

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Никулин Михаил Александрович**

**Некоторые свойства квантовых и классических  
бильярдов на софокусных столах**

Специальность 1.1.3.  
Геометрия и топология

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Попеленский Федор Юрьевич

Москва — 2026

# Оглавление

	Стр.
Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Предварительные сведения</b> . . . . .	<b>27</b>
1.1 Квантовый бильярд в области $\Omega$ , ограниченной координатными линиями полярной системы координат . . . . .	27
1.1.1 Стационарное уравнение Шрёдингера в полярной системе координат . . . . .	27
1.1.2 Функции Бесселя . . . . .	28
1.1.3 Квантовый бильярд в круге . . . . .	29
1.1.4 Квантовый бильярд в круговом кольце и накрытии кругового кольца . . . . .	30
1.1.5 Квантовый бильярд в секторе круга $D^2 : \varphi \in (0, \theta)$ . . . . .	32
1.2 Квантовый бильярд в областях $\Omega$ , ограниченных софокусными квадриками . . . . .	33
1.2.1 Функции Матьё. . . . .	33
1.2.2 Квантовый бильярд в эллипсе . . . . .	36
1.2.2.1 Собственные функции . . . . .	37
1.2.2.2 Асимптотика собственных значений . . . . .	37
1.2.3 Квантовый бильярд в эллиптическом кольце и накрытии эллиптического кольца . . . . .	42
1.2.3.1 Собственные функции . . . . .	43
<b>Глава 2. Асимптотика собственных значений</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1 Квантовый бильярд в эллиптическом кольце и накрытии эллиптического кольца . . . . .	45
2.2 Квантовый бильярд в эллиптическом секторе . . . . .	51
2.2.1 Симметричная область $A_\delta$ . . . . .	54
2.2.1.1 Собственные функции и асимптотика собственных значений . . . . .	54
2.2.1.2 Особый случай: $A_\delta$ для $\varphi_0 = \pi/2$ . . . . .	58
2.2.2 Несимметричная область $B_\delta$ . . . . .	59

2.2.2.1	Собственные функции и асимптотика собственных значений . . . . .	59
2.2.2.2	Особые случаи: $B_\delta$ для $(\varphi_0, \varphi_1) = (0, \pi)$ и для $(\varphi_0, \varphi_1) = (0, \pi/2)$ . . . . .	61
2.3	Постоянная наблюдаемая величина . . . . .	62
<b>Глава 3. Эллиптический бильярд с косинусным законом преломления на софокусных квадраках. . . . .</b>		
3.1	Предварительные сведения. . . . .	64
3.1.1	Классический бильярд. . . . .	64
3.1.2	Интеграл Иоахимстала. . . . .	64
3.2	Косинусный закон преломления. . . . .	66
3.2.1	Постоянная движения . . . . .	67
3.2.1.1	Вспомогательные утверждения . . . . .	68
3.2.1.2	Постоянная движения $\Xi$ (доказательство) . . . . .	70
3.3	Общий случай . . . . .	71
<b>Глава 4. Задача А . . . . .</b>		
4.1	Постановка задачи . . . . .	76
4.2	Поверхности уровня для регулярных значений интеграла $\Xi$ . . . . .	79
4.3	Поверхности уровня для нерегулярных значений интеграла $\Xi$ . . . . .	87
<b>Глава 5. Задача Б. . . . .</b>		
5.1	Постановка задачи . . . . .	102
5.2	Интеграл $\rho^2$ . Условия полного внутреннего отражения . . . . .	103
5.3	Случай $\{\xi < L_1\}$ . . . . .	108
5.4	Уравнения кривых, разделяющих множества $C_k$ . . . . .	110
5.5	«Решетка» областей случая $\{\xi < L_1\}$ . . . . .	111
5.6	Классификация фрагментов $T_m$ бильярдной траектории . . . . .	114
5.7	Неособые поверхности для случая $\{\xi < L_1\}$ . . . . .	117
5.7.1	Случай $n_1^2 < n_2^2$ . . . . .	117
5.7.2	Случай $n_1^2 > n_2^2$ . . . . .	121
5.8	Неособые поверхности для случая $\{\xi > L_1\}$ . . . . .	123
5.9	Особые поверхности для случая $\{\xi < L_1\}$ . . . . .	125

