x-\tilde{x}|, t), \tau(\tilde{x}, i|x-\tilde{x}|, t)][1 + \chi(x-\tilde{x})] - \sigma[\eta(\tilde{x}, -i|x-\tilde{x}|, t), \tau(\tilde{x}, -i|x-\tilde{x}|, t)][1 - \chi(x-\tilde{x})] \right\} \right]_{\mu=0+}' = 0,$$

где функция  $\eta(\tilde{x}, y_{\pm}, t)$  является решением уравнения

$$\eta + y_{\pm} \frac{w(\eta, t)}{u(\eta, t)} = \tilde{x}, \quad y_{\pm} \equiv y \pm i|x - \tilde{x}|,$$

а функция  $\tau(\tilde{x}, y_{\pm}, t)$  получается согласно

$$\tau(\tilde{x}, y_{\pm}, t) = t - \frac{y_{\pm}}{u[\eta(\tilde{x}, y_{\pm}, t), t]}.$$

Это уравнение позволило получить строгую классификацию асимптотических профилей средней скорости двумерных турбулентных течений [A16].

**Вывод**

Выполненное в этой главе построение даёт расширение оболочечного описания на нестационарные ламинарные двумерные пламёна. Влияние предшествующей эволюции пламени на его состояние в данный момент времени оказывается закодированным в единственной функции координат и времени – ядре памяти. При исследовании линейных проблем – устойчивости стационарных конфигураций пламени или его поведения в заданном внешнем поле – эта функция определяется самой постановкой задачи. Поэтому в этих случаях, а также в низших порядках разложения по  $(\theta - 1)$ , мастер-уравнение решается непосредственно и в точности воспроизводит все известные классические результаты теории распространения пламени.

#### 14. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ V-ПЛАМЕНИ В ТРУБЕ [A9]

Как известно из экспериментов с открытыми V-пламёнами, при условии достаточной однородности потока газа, натекающего на стержень, фронт пламени оказывается практически плоским по обе его стороны [182–185]. С другой стороны, пламёна, удерживаемые в трубе, заметно искривлены (см., например, Рис. 6(а), Рис. 18). В то же время, как было показано в §8.4, плоское V-пламя является решением газодинамических уравнений в ведущем порядке  $1/U$ -разложения (тривиальное решение, соответствующее  $w_0 = 0$ ). Эти факты указывают на то, что плоское V-пламя в трубе должно быть неустойчивым. В настоящей главе показывается, что это действительно так.

##### §14.1. Линеаризация основных уравнений

Невозмущённое пламя описывается решением  $f(x) = s|x|$ ,  $u_-(x) = U$ ,  $w_-(x) = 0$ , где параметр наклона  $s > 0$  связан со скоростью натекающего газа  $U$  соотношением  $U = \sqrt{1 + s^2}$ . Уравнение, описывающее эволюцию малых возмущений пламени, получается линеаризацией точного мастер-уравнения (13.9) в окрестности этого решения. Зависимость от времени можно по-прежнему предполагать экспоненциальной, но ввиду пространственной неоднородности V-пламени зависимость от координаты  $x$  теперь должна

определяться в процессе решения. Напишем искомые функции в виде

$$\delta f(x, t) = \tilde{f}(x)e^{\nu t}, \quad \delta w_-(x, t) = \tilde{w}(x)e^{\nu t}, \quad \delta u_-(x, t) = \tilde{u}(x)e^{\nu t}, \quad (14.1)$$

где  $\nu$  есть комплексная постоянная. Для того чтобы избежать смешения мнимых единиц, входящих в  $\nu$  и в мастер-уравнение, удобно воспользоваться следующим формальным приёмом. Сохраняя символ  $i$  для мнимой единицы в мастер-уравнении, мнимую единицу в  $\nu$  обозначим через  $j$ :

$$\nu = \nu_1 + j\nu_2,$$

где  $\nu_{1,2}$  вещественны. Соответственно этому амплитуды  $\tilde{f}, \tilde{w}, \tilde{u}$  также должны считаться комплексными относительно  $j$ . При этом вещественное произведение  $(ij)$  не полагается равным  $(+1)$  или  $(-1)$ , чтобы в конце вычислений отделить выражения, вещественные или мнимые по отношению к обеим единицам. Поскольку стационарное решение является кусочно-постоянным, линеаризация мастер-уравнения даёт

$$2\tilde{\omega}' + \left(1 + i\hat{\mathcal{H}}\right) \left\{ [\tilde{\omega}] - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|x-\tilde{x}|} \hat{M}_\alpha(\tilde{x}) \tilde{\xi}_\alpha(\tilde{x}) \frac{\omega_+}{v_+^2} \exp\left(-\frac{\nu r}{v_+} e^{-i\varphi}\right) \chi(x-\tilde{x}) \right\}'_{\mu=0+} = 0, \quad (14.2)$$

где  $\{\tilde{\xi}_\alpha\} = (\tilde{f}, \tilde{w}, \tilde{u})$ ,  $\hat{M}_\alpha(\tilde{x})$  есть дифференциальный оператор, получаемый линеаризацией функции  $M(\tilde{x}, t)$  с последующей заменой  $\partial/\partial t \rightarrow \nu$ ;  $\varphi \in [-\pi, +\pi]$  есть угол между векторами  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}_+$ , определённый как положительный, если вращение от  $\mathbf{v}_+$  к  $\mathbf{r}$  происходит по часовой стрелке. Поскольку речь идёт не о произвольном возмущении V-пламени, а о его собственной неустойчивости, характерной длиной волны возмущения по оси  $x$  является ширина трубы. Ввиду того, что на практике она намного превосходит ширину фронта, пламя можно рассматривать как бесконечно тонкое. Тогда линеаризованные скачки скорости на фронте принимают вид

$$[\tilde{u}(x)] = -\frac{(\theta-1)s\chi(x)\tilde{f}'(x)}{(1+s^2)^{3/2}}, \quad [\tilde{w}(x)] = -\frac{(\theta-1)\tilde{f}'(x)}{(1+s^2)^{3/2}}. \quad (14.3)$$

Для того чтобы линеаризовать ядро памяти, выражение для завихрённости (2.9) удобно переписать в виде, не содержащем вторых пространственных производных от  $f(x, t)$  (иначе в промежуточных вычислениях появляются плохо определённые выражения вида  $\chi(x)\delta(x)$ ). Для этого дифференцируем по  $x$  уравнение эволюции

$$u_- - \frac{\partial f}{\partial t} - f'w_- = N,$$

разрешаем результат относительно  $f''$  и подставляем в (2.9):

$$M = -(\theta - 1) \left[ \frac{\partial w_-}{\partial t} + f' \frac{\partial u_-}{\partial t} - u'_- \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}(w_-^2 + u_-^2)' \right]. \quad (14.4)$$

Линеаризуя это выражение, получаем

$$\hat{M}_\alpha \tilde{\xi}_\alpha(x) = -(\theta - 1) \left[ \nu \tilde{w}(x) + s\chi(x)\nu \tilde{u}(x) + \sqrt{1 + s^2} \tilde{u}'(x) \right]. \quad (14.5)$$

Наконец, линеаризация самого уравнения эволюции даёт

$$\tilde{u}(x) - s\chi(x)\tilde{w}(x) = \nu \tilde{f}(x) + \frac{s\chi(x)\tilde{f}'(x)}{\sqrt{1 + s^2}}. \quad (14.6)$$

Поскольку возмущённое течение удовлетворяет тем же граничным условиям на стенках трубы, что и стационарное, возмущение должно удовлетворять

$$\tilde{w}(0) = \tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{w}(\pm 1) = 0. \quad (14.7)$$

## §14.2. Вычисление вихревого вклада

Для того чтобы вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\mu|\tilde{x}-x|} \hat{M}_\alpha(\tilde{x}) \tilde{\xi}_\alpha(\tilde{x}) \frac{\omega_+}{v_+^2} \exp\left(-\frac{\nu r}{v_+} e^{-i\varphi}\right) \chi(x - \tilde{x}), \quad (14.8)$$

заметим, что

$$r v_+ e^{-i\varphi} = -i(z - \tilde{z})\omega_+, \quad \tilde{z} = \tilde{x} + is|\tilde{x}|.$$

Действительно, имеем  $|z - \tilde{z}| = r$ ,  $|\omega_+| = v_+$ , тогда как согласно определению угла  $\varphi$  он равен разности фаз комплексных функций  $w_+ + iu_+ = i\bar{\omega}_+$  и  $(z - \tilde{z})$ . Требуется рассмотреть два случая, когда переменная интегрирования пробегает части фронта с отрицательным и положительным  $f'$ , Рис. 57. Для  $x \in [0, 1]$  в случае  $\tilde{x} \in [-2n, -2n + 1]$ ,  $n \in Z$ , имеем

$$z - \tilde{z} = (x - \eta + 2n) + is(x - \eta),$$

где  $[0, 1] \ni \eta = \tilde{x} + 2n$ . Аналогично, в случае  $\tilde{x} \in [-1 - 2n, -2n]$ ,

$$z - \tilde{z} = (x - \eta + 2n) + is(x + \eta),$$

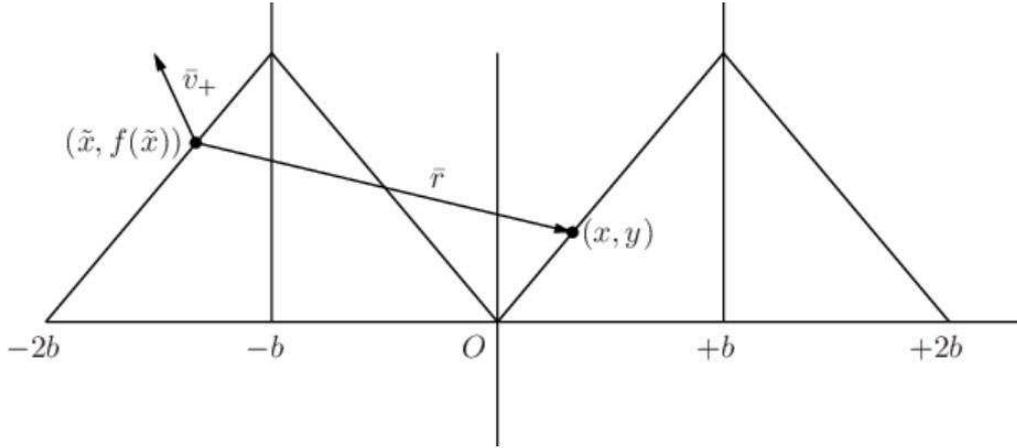


Рис. 57: К выводу уравнения (14.10).

где  $[-1, 0] \ni \eta = \tilde{x} + 2n$ . Экспонента в подынтегральном выражении в (14.8) принимает вид

$$\exp\left(-\frac{\nu r}{v_+} e^{-i\varphi}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\nu \bar{\omega}_0}{|\omega_0|^2} [-i(x - \eta + 2n) + s(x - \eta)]\right), & \eta \in [0, +1], \\ \exp\left(-\frac{\nu \omega_0}{|\omega_0|^2} [-i(x - \eta + 2n) + s(x + \eta)]\right), & \eta \in [-1, 0], \end{cases}$$

где

$$\omega_0 = U + (\theta - 1) \frac{1 + is}{\sqrt{1 + s^2}}.$$

Поскольку  $(x - \eta)$  конечно, регуляризирующий множитель  $e^{-\mu|\tilde{x} - x|}$  можно заменить на  $e^{-\mu 2|n|}$ .

Далее, несобственный интеграл по  $\tilde{x}$  может быть представлен как интеграл по  $\eta \in [-1, +1]$  от подынтегрального выражения, просуммированного по всем  $n$ . Поскольку функции  $\hat{M}_\alpha(\tilde{x})$ ,  $\omega_+(\tilde{x})$  являются периодическими по построению, это сводится к нахождению суммы ряда

$$I(\mu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\{2ni\kappa - 2|n|\mu\} \chi(x - \eta + 2n),$$

где

$$\kappa = \begin{cases} \nu/\omega_0, & \eta \in [0, +1], \\ \nu/\bar{\omega}_0, & \eta \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Учитывая, что  $|x - \eta| \leq 2$ , имеем

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \chi(x - \eta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\{2n(i\kappa - \mu)\} - \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\{2n(-i\kappa - \mu)\} \\ &= \chi(x - \eta) + [1 - \exp\{2(i\kappa - \mu)\}]^{-1} - [1 - \exp\{2(-i\kappa - \mu)\}]^{-1}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

В пределе  $\mu \rightarrow 0+$  получается

$$I(0+) = \chi(x - \eta) + [1 - \exp\{2i\kappa\}]^{-1} - [1 - \exp\{-2i\kappa\}]^{-1} = \chi(x - \eta) + i \operatorname{ctg} \kappa.$$

Соответствующие выражения для  $x \in [-1, 0]$  получаются с использованием общего свойства инвариантности мастер-уравнения при операции  $\overline{(x \rightarrow -x)}$ , то есть при инверсии  $x \rightarrow -x$ , совершаемой одновременно с комплексным сопряжением. При этом в соответствии с определением  $\bar{j}$ , последнее понимается как

$$\bar{i} = -i, \quad \bar{j} = j.$$

Подставляя эти результаты в (14.2), окончательно получаем линеаризованное уравнение для возмущения пламени

$$2\tilde{\omega}' + \frac{\theta - 1}{2} (1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ \frac{e^{i\kappa(x+is|x|)}}{\omega_0} \int_0^{+1} d\eta [\nu\tilde{w}(\eta) + s\nu\tilde{u}(\eta) + \sqrt{1+s^2}\tilde{u}'(\eta)] \right. \\ \left. \times e^{-i\kappa(1+is)\eta} [i \operatorname{ctg} \kappa + \chi(x - \eta)] - \frac{i + s\chi(x)}{(1+s^2)^{3/2}} \tilde{f}'(x) + \overline{(x \rightarrow -x)} \right\}' = 0, \quad (14.10)$$

где символ  $\overline{(x \rightarrow -x)}$  относится ко всему выражению в фигурных скобках.

В качестве проверки вычислений, а также для иллюстрации использования вспомогательной мнимой единицы  $j$ , покажем, что для свободного пламени ( $s = 0$ ) полученное уравнение сводится к соотношению Ландау–Дарье для инкремента возмущения. В этом случае имеем  $U = 1$ ,  $\omega_0 = \theta$ , и уравнение (14.10) упрощается до

$$2\tilde{\omega}' + \frac{\theta - 1}{2} (1 + i\hat{H}) \left\{ \frac{\nu}{\theta} e^{i\nu x/\theta} \int_{-1}^{+1} d\eta [\tilde{w}(\eta) + \tilde{f}'(\eta)] e^{-i\nu\eta/\theta} [i \operatorname{ctg} \left(\frac{\nu}{\theta}\right) + \chi(x - \eta)] - 2i\tilde{f}'(x) \right\}' \\ = 0, \quad (14.11)$$

где вклад  $\overline{(x \rightarrow -x)}$  учтён расширением области интегрирования по  $\eta$ , а линеаризованное уравнение эволюции сводится к

$$\tilde{u}(x) = \nu\tilde{f}(x). \quad (14.12)$$

Поскольку невозмущённое решение в данном случае однородно по  $x$ , решение линеаризованного уравнения можно искать в виде

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u} e^{jkx}, \quad \tilde{u} = \tilde{u}_1 + j\tilde{u}_2, \quad \text{и т.д.},$$

где волновое число  $k$  может принимать значения

$$k = \pi m, \quad m \in Z.$$

Тогда для интеграла по  $\eta$  в (14.11) имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} d\eta e^{jk\eta} e^{-i\nu\eta/\theta} \left[ i \cot\left(\frac{\nu}{\theta}\right) + \chi(x - \eta) \right] &= \frac{1}{jk - i\nu/\theta} \left\{ i \operatorname{ctg}\left(\frac{\nu}{\theta}\right) [e^{jk-i\nu/\theta} - e^{-jk+i\nu/\theta}] \right. \\ &\left. + 2e^{(jk-i\nu/\theta)x} - e^{-jk+i\nu/\theta} - e^{jk-i\nu/\theta} \right\} = \frac{2e^{(jk-i\nu/\theta)x}}{jk - i\nu/\theta}, \end{aligned}$$

где постоянные члены в фигурных скобках сократились в силу условия периодичности  $e^{2jk} = 1$ . Подставляя это в (14.11), получаем

$$2\tilde{\omega}' + (\theta - 1) \left( 1 + i\hat{H} \right) \left\{ \frac{\nu\tilde{w}(x) - ijk\theta\tilde{f}'(x)}{jk\theta - i\nu} \right\}' = 0.$$

Умножая это уравнение на  $(jk\theta - i\nu)$  и отделяя вещественную по  $i$  часть, находим

$$2jk\theta\tilde{u}' + 2\nu\tilde{w}' + (\theta - 1) \left\{ \nu\tilde{w}(x) + jk\theta\hat{H}\tilde{f}'(x) \right\}' = 0, \quad (14.13)$$

тогда как мнимая часть приводит к соотношению, эквивалентному

$$\tilde{w}' = \hat{H}\tilde{u}'$$

(которое также может быть получено непосредственно из условия потенциальности течения холодного газа  $(1 - i\hat{H})\tilde{\omega}' = 0$ ). Наконец, написав  $\tilde{u}' = jk\tilde{u}$ ,  $\tilde{f}' = jk\tilde{f}$  и выразив скорость газа через  $\tilde{f}$  с помощью (14.12), после деления на  $\theta|k|\tilde{f}$  приходим к соотношению Ландау–Дарье

$$\frac{\theta + 1}{\theta}\nu^2 + 2\nu|k| - (\theta - 1)k^2 = 0.$$

### §14.3. Анализ линеаризованного мастер-уравнения в пределе $s \gg 1$

#### А. Порядки основных величин

Применяя к уравнению (14.10) оператор  $(1 - i\hat{\mathcal{H}})$  получаем  $(1 - i\hat{\mathcal{H}})\tilde{\omega}' = 0$ , откуда обычным образом следует [см. (8.23)]

$$\tilde{w}(x) = \frac{1 - |x|}{s} \tilde{u}'(x). \quad (14.14)$$

Из этого равенства следует выполнение граничного условия (14.7) для  $\tilde{w}(1)$ , а также что условие  $\tilde{w}(0) = 0$  эквивалентно  $\tilde{w}'(0) = 0$ . Оно также позволяет легко определить относительные порядки искомых функций в рамках  $1/U$ -разложения. Условно полагая  $\tilde{u} = O(1)$ , из (14.14) находим  $\tilde{w} = O(1/s)$ , тогда как линеаризованное уравнение эволюции (14.6) показывает, что  $\tilde{f} = O(1)$ . Применяя эти оценки в уравнении (14.10), заключаем, что слагаемое  $(i + s\chi)\tilde{f}'/(1 + s^2)^{3/2}$  в фигурных скобках в ведущем порядке следует опустить. Это слагаемое представляет собой линеаризованный скачок скорости и в потенциальной теории Франкеля полностью определяет динамику пламени [134]. Тот факт, что его вклад пренебрежимо мал по сравнению со вкладом вихревого слагаемого означает, что поведение пламени при больших  $s$  не может быть корректно описано в рамках модели Франкеля.

