

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Киракосян Вазген Валерикович

**Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов
над коммутативными кольцами**

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный — **Гордиенко Алексей Сергеевич,**
руководитель доктор физико-математических наук

Официальные — **Кожухов Игорь Борисович,**
оппоненты доктор физико-математических наук, профессор,
Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»,
кафедра высшей математики № 1, профессор

Степанов Алексей Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент,
Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет математики и компьютерных наук,
доцент

Туганбаев Аскар Аканович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Национальный исследовательский университет
«МЭИ», кафедра высшей математики, профессор

Защита диссертации состоится 25 сентября 2026 года в 17 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале <https://dissovet.msu.ru/dissertation/4006/>

Автореферат разослан « » августа 2026 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В. А. Кибкало

Общая характеристика работы

Диссертационная работа относится к современной алгебре, в частности, к теории линейных алгебраических групп, теории групп Шевалле над кольцами и связанным с ними вопросам теории колец. Работа посвящена исследованию автоморфизмов групп Шевалле над коммутативными кольцами и изучению свойства III-жесткости присоединённых групп Шевалле малых рангов и их элементарных подгрупп.

Актуальность темы исследования.

Задача об автоморфизмах матричной группы имеет существенно более глубокий смысл, чем формальное вычисление её группы симметрий. В типичной ситуации группа задана как $G(R)$, где R — поле или кольцо, а сама конструкция зависит от размерности модуля, заданной на нём формы, системы корней и решётки весов. Поэтому классификация автоморфизмов фактически отвечает на вопрос о том, насколько эти исходные данные восстанавливаются из абстрактной групповой структуры. Теорема о стандартности утверждает, что произвольный автоморфизм не создаёт скрытой симметрии: он порождается автоморфизмом основного кольца, симметрией системы корней, сопряжением в подходящей линейной группе и, когда это необходимо, центральным множителем. Такое описание одновременно связано с задачами об изоморфизмах, нормализаторах и распознавании групп лиева типа.

Классические линейные группы стали первым полигоном для этой программы. Над полем геометрия пространства отражается в абстрактном строении группы: трансвекции кодируют точки и гиперплоскости, параболические подгруппы — флаги, а централизаторы специальных инволюций позволяют выделять разложения пространства и геометрические структуры, связанные с формой. Именно эта связь лежит в основе ранних результатов Шрайера и ван дер Вардена¹ о проективных линейных группах, работы Хуа² о симплектических группах, а также метода инволюций Рикарта³ и Дьедонне⁴. В этих работах сложились две дополняющие друг друга стратегии. Геометрическая стратегия восстанавливает пространство и форму из действия группы, после чего применяется фундаментальная теорема проективной геометрии. Групповая стратегия выделяет геометрические объекты посредством внутренних характеристик

¹*Schreier O., van der Waerden B. L.* Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1928. Vol. 6. pp. 303–322.

²*Hua L. K.* On the automorphisms of the symplectic group over any field // Ann. Math. 1948. Vol. 49. pp. 739–759.

³*Rickart C. E.* Isomorphic groups of linear transformations // Amer. J. Math. 1950. Vol. 72. pp. 451–464.

⁴*Dieudonné J.* On the Automorphisms of the Classical Groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 2. pp. 1–95.

элементов и их централизаторов. Позднее О'Мира⁵ предложил метод вычетов пространств, позволивший проводить подобную реконструкцию без опоры на классификацию инволюций и распространить её на общие линейные и симплектические группы над областями целостности.

Переход от полей к кольцам изменил сам характер задачи. Подмодули свободного модуля уже не обязаны иметь дополнения, элементы могут вести себя по-разному после факторизации по различным идеалам, а нетривиальные идемпотенты раскладывают кольцо и группу на компоненты. Кроме того, исчезает возможность безусловно диагонализировать инволюции или делить возникающие соотношения на 2. Поэтому автоморфизм матричной группы над кольцом должен контролироваться не только геометрией, но и структурой основного кольца. Первые результаты для GL_n над кольцом $\mathbb{Z}$, областями главных идеалов и областями целостности были получены Хуа и Райнером⁶, Лэндином и Райнером⁷, Ваном⁸ и Янем⁹. Затем Помфрэ и Макдональд¹⁰ использовали тот факт, что конечно порождённый проективный модуль над локальным кольцом свободен, а Уотерхауз¹¹ и Петечук¹² получили результаты для широких классов коммутативных колец, включая случаи, когда двойка необратима. Показательно, что уже для $SL_3(R)$ и $GL_3(R)$ над произвольным коммутативным кольцом возникают дополнительные нестандартные явления¹³: малый ранг и отсутствие обратимости некоторых целых элементов оказываются не техническими неудобствами, а источником реальных исключений. Наряду с поэлементным анализом развивался и функториальный подход, в котором матричная группа рассматривается как группа точек групповой схемы; примером служит смежное исследование Уотерхауза¹⁴ автоморфизмов определителя с точки зрения групповых схем.