	Стр.
5.9.1 Семейство <i>II</i> . . . . .	126
5.9.2 Семейство <i>III</i> . . . . .	128
5.9.3 Семейство <i>IV</i> . . . . .	130
5.9.4 Случай $n_1^2 > n_2^2$ . . . . .	130
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>131</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>133</b>

# Введение

## Актуальность темы

Диссертация относится к области дифференциальной геометрии и топологии, в ней исследуются квантовые и модифицированные классические бильярды в областях, ограниченных софокусными квадрами. Работа посвящена изучению слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для бильярдов, заполненных средами разной оптической плотности, с косинусным законом преломления на границе раздела сред, а также асимптотике собственных функций и спектра энергии при стремлении эксцентриситета к нулю для свободной квантовой частицы на бильярдном столе, ограниченном софокусными квадрами.

Бильярд в плоской области, ограниченной эллипсом, интегрируем, см. книгу Дж. Д. Биркгофа [1]. В книгах В. В. Козлова и Д. В. Трещева [2], а также С. Л. Табачникова [3] можно найти обзор как современных, так и классических исследований, посвященных математическому бильярду. Естественным образом возникает вопрос о возможностях модификации бильярда с сохранением его интегрируемости. Здесь имеется до сих пор не решенная в полном объеме знаменитая гипотеза Биркгофа (см. [4]), наиболее сильные, по всей видимости, результаты в этом направлении получены в работах А. Е. Миронова и М. Бялого [5–7], см. также А. А. Глуцок [8], и А. Ю. Калошин [9; 10].

Теперь обратимся к интегрируемым модификациям эллиптического бильярда. Давно известно, что бильярды внутри плоских областей, ограниченных софокусными квадрами, тоже интегрируемы. Исследование этих систем в рамках теории А. Т. Фоменко топологической классификации интегрируемых систем было начато в работах В. Драговича, М. Раднович [11; 12], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [13–17].

Одна из важнейших модификаций — добавление потенциала к гамильтониану свободной частицы в бильярде при условии сохранения интегрируемости системы по Лиувиллю. Фундаментальным является результат В. В. Козлова о серии таких потенциалов [18]. Его потенциалы сохраняют интегрируемость как бильярда в эллипсе, так и бильярдов в областях, ограниченных дугами софокусных квадрами.

В последние годы в проблеме нахождения интегрируемых модификаций эллиптического бильярда достигнут значительный прогресс. Основными здесь являются работы, выполненные А. Т. Фоменко и его научной школой. Объем полученных этой группой значимых результатов настолько велик, что даже краткое их изложение в рамках данного введения не представляется возможным, познакомиться с ними можно по обзору [19]. Тем не менее, упомянем некоторые ключевые моменты. А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкина разработали теорию бильярдных книжек (введенных В. В. Ведюшкиной) — бильярдных систем на  $CW$ -комплексах, склеенных из плоских ограниченных софокусными квадриками столов [20]. В терминах бильярдных книжек был сформулирован ряд гипотез Фоменко о моделировании интегрируемых гамильтоновых систем и их особенностей. В работе [21] был введен класс бильярдов с проскальзыванием вдоль границы стола. Другому расширению интегрируемых бильярдов — силовым (эволюционным) бильярдам посвящена недавняя статья [22].

Ф. Ю. Попеленский и автор диссертации совместно обнаружили новый класс интегрируемых бильярдов. Пусть область  $\Omega$  ограничивается набором софокусных квадрик и разбивается дугами квадрик того же семейства на области  $\Omega_i$ . Припишем каждой области  $\Omega_i$  коэффициент  $n_i$ , имеющий смысл показателя преломления. Рассмотрим движение материальной точки в области  $\Omega$ : будем считать, что на внешней границе  $\Omega$  движение подчиняется закону ‘угол падения равен углу отражения’, а на общей границе областей  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  выполняется соотношение  $n_i \cos \theta_i = n_j \cos \theta_j$ . Здесь  $\theta_i, \theta_j$  — углы, которые образуют отрезки траектории с нормалью к кривой  $C \subset (\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)$ , если  $\theta_i$  и  $\theta_j$  корректно определены. В случае, когда косинус преломленного угла в силу этого соотношения превышает по модулю единицу, частица испытывает полное внутреннее отражение. Такая система оказывается интегрируемой. Если дуги софокусных квадрик, являющихся границами раздела сред, не имеют попарных пересечений, то интеграл движения  $\Xi$  является кусочно гладкой функцией на фазовом пространстве. Если же границы раздела сред пересекаются, то в точках пересечения возникают своего рода ветвления, и интеграл движения оказывается многозначным. В этой совместной работе описаны слоения изоэнергетического многообразия на поверхности уровня дополнительного интеграла в обоих случаях: при наличии ветвления и при его отсутствии.