*В. Уравнение для продольной компоненты скорости*

Запишем (14.10) в виде

$$2\tilde{\omega}' + \frac{\theta - 1}{2} (1 + i\hat{\mathcal{H}}) E' = 0, \quad (14.15)$$

$$E(x) \equiv \frac{e^{i\kappa(x+is|x|)}}{\omega_0} \int_0^{+1} d\eta \left[ \nu\tilde{w}(\eta) + s\nu\tilde{u}(\eta) + \sqrt{1 + s^2} \tilde{u}'(\eta) \right] \times e^{-i\kappa(1+is)\eta} [i \operatorname{ctg} \kappa + \chi(x - \eta)] + \overline{(x \rightarrow -x)}. \quad (14.16)$$

Чтобы выделить вклад  $O(1)$  из интегрального члена в уравнении (14.15) следует учесть, что действие оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  на чётные и нечётные функции порядка  $O(1)$  даёт величины  $O(s)$  и  $O(1)$ , соответственно [см. (С.10)]. Поэтому в разложении  $E(x)$  должны удерживаться вещественные чётные вклады не ниже  $O(1)$  и мнимые нечётные вклады не ниже  $O(1/s)$ . Для этого пишем

$$\omega_0 = \sqrt{1 + s^2} + (\theta - 1) \frac{1 + is}{\sqrt{1 + s^2}} = s \left[ 1 + \frac{i(\theta - 1)}{s} + \frac{\theta - 1/2}{s^2} \right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

и затем

$$e^{i\kappa(x-\eta) - \kappa s(|x|-\eta)} = e^{-\nu(|x|-\eta)} \left[ 1 + \frac{i\nu}{s}(x - \eta) + \frac{i\nu\alpha}{s}(|x| - \eta) + \frac{\nu\alpha}{s^2}(x - \eta) + \frac{\nu(\theta^2 - \theta + 1/2)}{s^2}(|x| - \eta) - \frac{\nu^2}{2s^2}(x - \eta)^2 - \frac{\nu^2\alpha^2}{2s^2}(x + \alpha|x| - 2\theta\eta)^2 \right].$$

Вещественный множитель  $[\nu\tilde{w} + s\nu\tilde{u} + \sqrt{1 + s^2\tilde{u}'}]$  можно заменить на  $s(\nu\tilde{u} + \tilde{u}')$ , а  $\omega_0^{-1} \cot(\nu/\omega_0) = 1/\nu + O(1/s^3)$ . Удобно также проинтегрировать член с  $\tilde{u}'$  по частям. В результате получается

$$E(x) = e^{\nu(1-|x|)}\tilde{u}(1) \left[ \alpha(1-|x|) + \frac{i\alpha x}{s}(1-\nu(|x|-1)) \right] - e^{-\nu|x|}\tilde{u}(0) \left[ 1 - \alpha|x| + \frac{i\alpha x}{s}(\nu + \alpha - \alpha\nu|x|) \right] + 2\tilde{u}(x)\theta(x) \left( 1 - \frac{i\alpha}{s} \right) - (\alpha + 1)e^{-\nu|x|} \int_0^1 d\eta \tilde{u}(\eta) e^{\nu\eta} \left( 1 + \frac{i\nu[x - \chi(x-\eta)]}{s} \right) + \overline{(x \rightarrow -x)},$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Выделение вещественной части уравнения (14.15) с помощью формулы (С.9) даёт

$$2\tilde{u}'(x) + (\theta - 1)|x|\operatorname{Re}E'(x) + s(\theta - 1)\chi(x)\operatorname{Im}E(|x|) = 0. \quad (14.17)$$

Заметим, что  $\operatorname{Im}E(0) = 0$ , и поэтому из последнего соотношения следует выполнение условия  $\tilde{u}'(0) = 0$ , то есть  $\tilde{w}(0) = 0$  [см. (14.7)]. Подставляя в (14.17) полученное выражение для  $E(x)$  и вводя новую неизвестную функцию  $g(x)$  согласно

$$\tilde{u}(x) = g(x)e^{-\nu|x|} \quad (14.18)$$

окончательно приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$(1 + \alpha|x|)g'(x) - (\alpha^2 + \alpha\nu|x| + \nu)g(x)\chi(x) + \alpha(\alpha + 1)\nu\chi(x) \int_0^{|x|} d\eta g(\eta) - \alpha^2 x g_0 = 0, \quad (14.19)$$

где  $g_0 \equiv g(0) = \tilde{u}(0)$  и было использовано тождество

$$\int_0^1 d\eta g(\eta)[\chi(|x| - \eta) + 1] = 2 \int_0^{|x|} d\eta g(\eta).$$

### С. Решение уравнения (14.19)

С точностью до аддитивной постоянной уравнение (14.19) эквивалентно следующему ОДУ, которое получается дифференцированием (14.19) по  $x$  [его достаточно рассматривать для  $x \in (0, 1)$ ]

$$(1 + \alpha x)g''(x) - (\alpha^2 + \alpha\nu x + \nu - \alpha)g'(x) + \alpha^2\nu g(x) - \alpha^2 g_0 = 0. \quad (14.20)$$

Его общее решение имеет вид

$$g(x) = \frac{g_0}{\nu} + h(x), \quad (14.21)$$

где  $h(x)$  удовлетворяет

$$(1 + \alpha x) h''(x) - (\alpha^2 + \alpha \nu x + \nu - \alpha) h'(x) + \alpha^2 \nu h(x) = 0. \quad (14.22)$$

Последнее уравнение может быть сведено к вырожденному гипергеометрическому уравнению, общее решение которого удобно представить в виде

$$h(x) = \gamma \left( x + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha \int_{\beta/\alpha}^{x+1/\alpha} dy y^{-\alpha-1} e^{\nu y}, \quad (14.23)$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  – произвольные постоянные. Для того чтобы (14.21) было решением исходного интегро-дифференциального уравнения (14.19), эти постоянные должны быть выбраны так, чтобы обратить в нуль постоянную, потерянную при переходе к уравнению (14.20).

Для выделения этой постоянной замечаем, что

$$(1 + \alpha x) h'(x) - (\alpha^2 + \alpha \nu x + \nu) h(x) + \alpha(\alpha + 1)\nu \int_0^x d\eta h(\eta) = \gamma \left[ \alpha e^{\nu/\alpha} - \nu \int_{\beta}^1 dy y^{-\alpha-1} e^{\nu y/\alpha} \right].$$

Собирая с помощью этой формулы аддитивные постоянные в (14.19), получаем

$$\gamma \left[ \alpha e^{\nu/\alpha} - \nu \int_{\beta}^1 dy y^{-\alpha-1} e^{\nu y/\alpha} \right] = (\alpha^2 + \nu) \frac{g_0}{\nu}. \quad (14.24)$$

С другой стороны, полагая  $x = 0$  в (14.21) и учитывая, что  $g_0 \equiv g(0)$ , приходим к условию

$$g_0 \left( 1 - \frac{1}{\nu} \right) + \gamma \int_{\beta}^1 dy y^{-\alpha-1} e^{\nu y/\alpha} = 0.$$

Исключение из последних двух уравнений произвольной амплитуды  $\gamma$  даёт

$$\alpha e^{\nu/\alpha} = \frac{\nu^2 - 2\nu - \alpha^2}{\nu - 1} \int_{\beta}^1 dy y^{-\alpha-1} e^{\nu y/\alpha}. \quad (14.25)$$

По данному  $\beta$  уравнение (14.25) определяет инкремент возмущения  $\nu$ , и как показывает численный анализ, определяет однозначно. В свою очередь, значениями этих параметров

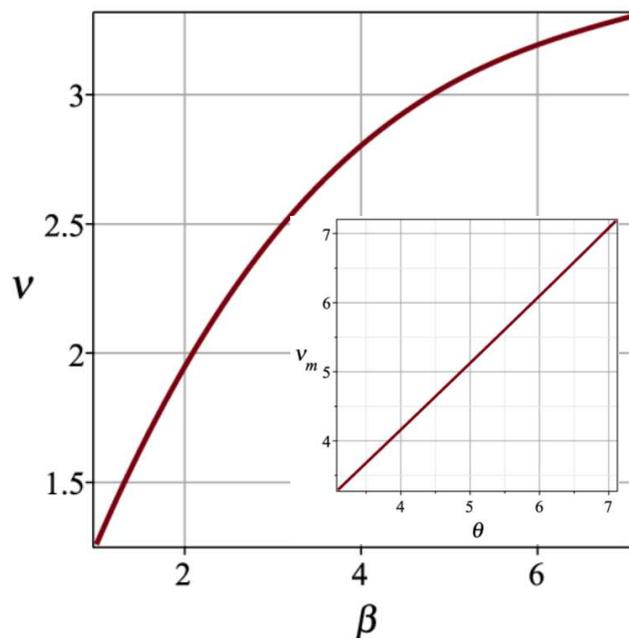


Рис. 58: Зависимость инкремента возмущения от параметра  $\beta$  для  $\theta = 3.1$ . Врезка: зависимость максимального значения инкремента от коэффициента теплового расширения. Используются естественные единицы.

фиксируется пространственный профиль возмущения по формулам (14.21), (14.23). Следовательно, решения параметризуются одним комплексным числом  $\beta$  (с точностью до амплитуды возмущения, которая остаётся произвольной). Численное решение уравнения (14.25) показывает, что при любом  $\theta > 1$  имеются решения с  $\text{Re } \nu > 0$ . А именно, при вещественном  $\beta > 1$  значения  $\nu$  также вещественны и положительны ( $\beta = 1$  соответствует тривиальному решению  $\tilde{u} = \tilde{f} \equiv 0$ ), а при  $\beta < 1$  у  $\nu$  появляется мнимая часть. Оказывается, далее, что  $\text{Re } \nu$  растёт при увеличении  $\beta$  от  $\beta = 1$  и достигает максимального значения  $\nu_m$  при некотором конечном  $\beta_m$ , где спектр вещественных  $\nu$  обрывается. Например, для  $\theta = 3.1$  имеем  $\nu_m = 3.293$ ,  $\beta_m = 7.1$ . Пример вещественного спектра приведён на Рис. 58. При комплексных  $\beta$  также существует континуум решений с  $\text{Re } \nu > 0$ .

### Вывод

Таким образом, при горении смеси в трубе конфигурация V-пламени, в которой фронт является плоским по обе стороны от удерживающей точки, оказывается неустойчивой. Этот вывод находится в полном согласии с экспериментом (Рис. 6, 18).

## 15. УСКОРЕНИЕ ЛАМИНАРНЫХ ПЛАМЁН В ГЛАДКИХ ОТКРЫТЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРУБАХ [A12]

Распространение пламени в трубах часто происходит с ускорением: видимая скорость пламени, то есть его скорость относительно неподвижной трубы возрастает со временем. Наблюдения показывают, что это явление и его основные характеристики существенно зависят как от состава смеси, так и от физических условий горения – ориентации трубы, граничных условий на её концах (закрытые или открытые концы), расположения точки поджига, шероховатости стенок трубы и наличия акустических возмущений [31–36]. Хотя точные условия появления ускорения пока неизвестны, можно утверждать, что каждый из перечисленных факторов важен в той мере, в какой он искривляет фронт пламени. Действительно, искривление фронта приводит к увеличению его площади, и следовательно, к увеличению скорости пламени. Например, в экспериментах по изучению перехода горения в детонацию смесь обычно поджигается вблизи закрытого конца трубы, имеющей достаточно шероховатые стенки или снабжённой серией колец [37, 38, 40–42, 77]. Хотя механизм этого *вынужденного* ускорения качественно ясен, его количественное описание отсутствует ввиду высокой иррегулярности пламени в указанных условиях.

Существенно иным является *спонтанное* ускорение ламинарного пламени. Оно не связано с шероховатостью стенок или запиранием потока продуктов горения, а имеет место в открытых трубах с гладкими стенками. Исторически спонтанное ускорение было открыто раньше, чем вынужденное, поскольку ему подвержено большинство пламён [77]. Количественное описание спонтанного ускорения ламинарного пламени оказалось возможным дать в рамках оболочечного подхода.

### §15.1. Экспериментальные предпосылки теоретического описания

Эксперимент показывает, что при заданном составе смеси спонтанное ускорение пламени зависит лишь от размеров трубы. В качестве примера на Рис. 59 приведены экспериментальные графики положения пламени как функции времени при его распространении в открытой трубе диаметром 5 см и длиной 5 м в различных метано-воздушных смесях [77]. Видно, что ускорение пламени сильно зависит от состава смеси, причём все кривые распадаются на две группы: траектории в смесях с концентрацией метана от 7.1%

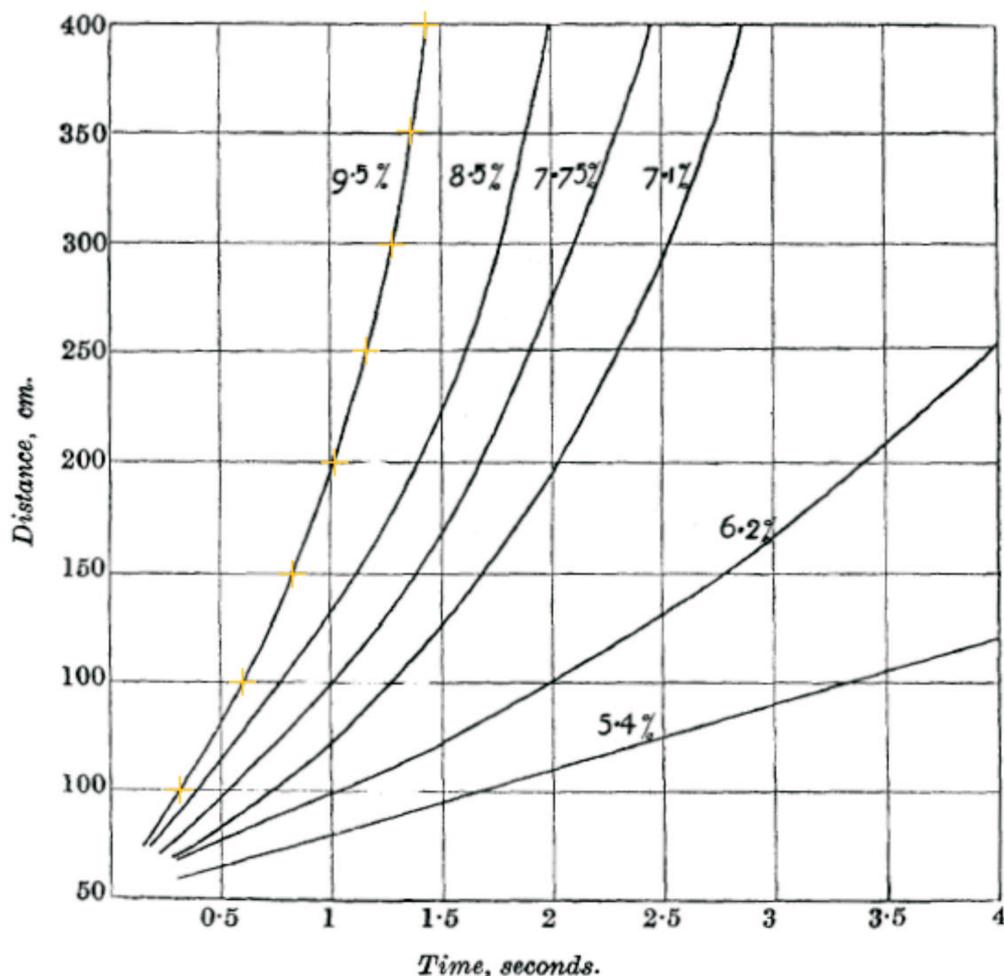


Рис. 59: Траектории ламинарных пламён в различных метано-воздушных смесях в открытой трубе диаметром 5 см и длиной 5 м. Воспроизведено с рисунка 1 работы [77]. Метки на кривой 9.5% – базисные точки для построения аппроксимирующего полинома в §15.5А.

до 9.5% сходны между собой и явно отделены от кривых для 6.2% и 5.4% метана. Этот факт невозможно объяснить, если предполагать единственность режима распространения. Действительно, для всех рассматриваемых пламён  $Fr \gg 1$ , и поскольку в пределе  $Fr \rightarrow \infty$  скорость пламени в горизонтальной трубе стремится к независящему от  $U_f$  пределу, все кривые на Рис. 59 должны были бы иметь одинаковый вид и располагаться вблизи кривой для 5.4% метана.

Уже в трубах такого сравнительно небольшого диаметра как 5 см скорость распространения пламени в результате ускорения многократно превосходит нормальную скорость. Например, пламя в смеси 7.1% метана имеет  $U_f = 22$  см/с, тогда как скорость его распро-

странения в трубе длиной 5 м возрастает от значения 50 см/с до 350 см/с. Это означает, что процесс спонтанного ускорения является сильнонелинейным.

Как показывают наблюдения [31, 77], в процессе движения ламинарного пламени по достаточно длинной трубе ( $L/b \gtrsim 50$ ) форма пламени меняется медленно, за исключением короткого периода иррегулярности, соответствующего прохождению пламенем определённой точки трубы (положение которой зависит от состава смеси), в течение которого пламя выглядит возмущённым. Медленность изменения формы пламени позволяет рассматривать спонтанное ускорение как квазистационарный процесс. Чтобы точно определить условие квазистационарности, введём в каждый момент времени неинерциальную систему отсчёта, которая движется относительно лабораторной системы со скоростью и ускорением, которые фронт пламени имеет в данный момент. Тогда квазистационарное приближение состоит в том, что в этой системе пламя может быть описано как стационарное. Эквивалентно, в лабораторной системе отсчёта квазистационарное приближение означает, что производными скорости фронта по времени порядков выше первого можно пренебречь. В силу несжимаемости газа, в течениях холодной смеси и продуктов горения не могут образовываться области разрежения или сжатия, и поэтому при выполнении условия квазистационарности одно и то же ускорение испытывает весь газ, заполняющий трубу.

Квазистационарные режимы являются простейшими, наиболее регулярными режимами нестационарного распространения пламени. Множество же произвольных нестационарных режимов заведомо является гораздо более широким, поскольку любое достаточно быстрое возмущение пламени выводит его из режима квазистационарности. Теоретическое существование квазистационарных режимов распространения тонкого ламинарного пламени устанавливается ниже путём анализа оболочечных уравнений. Показывается, в частности, что некоторые из них существуют не на всём протяжении трубы.

### §15.2. Оболочечные уравнения

Уравнения для квазистационарно ускоряющегося тонкого ламинарного пламени получаются непосредственно из уравнений §9.2 добавлением к земному полю тяжести горизонтального поля, появляющегося в результате перехода в неинерциальную систему отсчёта. Выбирая, как всегда, начало этой системы в ведущей точке фронта и обозна-

чая текущее ускорение пламени относительно лабораторной системы через  $a$ , получаем потенциал полного поля тяжести в виде

$$\phi(x, y) = -g \left( |x| - \frac{1}{2} \right) - ay, \quad (15.1)$$

где постоянная  $g/2$  введена для удобства. Отсюда  $\phi'_-(x) = -g - af'(x)$  при  $x > 0$ . Таким образом, уравнения для пламени в ведущем порядке  $1/U$ -разложения получаются из уравнений §9.2 заменой  $g \rightarrow g + af'(x)$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{u'_-}{f'} (1 + \alpha x) - \alpha x \frac{g + af'}{f'u_-} \right] + \alpha \left( \frac{u'_-}{u_-} - \frac{g + af'}{u_-^2} \right) (w_- - \alpha) = 0, \quad (15.2)$$

$$f'(x)w_-(x) = (1 - x)u'_-(x), \quad f = U - (1 - x)u_-, \quad (15.3)$$

а граничные условия на стенках трубы остаются прежними:

$$u_-(0) = U, \quad w_-(0) = \frac{\alpha}{2}. \quad (15.4)$$

Физические решения выделяются условием

$$\int_0^1 d\tilde{x} Nu(x(\tilde{x}), U) = \frac{u_-^2(1) + U^2}{2} + \frac{\alpha}{\theta} \left( a \int_0^1 d\tilde{x} f(\tilde{x}) - \frac{g}{2} - aU \right), \quad (15.5)$$

где

$$u(x(\tilde{x}), U) = \left\{ \theta u_-^2(1) - \alpha u_-^2(\tilde{x}) - 2\alpha g(1 - \tilde{x}) - 2\alpha a[U - f(\tilde{x})] \right\}^{1/2}.$$

### §15.3. Формулы для ускорения тонкого ламинарного пламени и условия квази-стационарности

Обозначим через  $s = s(t)$  координату конца трубы, у которого производится поджиг. Это есть расстояние, которое пламя прошло к данному моменту времени  $t$ . Поскольку оба конца трубы являются открытыми, давление газа на каждом из них равно атмосферному давлению  $p_0$ :

$$p = p_0, \quad y = s, s - L. \quad (15.6)$$

Из этих условий можно вывести соотношение между скоростью пламени и его ускорением. Считая, что при данном  $s$  поток продуктов горения на выходе из трубы уже однороден по её сечению, имеем из закона сохранения продольного импульса газа

$$\tilde{p}|_{y=U} + \frac{1}{\theta} \int_0^1 dx u^2(x, U) = \tilde{p}|_{y=s} + \theta U^2.$$

Складывая это равенство с (9.11), (9.12) (где  $\tilde{p}|_{y=0}$  заменено на  $\tilde{p}|_{y=s-L}$ ) и подставляя  $p_+ - p_- = -\alpha$ ,  $u_+ - u_- = \alpha/N$ , находим

$$\tilde{p}|_{y=s} - \tilde{p}|_{y=0} = -\alpha U^2 + \frac{\alpha a}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} f(\tilde{x}). \quad (15.7)$$

Подставляя сюда (15.6), (15.1), получаем

$$a = \alpha U^2 \left\{ L - s + \frac{1}{\theta}(s - U) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} f(\tilde{x}) \right\}^{-1}. \quad (15.8)$$

Этот результат имеет простой физический смысл. Если пренебречь последним членом в фигурных скобках (он не превосходит  $U/2$ ) по сравнению с большим  $L$  (если  $L - s$  всё ещё велико), то (15.8) сводится (после домножения обеих его частей на  $\{\dots\}$ ) к равенству разностей гидростатического и динамического давлений на концах трубы.

Важным следствием выражения (15.8) является наличие положительной обратной связи между ускорением пламени и его скоростью относительно холодного газа. А именно, согласно (15.8),  $a \sim U^2$ , а с другой стороны, из результатов главы 11 следует, что скорость  $U$  растёт с увеличением ускорения.

Как и в §9.2, написанная выше система уравнений может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка для  $u_-(x)$ . Несмотря на то, что система включает интегральное соотношение (15.8), все утверждения §9.3 относительно общей структуры решений остаются в силе. Действительно, для любой пары параметров  $U, a$  уравнения (15.2)–(15.3) по-прежнему образуют систему ОДУ. Следовательно, если решение  $u_-$  существует, то оно единственно. Далее, из всех решений должны быть оставлены лишь те, что удовлетворяют (15.8). При произвольном значении  $s$  для любого  $U$  имеется максимум одно  $a$ , удовлетворяющее этому уравнению. В самом деле, если бы имелось два таких  $a$ , скажем  $a_1$  и  $a_2$ , то мы имели бы из (15.8)

$$\left\{ L - s + \frac{1}{\theta}(s - U) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} f_1(\tilde{x}) \right\} = \frac{a_2}{a_1} \left\{ L - s + \frac{1}{\theta}(s - U) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} f_2(\tilde{x}) \right\},$$

где  $f_1, f_2$  – положения фронта, соответствующие  $a_1, a_2$ . Таким образом, неоднозначность в величине ускорения, то есть смена режима распространения, возможна лишь при определённом  $s$ . Наконец, само значение  $U$  находится из условия (15.5). Численный анализ показывает, что при любом положении пламени в трубе имеется максимум два значения

$U$  каждого из двух типов. Важное отличие от установившегося движения состоит в том, что решения существуют не всегда: оказывается, что решения типа II исчезают при достаточно больших  $s$  (см. §15.5С). Последнее означает, что в момент достижения точки исчезновения данного квазистационарного режима пламя, вообще говоря, становится существенно нестационарным. Действительно, несмотря на то, что при этом остаётся более медленный режим типа I, переход в существенно нестационарный режим является наиболее вероятным ввиду общей тенденции пламени к увеличению скорости распространения.