⁵ O'Meara O. T. The automorphisms of linear groups over any integral domain // J. Reine Angew. Math. 1966. Vol. 223. pp. 56–100; O'Meara O. T. The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain // J. Reine Angew. Math. 1968. Vol. 230. pp. 103–138.

⁶ Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 71. pp. 331–348.

⁷ Landin J., Reiner I. Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain // Ann. Math. 1957. Vol. 65, № 3. pp. 519–526.

⁸ Wan C. A. The automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$ // Acta Math. Sinica. 1957. Vol. 7. pp. 533–573.

⁹ Yan S.-j. Linear groups over a ring // Chinese Math. 1965. Vol. 7, № 2. pp. 163–179.

¹⁰ McDonald B. R., Pomfret J. Automorphisms of $GL_n(R)$, R a local ring // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 173. pp. 379–388.

¹¹ Waterhouse W. C. Automorphisms of $GL_n(R)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 79. pp. 347–351.

¹² Петечук В. М. Автоморфизмы групп SL_n , GL_n над некоторыми локальными кольцами // Мат. заметки. 1980. Т. 28, № 2. С. 187–204; Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 4. С. 534–547.

¹³ Петечук В. М. Автоморфизмы групп $SL_3(K)$, $GL_3(K)$ // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 657–668.

¹⁴ Waterhouse W. C. Automorphisms of $\det(X_{ij})$: the group scheme approach // Adv. Math. 1987. Vol. 65, № 2. pp. 171–203.

Особое место в теории занимает локально-глобальный принцип. Локальное кольцо сохраняет многие черты поля: оно имеет единственный максимальный идеал J , фактор R/J является полем, а конечно порождённые проективные модули свободны. Это позволяет сначала редуцировать автоморфизм по радикалу, применить классификацию над полем, а затем поднять полученные данные на исходное кольцо. Для произвольного коммутативного кольца, напротив, информацию собирают из локализаций $R_{\mathfrak{m}}$ по максимальным идеалам. Современные варианты этого метода — локально-глобальный принцип для конгруэнц-подгрупп¹⁵ и универсальная локализация¹⁶ — стали важной частью структурной теории групп Шевалле над кольцами. Именно в локальной задаче особенно ясно проявляется роль малых простых: обратимость 2 обеспечивает разделение собственных подмодулей инволюций, а коэффициенты 2 и 3 входят в коммутаторные формулы для корневых элементов систем с корнями разной длины.

Единый язык для классических и исключительных случаев даёт конструкция Шевалле. Выбор базиса Шевалле обеспечивает целочисленность структурных констант, поэтому корневые унипотенты $x_{\alpha}(t)$ и соотношения между ними определяются над $\mathbb{Z}$ ¹⁷. Схемная формализация Демазюра и Гротендика¹⁸ связывает с каждой системой корней и допустимой решёткой весов расщепимую редуктивную групповую схему; её группы точек над коммутативными кольцами включают классические группы типов A_{ℓ} , B_{ℓ} , C_{ℓ} , D_{ℓ} и исключительные группы типов G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 . В таком описании происхождение стандартных автоморфизмов становится прозрачным. Автоморфизм кольца преобразует параметры t в корневых подгруппах; автоморфизм диаграммы переставляет сами корневые подгруппы; сопряжение отражает действие тора и нормализатора; центральный автоморфизм учитывает действие нетривиального центра для выбранной решётки весов. При этом классификация абстрактных автоморфизмов группы $G(R)$ существенно тоньше классификации автоморфизмов соответствующей схемы: абстрактное отображение заранее не обязано быть функториальным по R , и именно это приходится доказывать.

Над полями эта программа была реализована в работах Стейнберга¹⁹ для конечных и Хамфри²⁰ для бесконечных групп Шевалле. Теорема

¹⁵Apte H., Stepanov A. Local-global principle for congruence subgroups of Chevalley groups // Cent. Eur. J. Math. 2014. Vol. 12. pp. 801–812.

¹⁶Stepanov A. V. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization // J. Algebra. 2016. Vol. 450. pp. 522–548.

¹⁷Шевалле К. О некоторых простых группах // Математика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1958. Т. 2, № 1. С. 3–53; Steinberg R. Lectures on Chevalley groups. Yale Univ., 1967.

¹⁸Demazure M., Grothendieck A. Schémas en groupes (SGA 3), Exp. XIX–XXVI. Berlin : Springer, 1970.