Получим теперь количественное выражение условия применимости квазистационарного приближения. Для того чтобы это условие было выполнено, собственные значения  $a$  и  $U$  должны меняться пренебрежимо мало в течение движения газа через область, занимаемую пламенем. Длина этой области в естественных единицах по порядку величины равна  $U$ , скорость холодного газа (в системе покоя фронта) порядка  $U$ , скорость продуктов горения – порядка  $\theta U$ . Следовательно, время прохождения газом этой области  $\lesssim 1$ , так что условие квазистационарности имеет вид

$$\frac{da}{dt} \ll a, \quad \frac{dU}{dt} \ll U. \quad (15.9)$$

Далее, дифференцирование (15.8) даёт

$$\begin{aligned} a \gg \frac{da}{dt} &= \alpha U^2 \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{ds}{dt} \left\{ L - s + \frac{1}{\theta}(s - U) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} f(\tilde{x}) \right\}^{-2} \\ &+ 2\alpha U \frac{dU}{dt} \left\{ L - s + \frac{1}{\theta}(s - U) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 d\tilde{x} f(\tilde{x}) \right\} = \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{a^2 V}{\alpha U^2} + \frac{2a}{U} \frac{dU}{dt}, \end{aligned}$$

где  $V = ds/dt$  есть скорость пламени в лабораторной системе отсчёта (дифференцирование зависящих от  $U$  вкладов в большой знаменатель даёт члены второго порядка по малым  $dU/dt$ ,  $da/dt$ ). Согласно второму из неравенств (15.9) последнее слагаемое справа уже  $\ll a$ . Следовательно, первое из неравенств (15.9) можно с той же точностью заменить на более удобное  $aV/\alpha U^2 \ll 1$  (поскольку на практике  $\theta = 5 - 8$ , множитель  $(\theta - 1)/\theta \approx 1$  можно опустить). Далее, так как  $U$  экспериментально получается как функция  $s$ , удобно записать  $dU/dt = V dU/ds$ . Таким образом, условия квазистационарности принимают вид

$$a \ll \alpha \frac{U^2}{V}, \quad (15.10a)$$

$$\frac{dU}{ds} \ll \frac{U}{V}. \quad (15.10b)$$

Из выражения (15.8) следует, что эти условия выполняются сколь угодно точно на начальной стадии эволюции пламени ( $s \ll L$ ) в достаточно длинной трубе ( $L \gg b$ ). Численный анализ показывает, что решения типа I удовлетворяют им практически на всей длине трубы, исключая её холодный конец. В частности, на расстоянии  $s = 0.8L$  величина  $U$  превосходит её значение в начале трубы всего лишь на 1% – 2%. Напротив, для решений типа II характерно гораздо более быстрое нарастание  $U$  и  $a$ , и поэтому они перестают быть квазистационарными раньше, чем решения типа I.

Исследование численных решений показывает далее, что из двух условий (15.10а), (15.10б) первое является основным в том смысле, что если оно выполнено, то выполнено также и (15.10б). Поэтому в дальнейшем в качестве условия квазистационарности применяется (15.10а). В обычных единицах оно имеет вид

$$a \ll \alpha \frac{U^2 U_f}{Vb}. \quad (15.11)$$

Как видно, условие квазистационарности в итоге приняло вид ограничения сверху на величину ускорения, а не её производной, как в исходной общей формулировке. Это является следствием конкретного выражения (15.8) для ускорения.

Наконец, используя предполагаемую малость  $dU/dt$ , можно связать величины  $U, a$  с наблюдаемой скоростью пламени. По определению,  $U$  есть скорость пламени относительно удалённого холодного газа. Следовательно, скорость пламени в лабораторной системе в момент времени  $t$  равна

$$V = U + \int_0^t d\tau a(\tau). \quad (15.12)$$

#### §15.4. Пределы применимости теории и оценка её точности

Учёт потерь тепла в стенки трубы и оценка точности вычислений, выполненные в §9.4, §9.5, остаются в силе и для квазистационарного пламени. Значения параметра  $\delta$  вычисляются по формуле (9.18) [в трубах диаметром  $\lesssim 10$  см они должны быть умножены на  $\beta = 1.45$ .] Скорректированные на эти потери значения  $U$  и  $a$  получаются из собственных значений решений умножением на  $(1 - \delta)$  и  $(1 - \delta)^2$ , соответственно [последнее следует из того, что  $a \sim U^2$ , согласно (15.8)]. Погрешность вычислений приведена в предпоследнем столбце Таблицы I. Она сравнительно велика (25% – 30%) в случае быстрых пламен в

трубе диаметром 5 см, потому что условие  $U \gg 1$  для них выполняется плохо (например,  $U \approx 2$  для решения типа II в стехиометрической смеси). Напротив, ближе к пределам воспламенимости это условие выполняется значительно лучше (например,  $U \approx 6.5$  для решения типа I в смеси 5.4% метана), и соответственно,  $r_m = 10\% - 15\%$ .

Единственный вопрос, требующий дополнительного рассмотрения, связан с трением газа о стенки трубы. Этим трением можно пренебречь, если вызываемое им изменение перепада давления мало по сравнению с разностью динамического давления, которым согласно (15.8) определяется ускорение пламени. Этот вопрос не возникал в случае полукрытой трубы, потому что какая бы сила ни действовала на газ вдоль трубы, она компенсируется фланцем, закрывающим конец трубы. Итак, новое требование состоит в том, чтобы дополнительный перепад давления за счёт трения о стенки трубы был пренебрежимо мал по сравнению с  $\alpha U^2$ . Это условие удобно выразить в обычных единицах через коэффициент трения (который является функцией числа Рейнольдса)

$$\lambda = \frac{b\Delta p/l}{\rho v^2/2}, \quad (15.13)$$

где  $\Delta p$  есть перепад давления газа на расстоянии  $l$ , а  $v$  – его скорость относительно трубы. В начале процесса горения холодная смесь покоится, и эффект трения связан с движением продуктов горения. В этих условиях подстановка  $\rho = 1/\theta$ ,  $v = \alpha U$ ,  $l = s$  даёт

$$\frac{\Delta p}{\alpha U^2} = \frac{\alpha \lambda s}{2\theta b}.$$

Следовательно, на начальной стадии распространения пламени, когда увеличение его скорости за счёт ускорения невелико ( $V - U \lesssim U$ ), трением о стенки можно пренебречь, если  $s/b \ll 2\theta/\alpha\lambda$ . Это условие тривиально удовлетворяется при достаточно малых  $s$ , и поэтому вопрос заключается в его выполнении при  $s \sim L$ . В этом отношении очень важно, что полученное ограничение существенно ослабляется по мере движения пламени. Действительно, как предсказывается теорией и подтверждается экспериментом, во всех смесях, кроме предельных, скорость пламени увеличивается от трёх до пяти раз уже на половине пути, а значит, скорость продуктов горения уменьшается на ту же величину. Следовательно, обозначив  $v/\alpha U \equiv r$ ,  $\lambda$  в полученном выше неравенстве следует заменить на  $\lambda r^2$ , так что общее требование принимает вид

$$\frac{s}{b} \ll \frac{2}{r^2 \lambda}, \quad (15.14)$$

где  $\lambda$  должно браться для течения, имеющегося при данном  $s$ . В частности, значение  $\lambda$  существенно различно для ламинарных и турбулентных течений. В последнем случае пограничный слой, образующийся за фронтом, быстро увеличивается и заполняет всё сечение трубы (ширина этого слоя  $\sim y$  и становится порядка  $b$  на расстояниях  $y = 5b - 10b$ ), так что  $\lambda$  может быть взято из графа Муди для коэффициента трения установившегося турбулентного течения с числом Рейнольдса  $Re = vb/\nu$  [43, 170]. В случае ламинарного течения, однако, ширина пограничного слоя  $\approx \sqrt{yb/Re}$  растёт намного медленнее. Используя формулу  $\lambda = 64/Re$  для установившегося течения в трубе, находим из (15.14), что максимальная ширина пограничного слоя  $\sqrt{sb/Re}$  мала по сравнению с диаметром трубы. Следовательно, вместо модели установившегося ламинарного течения продуктов горения здесь следует использовать модель тонкого пограничного слоя. Отношение полных сил трения в этих моделях равно

$$\frac{\pi b \sqrt{\nu \rho^2 v^3 s}}{8\pi \nu \rho v s} = \sqrt{\frac{Re b}{64 s}} \equiv R.$$

Поэтому, умножая на  $R$  обе части тождества

$$\frac{\Delta p}{\alpha U^2} = \frac{32\alpha r^2 s}{\theta Re b},$$

которое справедливо для установившегося ламинарного течения и получается подстановкой  $\lambda = 64/Re$ ,  $v = r\alpha U$ ,  $\rho = 1/\theta$ ,  $l = s$  в (15.13), требование малости его левой части даёт  $4r^2 \sqrt{s/bRe} \ll 1$ , или

$$\frac{s}{b} \ll \frac{Re}{16r^4}. \quad (15.15)$$

Ввиду падения температуры  $T$  газа вблизи стенок трубы, число Рейнольдса  $Re = vb/\nu$  в этой формуле должно браться при температуре, значительно меньшей, чем температура пламени. Однако точно определить реальную температуру затруднительно. Поскольку  $v \sim 1/\rho \sim T$ ,  $\nu \sim T^{3/2}$ , истинное значение  $Re$  примерно в  $\sqrt{\theta}$  раз больше значения, вычисляемого при адиабатической температуре пламени, как это делается ниже. Это вычисление, таким образом, занижает правую часть (15.15). Что касается силы трения, действующей на ускоряющийся холодный газ, то она противоположна силе, действующей на продукты горения, что снижает вклад трения в перепад давления. По этим причинам теория, основанная на приближении идеальных стенок, становится практически применимой на расстояниях  $s$ , удовлетворяющих (15.15), в котором знак  $\ll$  можно заменить на

$\lesssim$ . В итоге относительная погрешность в величине ускорения, вычисленного в этом приближении, вполне ограничена квадратным корнем из отношения левой и правой частей (15.15).

Рассмотрим в качестве примера распространение пламени в смеси 9.5% метана с воздухом в трубе диаметром 5 см и длиной 5 м. В точке  $s = 4$  м скорость пламени, определённая из Рис. 59, равна  $V \approx 7$  м/с, а численное решение даёт  $U = 1.1$  м/с, так что согласно (15.12) приращение скорости пламени за счёт ускорения газа как целого есть  $V - U = 5.9$  м/с. Подставляя  $\theta \approx 7.4$ , находим  $v = 6.4 \times 1.1$  м/с  $- 5.9$  м/с  $= 1.14$  м/с и затем  $r = 1.14/7.04 \approx 0.16$ . Учитывая, что  $\nu = 3$  см<sup>2</sup>/с ( $\nu \approx \nu_0 \theta^{3/2}$ , где  $\nu_0 = 0.15$  см<sup>2</sup>/с есть кинематическая вязкость смеси при комнатной температуре), находим  $Re = vb/\nu = 190$ , то есть течение продуктов горения является ламинарным. Подстановка этих значений в (15.15) даёт  $s \ll 180$  м, что очень хорошо выполняется для  $s = 4$  м. Аналогичные вычисления показывают, что другие метано-воздушные пламёна в этой трубе также удовлетворяют (15.15) на всём своём пути. Пламёна типа II характеризуются бóльшими ускорениями, чем пламёна типа I, и поэтому удовлетворяют условию (15.15) с большей точностью. Вообще говоря, точность выполнения (15.15) является наибольшей в начале (малые  $s$ ) и в конце (малые  $r$ ) трубы. Заметим, наконец, что величина ускорения пламени для данного  $s$  не зависит от предыдущей его эволюции, если при этом  $s$  пламя является квазистационарным. Это следует из того, что уравнения (15.2)–(15.3) и (15.8) не включают  $V$  или какой-либо другой величины, зависящей от предыдущей эволюции пламени, так что их решения (в частности, значения  $a$  и  $U$ ) зависят лишь от текущего положения пламени в трубе. Следовательно, даже если трение о стенки трубы было значительным на какой-либо стадии распространения пламени, это не мешает сравнению теории с экспериментом в более поздние моменты времени.

**§15.5. Ускорение ламинарных метано-воздушных пламён в трубе с  $b = 5$  см,  $L = 5$  м**

*А. Обработка данных Рис. 59*

Для экспериментальной проверки функций  $a(s)$ , найденных численным решением системы (15.2)–(15.3) и (15.8), кривые на Рис. 59 сначала аппроксимировались полиномиальными функциями времени. Для этого каждая кривая заменялась набором базисных

точек, которые затем оцифровывались с помощью программы DigitizeIt и результаты использовались для нахождения наилучшей полиномиальной аппроксимации методом наименьших квадратов с помощью программы Maple17 [186]. В рассматриваемом эксперименте положение пламени фиксировалось через каждые 0.5 м методом Уилера-Мэйсона [70, 71]. Поэтому не имеет смысла брать число точек больше, чем удвоенное пройденное расстояние в метрах. Ввиду этого число точек равняется восьми для кривых, соответствующих концентрации метана от 7.1% до 9.5%, тогда как для медленных пламён в смесях с 6.2% и 5.4% метана число точек равняется пяти и трём, соответственно. Максимальная степень полинома на единицу меньше числа точек.

Скорость распространения пламени  $V$  и его ускорение  $a$  получают дифференцированием полученных полиномов. Что касается скорости, описанная процедура даёт вполне надёжные результаты в том смысле, что изменение положения базисных точек на кривой меняет результат сравнительно мало. Однако вторая производная аппроксимирующих полиномов оказалась намного более чувствительной к выбору точек: уже при горизонтальном сдвиге в пределах ширины экспериментальной кривой ускорение может измениться в 2–3 раза. Для уменьшения этой неопределённости необходимо ввести некоторое физическое условие на функцию  $a(t)$ . Согласно наблюдениям [77] ускорение пламён происходило регулярно и постепенно. Поэтому в качестве дополнительного условия на аппроксимирующий полином было наложено условие монотонности его второй производной. Как показывают расчёты, в результате неопределённости в значении ускорения уменьшается до 30% во всех случаях, кроме самой поздней стадии эволюции пламён в смесях, близких к стехиометрической, когда их траектории практически вертикальны. Явные выражения для полиномов приведены в Таблице IV вместе с параметрами, использованными в теоретическом вычислении ускорения пламени.

*В. Медленно ускоряющиеся пламёна (5.4% и 6.2% метана)*

Как уже было отмечено, ускорение пламён в смесях с 5.4% и 6.2% метана заметно слабее, чем в других случаях, показанных на Рис. 59. Это подтверждается результатами численной обработки. Оказывается, что это наблюдение находится в полном соответствии с предсказаниями теории и объясняется существованием двух различных режимов распространения пламён. Как было установлено в §9.3 для полуоткрытых труб, при нормаль-

CH <sub>4</sub> , %	$P(t)$ , см	$\theta$	$U_f$ , см/с	$\delta$	$r_m$ , %	тип
5.4	$-0.12 + 29.3t + 0.23t^2$	5.20	6	0.43	13	I
6.2	$9.7 + 32.5t + 5.83t^2 + 0.034t^3 + 0.082t^4$	5.73	12	0.21	18	I
7.1	$3.71 + 53.4t + 10.56t^2 + 0.75t^3 + 8.86t^4 - 5.19t^5 + t^6$	6.29	22	0.11	21	II
7.75	$13.6 + 54.58t + 27.26t^2 + 2.065t^3 + 0.84t^4 + 0.424t^5$	6.77	28	0.084	24	II
8.5	$10.3 + 94.39t + 19.1t^2 + 26.5t^3 - 28.58t^4 + 11.56t^5$	7.05	35	0.065	28	II
9.5	$0.49 + 141.3t + 41.35t^2 + 8.46t^3 + 7.771t^7$	7.42	40	0.055	30	II

Таблица IV: Полиномы, аппроксимирующие траектории пламён на Рис. 59 (левая часть таблицы;  $t$  измеряется в секундах) и параметры, используемые в теоретическом вычислении. Полином для пламени 9.5% найден при дополнительном условии неотрицательности его коэффициентов.

ных начальных условиях пламёна вблизи пределов воспламенения распространяются в режиме типа I, который характеризуется сравнительно низкой скоростью, тогда как в смесях, близких к стехиометрической, пламёна распространяются в высокоскоростном режиме типа II. К этому теперь следует добавить, что в случае открытых труб эти два режима также существенно различны в отношении ускорения пламени: в режиме типа II величина  $a$  в 3 – 10 раз больше, чем в режиме типа I. Следовательно, можно ожидать, что в смесях с 5.4% и 6.2% метана пламёна распространяются в режиме типа I с малым ускорением. Это полностью подтверждается сравнением с экспериментальными данными. Рассмотрим сначала смесь с 5.4% метана ( $U_f \approx 6$  см/с). В этом случае экспериментальные данные охватывают лишь первую четверть трубы. Ускорение пламени настолько малó, что не превосходит экспериментальной погрешности, а его средняя скорость  $V = 30.2$  см/с. С другой стороны, теория даёт значение 22.7 см/с для начальной скорости пламени и  $4.9$  см/с<sup>2</sup> для его ускорения в режиме типа I (ускорение пламени на первой четверти трубы в этом случае практически постоянно). Следовательно, теоретическая средняя скорость  $V = 31.9$  см/с. В то же время, в режиме типа II начальная скорость, среднее ускорение и средняя скорость равны, соответственно, 36 см/с,  $12.2$  см/с<sup>2</sup> и 50.5 см/с. Таким образом, как и в полукрытой трубе, пламя в смеси 5.4% метана распространяется в режиме типа I.

В случае смеси 6.2% метана число базисных точек уже равно пяти, что позволяет бо-

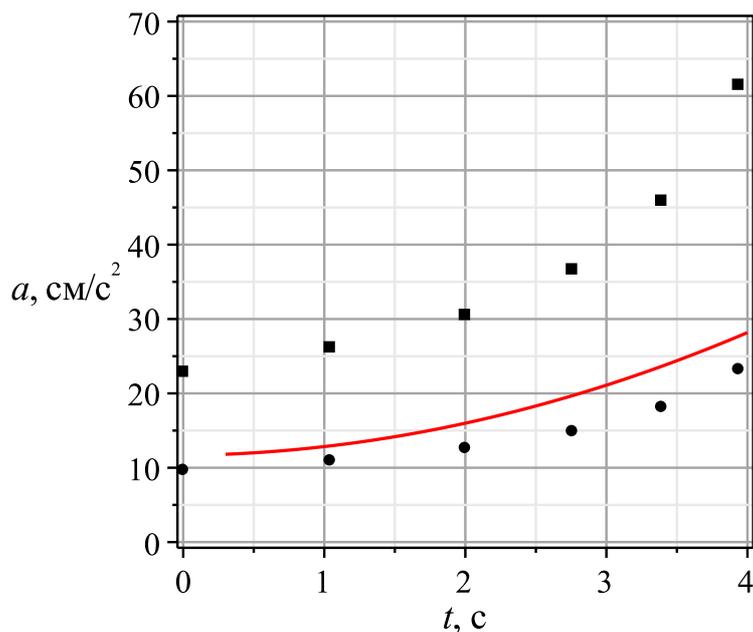


Рис. 60: Зависимость ускорения ламинарного пламени от времени в смеси 6.2% метана с воздухом. Показаны вторая производная аппроксимирующего полинома из Таблицы IV (сплошная кривая) и решения системы (15.2)–(15.3), (15.8) [кружки и квадраты представляют решения типа I и II, соответственно].

лее точное сравнение. Ускорение пламени как функция времени изображено на Рис. 60, где сплошная кривая есть вторая производная аппроксимирующего полинома, а символы – теоретические значения, найденные как решения системы (15.2)–(15.3), (15.8) для  $s = n \times 0.5$  м,  $n = 0, 1, \dots, 5$  с поправкой на тепловые потери согласно §15.4. Два набора символов представляют решения типа I (кружки) и типа II (квадраты); относительная погрешность вычислений (параметр  $r_m$ ) равна 18% и 14%, соответственно, и сравнима с экспериментальной погрешностью. Как видно, эта точность позволяет однозначно установить принадлежность пламени типу I. Таким образом, пламя распространяется в одном и том же режиме типа I, по крайней мере, на протяжении половины трубы, показанной на Рис. 59.

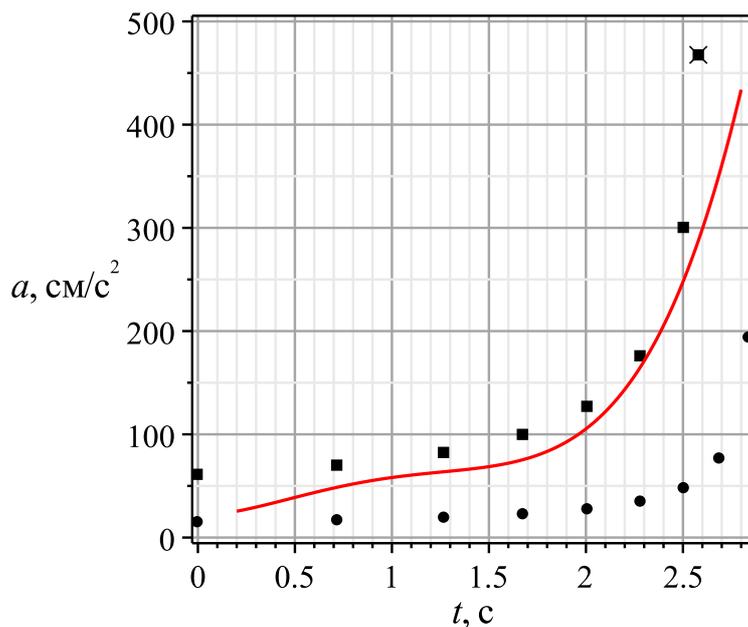


Рис. 61: То же для смеси 7.1% метана с воздухом. Крест указывает точку исчезновения решений типа II.

*С. Быстро ускоряющиеся пламёна (7.1% – 9.5% метана)*

Рассмотрение группы быстрых пламён вполне аналогично произведённому выше, но сама их динамика оказывается более сложной. Рисунок 59 теперь покрывает бóльшую часть трубы – четыре метра из полных пяти. Новый элемент в динамике пламени появляется на расстоянии  $s \approx 3$  м, а именно, режим типа II квазистационарного распространения пламени перестаёт существовать. Точное расстояние, на котором исчезают решения этого типа, зависит от состава смеси, увеличиваясь вместе с концентрацией метана, но ни в одной смеси его нет уже при  $s \approx 4$  м (в рассматриваемой трубе). Точка окончания режима типа II характеризуется резким возрастанием ускорения пламени. Она будет обозначаться на графиках крестом. Рассмотрим сначала распространение пламени в смеси 7.1% метана, Рис. 61. Хотя погрешности измерений и вычислений в этом случае несколько больше, чем в предыдущем случае (около 20%), большая разность в ускорениях пламён двух типов позволяет сделать вывод, что вначале пламя распространяется в режиме типа I, но затем происходит переход в режим типа II, в котором оно проходит следующие 2 м пути ( $s \approx 1$ –3 м). Тот факт, что пламя в смеси 7.1% метана исходно принадлежит типу I, находится в соответствии с выводом §9.6. Таким образом, ускорение вызывает

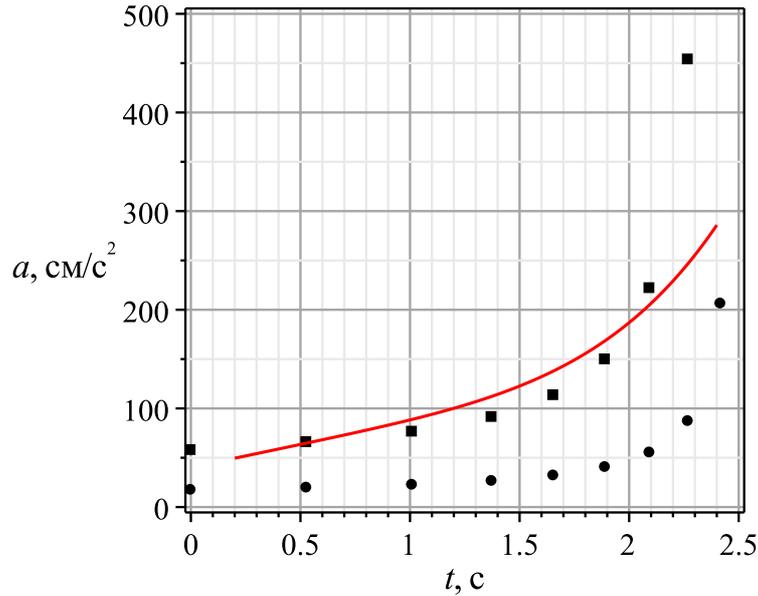


Рис. 62: То же для смеси 7.75% метана с воздухом.

переход пламени в режим более быстрого распространения, в котором, однако, оно остаётся лишь до точки окончания решений типа II, находящейся при  $s \approx 3.2$  м. После этого пламя перестаёт быть квазистационарным. Следует заметить, что несмотря на большие значения ускорения, решения типа II в рассматриваемом случае остаются квазистационарными вплоть до точки их исчезновения: даже в этой точке отношение левой и правой частей (15.11) примерно равно 0.4. Однако точность квазистационарного приближения ухудшается с ростом нормальной скорости пламени, и в оставшихся случаях оно теряет применимость до достижения точки исчезновения решений типа II.

Далее, как видно из Рис. 62, в случае смеси 7.75% метана эволюция пламени качественно меняется лишь в том отношении, что в самом её начале уже нет следа режима типа I. Таким образом, после поджига пламя сразу оказывается в режиме типа II. Решения этого типа исчезают в точке  $s \approx 3.6$  м, но ещё раньше нарушается условие квазистационарности, так что дальнейшее сравнение с квазистационарной теорией теряет смысл.

Наконец, графики ускорения пламён в смесях 8.5% и 9.5% метана показаны на Рис. 63. Сравнительно большие теоретические и экспериментальные погрешности в этих случаях оставляют место лишь для качественного сравнения. Экспериментальная погрешность велика из-за большой крутизны графиков траекторий пламён. Теоретическая же погрешность связана с нарушением условия квазистационарности: в случае пламени в смеси

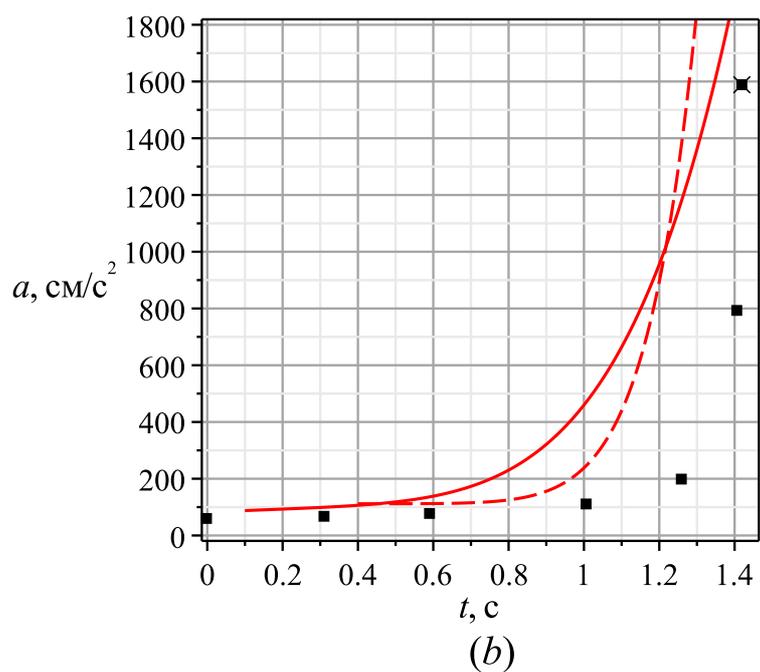
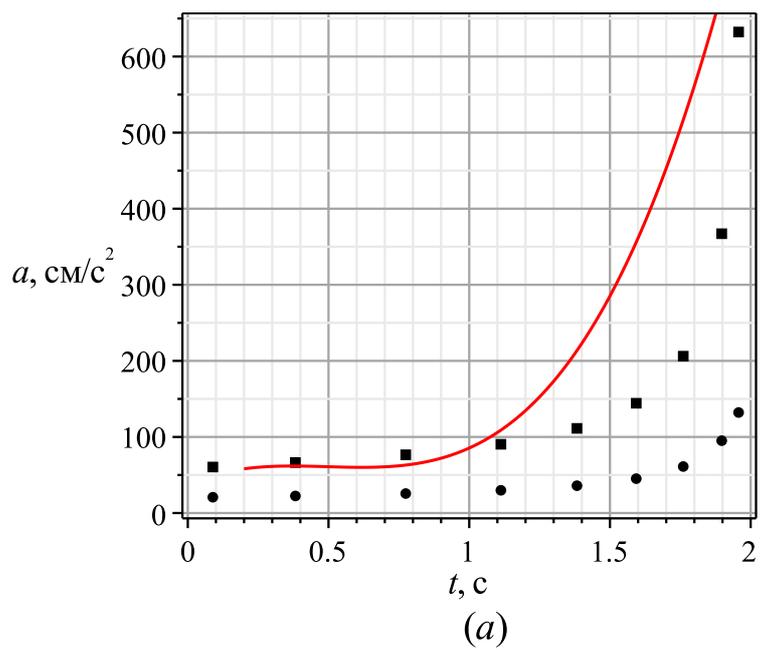


Рис. 63: То же для смесей 8.5% (a) и 9.5% (b) метана с воздухом. В последнем случае показаны лишь решения типа II; пунктирная кривая представляет ускорение пламени, вычисленное с помощью полинома двенадцатой степени с неотрицательными коэффициентами.

9.5% метана, например, левая часть (15.11) в два раза превосходит его правую часть в точке окончания решений типа II. Ввиду этого единственный надёжный вывод состоит в том, что пламёна вблизи стехиометрии ускоряются в режиме типа II, как этого следовало ожидать на основе результатов §9.6.

**Вывод**

В достаточно длинных открытых трубах с гладкими стенками ускорение ламинарного пламени происходит в квазистационарном режиме на протяжении большей части трубы. Наблюдаемое на эксперименте значительное увеличение скорости ламинарного пламени связано, главным образом, с ускорением газа, заполняющего трубу, как целого; увеличение скорости пламени относительно холодного газа, связанное с ускорением газа посредством указанной в §15.3 положительной обратной связи, даёт относительный вклад в наблюдаемую скорость пламени порядка 20%. Большое различие в наблюдаемой величине ускорения ламинарных метано-воздушных пламён при одинаковых начальных (нормальных) условиях вблизи пределов воспламенения и вблизи стехиометрии объясняется тем, что эти пламёна распространяются в различных режимах.

---

## Заключение

---

В диссертационной работе разработан принципиально новый аналитический метод решения задач о распространении тонких ламинарных пламён в газовых смесях – оболочечное описание. В отличие от уже существующих, этот метод позволяет теоретически исследовать сильнонелинейные конфигурации тонких ламинарных пламён и последовательно учитывать влияние поля тяжести и процессов переноса во фронте на крупномасштабную структуру тонкого ламинарного пламени. Полученные результаты решают основную проблему классического подхода – невозможность построения общего решения уравнений газодинамики в явном виде. Они дают возможность относительно просто вычислять основные характеристики нелинейных тонких ламинарных пламён в газовых смесях, а также ламинарных поверхностей разрыва с произвольным скачком плотности в других средах. Использование уравнений нового метода вместо фундаментальных уравнений газодинамики существенно снижает вычислительные затраты и позволяет адекватно моделировать реальные пламёна, изучаемые в лабораториях и встречающиеся в прикладных задачах. С помощью нового метода дано объяснение наблюдаемых свойств конкретных пламён и вычислены их основные характеристики, а также предсказано существование новых режимов горения.

1. С целью построения оболочечного описания тонких ламинарных пламён доказана самосогласованность модели тонкого пламени в первом порядке разложения по ширине фронта. Для этого сформулирован критерий корректности модели тонкого пламени и доказаны существование и единственность модели в первом порядке по ширине фронта. Как следствие этого результата решена основная техническая проблема теории тонкого пламени – неоднозначность положения математической поверхности разрыва относительно физического фронта пламени. Доказано, что при выполнении условия корректности положение поверхности разрыва определено однозначно, а вместе с ним однозначными являются вклады процессов переноса во фронте пламени в его нормальную скорость. Далее, для эффективного учёта мелкомасштабной ячеистой структуры тонкого ламинарного пламени сформулирована процедура усреднения полей скорости и давления газа и условий их скачка на поверхности разрыва. С её помощью доказано, что в ведущем порядке разложения по размеру ячеек эффект мелкомасштабной структуры сводится к

мультипликативной перенормировке нормальной скорости пламени.

2. В рамках модели тонкого ламинарного пламени получено нелинейное интегродифференциальное уравнение для положения фронта двумерного тонкого ламинарного пламени и распределения на нём скорости газа (мастер-уравнение). Доказано, что это уравнение является точным следствием уравнений идеальной газодинамики. На его основе впервые построено замкнутое описание тонких ламинарных пламён с произвольным коэффициентом расширения газа. Проверено, что все известные слабонелинейные уравнения теории искривлённых тонких ламинарных пламён в точности воспроизводятся как частные случаи мастер-уравнения. С его помощью получено уточнение уравнения Сивашинского–Клавена для стационарного тонкого ламинарного пламени с малым коэффициентом расширения и найдены его аналитические решения. Эти результаты демонстрируют удобство оболочечного описания по сравнению с классическим подходом, требующим нахождения явных решений для течений холодной смеси и продуктов горения в каждом порядке слабонелинейного разложения.

3. Для анализа сильнонелинейных режимов распространения тонких ламинарных пламён разработано асимптотическое разложение мастер-уравнения по обратной скорости пламени. С его помощью установлен важный факт локальности структуры сильновытянутого тонкого ламинарного пламени, а именно показано, что в случае, когда скорость распространения пламени существенно превосходит его нормальную скорость, оболочечные уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Их анализ привёл к следующим результатам:

- В случае тонкого ламинарного пламени, удерживаемого тонким стержнем в быстром потоке газа, все решения образуют двухпараметрическое семейство. При этом влияние стержня на глобальную структуру тонкого ламинарного пламени описывается заданием одного числа, значение которого определяется течением газа вблизи стержня.
- Получена классификация режимов стационарного распространения тонких ламинарных пламён в сильном поле тяжести. На её основе дано объяснение наблюдаемых различий в скорости стационарного распространения метано-воздушных пламён с одинаковыми фазовыми параметрами, а также предсказан новый стационарный режим распространения тонкого ламинарного пламени, в котором его фронт имеет

перегиб. Этот режим наблюдается экспериментально.

- Построена теория частичного распространения тонких ламинарных пламён в вертикальных трубах, впервые объяснившая всю совокупность наблюдаемых свойств ламинарных пламён вблизи пределов воспламенения.
- Произведён первый строгий анализ устойчивости сильнонелинейного тонкого ламинарного пламени – V-пламени в трубе.
- Построена количественная теория спонтанного ускорения тонких ламинарных пламён в открытых трубах с гладкими стенками. В её рамках дано объяснение различий в наблюдаемой величине ускорения ламинарных метано-воздушных пламён в смесях вблизи пределов воспламенения и в стехиометрических смесях.

Эти результаты демонстрируют эффективность оболочечного описания сильнонелинейных тонких ламинарных пламён. Оно позволяет находить возможные режимы распространения тонких ламинарных пламён и вычислять их основные количественные характеристики в ситуациях, когда это оказывается затруднительным для обычного экспериментального наблюдения и недоступно для прямого численного моделирования.

4. В отличие от реального эксперимента или прямого численного моделирования оболочечное описание позволяет изучать влияние различных эффектов на структуру тонкого ламинарного пламени по-отдельности. Другим важным преимуществом использования мастер-уравнения является его свобода от фиктивной нестационарности, порождаемой числовым шумом. Для исследования общего случая произвольной нелинейности тонкого ламинарного пламени разработан метод численного решения точных оболочечных уравнений. Анализ численных решений позволил установить фактическую область применимости слабонелинейного приближения, а также впервые качественно и количественно исследовать эффект компрессии пламени. Он показал, что

- учёт эффекта компрессии существенно меняет зависимость скорости распространения тонкого ламинарного пламени от ширины трубы,
- резкий рост скорости ламинарного пламени, наблюдаемый при увеличении ширины трубы выше определённого порогового значения, не связан с реальным или численным шумом и является стационарным явлением.

---

Таким образом, оболочечное описание оказывается незаменимым средством исследования тонких ламинарных пламён даже в тех случаях, когда они доступны прямому численному моделированию.

### Благодарности

Я благодарен моим многочисленным российским и зарубежным коллегам за интерес, проявленный к моей работе. Большую пользу мне принесло обсуждение её результатов на семинарах в Лаборатории горения и детонации (LCD, Франция), а также в личном общении с Г. Жуленом и А. Эль-Рабии (LCD), П. Клавленом (IRPHE, Франция), Г. Сивашинским (Университет Тель-Авива, Израиль), О. Пейлем (Университет Уппсала, Швеция) и многими другими. Я обязан А. Эль-Рабии (LCD) за организацию и проведение экспериментов по распространению пламён в горизонтальных и вертикальных трубах, предоставленные материалы наблюдений и всестороннюю помощь в их обработке, а также Ж.-К. Руссо и В. Монтасье (LCD) за техническое обеспечение экспериментов. Эта работа не была бы выполнена без постоянного стимулирующего внимания со стороны проф. П.К. Кашкарова и проф. А.В. Борисова (Физический факультет МГУ), а также поддержки и заботы моих родителей.

## Публикации автора, составляющие основу диссертационной работы

- A1.** Kazakov K. A., Liberman M. A. Nonlinear equation for curved stationary flames // *Phys. Fluids*. – 2002. – Vol. 14. – P. 1166.
- A2.** Kazakov K. A., Liberman M. A. Effect of vorticity production on the structure and velocity of curved flames // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 88. – P. 064502.
- A3.** Kazakov K. A., Liberman M. A. Nonlinear theory of flame front instability // *Combust. Sci. Technol.* – 2002. – Vol. 174, N. 7. – Pp. 129–151.
- A4.** Kazakov K. A. Exact equation for curved stationary flames with arbitrary gas expansion // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 94. – P. 094501.
- A5.** Kazakov K. A. On-shell description of stationary flames // *Phys. Fluids*. – 2005. – Vol. 17. – P. 032107.
- A6.** Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A. On-shell description of unsteady flames // *J. Fluid Mech.* – 2008. – Vol. 608. – P. 217.
- A7.** Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A. Nonperturbative approach to the nonlinear dynamics of two-dimensional premixed flames // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 100. – P. 174501.
- A8.** Kazakov K. A. Analytical treatment of 2D steady flames anchored in high-velocity streams // *Physica D*. – 2010. – Vol. 239. – P. 600.
- A9.** Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A. Stability analysis of confined V-shaped flames in high-velocity streams // *Phys. Rev. E*. – 2010. – Vol. 81. – P. 066312.
- A10.** Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K. A. Premixed flame propagation in channels of varying width // *SIAM J. Appl. Math.* – 2010. – Vol. 70. – P. 3287.
- A11.** Kazakov K. A. Analytical study in the mechanism of flame movement in horizontal tubes // *Phys. Fluids*. – 2012. – Vol. 24. – P. 022108.
- A12.** Kazakov K. A. Analytical study in the mechanism of flame movement in horizontal tubes. II. Flame acceleration in smooth open tubes // *Phys. Fluids*. – 2013. – Vol. 25. – P. 082107.
- A13.** El-Rabii H., Kazakov K. A. Effect of vorticity flip-over on the premixed flame structure: First experimental observation of type I inflection flames // *Phys. Rev. E*. – 2015. – Vol. 92. – P. 063004.
- A14.** Kazakov K. A. Mechanism of partial flame propagation and extinction in a strong

gravitational field // *Phys. Rev. Lett.* – 2015. – Vol. 115. – P. 264501.

**A15.** *Kazakov K. A.* Premixed flame propagation in vertical tubes // *Phys. Fluids.* – 2016. – Vol. 28. – P. 042103.

**A16.** *Kazakov K. A.* The mean velocity profile of near-wall turbulent flow: is there anything in between the logarithmic and power laws? // *Journal of Turbulence.* – 2016. – Vol. 17, N. 11. – Pp. 1015–1047.

**A17.** *Kazakov K. A., Kharlanov O. G.* Numerical study of strongly-nonlinear regimes of steady premixed flame propagation. The effect of thermal gas expansion and finite-front-thickness effects // *Combust. Theory Modelling.* – 2018. – Vol. 22. – Pp. 835–861.

## Литература

---

1. *Ferguson C., Kirkpatrick A.* Internal Combustion Engines. – New York: John Wiley & Sons, 2001.
2. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. – Москва: Наука, 1980.
3. *Clavin P., Searby G.* Combustion waves and fronts in flows. – Cambridge University Press, 2016.
4. *Payman W., Wheeler R. V.* The effect of pressure on the limits of inflammability of mixtures of the paraffin hydrocarbons with air // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1923. – Vol. 123. – Pp. 426–434.
5. *White A. G.* Limits for the propagation of flame in inflammable gas-air mixtures. Part I. Mixtures of air and one gas at the ordinary temperature and pressure // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1924. – Vol. 125. – Pp. 2387–2396.
6. *White A. G.* Limits for the propagation of flame in inflammable gas-air mixtures. Part III. The effects of temperature on the limits // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1925. – Vol. 127. – Pp. 672–684.
7. *Coward H. F., Jones G. W.* Limits of flammability of gases and vapors // *U.S. Bur. Mines Bull.* – 1952. – Technical Report No., BM-BUMLL-503.
8. *Zabetakis M. G., Cooper J., Furno A. L.* Flammability in Air of Solvent Mixtures Containing

- Methyl Ethyl Ketone and Tetrahydrofuran // *U.S. Bureau of Mines*. – 1962. – RI 6048.
9. *Levy A.* An optical study of flammability limits // *Proc. R. Soc. A*. – 1965. – Vol. 283. – P. 134.
  10. *Britton L. G.* Two hundred years of flammable limits // *Process Safety Progr.* – 2002. – Vol. 21. – Pp. 1–11.
  11. *Van den Schoor F., Hermanns R. T. E., van Oijen J. A., Verplaetsen F., de Goey L. P. H.* Comparison and evaluation of methods for the determination of flammability limits, applied to methane/hydrogen/air mixtures // *J. Hazard. Mat.* – 2008. – Vol. 150, no. 3. – Pp. 573–581.
  12. *Shoshin Y., Gorecki G., Jarosinski J., Fodemski T.* Experimental study of limit lean methane/air flame in a standard flammability tube using particle image velocimetry method // *Combust. Flame*. – 2010. – Vol. 157, no. 5. – Pp. 884–892.
  13. *Hillebrandt W., Niemeyer J. C.* Type Ia supernova explosion models // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* – 2000. – Vol. 38. – P. 191.
  14. *Lovachev L. A.* The theory of limits on flame propagation in gases // *Combust. Flame*. – 1971. – Vol. 17. – P. 275.
  15. *Bregeon B., Gordon A. S., Williams F. A.* Near-limit downward propagation of hydrogen and methane flames in oxygen-nitrogen mixtures // *Combust. Flame*. – 1978. – Vol. 33. – Pp. 33–45.
  16. *Buckmaster J., Mikolaitis D.* A flammability-limit model for upward propagation through lean methane/air mixtures in a standard flammability tube // *Combust. Flame*. – 1982. – Vol. 45. – P. 109.
  17. *Jarosinski J., Strehlow R. A., Azarbarzin A.* The mechanisms of lean limit extinguishment of an upward and downward propagating flame in a standard flammability tube // 19th Symposium on Combustion (The Combustion Institute). – 1982. – P. 1549.
  18. *von Lavante E., Strehlow R. A.* The mechanism of lean limit flame extinction // *Combust. Flame*. – 1983. – Vol. 49. – P. 123.
  19. *Hansel J. G., Mitchell J. W., Klotz H. C.* Predicting and controlling flammability of multiple fuel and multiple inert mixtures // *Plant/Operations Progr.* – 1992. – Vol. 11. – Pp. 213–217.
  20. *Zhao F., Rogers W. J., Sam Mannan M.* Experimental measurement and numerical analysis of binary hydrocarbon mixture flammability limits // *Process Safety and Environmental Protection*. – 2009. – Vol. 87, no 2. – Pp. 94–104.
  21. *Shoshin Y., Tecce L., Jarosinski J.* Experimental and computational study of lean limit methane-air flame propagating upward in a 24 mm diameter tube // *Combust. Sci. Technol.* – 2008. –