¹⁹Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. 1960. Vol. 12. pp. 606–615.

²⁰Humphreys J. E. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Can. J. Math. 1969. Vol. 21. pp. 908–911.

Бореля–Титса²¹ об абстрактных гомоморфизмах простых алгебраических групп поместила эти результаты в более широкий контекст: при естественных условиях абстрактный гомоморфизм вынужден происходить из гомоморфизма полей и морфизма алгебраических групп. Тем самым над полем в рассматриваемых условиях автоморфизм действительно восстанавливает как корневые данные, так и скалярную структуру.

Над кольцами универсальная картина складывалась по нескольким направлениям. Для областей целостности и алгебр над полями существенные результаты об изоморфизмах и представлениях были получены Ченом²²; для алгебр, содержащих достаточно много обратимых целых, стандартность установил А. А. Клячко²³. Работа Абе²⁴ дала важный общий результат для нётеровых колец, но в ней доказательство для присоединённых элементарных групп содержало пробел и не обеспечило полного решения. Последующие исследования потребовали иных способов выделения корневых элементов и анализа нормализатора.

Подробный хронологический обзор классических результатов и обширная библиография содержатся в докторской диссертации Е. И. Буниной²⁵.

Серия работ Е. И. Буниной реализовала локальную часть программы для большинства систем корней. Были описаны автоморфизмы групп типов A_ℓ , D_ℓ , E_ℓ над локальными кольцами как с обратимой, так и, в соответствующих рангах, с необратимой двойкой²⁶; типов B_ℓ и F_4 при $2 \in R^{*27}$; типа G_2 при $2, 3 \in R^{*28}$. Совместно с П. А. Верёвкиным был разобран

²¹ Borel A., Tits J. Homomorphismes «abstraites» de groupes algébriques simples // Ann. Math. 1973. Vol. 97, № 3. pp. 499–571.

²² Chen Y. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1994. Vol. 92. pp. 231–237; Chen Y. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348, № 2. pp. 521–541; Chen Y. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. 2000. Vol. 226, № 2. pp. 719–741.

²³ Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // J. Algebra. 2010. Vol. 324, № 10. pp. 2608–2619.

²⁴ Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra i Analiz. 1993. Vol. 5, № 2. pp. 74–90.

²⁵ Бунина Е. И. Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле и других производных структур. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Москва, 2010.

²⁶ Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов A_ℓ , D_ℓ , E_ℓ над локальными кольцами с $1/2$ // Фундамент. и прикл. мат. 2009. Т. 15, № 2. С. 35–59; Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов A_ℓ , D_ℓ , E_ℓ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. 2009. Т. 15, № 7. С. 47–80; Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_ℓ , D_ℓ , E_ℓ над локальными кольцами с $1/2$ // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 443–470.

²⁷ Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа B_ℓ над локальными кольцами с $1/2$ // Фундамент. и прикл. мат. 2009. Т. 15, № 7. С. 3–46; Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with $1/2$ // J. Algebra. 2010. Vol. 323, № 8. pp. 2270–2289.

²⁸ Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. 2007. Т. 13, № 4. С. 3–29.

тип $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой²⁹. Затем локальные результаты были перенесены на произвольные коммутативные кольца при естественных ограничениях на обратимость 2 и 3³⁰.

После этих результатов наиболее чувствительными оставались две исключительные локальные ситуации: тип $\mathbf{F}_4$, когда 2 не является обратимым элементом, и тип $\mathbf{G}_2$, когда необратим элемент 3. Закрывание этих случаев требует не формальной модификации известных доказательств, а особого рассмотрения и новой организации вычислений: линейаризации полиномиальных соотношений, точного контроля образов элементов группы Вейля и корневых унипотентов, а затем отдельного анализа автоморфизмов-сопряжений.

Во второй главе диссертации доказана стандартность автоморфизмов $G(\mathbf{F}_4, R)$ над коммутативными локальными кольцами с необратимой двойкой и $G(\mathbf{G}_2, R)$ над коммутативными локальными кольцами с необратимой тройкой. Эти результаты закрывают два указанных случая в рамках описанной программы локальной классификации и одновременно развивают методы, применимые именно там, где стандартные приёмы, полагающиеся на обратимость 2 или 3, недоступны. Тем самым актуальность работы определяется не только завершением конкретных случаев, но и исследованием границы применимости общей теории стандартных автоморфизмов.

Проблематика диссертации не ограничивается структурной классификацией автоморфизмов. Она естественно приводит к ещё одному локально-глобальному проявлению групповой жёсткости: достаточно ли того, что отображение на каждом отдельном элементе действует как сопряжение, чтобы оно было внутренним одновременно на всей группе? Всякий внутренний автоморфизм группы G сохраняет классы сопряжённости элементов. Эндоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$, обладающий тем свойством, что $\varphi(x)$ сопряжён с x для любого $x \in G$, называется *локально внутренним* (в литературе встречаются также названия *сохраняющий классы*, *поточечно внутренний*). Заметим, что любой локально внутренний эндоморфизм инъективен.

Вопрос о том, всякий ли локально внутренний эндоморфизм является внутренним, восходит к работам У. Бёрнсайда начала XX века. Уже в 1911 г. во втором издании своей книги³¹ Бёрнсайд ввёл соответствующий

²⁹ Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. 2012. Т. 17, № 7. С. 49–66; Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Нормализатор группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. 2013. Т. 18, № 1. С. 57–62.

³⁰ Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. 2012. Vol. 355, № 1. pp. 154–170; Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Comm. Algebra. 2024. Vol. 52, № 6. pp. 2313–2327.

³¹ Burnside W. Theory of Groups of Finite Order. 2nd ed. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1911.

инвариант (под другим названием), а в 1913 г. в работе³² построил первый пример конечной группы G с нетривиальной разностью между $\text{Aut}_c(G)$ и $\text{Inn}(G)$, где $\text{Aut}_c(G)$ — группа сохраняющих классы автоморфизмов. Позднее Ч.-Х. Са³³ систематически исследовал сохраняющие классы автоморфизмы конечных групп.

Т. Оно³⁴ ввёл множество Шафаревича–Тейта $\text{Ш}(G)$ группы G как локально-глобальный когомологический инвариант, обобщающий классическую конструкцию из арифметической геометрии: исторически Ш -множество восходит к 1950-м годам, когда оно появилось в рамках теоретико-числового подхода к диофантовым уравнениям, а именно как множество классов когомологий $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), A(\bar{k}))$ алгебраической группы A над числовым полем k , тривиальных при ограничении на все локальные подгруппы $\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$. В общегрупповой постановке Оно $\text{Ш}(G)$ определяется как подмножество $H^1(G, G)$, состоящее из классов когомологий, тривиальных при ограничении на любую циклическую подгруппу. Подробный обзор результатов о Ш -множестве содержится в работе Б. Э. Кунявского³⁵.

Группа G называется *Ш-жесткой*, если $\text{Ш}(G)$ тривиально, что эквивалентно тому, что всякий локально внутренний эндоморфизм группы G является внутренним. Известно, что условие Ш-жесткости разлагается на два более слабых условия: А-жесткость — $\text{Inn}(G) = \text{Aut}_c(G)$, и В-жесткость — $\text{Aut}_c(G) = \text{End}_c(G)$ (где $\text{End}_c(G)$ — множество локально внутренних эндоморфизмов); группа является Ш-жесткой тогда и только тогда, когда она А-жесткая и В-жесткая одновременно.

К числу А-жестких групп относятся, в частности, конечные симметрические группы, конечные простые группы, абсолютная группа Галуа поля $\mathbb{Q}$, неабелевы свободные группы, свободные нильпотентные группы и многие другие классы; примерами В-жестких групп являются конечные группы, разрешимые группы, кохопфовы группы; примерами Ш-жестких групп являются свободные группы, группы $\text{SL}_n(R)$, $\text{GL}_n(R)$, $\text{PSL}_n(R)$ над евклидовыми областями и другие. В то же время существуют группы, не являющиеся Ш-жесткими: первый такой пример был построен Бёрнсайдом среди конечных p -групп (наименьший имеет порядок 32).

³²Burnside W. On the outer automorphisms of a group // Proc. Lond. Math. Soc. 1913. Vol. 11. pp. 40–42.

³³Sah C.-H. Automorphisms of finite groups // J. Algebra. 1968. Vol. 10. pp. 47–68.

³⁴Ono T. “Shafarevich–Tate sets” for profinite groups // Proc. Japan Acad. 1999. Vol. 75A. pp. 96–97; Ono T. A note on Shafarevich–Tate sets for finite groups // Proc. Japan Acad. 1998. Vol. 74A. pp. 77–79.

³⁵Kunyavskii B. È. Local–global invariants of finite and infinite groups: Around Burnside from another side // Expo. Math. 2013. Vol. 31. pp. 256–273.