- Vol. 180. – Pp. 1812–1828.
22. *Shoshin Y. L., de Goey L. P. H.* Experimental study of lean flammability limits of methane/hydrogen/air mixtures in tubes of different diameters // *Exp. Thermal Fluid Sci.* – 2010. – Vol. 34. – Pp. 373–380.
  23. *Wang T., Liang H., Luo Z., Su B., Liu L., Su Y.* Near flammability limits behavior of methane-air mixtures with influence of flammable gases and nitrogen: An experimental and numerical research // *Fuel.* – 2021. – Vol. 294. – P. 120550.
  24. *Law C. K., Egolfopoulos F. N.* A unified chain-thermal theory of fundamental flammability limits // *Int. Symposium on Combustion.* – 1992. – Vol. 24, no. 1. – Pp. 137–144.
  25. *Quintiere J. G.* A theoretical basis for flammability properties // *Fire and Materials.* – 2006. – Vol. 30, no. 3. – Pp. 175–214.
  26. *Zhao F., Rogers W. J., Mannan M. S.* Calculated flame temperature (CFT) modeling of fuel mixture lower flammability limits // *J. Hazard. Mat.* – 2010. – Vol. 174. – Pp. 416–423.
  27. *Ma T.* A thermal theory for estimating the flammability limits of a mixture // *Fire Safety J.* – 2011. – Vol. 46, no. 8. – Pp. 558–567.
  28. *Di Benedetto A.* The thermal/thermodynamic theory of flammability: The adiabatic flammability limits // *Chem. Eng. Sci.* – 2013. – Vol. 99. – Pp. 265–273.
  29. *Liaw H.-J., Chen K.-Y.* A model for predicting temperature effect on flammability limits // *Fuel.* – 2016. – Vol. 178. – Pp. 179–187.
  30. *Bertolino A., Stagni A., Cuoci A., Faravelli T., Parente A., Frassoldati A.* Prediction of flammable range for pure fuels and mixtures using detailed kinetics // *Combust. Flame.* – 2019. – Vol. 207. – Pp. 120–133.
  31. *Dixon H. B.* On the movements of the flame in the explosion of gases // *Phil. Trans. A.* – 1903. – Vol. 200. – P. 315.
  32. *Payman W.* The detonation-wave in gaseous mixtures and the pre-detonation period // *Proc. Roy. Soc. A (London).* – 1928. – Vol. 120. – P. 90.
  33. *Щёлкин К. И.* К теории возникновения детонации в газовых смесях в трубах // *Докл. АН СССР.* – 1939. – Т. 23. – С. 636.
  34. *Peraldi O., Knystautas R., Lee J.H.* Criteria for transition to detonation in tubes // *Proc. 21st Int. Symposium on Combustion.* – 1986. – Pp. 1629–1637.
  35. *Dorofeev S. B., Kuznetsov M. S., Alekseev V. I., Efimenko A. A., Breitung W.* Evaluation of

- limits for effective flame acceleration in hydrogen mixtures // *J. Loss Prev. Process. Ind.* – 2001. – Vol. 14. – Pp. 583–589.
36. *Kuznetsov M., Alekseev V., Matsukov I., Dorofeev S.* DDT in a smooth tube filled with a hydrogen-oxygen mixture // *Shock Waves.* – 2005. – Vol. 14, no. 3. – Pp. 205–215.
37. *Chapman W. R., Wheeler R. V.* The propagation of flame in mixtures of methane and air. Part IV. The effect of restrictions in the path of the flame // *J. Chem. Soc.* – 1926. – Vol. 129. – P. 2139.
38. *Chapman W. R., Wheeler R. V.* The propagation of flame in mixtures of methane and air. Part V. The movement of the medium in which the flame travels // *J. Chem. Soc.* – 1927. – Pp. 38–46.
39. *Robinson H., Wheeler R. V.* Explosions of methane and air: propagation through a restricted tube // *J. Chem. Soc.* – 1933. – P. 758.
40. *Щёлкин К. И.* Влияние шероховатости трубы на возникновение и распространение детонации в газах // *ЖЭТФ.* – 1940. – Т. 10. – С. 823.
41. *Oppenheim K., Soloukhin R. I.* Experiments in gasdynamics of explosion // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1973. – Vol. 5. – P. 31.
42. *Akkerman V., Bychkov V., Petchenko A., Eriksson L.-E.* Accelerating flames in cylindrical tubes with nonslip at the walls // *Combust. Flame.* – 2006. – Vol. 145. – P. 206.
43. *Ландау Л. Д., Луфицкий Е. М.* Теоретическая физика. т. VI. Гидродинамика. – Москва: Наука, 1986.
44. *Clavin P., Masse L., Williams F. A.* Comparison of flame-front instabilities with instabilities of ablation fronts in inertial-confinement fusion // *Combust. Sci. Technol.* – 2005. – Vol. 177. – P. 979.
45. *Mallard E., Le Chatelier H. L.* Sur la vitesse de propagation de l'inflammation dans les melanges explosifs // *C.R. Acad. Sci. Ser. Gen.* – 1881. – Vol. 93. – P. 145.
46. *Mallard E. E., Le Chatelier H.* Recherches experimentelles et theoriques sur la combustion des melanges gazeux explosif // *Annls. Mines, Paris, Partie Scientifique et Technique.* – 1883. – Vol. 8, no. 4. – P. 274.
47. *Linnett J. W.* Fourth symposium (international) on combustion, P. 20. – Baltimore: Williams and Wilkins, 1953.
48. *Fristrom R. M.* Definition of Burning Velocity and a Geometric Interpretation of the Effects of

- Flame Curvature // *Phys. Fluids*. – 1965. – Vol. 8. – P. 273.
49. Andrews G. E., Bradley D. The burning velocity of methane-air mixtures // *Combust. Flame*. – 1972. – Vol. 18. – P. 133.
50. Cai X., Su L., Wang J., Hu E., Huang Z. Cellularity and self-similarity of hydrogen expanding spherical flames at high pressures // *Phys. Fluids*. – 2023. – Vol. 35. – P. 064119.
51. Bosschaart K. J., de Goey L. P. H. The laminar burning velocity of flames propagating in mixtures of hydrocarbons and air measured with the heat flux method // *Combust. Flame*. – 2004. – Vol. 136. – Pp. 261–269.
52. Clingman W. H., Brokaw R. S., Pease R. N. Burning velocities of methane with nitrogen-oxygen, argon-oxygen, and helium-oxygen mixtures // *Proc. Combust. Inst.* – 1952. – Vol. 4. – P. 310.
53. Карпов В. П., Соколик А. С. О связи между самовоспламенением и скоростями ламинарного и турбулентного горения парафиновых углеводородов // *Докл. АН СССР*. – 1961. – Т. 138. – С. 874.
54. Barassin A., Lisbet R., Combourieu J., Laffitte P. Etude de l'influence de la temperature initiale sur la vitesse normale de deflagration de melanges methane-air en fonction de la concentration // *Bull. Soc. Chim. France*. – 1967. – Vol. 7. – P. 2521.
55. Lindow R. Eine verbesserte brennermethode zur bestimmung der laminaren flammengeschwindigkeiten von brenngas/luft-gemischen // *Brennst. Warme Kraft*. – 1968. – Vol. 20. – P. 8.
56. Edmondson H., Heap M. P. The burning velocity of methane-air flames inhibited by methyl bromide // *Combust. Flame*. – 1969. – Vol. 13. – P. 472.
57. Edmondson H., Heap M. P. Ambient atmosphere effects in flat-flame measurements of burning velocity // *Combust. Flame*. – 1970. – Vol. 14. – P. 195.
58. Reed S. B., Mineur J., McNaughton J. P. The effect on the burning velocity of methane of vitiation of combustion air // *J. Inst. Fuel*. – 1971. – Vol. 44. – P. 149.
59. Gunther R., Janisch G. Measurements of burning velocity in a flat flame front // *Combust. Flame*. – 1972. – Vol. 19. – P. 49.
60. Wu C. K., Law C. K. On the determination of laminar flame speeds from stretched flames // *Proc. Combust. Inst.* – 1984. – Vol. 20. – P. 1941.
61. Iijima T., Takeno T. Effects of temperature and pressure on burning velocity // *Combust. Flame*. – 1986. – Vol. 65. – P. 35.

- 
62. Kawakami T., Okajima S., Inuma K. Measurement of slow burning velocity by zero-gravity method // *Proc. Combust. Inst.* – 1988. – Vol. 22. – P. 1609.
63. Clarke A., Stone R., Beckwith P. Measuring the laminar burning velocity of methane/diluent/air mixtures within a constant-volume combustion bomb in a micro-gravity environment // *J. Inst. Energy.* – 1995. – Vol. 68. – P. 130.
64. Chao B. H., Egolfopoulos F. N., Law C. K. Structure and propagation of premixed flame in nozzle-generated counterflow // *Combust. Flame.* – 1997. – Vol. 109. – P. 620.
65. Smith G. et al. – [www.me.berkeley.edu/gri\\_mech/](http://www.me.berkeley.edu/gri_mech/).
66. Konnov A. Implementation of the NCN pathway of prompt-NO formation in the detailed reaction mechanism // *Combust. Flame.* – 2009. – Vol. 156. – P. 2093.
67. Darrieus G. неопубликованная работа, представленная на La Technique Moderne, 1938.
68. Darrieus G. Propagation d'un front de flamme // неопубликованная работа, представленная на Le Congres de Mecanique Appliquee, 1945.
69. Ландау Л. Д. К теории медленного горения // *ЖЭТФ.* – 1944. – Т. 14, № 6. – С. 240.
70. Wheeler R. V. The propagation of flame in mixtures of methane and air. The “uniform movement.” // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1914. – Vol. 105. – P. 2606.
71. Mason W., Wheeler R. V. The “uniform movement” during the propagation of flame // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1917. – Vol. 111. – P. 1044.
72. Payman W., Wheeler R. V. The propagation of flame through tubes of small diameter // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1918. – Vol. 113. – P. 656.
73. Payman W. The propagation of flame in complex gaseous mixtures. Part 1. Limit mixtures and the Uniform Movement of Flame in such Mixtures // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1919. – Vol. 115. – P. 1436.
74. Payman W. The propagation of flame in complex gaseous mixtures. Part IV. The uniform movement of flame in mixtures of methane, oxygen, and nitrogen. “Maximum-speed mixtures” of methane and hydrogen in air // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1920. – Vol. 117. – P. 48.
75. Payman W. The propagation of flame in complex gaseous mixtures. Part V. The interpretation of the law of speeds // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1923. – Vol. 123. – P. 412.
76. Mason W., Wheeler R. V. The propagation of flame in mixtures of methane and air. Part II. Vertical propagation. Part III. Propagation in currents of the mixtures // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1920. – Vol. 117. – P. 1227.

77. *Mason W., Wheeler R. V.* The propagation of flame in mixtures of methane and air. Part I. Horizontal propagation // *J. Chem. Soc. Trans.* – 1920. – Vol. 117. – P. 36.
78. *Mason W.* The speed of the uniform movement of flame in mixtures of the paraffins with air // *J. Chem. Soc., Trans.* – 1923. – Vol. 123. – P. 210.
79. *Coward H. F., Greenwald H. P.* Propagation of flame in mixtures of natural gas and air // *U.S. Bureau of Mines.* – 1928. – Tech. Paper 427.
80. *Coward H. F., Hartwell F. J.* Studies in the mechanism of flame movement. Part I. The uniform movement of flame in mixtures of methane and air, in relation to tube diameter // *J. Chem. Soc.* – 1932. – P. 1996.
81. *Coward H. F., Hartwell F. J.* Studies in the mechanism of flame movement. Part II. The fundamental speed of flame in mixtures of methane and air // *J. Chem. Soc.* – 1932. – P. 2676.
82. *Lewis B., Elbe G.* On the theory of flame propagation // *J. Chem. Phys.* – 1934. – Vol. 2, no. 8. – Pp. 537–546.
83. *Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.* К теории равномерного распространения пламени // *Докл. АН СССР.* – 1938. – Т. 19. – С. 693.
84. *Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.* Теория теплового распространения пламени // *ЖФХ.* – 1938. – Т. 12, вып. 1. – С. 100.
85. *Зельдович Я. Б.* К теории распространения пламени // *ЖФХ.* – 1948. – Т. 22, вып. 1. – С. 27.
86. *Markstein G. H.* Experimental and theoretical studies of flame front stability // *J. Aeron. Sci.* – 1951. – Vol. 18. – P. 199.
87. *Markstein G. H.* *Nonsteady Flame Propagation.* – New York: Pergamon, 1964.
88. *Михельсон В. А.* Диссертация: О нормальной скорости воспламенения гремучих газовых смесей. – Московский университет, 1890.
89. *Eckhaus W.* Theory of flame-front stability // *J. Fluid Mech.* – 1961. – Vol. 10. – P. 80.
90. *Bush W. B., Fendell F. E.* Asymptotic analysis of laminar flame propagation for general Lewis numbers // *Combust. Sci. Technol.* – 1970. – Vol. 1. – P. 421.
91. *Fendell F. E.* Asymptotic analysis of premixed burning with large activation energy // *J. Fluid Mech.* – 1972. – Vol. 56. – P. 81.
92. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* К анализу задачи о тепловом распространении пламени

- методом сращиваемых асимптотических разложений // *ПММ.* – 1972. – Т. 36, вып. 4. – С. 659.
93. Берман В. С., Рязанцев Ю. С. Асимптотический анализ стационарного распространения фронта двухстадийной экзотермической реакции в газе // *ПММ.* – 1973. – Т. 37, вып. 6. – С. 1049.
94. Williams F. A. Quasi-steady gas-phase flame theory in unsteady burning of a homogeneous solid propellant // *AIAA J.* – 1973. – Vol. 11, no. 9. – P. 1328.
95. Matalon M., Matkowsky B. J. Flames as gasdynamic discontinuities // *J. Fluid Mech.* – 1982. – Vol. 124. – P. 239.
96. Pelce P., Clavin P. Influences of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames // *J. Fluid Mech.* – 1982. – Vol. 124. – P. 219.
97. Class A. G., Matkowsky B. J., Klimenko A. Y. A unified model of flames as gasdynamic discontinuities // *J. Fluid Mech.* – 2003. – Vol. 491. – P. 11.
98. Clavin P., Graña-Otero J. C. Curved and stretched flames: the two Markstein numbers // *J. Fluid Mech.* – 2011. – Vol. 686. – P. 187.
99. Clavin P., Joulin G. Flamelet library for turbulent wrinkled flames // *Turbulent Reactive Flows* (ed. Borghi R., Murthy S. N. B.) – Lecture Notes in Engineering (Springer, 1989). – Vol. 40. – Pp. 213–240.
100. Bechtold J. K., Matalon M. The dependence of the Markstein length on stoichiometry // *Combust. Flame.* – 2001. – Vol. 127. – P. 1906.
101. Bradley D., Gaskell P. H., GU X. J. Burning Velocities, Markstein Lengths, and Flame Quenching for Spherical Methane-Air Flames: A Computational Study // *Combust. Flame.* – 1996. – Vol. 104. – P. 176.
102. Hassan M. I., Aung K. T., Faeth G. M. Measured and Predicted Properties of Laminar Premixed Methane/Air Flames at Various Pressures // *Combust. Flame.* – 1998. – Vol. 115. – P. 539.
103. Gu X. J., Haq M. Z., Lawes M., Woolley R. Laminar Burning Velocity and Markstein Lengths of Methane–Air Mixtures // *Combust. Flame.* – 2000. – Vol. 121. – P. 41.
104. Davis S. G., Quinard J., Searby G. Markstein Numbers in Counterflow, Methane- and Propane-Air Flames: A Computational Study // *Combust. Flame.* – 2002. – Vol. 130. – P. 123.
105. Liaoa S. Y., Jianga D. M., Cheng Q. Determination of laminar burning velocities for natural gas // *Fuel.* – 2004. – Vol. 83. – P. 1247.

- 
106. *Sivashinsky G. I.* Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames // *Acta Astronaut.* – 1977. – Vol. 4. – P. 1177.
  107. *Sivashinsky G. I., Clavin P.* On the nonlinear theory of hydrodynamic instability in flames // *J. Physique.* – 1987. – Vol. 48. – P. 193.
  108. *Dugger G. L.* Effect of initial mixture temperature on flame speed of methane-air, propane-air and ethylene-air mixtures // *Nat. Com. Aer.* – 1952. – Report 1061.
  109. *Davy H.* Some new experiments and observations on the combustion of gaseous mixtures, with an account of a method of preserving a continued light in mixtures of inflammable gases and air without flame // *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* – 1817. – Vol. 107 – P. 77.
  110. *Williams F. W., Indritz D., Sheinson R. S.* Concentration limits for n-butane low temperature flames // *Combust. Sci. Technol.* – 1975. – Vol. 11. – P. 67.
  111. *Ju Y.* Understanding cool flames and warm flames // *Proceedings of the Combustion Institute.* – 2021. – Vol. 38. – P. 83.
  112. *Bychkov V. V., Golberg S. M., Liberman M. A., Eriksson L. E.* Propagation of curved stationary flames in tubes // *Phys. Rev. E.* – 1996. – Vol. 54. – P. 3713.
  113. *Travnikov O. Yu., Bychkov V. V., Liberman M. A.* Numerical studies of flames in wide tubes: Stability limits of curved stationary flames // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 61. – P. 468.
  114. *Liberman M. A., Ivanov M. F., Peil O. E., Valiev D. M., Eriksson L.-E.* Numerical studies of curved stationary flames in wide tubes // *Combust. Theory Modelling.* – 2003. – Vol. 7. – P. 653.
  115. *Almarcha C., Denet B., Quinard J.* Premixed flames propagating freely in tubes // *Combust. Flame.* – 2015. – Vol. 162. – P. 1225.
  116. *Thual O., Frisch U., Henon M.* Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flames // *J. Phys. (France).* – 1985. – Vol. 46. – P. 1485.
  117. *Gutman S., Sivashinsky G. I.* The cellular nature of hydrodynamic flame instability // *Physica D.* – 1989. – Vol. 43. – P. 129.
  118. *Joulin G., Cambay P.* On a tentative, approximate evolution equation for markedly wrinkled premixed flames // *Combust. Sci. Technol.* – 1992. – Vol. 81. – Pp. 243–256.
  119. *Filyand L., Sivashinsky G. I., Frankel M. L.* On self-acceleration of outward propagating wrinkled flames // *Physica D.* – 1994. – Vol. 72. P. – 110.
  120. *Joulin G.* Nonlinear hydrodynamic instability of expanding flames: Intrinsic dynamics // *Phys. Rev. E.* – 1994. – Vol. 50. – P. 2030.

- 
121. *Mikishev A. B., Sivashinsky G. I.* Quasi-equilibrium in upward propagating flames // *Phys. Lett. A.* – 1993. – Vol. 175. – P. 409.
  122. *Rahibe M., Aubry N., Sivashinsky G. I., Lima R.* Formation of wrinkles in outwardly propagating flames // *Phys. Rev. E.* – 1995. – Vol. 52. – P. 3675.
  123. *Rahibe M., Aubry N., Sivashinsky G. I.* Stability of pole solutions for planar propagating flames // *Phys. Rev. E.* – 1996. – Vol. 54. – P. 4958.
  124. *Kupervasser O., Olami Z., Procaccia I.* Geometry of Developing Flame Fronts: Analysis with Pole Decomposition // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – Vol. 76. – P. 146.
  125. *Olami Z., Galanti B., Kupervasser O., Procaccia I.* Random noise and pole dynamics in unstable front propagation // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 55. – P. 2649.
  126. *Galanti B., Kupervasser O., Olami Z., Procaccia I.* Dynamics and wrinkling of radially propagating fronts inferred from scaling laws in channel geometries // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 80. – P. 2477.
  127. *Rahibe M., Aubry N., Sivashinsky G. I.* Instability of pole solutions for planar propagating flames in sufficiently large domains // *Combust. Theory Modelling.* – 1998. – Vol. 2. – P. 19.
  128. *Bychkov V. V., Liberman M. A.* Dynamics and stability of premixed flames // *Phys. Rep.* – 2000. – Vol. 325. – P. 115.
  129. *Vaynblat D., Matalon M.* Stability of pole solutions for planar propagating flames: I. Exact eigenvalues and eigenfunctions // *SIAM J. Appl. Math.* – 2000. – Vol. 60, no. 2. – P. 679.
  130. *Vaynblat D., Matalon M.* Stability of pole solutions for planar propagating flames: II. Properties of eigenvalues/eigenfunctions and implications to stability // *SIAM J. Appl. Math.* – 2000. – Vol. 60, no. 2. – P. 703.
  131. *Creta F., Lapenna P. E., Lamioni R., Fogla N., Matalon M.* Propagation of premixed flames in the presence of Darrieus–Landau and thermal diffusive instabilities // *Combust. Flame.* – 2020. – Vol. 216. – P. 256.
  132. *Williams F. A.* Turbulent combustion // *The mathematics of combustion.* 1985. – Society for Industrial and Applied Mathematics. – Pp. 97-131.
  133. *Kerstein A. R., Ashurst W. T., Williams F. A.* Field equation for interface propagation in an unsteady homogeneous flow field // *Phys. Rev. A.* – 1988. – Vol. 37. – P. 2728.
  134. *Frankel M. L.* An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows // *Phys. Fluids A.* – 1990. – Vol. 2. – P. 1879.