В работе Е. И. Буниной и Б. Э. Кунявского³⁶ была сформулирована гипотеза о Ш-жёсткости групп Шевалле и доказан следующий её частный случай: всякая группа Шевалле $G(\Phi, R)$, а также её элементарная подгруппа $E(\Phi, R)$, над локальным кольцом R с неприводимой системой корней ранга > 1 (при $2 \in R^*$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_\ell, \mathbf{C}_\ell, \mathbf{F}_4\}$ и $3 \in R^*$ для $\Phi = \mathbf{G}_2$) является Ш-жёсткой. Однако приведённое в указанной работе доказательство содержит пробел: оно ссылается на структурное описание *автоморфизмов* групп Шевалле, тогда как для локально внутренних эндоморфизмов требуется описание *инъективных эндоморфизмов* (доступного на текущий момент описания такого рода в общем случае не существует).

В третьей главе диссертации этот вопрос решается для присоединённых групп Шевалле типов малых рангов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами без привлечения теоремы о классификации автоморфизмов; тем самым устраняется указанный пробел для рассмотренных типов и одновременно осуществляется переход от локальных колец сразу к произвольным коммутативным кольцам.

Таким образом, актуальность диссертационного исследования определяется двумя взаимосвязанными обстоятельствами. С одной стороны, оно закрывает два исключительных локальных случая в теории автоморфизмов групп Шевалле, где прежние методы зависели от обратимости определённых малых целых чисел. С другой стороны, в нём развивается независимый подход к сохраняющим классы эндоморфизмам и доказывается Ш-жёсткость ряда присоединённых групп Шевалле над произвольными коммутативными кольцами. Оба направления относятся к общей проблеме восстановления глобальной алгебраической симметрии по её локальным проявлениям и способствуют более полному пониманию того, как система корней и основное кольцо отражаются во внутреннем строении группы Шевалле.

Цели и задачи диссертации. Целью работы является описание автоморфизмов групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой, а также исследование свойства Ш-жёсткости присоединённых групп Шевалле типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Описать автоморфизмы присоединённой группы Шевалле $G_{\text{ad}}(\mathbf{F}_4, R)$ над коммутативным локальным кольцом R с необратимой двойкой.

³⁶ Bunina E. I., Kunyavskii B. È. Ш-rigidity of Chevalley groups over local rings // J. Group Theory. 2025. Vol. 28, № 5. pp. 1143–1161.

2. Описать автоморфизмы присоединённой группы Шевалле $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ над коммутативным локальным кольцом R с необратимой тройкой.
3. Доказать III-жёсткость присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ при $2 \in R^*$ и для типа $\mathbf{G}_2$ при $2, 3 \in R^*$, где R — произвольное коммутативное кольцо.

Положения, выносимые на защиту.

1. Над коммутативным локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.
2. Над коммутативным локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.
3. Элементарные подгруппы $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$ при $2 \in R^*$ и для $\Phi = \mathbf{G}_2$ при $2, 3 \in R^*$, а также соответствующие присоединённые группы Шевалле $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{G}_2\}$ (при тех же условиях обратимости) и для $\Phi = \mathbf{A}_1$ (при дополнительном предположении нормальности $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$) являются III-жёсткими над произвольным коммутативным кольцом R .

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются группы Шевалле (и их элементарные подгруппы) над коммутативными кольцами. Предметом исследования являются автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и необратимой тройкой соответственно, а также локально внутренние эндоморфизмы и множество Шафаревича–Тейта присоединённых групп Шевалле типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{G}_2$ над произвольными коммутативными кольцами с условиями обратимости двойки (для всех перечисленных типов) и тройки (для типа $\mathbf{G}_2$).

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором лично. Среди них:

1. Стандартность автоморфизмов группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ над локальными кольцами R с необратимой двойкой.
2. Стандартность автоморфизмов группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ над локальными кольцами R с необратимой тройкой.
3. III-жёсткость присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и для типа $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

Методы исследования. Основными методами исследования являются метод линеаризации полиномиальных систем над локальными кольцами, техника редукции по радикалу, а также метод локализации для

перехода от локальных колец к произвольным коммутативным кольцам. В доказательствах также используются структурная теория групп Шевалле, инвариантность следа в присоединённом представлении и вычисление централизаторов специальных элементов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области теории линейных алгебраических групп, теории колец и смежных разделов алгебры. Описание автоморфизмов групп Шевалле типов F_4 и G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой и необратимой тройкой соответственно закрывает два из остававшихся открытыми случаев программы описания автоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами. Результаты по Ш-жесткости предлагают новый подход к изучению сохраняющих классы эндоморфизмов групп Шевалле, не зависящий от структурной классификации автоморфизмов и эндоморфизмов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность всех результатов работы обоснована строгими математическими доказательствами. Результаты других авторов, используемые в диссертации, снабжены соответствующими ссылками.

Автор неоднократно выступал с докладами по основным результатам работы на специальных семинарах «Избранные вопросы алгебры», «Алгебра и теория моделей» и Научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Кроме того, автором был сделан доклад по теме диссертации на следующей конференции:

- Международная конференция «Algebraic Geometry and Model Theory of Groups III», Тбилиси, Грузия, 2025 (устный доклад).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 3 работах [1–3], которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 115 страниц. Список литературы содержит 70 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели и задачи работы, излагаются научная новизна, теоретическая

и практическая значимость полученных результатов, методы исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов.

Первая глава имеет вспомогательный характер и содержит предварительные сведения о группах Шевалле над коммутативными кольцами, необходимые в последующих главах: системы корней и группы Вейля, базис Шевалле полупростой комплексной алгебры Ли, конструкция элементарной и полной групп Шевалле $E_\pi(\Phi, R)$, $G_\pi(\Phi, R)$ и их стандартных подгрупп, а также сводка ранее известных результатов об автоморфизмах групп Шевалле, на которые опирается изложение.

В частности, вводятся стандартные автоморфизмы групп Шевалле — кольцевые, диаграммные, внутренние и центральные, — определяющие понятие стандартного автоморфизма, используемое в основных теоремах второй главы.

Определение 1.12. Каждый автоморфизм $\rho: R \rightarrow R$ кольца R индуцирует автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$, переводящий матрицу (a_{ij}) в $(\rho(a_{ij}))$; его обозначают той же буквой ρ и называют *кольцевым автоморфизмом*. В частности, $x_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(\rho(t))$.

Определение 1.13. Пусть Φ — система корней с корнями одинаковой длины, а $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — автоморфизм этой системы, оставляющий на месте множество простых корней ($\delta\Delta = \Delta$). Ему отвечает однозначно определённый автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$, действующий на элементарных образующих по правилу $x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(\varepsilon(\alpha)t)$ с подходящими знаками $\varepsilon(\alpha) \in \{\pm 1\}$, для которых $\varepsilon(\alpha) = 1$ при $\alpha \in \Delta$; его обозначают той же буквой δ и называют *диаграммным* (или *графовым*) *автоморфизмом*.

Для систем корней $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$ с корнями разной длины над совершенными кольцами специальной характеристики дополнительно определяются специальные диаграммные автоморфизмы.

Определение 1.14. Пусть Φ — система корней одного из типов $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{F}_4$ или $\mathbf{G}_2$, p — отношение квадратов длин длинных и коротких корней системы Φ ($p = 2$ для $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{F}_4$; $p = 3$ для $\mathbf{G}_2$), R — совершенное кольцо характеристики p . Положим $\lambda(\alpha) = 1$ для длинных корней и $\lambda(\alpha) = p$ для коротких. Пусть $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ — перестановка корней, переставляющая длинные с короткими так, что $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)\delta(\alpha)$ является изоморфизмом систем корней. Тогда отображение $x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)})$ при подходящем выборе знаков структурных констант однозначно определяет автоморфизм группы $G(\Phi, R)$; его (наряду с тождественным автоморфизмом)

также называют *диаграммным* (или *графовым*) *автоморфизмом*.

Определение 1.16. Пусть кольцо S содержит R , а элемент $g \in G_\pi(\Phi, S)$ нормализует подгруппу $G_\pi(\Phi, R)$. Сопряжение $i_g: x \mapsto gxg^{-1}$ тогда является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$; его называют *внутренним автоморфизмом*, индуцированным элементом g , а если g лежит в самой группе $G_\pi(\Phi, R)$, то — *строго внутренним*.

Определение 1.17. Пусть $\tau: G_\pi(\Phi, R) \rightarrow C(G_\pi(\Phi, R))$ — гомоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ в свой центр $C(G_\pi(\Phi, R))$. Отображение $x \mapsto \tau(x)x$ задаёт эндоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$; если он является автоморфизмом, то его обозначают тем же символом τ и называют *центральный автоморфизмом*.

Автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ (или её элементарной подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$) называют *стандартным*, если он раскладывается в композицию автоморфизмов четырёх перечисленных типов. Наряду с ними удобно ввести ещё один вспомогательный тип.

Определение 1.19. Пусть V — пространство представления группы $G_\pi(\Phi, R)$, а матрица $C \in \text{GL}(V)$ нормализует эту группу, то есть $C G_\pi(\Phi, R) C^{-1} = G_\pi(\Phi, R)$. Сопряжение $x \mapsto CxC^{-1}$ задаёт тогда автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$; его обозначают i_C и называют *автоморфизмом-сопряжением*, индуцированным матрицей C .

Всякий внутренний автоморфизм является автоморфизмом-сопряжением; обратный вопрос составляет нетривиальную часть описания автоморфизмов.