- 
135. *Hayes W. D.* The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity // *J. Fluid Mech.* – 1957. – Vol. 2. – P. 595.
136. *Жданов С.К., Трубников Б.А.* Нелинейная теория неустойчивости фронта пламени // *ЖЭТФ.* – 1989. Т. 95. – С. 114.
137. *Bychkov V. V.* Nonlinear equation for a curved stationary flame and the flame velocity // *Phys. Fluids.* – 1998. – Vol. 10. – P. 2091.
138. *Minaev S., Gubernov V.* Nonlinear analysis of flame hydrodynamic instability at large gas expansion ratio // *Combust. Theory Modelling.* – 2022. – Vol. 26, no. 4. – Pp. 654–668.
139. *Борисов В. И.* О скорости равномерного распространения ламинарного пламени в плоском канале // *Физика Горения и Взрыва.* – 1978. – н. 2. – С. 26.
140. *Zel'dovich Ya. B., Istratov A. G., Kidin N. I., Librovich V. B.* Flame propagation in tubes: Hydrodynamics and stability // *Combust. Sci. Technol.* – 1980. – Vol. 24. – Pp. 1–13.
141. *Pelce P.* Effect of gravity on the propagation of flames in tubes // *J. de Physique.* – 1985. – Vol. 46., no. 4. – Pp. 503–510.
142. *Bychkov V. V.* Bubble motion in a horizontal tube and the velocity estimate for curved flames // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 55. – P. 6898.
143. *Bychkov V. V., Liberman M.A.* Dynamics and stability of premixed flames // *Phys. Rep.* – 2000. – Vol. 325. – P. 115.
144. *Льюис Б., Эльбе Г.* Горение, пламя и взрывы в газах – Москва: Мир, 1968.
145. *Clavin P.* Dynamic behavior of premixed flame fronts in laminar and turbulent flows // *Prog. Energy Combust. Sci.* – 1985. – Vol. 11. – P. 1.
146. *Clavin P., Garcia P.* The influence of the temperature-dependence on the dynamics of flame fronts // *J. Mec. Theor. Appl.* – 1983. – Vol. 2. – P. 245.
147. *Clavin P., Joulin G.* Premixed flames in large scales and high intensity turbulent flow // *J. Phys. Lett.* – 1983. – Vol. 44. – Pp. L1–L12.
148. *Clavin P., Nicoli C.* Effects of heat Losses on the limits of stability of premixed flames propagating downwards // *Combust. Flame.* – 1985. – Vol. 60. – Pp. 1–14.
149. *Clavin P., Joulin G.* High-frequency response of premixed flames to weak stretch and curvature: a variable-density analysis // *Combust. Theory Model.* – 1997. – Vol. 1. – Pp. 429–446.
150. *Clavin P., Searby G.* Unsteady response of chain-branching premixed-flames to pressure waves // *Combust. Theory Model.* – 2008. – Vol. 12. – P. 545–567.

151. *Giannakopoulos G. K., Gatzoulis A., Frouzakis Ch. E., Matalon M., Tomboulides A. G.* Consistent definitions of “flame displacement speed” and “Markstein length” for premixed flame propagation // *Combust. Flame.* – 2015. – Vol. 162. – P. 1249.
152. *Matalon M.* On flame stretch // *Combust. Sci. Technol.* – 1983. – Vol. 31. – P. 169.
153. *Buckmaster J. D.* Two examples of a stretched flame // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.* – 1982. – Vol. 35. – P. 249.
154. *Chung S. H., Law C. K.* An invariant derivation of flame stretch // *Combust. Flame.* – 1984. – Vol. 55. – P. 123.
155. *Candel S. M., Poinsot T. J.* Flame Stretch and the Balance Equation for the Flame Area // *Combust. Sci. Technol.* – 1990. – Vol. 70. – P. 1.
156. *Gibbs J. W.* On the equilibrium of heterogeneous substances // *Trans. Conn. Acad.* – 1876, 1878. – Vol. 3. – P. 108.
157. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1974.
158. *Lee D. K., Kim M.-U., Shin H. D.* Stability of inclined planar flames as a local approximation of weakly curved flames // *Combust. Theory Modelling.* – 2005. – Vol. 9, no. 4. – P. 587.
159. *Searby G.* Experimental studies of instabilities of premixed flames // *Proc. Int. Conf. on Combustion and Detonation. Zel'dovich memorial II.* – Moscow, 2004.
160. *Зельдович Я. Б.* Замечания о горении быстрого потока в трубе // *ЖТФ.* – 1944. – Т. 14. – С. 162.
161. *Scurlock A. C.* Flame stabilization and propagation in high-velocity gas streams // *Meteor Report no. 19.* – Massachusetts Institute of Technology, 1948.
162. *Tsien H. S.* Influence of flame front on the flow field // *J. Appl. Mech.* – 1951. – Vol. 18. – P. 188.
163. *Черный Г. Г.* Течение газа в трубе при наличии фронта пламени // *Теоретическая гидро-механика.* – 1954. – Т. 4, н. 12. – С. 31.
164. *Uberoi M. S.* Flow field of flame in a channel // *Phys. Fluids.* – 1959. – Vol. 2 – P. 72.
165. *Progress report UMR-33* // Aeronautical research center. – University of Michigan, 1949.
166. DigitizeIt является зарегистрированной торговой маркой корпорации Vormisofit. – <http://www.digitizeit.de>.
167. *Tritton D. J.* Physical Fluid Dynamics. – New York: Oxford University Press, 1988.
168. *Marshall J., Plumb R.A.* Atmosphere, Ocean, and Climate Dynamics. – Academic Press, 2007.

- 
169. *Batley G. A., McIntosh A.C., Brindley J.* The baroclinic effect in combustion // *Math. Computer Modelling.* – 1996. – Vol. 24, n0. 8. – P. 165.
170. *Batchelor G. K.* An introduction to fluid dynamics. – Cambridge University Press, 2000.
171. *Roetzel W., Spang B.* Typical values of overall heat transfer coefficients // *VDI Heat Atlas.* – Heidelberg: Springer, 2010.
172. Online engineering facility of Colorado State University. – [http://www.engr.colostate.edu/allan/thermo/page12/adia\\_flame/Flamemain.html](http://www.engr.colostate.edu/allan/thermo/page12/adia_flame/Flamemain.html).
173. *Law C. K.* A Compilation of Experimental Data on Laminar Burning Velocities // Reduced kinetic mechanisms for applications in combustion systems. – ed: Peters N., Rogg B. – New York: Springer, 1992.
174. *Shoshin Y., Jarosinski J.* On extinction mechanism of lean limit methane–air flame in a standard flammability tube // *Proc. Combustion Institute.* – 2009. – Vol. 32. – P. 1043.
175. *Muntean V., Higuera F. J.* Upward Propagation of Very Lean Methane-Air Flames in Vertical Tubes // *Flow Turbulence Combust.* – 2016. – Vol. 96. – P. 263.
176. *Taylor S. C.* Ph.D. thesis: Burning velocity and the influence of flame stretch. – University of Leeds, 1991.
177. *Anderson D. G.* Iterative procedures for nonlinear integral equations // *JACM.* – 1965. – Vol. 12, no. 4. – P. 547.
178. *Olshanskii M. A., Tyrtshnikov E. E.* Iterative methods for linear systems: theory and applications // *SIAM.* – Philadelphia, 2014.
179. *Atemiya T.* Advanced econometrics. – Harvard University Press, 1985.
180. *Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б., Истратов А.Г.* К теории теплодиффузионной неустойчивости ламинарного пламени // *Прикладная механика и техническая физика.* – 1962. – Т. 4. – С. 21.
181. *Searby G., Rochwerger D.* A parametric acoustic instability in premixed flames // *J. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 231. – P. 529.
182. *Bedat B., Cheng R. K.* Effects of buoyancy on premixed flame stabilization // *Combust. Flame.* – 1996. – Vol. 107. – P. 13.
183. *Bedat B., Cheng R. K., Kostiuik L. W.* Effects of buoyancy on lean premixed V-flames. Part I: Laminar and turbulent flame structures // *Combust. Flame.* – 1999. – Vol. 116. – P. 360.
184. *Galizzi C., Escudie D.* Experimental analysis of an oblique laminar flame front propagating in a

- stratified flow // *Combust. Flame.* – 2006. – Vol. 145. – P. 621.
185. *Birbaud A. L., Ducruix S., Durox D., Candel S.* The nonlinear response of inverted “V” flames to equivalence ratio nonuniformities // *Combust. Flame.* – 2008. – Vol. 154. – P. 356.
186. Maple 17 является зарегистрированной торговой маркой корпорации Waterloo Maple. – <http://www.maplesoft.com>.
187. *Chorin A. J.* A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems // *J. Computational Physics.* – 1997. – Vol. 135. – Pp. 118–125.
188. *Clausen J. R.* Entropically damped form of artificial compressibility for explicit simulation of incompressible flow // *Phys. Rev. E.* – 2013. – Vol. 87. – P. 013309.
189. *Fani A., Camarri S., Salvetti M. V.* Stability analysis and control of the flow in a symmetric channel with a sudden expansion // *Phys. Fluids.* – 2012. – Vol. 24, no 8. – P. 084102.
190. *Moallemi N., Brinkerhoff J. R.* Numerical analysis of laminar and transitional flow in a planar sudden expansion // *Comput. Fluids.* – 2016. – Vol. 140. – Pp. 209–221.
191. *Debuyschere R., Siconolfi L., Rimez B., Gallaire F., Scheid B.* Influence of the inlet velocity profile on the flow stability in a symmetric channel expansion // *J. Fluid Mech.* – 2020. – Vol. 909. – P. A13.
192. *Durst F., Melling A., Whitelaw J. H.* Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion // *J. Fluid Mech.* – 1974. – Vol. 64. – P. 111.
193. *Cherdron W., Durst F., Whitelaw J. H.* Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions // *J. Fluid Mech.* – 1978. – Vol. 84. – P. 13.
194. *Durst F., Pereira J. C. F., Tropea C.* The plane Symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* – 1993. – Vol. 248. – P. 567.
195. *Rusak Z., Hawa T.* A weakly nonlinear analysis of the dynamics of a viscous flow in a symmetric channel with a sudden expansion // *Phys. Fluids.* – 1999. – Vol. 11. – P. 3629.
196. *Mishra S., Jayaraman K.* Asymmetric flows in planar symmetric channels with large expansion ratio // *Int. J. Numerical Methods in Fluids.* – 2002. – Vol. 38. – P. 945.
197. *Tsui Y.-Y., Wang H.-W.* Side-wall effects on the bifurcation of the flow through a sudden expansion // *Int. J. Numerical Methods in Fluids.* – 2007. – Vol. 56. – P. 167.
198. *Mosaddeghi M.* Two dimensional simulation of laminar flow by three- jet in a semi-confined space // *Nonlinear Engineering.* – 2020. – Vol. 9. – P. 111.
199. *Рочу П.* Вычислительная гидродинамика. – Москва: Мир, 1980.

- 
200. *Anderson D. A., Tannehill J. C., Pletcher R. H.* Computational fluid mechanics and heat transfer. – Washington: Hemisphere Pub. Corp., 1984.
  201. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. – Berlin: Springer, 1999.
  202. *Blazek J.* Computational fluid dynamics: Principles and applications. – Amsterdam: Elsevier, 2001.
  203. *Erturk E., Corke T. C., Gokcol C.* Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*. – 2005. – Vol. 48. – P. 747.
  204. *Borok S., Ansumali S., Karlin I. V.* Kinetically reduced local Navier-Stokes equations for simulation of incompressible viscous flows // *Phys. Rev. E*. – 2007. – Vol. 76. – P. 066704.
  205. *Delorme Y. T., Puri K., Nordstrom J., Linders V., Dong S., Frankel S. H.* A simple and efficient incompressible Navier–Stokes solver for unsteady complex geometry flows on truncated domains // *Computers and Fluids*. – 2017. – Vol. 150. – P. 84.
  206. *Zhang J.-K., Dong H., Zhou E.-Z., Li B.-W., Tian X.-Y.* A combined method for solving 2D incompressible flow and heat transfer by spectral collocation method and artificial compressibility method // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 2017. – Vol. 112. – P. 289.
  207. *MacCormack R. W.* The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering // *AIAA*. – 1969. – paper 69-354.
  208. *Gottlieb D., Turkel E.* Dissipative Two-Four Methods for Time-Dependent Problems // *Math. Comput.* – 1976. – V. 30, no. 136. – P. 703.
  209. *Bayliss A., Parikh P., Maestrello L., Turkel E.* A fourth-order scheme for the unsteady compressible Navier-Stokes equations // 18th Fluid Dynamics and Plasmadynamics and Lasers Conference. – 1985. – P. 1.
  210. *Hixon R.* On increasing the accuracy of MacCormack schemes for aeroacoustic applications // *AIAA*. – 1997. – Document 97-1586-CP.

## Приложения [А1,А4,А7]

### Приложение А: Свойства оператора $\hat{\mathcal{H}}$

#### 1. Доказательство тождества $\hat{\mathcal{H}}^2 = -1$

Докажем, что  $\hat{\mathcal{H}}$  удовлетворяет операторному тождеству  $\hat{\mathcal{H}}^2 = -1$ , которое справедливо на пространстве периодических функций  $[a(x+2) = a(x)]$ , аналитических в некоторой окрестности оси  $x$  и имеющих нулевое среднее

$$\int_{-1}^{+1} dx a(x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Для этого перепишем (4.33) в виде контурного интеграла

$$\left(\hat{\mathcal{H}}a\right)(x) = \frac{z'_+}{4} \int_{C_1} dx_1 \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_1 - z_+) \right\} a(x_1), \quad z_+ = x + if(x), \quad (\text{A.2})$$

где  $z_+ = x + if(x)$  и контур  $C_1 = C_1^- \cup C_1^+$  в плоскости комплексного  $x_1$  показан на Рис. 64. Тогда

$$\left(\hat{\mathcal{H}}^2 a\right)(x) = \left(\hat{\mathcal{H}}\left(\hat{\mathcal{H}}a\right)\right)(x) = \frac{z'_+}{4} \int_{C_1} dx_1 \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_1 - z_+) \right\} \frac{z'_1}{4} \int_{C_2} dx_2 \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_2 - z_1) \right\} a(x_2),$$

где  $z_2 = x_2 + if(x_2)$ , а контур  $C_2 = C_2^- \cup C_2^+$  интегрирования по  $x_2$  охватывает контур  $C_1$  как показано на Рис. 64. Контур  $C_1, C_2$  выбираются так, чтобы все возможные особенности подынтегрального выражения, кроме полюса котангенса, оставались над  $C_2^+$  или под  $C_2^-$ , что при сделанных предположениях о входящих в него функциях всегда возможно. Поменяв порядок интегрирований, интеграл по  $x_1$  может быть вычислен с помощью формулы  $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = -1 + \operatorname{ctg}(x - y)(\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \frac{dz_1}{4} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_1 - z_+) \right\} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_2 - z_1) \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_2 - z_+) \right\} \int_{C_1} d \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{2}(z_1 - z_2) \right\}}{\sin \left\{ \frac{\pi}{2}(z_1 - z_+) \right\}}. \end{aligned}$$

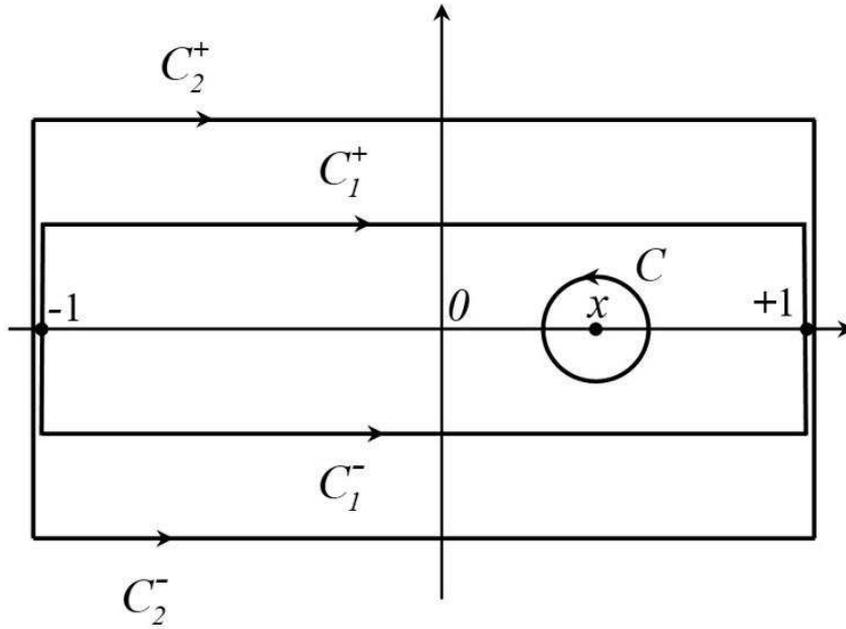


Рис. 64: Контуры интегрирования в комплексной области, используемые в формулах (А.2)–(А.3).

Ввиду периодичности подынтегрального выражения, вклад здесь даёт лишь изменение комплексной фазы аргумента логарифма. Это изменение равно:  $2\pi$ , когда  $x_1$  пробегает  $C_1^+$ , а  $x_2 \in C_2^+$ ;  $(-2\pi)$ , когда  $x_1$  пробегает  $C_1^-$ , а  $x_2 \in C_2^-$ ; нуль в оставшихся двух случаях. Учитывая также (А.1), находим

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathcal{H}}^2 a)(x) &= \frac{iz'_+}{4} \left[ \int_{C_2^-} - \int_{C_2^+} \right] dx_2 a(x_2) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_2 - z_+) \right\} \\
 &= \frac{iz'_+}{4} \int_C dx_2 a(x_2) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_2 - z_+) \right\} \\
 &= \frac{iz'_+}{4} 2\pi i \cdot \operatorname{res} a(x_2) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2}(z_2 - z_+) \right\} \Big|_{x_2=x} = -a(x), \tag{А.3}
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

## 2. Другие тождества и формулы

Пусть функция  $a(x)$  является периодической [ $a(x+2) = a(x)$ ] с нулевым средним. Тогда функции

$$a^+ = (1 + if')^{-1} (1 + i\hat{\mathcal{H}}) a, \quad a^- = (1 + if')^{-1} (1 - i\hat{\mathcal{H}}) a$$

в силу тождества  $\hat{\mathcal{H}}^2 a = -a$  удовлетворяют

$$\left(1 - i\hat{\mathcal{H}}\right) [(1 + if')a^+] = 0, \quad \left(1 + i\hat{\mathcal{H}}\right) [(1 + if')a^-] = 0. \quad (\text{A.4})$$

Эти тождества означают, что функцию  $a^+(x)$  [ $a^-(x)$ ] можно рассматривать как ограничение на фронт функции, аналитической и ограниченной в области  $y < f(x)$  [ $y > f(x)$ ]. Действительно, функция

$$A^+(z) = \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} (1 + if'(\tilde{x})) a^+(\tilde{x}) \text{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{z} - z) \right\}, \quad \tilde{z} = \tilde{x} + if(\tilde{x})$$

является аналитической, периодической по  $x$  и ограниченной в области  $y < f(x)$ , причём при  $y \rightarrow -\infty$  имеем

$$A^+(z) \rightarrow \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} (1 + if'(\tilde{x})) a^+(\tilde{x}) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} \left( [1 + i\hat{\mathcal{H}}] a \right) (\tilde{x}) = 0,$$

поскольку  $\int_{-1}^{+1} dx a(x) = 0$ , а при  $z \rightarrow x + if(x)$

$$\begin{aligned} A^+(z) &\rightarrow \frac{a^+(x)}{2} + \frac{i}{4} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} (1 + if'(\tilde{x})) a^+(\tilde{x}) \text{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} \\ &= \frac{a^+(x)}{2} + i(1 + if(x))^{-1} \left( \hat{\mathcal{H}} [(1 + if')a^+] \right) (x) = \frac{a^+(x)}{2} + \frac{a^+(x)}{2} = a^+(x), \end{aligned}$$

где было использовано (A.4). Поэтому  $A^+(z)$  удовлетворяет тождеству (см. §5.2)

$$A^+(z) - \frac{i}{2} \int_{-1+if(-1)}^{1+if(1)} d\tilde{z} A^+(\tilde{z}) \text{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{z} - z) \right\} = 0, \quad z = x + if(x)$$

которое эквивалентно (A.4). Аналогично рассматривается  $a^-(x)$ .