В заключительном разделе главы приводятся формулировки ранее известных результатов, на которые опирается изложение. Среди них теорема Стейнберга и Хамфри о стандартности автоморфизмов групп Шевалле над полем, серия теорем Е. И. Буниной о стандартности автоморфизмов групп Шевалле над локальными коммутативными кольцами для различных типов систем корней, а также теорема Е. И. Буниной о стандартности автоморфизмов групп Шевалле над произвольными коммутативными кольцами, полученная методом локализации.

Вторая глава закрывает два случая, оставшихся открытыми после серии работ Е. И. Буниной, — автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой.

Для систем корней типов $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ решётка весов единственна, поэтому группа Шевалле определена однозначно: $G(\Phi, R) = G_{\text{ad}}(\Phi, R)$; над локальными кольцами она совпадает со своей элементарной подгруппой, то есть $G(\Phi, R) = E_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

Основными результатами главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.5. *Над локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и строго внутреннего автоморфизмов.*

Теорема 2.6. *Над локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ стандартен: он представляется в виде композиции кольцевого, диаграммного и строго внутреннего автоморфизмов.*

Доказательство каждой из них распадается на два шага, оформленные отдельными теоремами: сначала автоморфизм приводится к композиции кольцевого, диаграммного автоморфизмов и автоморфизма-сопряжения, а затем устанавливается, что возникающий автоморфизм-сопряжения строго внутренних.

Теорема 2.1. *Пусть R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ представляется в виде композиции кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Теорема 2.2. *Над локальным кольцом R с необратимой двойкой любой автоморфизм-сопряжения группы Шевалле $G(\mathbf{F}_4, R)$ является строго внутренним.*

Теорема 2.3. *Пусть R — коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда любой автоморфизм группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ представляется в виде композиции кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Теорема 2.4. *Над локальным кольцом R с необратимой тройкой любой автоморфизм-сопряжения группы Шевалле $G(\mathbf{G}_2, R)$ является строго внутренним.*

В доказательстве используются необходимые сведения о локальных кольцах и редукции по радикалу Джекобсона: в частности, для локального кольца R с максимальным идеалом $J = \text{Rad}(R)$ факторкольцо $k = R/J$

является полем (полем вычетов), что позволяет свести вопрос об автоморфизмах к случаю поля и далее поэтапно поднимать с поля вычетов на локальное кольцо. Центральным техническим средством является метод линеаризации полиномиальных систем над локальным кольцом: групповые соотношения дают систему полиномиальных уравнений относительно матричных поправок с элементами из радикала, а наличие только нулевого решения у её линейной части над полем вычетов влечёт обнуление всех этих поправок, что позволяет поэтапно поднять нормальную форму автоморфизма с поля вычетов на исходное кольцо.

Доказательства теорем 2.1 и 2.3 проводятся по единой схеме (с поправкой на особенности соответствующих систем корней и ограничения характеристики), после чего теоремы 2.2 и 2.4 об автоморфизмах-сопряжениях позволяют получить основные теоремы 2.5 и 2.6.

Результаты этой главы основаны на работах автора [1; 2].

Третья глава посвящена исследованию III-жёсткости присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

Определение 3.1. Эндоморфизм $\varphi \in \text{End}(G)$ группы G называется *локально внутренним* (или *сохраняющим классы*), если для всякого $g \in G$ элементы g и $\varphi(g)$ сопряжены в G .

Пусть $\text{End}_c(G)$ (соответственно, $\text{Aut}_c(G)$) обозначает множество эндоморфизмов (соответственно, автоморфизмов) $\varphi: G \rightarrow G$, обладающих указанным свойством. Тогда множество Шафаревича–Тейта $\text{Ш}(G)$ (определяемое как подмножество $H^1(G, G)$ классов когомологий, тривиальных при ограничении на любую циклическую подгруппу) тривиально тогда и только тогда, когда $\text{End}_c(G) = \text{Inn}(G)$.

Определение 3.2. Группа G называется *III-жёсткой*, если множество $\text{Ш}(G)$ состоит из одного элемента.

Основной результат главы формулируется следующим образом.

Теорема 3.3. Пусть R — коммутативное кольцо.

(1) Предположим, что $2 \in R^*$, и пусть $\Phi \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ является внутренним. Более того, всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ является внутренним при $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$, а также при $\Phi = \mathbf{A}_1$ при дополнительном предположении, что $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ нормальна в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$.

(2) Предположим, что $2, 3 \in R^*$. Тогда всякий локально внутренний эндоморфизм $E_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним, и всякий локально внутренний эндоморфизм $G_{\text{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ является внутренним.