Заметим теперь, что поскольку произведение аналитических, периодических по  $x$  и обращающихся в нуль при  $y \rightarrow -\infty$  функций также обладает этими свойствами, для двух функций  $a(x), b(x)$  имеем

$$A^+(z)B^+(z) - \frac{i}{2} \int_{-1+if(-1)}^{1+if(1)} d\tilde{z} A^+(\tilde{z})B^+(\tilde{z}) \text{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{z} - z) \right\} = 0, \quad z = x + if(x),$$

или

$$\left(1 - i\hat{\mathcal{H}}\right) [(1 + if')a^+b^+] = 0.$$

Подставляя определения  $a^+, b^+$  и раскрывая скобки, получаем

$$(1 - i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ (1 + if')^{-1} \left[ ab - (\hat{\mathcal{H}}a) (\hat{\mathcal{H}}b) + ia (\hat{\mathcal{H}}b) + ib (\hat{\mathcal{H}}a) \right] \right\} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Аналогично, из тождества

$$(1 + i\hat{\mathcal{H}}) [(1 + if')a^- b^-] = 0$$

следует

$$(1 + i\hat{\mathcal{H}}) \left\{ (1 + if')^{-1} \left[ ab - (\hat{\mathcal{H}}a) (\hat{\mathcal{H}}b) - ia (\hat{\mathcal{H}}b) - ib (\hat{\mathcal{H}}a) \right] \right\} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Беря полусумму (A.5), (A.6), приходим к тождеству

$$(1 + if')\hat{\mathcal{H}} \left\{ (1 + if')^{-1} \left[ a (\hat{\mathcal{H}}b) + b (\hat{\mathcal{H}}a) \right] \right\} = (\hat{\mathcal{H}}a) (\hat{\mathcal{H}}b) - ab. \quad (\text{A.7})$$

Рассмотрим действие оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  на  $(1 + if')$ . Поскольку эта функция имеет ненулевое среднее, действие на неё оператора Гильберта в исходном представлении (4.31) не определено из-за расходимости интеграла при  $|\tilde{x}| \rightarrow \infty$ . Однако бывает удобно доопределять этот интеграл тем или иным образом. Например, для этого можно воспользоваться представлением (4.33), которое было получено для периодических функций с нулевым средним. В этом виде  $\hat{\mathcal{H}}$  хорошо определён на  $(1 + if')$ :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{H}}(1 + if'))(x) &= \frac{1 + if'(x)}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} [1 + if'(\tilde{x})] \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} \\ &= \frac{1 + if'(x)}{\pi} \ln \sin \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} \Big|_{-1}^{+1}. \end{aligned}$$

Поскольку несобственное интегрирование в точке  $\tilde{x} = x$  понимается здесь в смысле главного значения, комплексная фаза аргумента логарифма непрерывна в этой точке, и поэтому получается

$$\hat{\mathcal{H}}(1 + if') = 0. \quad (\text{A.8})$$

Рассмотрим, далее, плоское пламя ( $f = 0$ ). В этом случае оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  становится оператором Гильберта

$$(\hat{H}a)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \frac{a(\tilde{x})}{\tilde{x} - x}. \quad (\text{A.9})$$

Этот оператор коммутирует с дифференцированием по  $x$ . Более точно, если функция  $a(x)$  является периодической с нулевым средним, то, представляя (А.9) как интеграл по контуру  $C_1$  на Рис. 64 и интегрируя по частям, имеем

$$\left(\hat{H}a'\right)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} d\tilde{x} \frac{a'(\tilde{x})}{\tilde{x} - x} = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} d\tilde{x} \frac{a(\tilde{x})}{(\tilde{x} - x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_{C_1} d\tilde{x} \frac{a(\tilde{x})}{\tilde{x} - x},$$

или

$$\hat{H} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \hat{H}. \quad (\text{A.10})$$

Нетрудно вычислить действие оператора Гильберта на гармонические функции. Если  $a(x) = e^{ikx}$ ,  $k > 0$ , то функция  $a(z)$  является аналитической в верхней полуплоскости комплексного  $z$ , причём  $a(z) \rightarrow 0$  при  $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ . Поэтому по теореме Коши

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} \frac{e^{ik\tilde{z}}}{\tilde{z} - z} = 2\pi i e^{ikz}, \quad \text{Im } z > 0,$$

откуда переходом к пределу  $z \rightarrow x$  получаем

$$\pi i e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \frac{e^{ik\tilde{x}}}{\tilde{x} - x} = 2\pi i e^{ikx},$$

или

$$\hat{H} e^{ikx} = i e^{ikx}, \quad k > 0. \quad (\text{A.11})$$

Комплексное сопряжение этого равенства показывает, что

$$\hat{H} e^{ikx} = -i e^{ikx}, \quad k < 0. \quad (\text{A.12})$$

При  $k = 0$  формула (А.8) даёт  $\hat{H}1 = 0$ . Объединяя результаты для различных  $k$ , получаем

$$\hat{H} \exp(ikx) = i\chi(k) \exp(ikx), \quad (\text{A.13})$$

где

$$\chi(k) = \begin{cases} +1, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -1, & k < 0. \end{cases}$$

Наконец, тождество (А.7) в случае плоского фронта сводится к

$$\hat{H} \left[ a \left( \hat{H}b \right) + b \left( \hat{H}a \right) \right] = \left( \hat{H}a \right) \left( \hat{H}b \right) - ab. \quad (\text{A.14})$$

В частности, для  $a = b$  имеем

$$2\hat{H} \left[ a \left( \hat{H}a \right) \right] = \left( \hat{H}a \right)^2 - a^2. \quad (\text{A.15})$$

### 3. Решение уравнения (7.25)

В выводе уравнения (7.27) требуется решить соотношение (7.25) относительно фазы  $\phi_p$ . Замечая, что  $\text{Im} if = \text{Re} f$ ,  $\text{Re} if = -\text{Im} f$ , его можно переписать как

$$\text{Im}(1 + i\hat{H})(\Omega e^{i\phi_p} - u_*) = 0, \quad (\text{A.16})$$

а также как

$$\text{Re}(i - \hat{H})(\Omega e^{i\phi_p} - u_*) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Действуя оператором  $\hat{H}$  на (A.17) и используя тождество  $\hat{H}^2 = -1$ , имеем

$$\text{Re}(i\hat{H} + 1)(\Omega e^{i\phi_p} - u_*) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Из уравнений (A.16) и (A.18) следует

$$(1 + i\hat{H})(\Omega e^{i\phi_p} - u_*) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Рассмотрим уравнение

$$(1 + i\hat{H})X = 0. \quad (\text{A.20})$$

Докажем, что если доопределить оператор  $\hat{H}$  на постоянных функциях  $a(x) = C$  согласно  $\hat{H}C = iC$ , так что они также будут удовлетворять (A.20), то все решения (A.20) образуют кольцо. Во-первых, покажем, что если  $X$  есть решение (A.20), то решением является и его квадрат. С помощью тождества (A.15) пишем

$$2i\hat{H}X^2 = 2\hat{H}(X\hat{H}X) = (\hat{H}X)^2 - X^2 = -X^2 - X^2,$$

или

$$(1 + i\hat{H})X^2 = 0.$$

Ввиду линейности оператора Гильберта, сумма  $(X_1 + X_2)$  решений  $X_1, X_2$  уравнения (A.20) также есть решение:

$$(1 + i\hat{H})(X_1 + X_2) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Поскольку  $X_1^2, X_2^2$  и  $(X_1 + X_2)^2$  являются решениями (A.20), то

$$0 = (1 + i\hat{H})(X_1 + X_2)^2 = (1 + i\hat{H})(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = 2(1 + i\hat{H})(X_1X_2),$$

или

$$(1 + i\hat{H})(X_1 X_2) = 0. \quad (\text{A.22})$$

В частности, из (A.22) следует по индукции, что для любого решения  $X$  уравнения (A.20) и любого целого положительного  $n$

$$(1 + i\hat{H})X^n = 0.$$

Равенства (A.21) и (A.22) доказывают сделанное утверждение. С помощью этого результата нетрудно решить (A.19) относительно  $\phi_p$ . Предполагая сначала, что  $|\Omega e^{i\phi}/u_* - 1| < 1$  и суммируя бесконечный ряд степеней

$$\left( \frac{\Omega e^{i\phi_p}}{u_*} - 1 \right)^n,$$

умноженных на  $1/n$ , получаем

$$\begin{aligned} (1 + i\hat{H}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\Omega e^{i\phi_p}}{u_*} - 1 \right)^n &= (1 + i\hat{H}) \ln \left\{ 1 + \left( \frac{\Omega e^{i\phi_p}}{u_*} - 1 \right) \right\} \\ &= (1 + i\hat{H}) \left( \ln \frac{\Omega}{u_*} + i\phi_p \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Отделяя здесь мнимую часть, получаем окончательно

$$\phi_p = -\hat{H} (\ln \Omega - \langle \ln \Omega \rangle). \quad (\text{A.24})$$

Это решение затем аналитически продолжается ко всем  $\Omega \neq 0$ . Поскольку в окончательной формуле (A.24) оператор  $\hat{H}$  действует на функцию с нулевым средним, он может быть представлен как в виде (A.9), так и в виде интеграла по отрезку  $[-1, 1]$ :

$$\left( \hat{H} a \right) (x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\tilde{x} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x) \right\} a(\tilde{x}),$$

в котором его действие на постоянные функции даёт нуль.

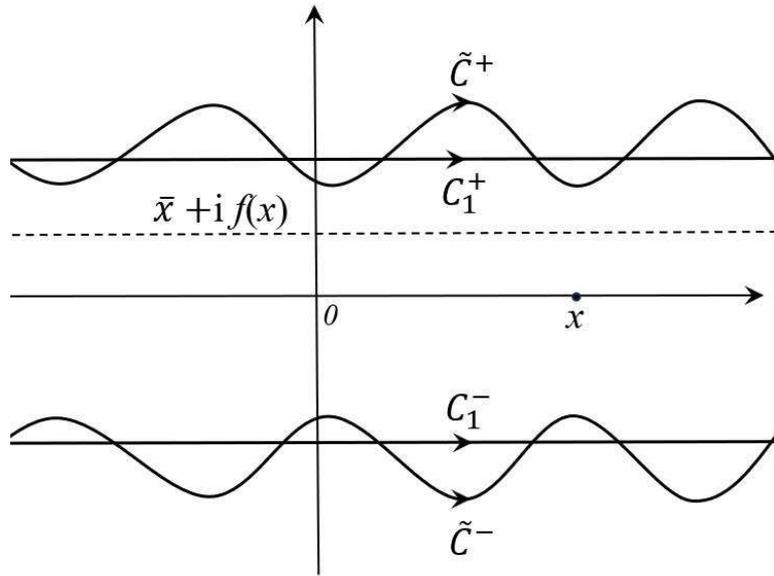


Рис. 65: Контуры интегрирования в комплексной области, используемые в формулах (В.1)–(В.4).

### Приложение В: Слабонелинейное разложение $\hat{\mathcal{H}}$ ( $|f'| \ll 1$ )

Получим асимптотическое разложение оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  по степеням  $f'$ , предполагаемого малым:  $|f'| \ll 1$ . В силу периодичности  $f(x)$  разность  $f(\tilde{x}) - f(x) = \int_x^{\tilde{x}} d\eta f'(\eta)$  также будет мала для всех  $x, \tilde{x}$  при достаточно малом  $|f'|$ . Поскольку в контексте мастер-уравнения эта малость ассоциируется с малостью  $(\theta - 1) = \alpha$ , то будем писать для краткости  $f' = O(\alpha)$ ,  $f(\tilde{x}) - f(x) = O(\alpha)$  и т.д.

Рассмотрим сначала действие  $\hat{\mathcal{H}}$  на производную функции  $a(x)$

$$\left(\hat{\mathcal{H}}a'\right)(x) = \frac{1 + if'(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} \frac{a'(\tilde{x})}{\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]}. \quad (\text{В.1})$$

Целью последующих преобразований является приведение этого интеграла к виду, в котором  $f$  не содержалась бы в знаменателе. Для этого представим его как интеграл по контуру  $C_1 = C_1^- \cup C_1^+$  в комплексной плоскости  $\tilde{x}$ , Рис. 65

$$\left(\hat{\mathcal{H}}a'\right)(x) = \frac{1 + if'(x)}{2\pi} \int_{C_1} \frac{da(\tilde{x})}{\tilde{z} - z}, \quad z = x + if(x). \quad (\text{В.2})$$

Интегрируя по частям, перепишем это выражение как интеграл по комплексной перемен-

ной  $\tilde{z} = \tilde{x} + if(\tilde{x})$

$$\left(\hat{\mathcal{H}}a'\right)(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{\tilde{C}} d\tilde{z} \frac{a(\tilde{x}(\tilde{z}))}{\tilde{z} - z}, \quad (\text{B.3})$$

где  $\tilde{C} = \tilde{C}^+ \cup \tilde{C}^-$  есть контур, пробегаемый переменной  $\tilde{z}$ , когда  $\tilde{x}$  пробегает контур  $C_1$ . Далее, деформируем  $\tilde{C}$  так, чтобы обе его ветви устремились к прямой, параллельной вещественной оси и пересекающей мнимую ось в точке  $f(x)$ , то есть  $\tilde{z} = \bar{x} + if(x)$  с вещественным  $\bar{x}$ . В рамках слабонелинейного разложения произведённые преобразования должны рассматриваться как малая деформация исходного контура  $C_1$ , и поэтому, выбрав  $\alpha$  достаточно малым, можно добиться того, чтобы он не пересекал особенности подынтегрального выражения (включая полюс  $\tilde{x} = x$ ). В итоге (B.3) принимает вид

$$\left(\hat{\mathcal{H}}a'\right)(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x} \frac{a(\tilde{x}(\bar{x}, x))}{\bar{x} - x}, \quad (\text{B.4})$$

где  $\tilde{x}(\bar{x}, x)$  есть функция переменной интегрирования  $\bar{x}$ , неявно определённая равенством

$$\bar{x} = \tilde{x} + i[f(\tilde{x}) - f(x)],$$

а  $x$  при этом играет роль параметра. Решая это соотношение последовательными приближениями

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \bar{x} - i[f(\tilde{x}) - f(x)] \\ &= \bar{x} - i[f(\bar{x}) - f(x)] - f'(\bar{x})[f(\tilde{x}) - f(x)] + \frac{i}{2}f''(\bar{x})[f(\tilde{x}) - f(x)]^2 + O(\alpha^5) \\ &= \bar{x} - i[f(\bar{x}) - f(x)] - f'(\bar{x})[f(\bar{x}) - f(x)] + i[f'(\bar{x})]^2[f(\bar{x}) - f(x)] \\ &\quad + \frac{i}{2}f''(\bar{x})[f(\bar{x}) - f(x)]^2 + O(\alpha^5), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

и подставляя результат в (B.4), окончательно приходим к следующему разложению

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathcal{H}}a'\right)(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{x}}{\bar{x} - x} \left\{ a(\bar{x}) - ia'(\bar{x})[f(\bar{x}) - f(x)] - a'(\bar{x})f'(\bar{x})[f(\bar{x}) - f(x)] \right. \\ &\quad \left. + ia'(\bar{x})[f'(\bar{x})]^2[f(\bar{x}) - f(x)] - \frac{a''(\bar{x})}{2}[f(\bar{x}) - f(x)]^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Теперь нетрудно получить соответствующую формулу для  $\hat{\mathcal{H}}a$ . Используя тождество  $d/dx \hat{H} = \hat{H}d/dx$  в первом члене в (B.6) и делая везде подстановку  $a'(x) \rightarrow a(x)$ , получаем

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathcal{H}}a\right)(x) &= \left(\hat{H}a\right)(x) + \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{x}}{\bar{x} - x} \left\{ -ia(\bar{x})[f(\bar{x}) - f(x)] - a(\bar{x})f'(\bar{x})[f(\bar{x}) - f(x)] \right. \\ &\quad \left. + ia(\bar{x})[f'(\bar{x})]^2[f(\bar{x}) - f(x)] - \frac{1}{2}a'(\bar{x})[f(\bar{x}) - f(x)]^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Заметим, что ведущая поправка к вещественному оператору Гильберта является мнимым оператором.

### Приложение С: Разложение $\hat{\mathcal{H}}$ для вытянутого пламени ( $|f'| \gg 1$ )

При рассмотрении задачи о пламени, удерживаемом тонким стержнем в быстром потоке газа, возникли выражения вида  $\hat{\mathcal{H}} a'$ , где функция  $a(x)$  терпит разрыв в нуле. А именно, такова функция  $[w] = -\alpha f'/N$ , которая при  $|f'| \gg 1$  переходит в  $-\alpha\chi(x)$  в пределе  $R \rightarrow 0$ . Для того чтобы корректно вычислять такие выражения, предел  $R \rightarrow 0$  следует брать от  $\hat{\mathcal{H}} A'$ , где  $A(x)$  является гладкой и такой, что

$$\lim_{R \rightarrow 0} A(x) = a(x).$$

Более точно,  $A(x)$  предполагается быстро меняющейся при  $|x| < R \ll 1$ , а на интервалах  $x_0 < x < 1 - x_0$  и  $-1 + x_0 < x < -x_0$  она совпадает с  $a(x)$ . Здесь  $R, x_0 > 0$  таковы, что  $R < x_0 \ll 1$ , причём  $x_0$  стремится к нулю вместе с  $R$ . Таким образом,

$$\left(\hat{\mathcal{H}} a'\right)(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \left(\hat{\mathcal{H}} A'\right)(x) \right\}. \quad (\text{C.1})$$

Интегрируя по частям и учитывая периодичность  $A(x), f(x)$ , имеем

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathcal{H}} A'\right)(x) &= \frac{1 + if'(x)}{2} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} A'(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} [1 + if'(\tilde{x})] A(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

В правой части интеграл берется от функции, имеющей в пределе  $R \rightarrow 0$  лишь конечный скачок. Поэтому в этом пределе интеграл хорошо определён:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \left(\hat{\mathcal{H}} A'\right)(x) \right\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} [1 + if'(\tilde{x})] a(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\}, \quad (\text{C.3})$$

где  $f(x)$  также понимается взятой в предельном виде. В этом виде интеграл может быть разложен по  $1/U$ , где  $U \gg 1$ ,  $f' = O(U)$ . При этом условии аргумент котангенса имеет большую мнимую часть почти для всех значений  $\tilde{x}$ , и можно написать

$$\operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} \approx -i\chi(|\tilde{x}| - |x|). \quad (\text{C.4})$$

Более точно, ввиду формулы (в которой  $a_{1,2}$  – вещественные числа)

$$\operatorname{ctg}(a_1 + ia_2) = -i \frac{e^{(a_2 - ia_1)} + e^{-(a_2 - ia_1)}}{e^{(a_2 - ia_1)} - e^{-(a_2 - ia_1)}} = -i\chi(a_2) + O(e^{-2|a_2|})$$

приближённое выражение (С.4) справедливо с экспоненциальной точностью для всех  $\tilde{x}$  вне двух отрезков  $(x - \delta, x + \delta)$  и  $(-x - \delta, -x + \delta)$ , где  $\delta = O(1/U)$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, что

$$\varepsilon \ll 1, \quad U\varepsilon \gg 1. \quad (\text{С.5})$$

Тогда обозначив  $a(1 + if') \equiv b$ , интеграл в (С.3) при  $x > 0$  может быть записан как

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} d\tilde{x} b(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} \\ &= -i \left[ \int_{-1}^{-x-\varepsilon} + \int_{-x+\varepsilon}^0 + \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+1} \right] d\tilde{x} b(\tilde{x}) \chi(|\tilde{x}| - x) \\ & \quad + \left[ \int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \right] d\tilde{x} b(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{С.6})$$

В силу непрерывности  $b(x)$  при  $x \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon} d\tilde{x} b(\tilde{x}) \operatorname{ctg} \left\{ \frac{\pi}{2} (\tilde{x} - x + i[f(\tilde{x}) - f(x)]) \right\} = -ib(-x) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dy \operatorname{cth} \left\{ \frac{\pi f'(x)}{2} y + \pi i x \right\} \\ &= -ib(-x) \frac{2}{\pi f'(x)} \ln \operatorname{sh} y \Big|_{-\pi f'(x)\varepsilon/2 + \pi i x}^{+\pi f'(x)\varepsilon/2 + \pi i x}. \end{aligned} \quad (\text{С.7})$$

Ввиду (С.5)  $\ln \operatorname{sh} y$  может быть заменён, с экспоненциальной точностью, на  $y$  и  $(-y)$  на верхнем и нижнем пределах интегрирования, соответственно. Принимая во внимание также, что при  $x \rightarrow 0+$  фаза комплексной функции  $\operatorname{sh} y$  получает приращение  $(-\pi)$ , когда  $y$  пробегает область интегрирования, находим

$$\ln \operatorname{sh} y \Big|_{-\pi f'(x)\varepsilon/2 + \pi i x}^{+\pi f'(x)\varepsilon/2 + \pi i x} = \pi i (2x - 1). \quad (\text{С.8})$$

Интеграл же в смысле главного значения в (С.6) даёт нуль, так как он пропорционален полусумме выражения (С.8) и его комплексно сопряжённого. С другой стороны, заменяя котангенс в последнем члене (С.6) на функцию  $\chi$  даёт с той же точностью нуль:

$$\int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon} d\tilde{x} b(\tilde{x}) \chi(|\tilde{x}| - x) = b(-x) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\tilde{x} \chi(\tilde{x}) = 0.$$

Используя эти формулы в (С.3) и подставляя затем результат в (С.1), получаем окончательно

$$\left(\hat{\mathcal{H}} a'\right)(x) = (f'(x) - i) \{a(-|x|) - a(|x|)\} + ia'(-x)(2|x| - 1) + O\left(\frac{1}{U}\right), \quad (\text{С.9})$$

где штрих у функции означает производную по её аргументу:  $a'(y) = da(y)/dy$ . Формула (С.9) записана в виде, пригодном как при  $x > 0$ , так и при  $x < 0$ , что легко проверить заметив, что оператор  $i\hat{\mathcal{H}}$  инвариантен при инверсии ( $x \rightarrow -x$ ), совершаемой одновременно с комплексным сопряжением.

Аналогично, но проще, получается разложение для  $\left(\hat{\mathcal{H}} a\right)(x)$ . При этом функция  $a(x)$  не требует промежуточной гладкой аппроксимации, и интеграл, определяющий  $\hat{\mathcal{H}}$ , вычисляется с помощью формул (С.6)–(С.8), в которых надо заменить  $b(x) \rightarrow a(x)$ . Результат имеет вид

$$\left(\hat{\mathcal{H}} a\right)(x) = (f'(x) - i) \int_0^{+1} d\tilde{x} \frac{a(\tilde{x}) + a(-\tilde{x})}{2} \chi(\tilde{x} - |x|) + ia(-x)(2|x| - 1) + O\left(\frac{1}{U}\right). \quad (\text{С.10})$$

**Приложение D: Устойчивость течения продуктов горения предельных пламён типа Ia в вертикальных трубах**

(Гуляев И. А., Казаков К. А. Устойчивость течения продуктов горения предельных пламен в вертикальных трубах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. – 2024. – н. 2. – 2420104)

Стационарный режим горения, описываемый данным решением мастер-уравнения, может оказаться фактически нереализуемым из-за неустойчивости течения продуктов горения. Речь здесь идет об эффектах вязкости, которые при выводе мастер-уравнения считались пренебрежимо малыми. Как известно, такое пренебрежение законно на не слишком больших расстояниях от фронта пламени, чем оправдывается применимость мастер-уравнения для нахождения формы пламени. Однако при исследовании устойчивости решений вязкостью газа, вообще говоря, пренебрегать нельзя, поскольку она зависит и от свойств течения в целом, в частности, от его характера на больших расстояниях от фронта, где вязкие эффекты могут оказаться определяющими.

Важное значение в вопросе устойчивости течения продуктов горения имеет наличие зон стагнации, которые неизбежно образуются при достаточно больших скоростях пламени. Влияние этих зон на структуру фронта пламени теоретически моделировалось в работах [140, 141], в которых поле скорости холодного газа описывалось простейшим одно- или двухмодовым гармоническим решением уравнения Лапласа. В случае пламён вблизи пределов воспламенения такое приближение совершенно неприменимо, ввиду сильной нелинейности течения, выражающейся в сильном вытягивании фронта вдоль трубы. Родственной задачей является устойчивость течений в трубах со скачкообразными расширениями, которая исследовалась в ряде экспериментальных, численных и теоретических работ [189–198]. Рассматривавшиеся в них течения, однако, имели либо параболический (пуазейлев), либо плоский начальный профиль скорости, и поэтому структура этих течений существенно отлична от порождаемой пламёнами.

Для выяснения этого вопроса в настоящей работе применяется следующая стратегия. Распределение скорости сгоревшего газа, даваемое данным решением системы (11.4), (11.5), (11.11), принимается в качестве одного из граничных условий для течения про-

дуктов горения. Эволюция этого течения затем определяется путём численного решения уравнения Навье-Стокса (с вязкостью газа, равной вязкости воздуха при адиабатической температуре пламени). Исходное распределение скорости при этом удобно задавать на поперечном сечении трубы, настолько удалённом от фронта вниз по течению, чтобы линии тока частиц газа можно было считать параллельными друг другу (последнее условие практически выполняется на расстоянии от фронта, примерно равном длине фронта пламени,  $y = y_0 \approx 2U$ ). Таким образом, исследуемое течение заполняет прямоугольную область, начиная с  $y = y_0$  вплоть до выхода из трубы, Рис. 66. Далее, на выходе из трубы задаётся обычное условие постоянства давления газа по выходному сечению, то есть условие свободного истечения газа с отрывом линий тока со стенок трубы на её конце [см. (9.2)]. Что касается условий на стенках трубы, то обычно требуется обращение в нуль скорости газа в лабораторной системе. Однако при наличии областей стагнации вязкость течения у стенок трубы практически не влияет на основное течение. В самом деле, поскольку рассматриваемые в настоящей работе течения являются ламинарными, пограничный слой, образующийся у стенок в областях стагнации, относительно медленно ( $\sim \sqrt{y}$ ) растёт при удалении от фронта, и на практике его толщиной можно пренебречь. Поэтому для того, чтобы исключить эффект трения газа о стенки полностью, в качестве граничного условия на стенках трубы требуется (помимо обращения в нуль нормальной компоненты скорости) обращение в нуль не самой продольной компоненты скорости, а её нормальной производной:  $\partial u / \partial x = 0$  ( $\sigma = 0$ ).

## 1. Численная схема

На сегодняшний день существует большое число методов моделирования динамики несжимаемого газа (как классических [199–201], так и предложенных сравнительно недавно [188, 203–205]). Их эффективность зависит от геометрии исследуемых систем, граничных условий и общего характера течения. Поскольку ни единственность решения рассматриваемой задачи, ни даже его существование заранее не известны, применение к ней классических численных алгоритмов, использующих метод конечных элементов или неявные схемы, оказывается затруднительным. Ниже используется так называемый метод энтропийного затухания искусственной сжимаемости (*Entropically damped form of artificial compressibility*) [187, 188]. Он основан на следующей модификации уравнений

Навье-Стокса для несжимаемого газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} - \nabla \left( \frac{\tilde{p}}{\rho} \right), \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\frac{1}{\text{Ma}^2} \text{div } \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{p}, \end{cases}$$

где  $\tilde{p} = p + \phi/\theta$ ,  $\phi = -gy$ ,  $\rho = 1/\theta$ , и  $\text{Re} = U_f b/\nu$  – число Рейнольдса ( $\nu$  – кинематическая вязкость сгоревшего газа). Следуя работе [187], здесь введена искусственная сжимаемость, которая характеризуется числом Маха  $\text{Ma}$ . Соответственно существенно дозвуковой природе рассматриваемых течений это число является малым. Дивергенция скорости газа, таким образом, входит в уравнение эволюции давления с коэффициентом, много большим единицы. Физический смысл этого построения состоит в том, что из ограниченности вариации давления газа следует ограниченность члена  $\text{div } \mathbf{v}/\text{Ma}^2$ , и поэтому нужной точности выполнения условия несжимаемости можно добиться путём выбора достаточно малого значения  $\text{Ma}$ . Наконец, последний член в уравнении эволюции приведённого давления является сглаживающим и вводится для подавления колебаний поля давления, возникающих в ходе поиска стационарного решения. Его наличие не влияет на конечные распределения рассматриваемых величин.

Граничные условия для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений имеют вид:

$$w|_{\Gamma_{in}} = 0, \quad u|_{\Gamma_{in}} = u_{in}(x), \quad \tilde{p}|_{\Gamma_{out}} = \tilde{p}_{out}, \quad w|_{\Gamma_w} = 0, \quad \sigma|_{\Gamma_w} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Gamma_w} = 0,$$

где  $u_{in}(x)$  – результат пересчёта распределения продольной компоненты поля скорости на фронте пламени на поверхность  $y = y_0$ , обозначенной  $\Gamma_{in}$  на Рис. 6б,  $\tilde{p}_{out}$  – приведённое атмосферное давление на выходе из трубы ( $\Gamma_{out}$ ); как было указано выше, на стенках трубы ( $\Gamma_w$ ) ставится условие исчезновения поперечной компоненты скорости газа и её завихренности. В качестве начального условия задаётся параллельный поток  $u(x, y) = u_{in}(x)$ ,  $w(x, y) = 0$ ,  $\tilde{p}(x, y) = \tilde{p}_{out}$ . Ширина области стагнации в естественных единицах полагается равной  $(1 - h)$ , где  $h$  определяется данным решением, но для общности  $h$  рассматривается как независимый параметр, варьируя который можно судить о степени влияния зоны стагнации на устойчивость течения. Для удобства чтения представляемых ниже результатов труба повернута на  $90^\circ$ , так что газ в начальный момент движется слева направо.

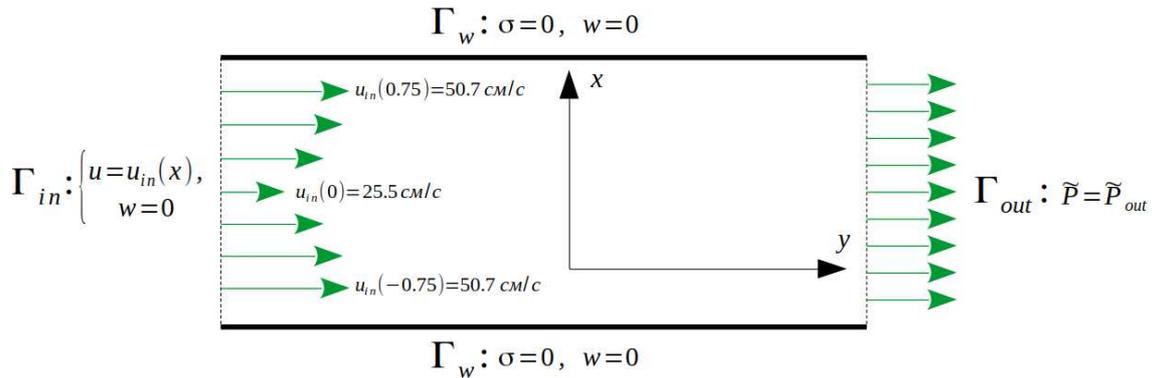


Рис. 66: Область симуляции, где поток газа входит в  $\Gamma_{in}$  и выходит из  $\Gamma_{out}$ ,  $\Gamma_w$  – стенки трубы. В качестве примера указаны характерные значения  $u_{in}(x)$  в естественных единицах для пламени в трубе диаметром 9.5 см.

Для решения модифицированной системы уравнений Навье-Стокса используется усовершенствованный метод Мак-Кормака [207–210]. Одним из достоинств используемого метода является высокая теоретическая точность по временным и пространственным координатам –  $O(\Delta t^2, (\Delta \mathbf{x})^4)$  [ $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y)$ ,  $\Delta t$  – постоянные шаги сетки вдоль осей  $x$ ,  $y$  и времени, соответственно], которая определяется условием на шаг по времени [200]. Другим достоинством метода является то, что он основан на явной схеме, допуская тем самым параллельные вычисления.

Для оценки вычислительной ошибки получаемые решения подставлялись в систему исходных уравнений Навье-Стокса и условия несжимаемости газа. Относительная ошибка  $E$  выполнения каждого уравнения, записанного в виде  $\sum_i \kappa_i = 0$ , определялась как  $E = \sum_i \kappa_i / \max |\kappa_i|$ , где  $\kappa_i$  обозначает  $i$ -ый член уравнения, а операция  $\max$  возвращает наибольший из принимаемых аргументов.

Как показывают вычисления, условие несжимаемости в полученных решениях выполняется с относительной ошибкой порядка  $10^{-5} - 10^{-3}$ . Примерно с той же точностью удовлетворяются и уравнения Навье-Стокса, но при этом в некоторых точках границы области стагнации, где происходит резкое изменение скорости, относительная ошибка  $\sim 10 - 20\%$ . Эти ошибки имеются в основном вблизи входа в трубу, где разрыв скорости еще недостаточно “размыт” действием вязких сил.

2. Сценарии развития неустойчивости

$U_f$ , см/с	$\theta$	$U$	сценарий
6.5	5.7	5.45	<u>КОЛ</u>
6.6	5.2	5.72	<u>КОЛ</u>
6.7	5.3	5.46	<u>КОЛ</u>
6.9	5.5	4.98	<u>КОЛ</u>
7.0	5.2	5.08	<u>КОЛ</u>
7.2	4.9	5.04	<u>КОЛ</u>
7.4	5.1	4.61	<u>КОЛ</u>
7.4	5.4	4.39	<u>асим</u>
7.5	5.1	4.49	<u>КОЛ</u>
7.5	5.4	4.27	<u>асим</u>
8.1	5.4	3.58	<u>асим</u>

Таблица V: Параметры пламен, определяющие рассматриваемые решения типа Ia. В последней колонке указан сценарий эволюции потока газа, порождаемого данным пламенем при  $h = 0.5$ .

Для исследования влияния ширины зоны стагнации на динамику сгоревшего газа было проанализировано 12 течений, порождаемых пламенами типа Ia вблизи нижнего предела воспламенения. Основные параметры этих пламен указаны в Таблице V. Одним из параметров моделирования является длина трубы  $L$  (расстояние между  $y = y_0$  и выходом из трубы). Большая часть симуляций связана с динамикой сгоревшего газа в сравнительно коротких трубах ( $L = 2.5b$ ). Основным качественным выводом из результатов численного моделирования является существование трёх различных сценариев срыва первоначального (симметричного) режима течения газа.

Рисунок 67 иллюстрирует основные этапы перехода течения продуктов горения в *асимметричный* стационарный режим, обозначаемый как асим (здесь и далее  $L = 2.5b$ , если явно не указано другое значение). Сравнительно быстро (за время  $\approx 0.5$  с) после начала симуляции формируется квазистационарная симметричная картина течения. Она сохраняется практически неизменной в течение примерно трёх секунд, Рис. 63(b), а затем

начинает терять симметрию. Переход в конечное асимметричное состояние занимает ещё около шести секунд, после чего течение становится истинно стационарным, Рис. 67(d).

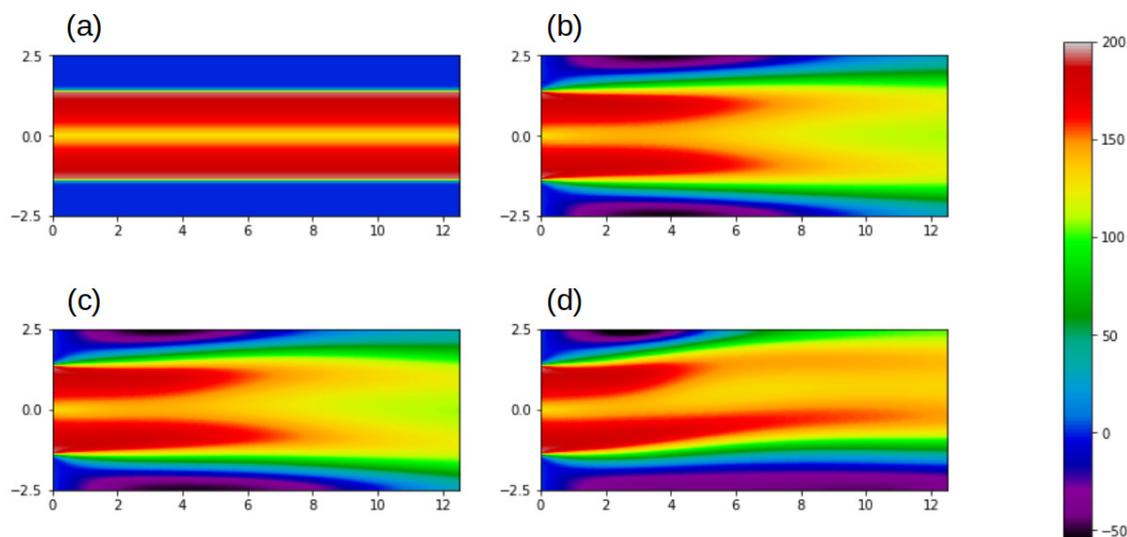


Рис. 67: Динамика течения газа, порожденного пламенем типа Ia, в сценарии *асим* (переход в режим асимметричного стационарного течения) в трубе диаметром 5 см и длиной 12.5 см. Скорость измеряется в см/с. На рисунке обозначены моменты времени (a)  $t=0$  с ( $t=0$ ); (b)  $t=2.89$  с ( $t=4.34$ ), (c)  $t=4.2$  с ( $t=6.3$ ); (d)  $t=9.53$  с ( $t=14.3$ ). В скобках указано время в единицах  $b/U_f$ .

Второй сценарий (*колебательный*), обозначенный в Таблице V символом кол, отличается от первого тем, что асимметричная картина оказывается нестационарной. А именно, по истечении достаточно большого промежутка времени ( $\approx 7$  с в случае  $L = 2.5b$ ) наблюдается переход квазистационарного течения в режим периодических колебаний. Это иллюстрируется Рис. 68, на котором приведены распределения продольной компоненты скорости газа. Оказывается, далее, что период колебаний, вычисленный в единицах  $b/U_f$ , с высокой точностью совпадает для всех приведенных в Таблице V решений сценария кол.

Наконец, имеется также *симметричный* сценарий (сим), в котором спустя определённый интервал времени после начала симуляции (несколько секунд для  $L = 2.5b$ ) формируется практически симметричная стационарная картина течения, существенно отличающегося от исходного, никак не разрушающаяся со временем.

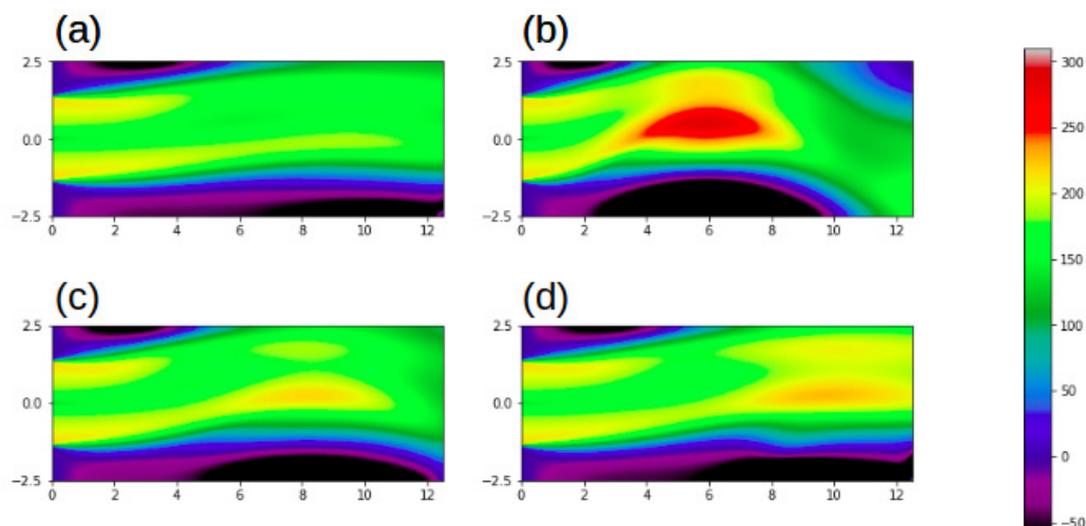


Рис. 68: Динамика течения газа, порожденного пламенем типа  $Ia$ , после перехода в колебательный режим в трубе диаметром 5 см и длиной 12.5 см. Скорость измеряется в см/с. На рисунке обозначены моменты времени (a)  $t=6.56$  с ( $t=8.79$ ); (b)  $t=7.04$  с ( $t=9.43$ ); (c)  $t=7.78$  с ( $t=10.43$ ); (d)  $t=8.34$  с ( $t=11.17$ ). В скобках указано время в единицах  $b/U_f$ .

Таблица V иллюстрирует смену сценариев эволюции сгоревшего газа при движении по фазовой плоскости  $(\theta, U_f)$  при заданных длине трубы и ширине области стагнации. Важно, что смена сценариев наблюдается также и при плавном изменении параметра  $h$ , определяющего ширину зоны стагнации. В трубах с  $L = 2.5b$  такие переходы наблюдаются уже при сравнительно малых отклонениях от  $h = 0.5$ , см. Таблицу VI(a). А именно, диапазон значений  $h$ , характеризующий сценарий асим, является сравнительно узким, порядка 10% от абсолютного значения  $h$ . В трубах с  $L = 2.5b$  точка перехода между асим и кол зависит от распределения полей скорости на сечении  $y = y_0$ . Далее, при увеличении ширины области стагнации до  $0.53b$  ( $h = 0.47$ ) эволюция газа, порождаемая решением Ia ( $U_f = 9.0$  см/с,  $\theta = 4.60$ ,  $U = 3.41$ ), идёт по сценарию асим. Из полученных решений следует, что для данных  $(\theta, U_f)$  граница между сценариями сим и асим не зависит от  $L$ , Таблица VI(b).

Исследование решений в более длинных трубах показывает, далее, что при  $L > 4b$  остается лишь один сценарий асим. Нахождение решений в случае труб, длина которых превышает её диаметр на порядок, требует существенных вычислительных ресурсов. Полученные решения показывают, что общим для труб с  $L > 20b$  свойством является

$h$	сценарий
0.500	<u>кол</u>
0.530	<u>асим</u>
0.535	<u>асим</u>
0.540	<u>асим</u>
0.545	<u>асим</u>
0.550	<u>асим</u>
0.555	<u>сим</u>
0.565	<u>сим</u>
0.570	<u>сим</u>
0.575	<u>сим</u>
0.580	<u>сим</u>

(a)

$L/b$	$\theta$	$U_f$	$h$	сценарий
2.5	5.7	6.5	0.530	<u>асим</u>
2.5	5.7	6.5	0.560	<u>сим</u>
5	5.7	6.5	0.530	<u>асим</u>
5	5.7	6.5	0.560	<u>сим</u>
2.5	4.6	9	0.470	<u>асим</u>
2.5	4.6	9	0.500	<u>сим</u>
10	4.6	9	0.470	<u>асим</u>
10	4.6	9	0.500	<u>сим</u>
2.5	5.3	6.7	0.530	<u>асим</u>
2.5	5.3	6.7	0.625	<u>сим</u>
5	5.3	6.7	0.500	<u>асим</u>
5	5.3	6.7	0.750	<u>сим</u>

(b)

Таблица VI: (a) Реализация различных сценариев эволюции продуктов горения пламени с  $\theta = 5.7$ ,  $U_f = 6.5$  см/с в трубе с  $L = 2.5b$  в зависимости от ширины области стагнации. (b) Реализация сценариев сим и асим в трубах различной длины и различной ширины области стагнации.

практически однородный поток газа на выходе из трубы.

### 3. Образование областей рециркуляции

Важной особенностью колебательного сценария является образование областей рециркуляции продуктов горения, которые распространяются в направлении выхода из трубы. Положение и форма этих областей иллюстрируется замкнутыми линиями тока на Рис. 69. Само по себе возникновение колебаний означает, что для аналитического описания этой неустойчивости следовало бы перейти к нестационарному уравнению (13.9). Появление же областей рециркуляции означает сверх того, что мастер-уравнение требует дальнейшего обобщения для учёта влияния этих областей на структуру самого фронта пламени, поскольку в области рециркуляции нарушается условие (4.44), существенно использованное при выводе этого уравнения.

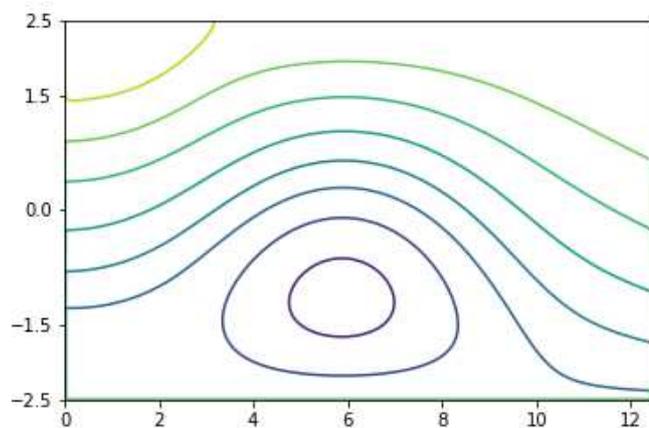


Рис. 69: Линии тока в потоке газа, порождённого пламенем типа Ia, в колебательном режиме в трубе диаметром 5 см и длиной 12.5 см при  $h = 0.5$ .

### Вывод

Из проведённого моделирования следует, что хотя течение продуктов горения предельных пламён является устойчивым в достаточно коротких трубах и при достаточно малой ширине области стагнации, при увеличении ширины области стагнации решения типа Ia теряют устойчивость, что выражается либо в потере симметрии течения, либо в срыве его стационарности. Это открывает возможность переходов в другие режимы горения, в частности, в режим типа Ib, что обсуждалось в §11.5С.