В частности, все перечисленные выше группы являются Ш-жесткими.

Доказательство теоремы 3.3 проводится для каждого из типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{G}_2$ по отдельности; помимо структурных фактов о группах Шевалле, существенно используется метод локализации, позволяющий перейти от локальных колец к произвольным коммутативным кольцам.

Существенно, что приведённые доказательства не зависят от теоремы о стандартности автоморфизмов и не используют какого-либо структурного описания инъективных эндоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами, что устраняет имеющийся в литературе пробел в доказательстве для рассмотренных типов малых рангов.

Результаты этой главы основаны на работе автора [3].

В **заклучении** подведены итоги проведённого исследования и сформулированы основные результаты диссертации.

Заклучение

Диссертация посвящена изучению автоморфизмов и Ш-жесткости групп Шевалле над коммутативными кольцами. В работе полностью закрыты два остававшихся открытыми случая в описании автоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами: доказана стандартность автоморфизмов групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой и типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой. Кроме того, доказана Ш-жесткость присоединённых групп Шевалле и их элементарных подгрупп для типов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ (при $2 \in R^*$) и $\mathbf{G}_2$ (при $2, 3 \in R^*$) над произвольными коммутативными кольцами R .

Получены следующие основные результаты:

- Описаны автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой. Доказано, что всякий автоморфизм группы $G(\mathbf{F}_4, R)$, где R — локальное кольцо с необратимой двойкой, стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов. Доказательство основано на редукции по максимальному идеалу (радикалу) и последующем поэтапном подъёме с поля вычетов на локальное кольцо с использованием метода линеаризации.
- Описаны автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой. Доказано, что всякий автоморфизм группы $G(\mathbf{G}_2, R)$, где R — локальное кольцо с необратимой

- тройкой, стандартен, то есть является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.
- Доказана III-жесткость присоединённых элементарных подгрупп $E_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\}$ при $2 \in R^*$ и для $\Phi = \mathbf{G}_2$ при $2, 3 \in R^*$ над произвольным коммутативным кольцом R , а также III-жесткость соответствующих присоединённых групп $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$ для $\Phi \in \{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{G}_2\}$ при тех же условиях обратимости и для $\Phi = \mathbf{A}_1$ при дополнительном предположении нормальности $E_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$ в $G_{\text{ad}}(\mathbf{A}_1, R)$. Для каждого типа доказано, что всякий локально внутренний эндоморфизм является внутренним. Доказательства не зависят от теоремы о стандартности автоморфизмов и не используют какого-либо описания инъективных эндоморфизмов групп Шевалле.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам в области теории групп Шевалле над кольцами, теории линейных алгебраических групп, теории колец и смежных разделов алгебры.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук Алексею Сергеевичу Гордиенко за постановку задач, внимание к работе и поддержку.

Автор выражает особую благодарность своему первому научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Елене Игоревне Буниной за привлечение интереса к теме исследования, постановку задач и плодотворные обсуждения.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Алексею Георгиевичу Мясникову за ценные обсуждения различных математических вопросов, связанных с работой.

Автор благодарит весь коллектив кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за доброжелательную и творческую атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1. *Булнина Е. И., Киракосян В. В.* Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{F}_4$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундаментальная и прикладная математика. — 2025. — Т. 25, № 3.2. — С. 37–70.
EDN: WSUQVL. Импакт-фактор 0.1 (SJR). Объем 2.125 п.л.
Общая доля диссертанта составляет 90%, 1.9125 п.л.
2. *Киракосян В. В.* Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой тройкой // Сибирский математический журнал. — 2026. — Т. 67, № 3 (397). — С. 424–443.
EDN: HJCEQJ. Импакт-фактор 0.451 (РИНЦ). Объем 1.25 п.л.
Английский перевод: *Kirakosyan V. V.* Automorphisms of Chevalley groups of type $\mathbf{G}_2$ over local rings without $1/3$ // Siberian Mathematical Journal. — 2026. — Vol. 67, № 3. — pp. 556–571.
EDN: RBOPQL. Импакт-фактор 0.7 (JIF). Объем 1 п.л.
3. *Bunina E. I., Kirakosyan V. V., Treskunov R.* Sha-rigidity of adjoint Chevalley groups of types $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{G}_2$ over commutative rings // Groups, Complexity, Cryptology. — 2026. — Vol. 18, № 2. — pp. 1:1–1:32.
EDN: EMVNQE. Импакт-фактор 0.3 (JIF). Объем 2 п.л.
Общая доля диссертанта составляет 75%, 1.5 п.л.

Кирикосян Вазген Валерикович

Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над коммутативными кольцами

Автореф. дис. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____