Собственные функции и спектр оператора энергии свободной квантовой частицы в эллипсе хорошо известны и выражаются в терминах специальных функций Матьё и их нулей. При стремлении эксцентриситета эллипса к нулю получается свободная квантовая частица в круге. Ее энергетический спектр выражается через функции Бесселя первого рода и их нули. Асимптотическое поведение собственных функций и спектра частицы в эллипсе при эксцентриситете, стремящимся к нулю, хорошо известно, см. [23; 24]. Автором была рассмотрена квантовая частица в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик. При стремлении расстояния между фокусами к нулю предельная область оказывается ограниченной дугами концентрических окружностей и отрезками радиусов. В таких областях собственные функции и энергетический спектр выражаются в терминах функций Бесселя первого и второго рода и нулей их линейных комбинаций. Получение асимптотических формул для собственных функций и энергетического спектра — нетривиальная задача в силу наличия углов у такого бильярдного стола. В диссертации решена эта задача для двух областей, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора.

## Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Доказать интегрируемость классического бильярда на софокусных столах, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
2. Исследовать слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух 'оптических систем' с косинусным законом преломления, т.е. для софокусных столов, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.

3. Вычислить асимптотическое поведение уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора при стремлении фокального расстояния к нулю, и нахождение спектра наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Классический бильярд на софокусных столах, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' является интегрируемым в предположении, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
2. Топологическая классификация поверхностей постоянного уровня дополнительного интеграла для двух 'оптических систем' с косинусным законом преломления, т.е. для софокусных столов, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
3. Асимптотика уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора при стремлении фокального расстояния к нулю, и спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

## **Научная новизна**

Автором получены новые результаты:

- Доказана интегрируемость классического бильярда на софокусных столах, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.

- Исследованы и описаны слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух ‘оптических систем’ с косинусным законом преломления, т.е. для софокусных столов, разделенных софокусными квадрами на области, заполненные изотропными средами с различными показателями ‘оптической плотности’ при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
- Вычислена асимптотика уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора при стремлении фокального расстояния к нулю, и вычислен спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

## Методы исследования

В исследовании бильярда с косинусным законом преломления на софокусных квадрами применяются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с одной и двумя степенями свободы, построенной А.Т. Фоменко, Х. Цишангом, А.В. Болсиновым и другими. В исследовании асимптотического поведения уровней энергии квантового бильярда используются элементы теории Штурма и теории специальных функций, методы теории краевых задач.

## Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании собственных функций и собственных значений оператора Лапласа в областях, ограниченных софокусными квадрами. Разработанная автором техника позволяет получить асимптотику собственных значений в том числе для областей с углами на границе.

Результаты по теории бильярда с косинусным законом преломления могут быть использованы для расширения и исследования класса интегрируемых бильярдных систем. Ожидается нахождение новых интересных примеров интегрируемых систем с весьма нетривиальной топологией слоения Лиувилля.

## Апробация диссертации

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Студенческая школа-конференция «Математическая весна – 2023», Нижний Новгород, Россия, 27-30 марта 2023;
2. Ломоносовские чтения 2023, Россия, 4-14 апреля 2023;
3. XXX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», Москва, Россия, 10-21 апреля 2023;
4. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна, Воронеж, Россия, 26-30 января 2024;
5. Студенческая школа-конференция «Математическая весна – 2024», Нижний Новгород, Россия, 25-28 марта 2024;
6. XXXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2024», Москва, Россия, 12-26 апреля 2024;
7. Семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А.Т. Фоменко на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова, 25 ноября 2024;
8. XXXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2025», Москва, Россия, 11-25 апреля 2025.
9. V Конференция математических центров России, Красноярск, 11-16 августа 2025
10. Семинар Международной лаборатории динамических систем и приложений, НИУ ВШЭ - Нижний Новгород, Россия, 26 ноября 2025.
11. Конференция "Алгебра, геометрия и алгебраическая геометрия Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, 1-5 декабря 2025.

## Публикации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 4 работах, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных

для защиты из списка диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология (физико-математические науки).

## Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 137 страниц, включая 92 рисунка и 4 таблицы. Список литературы содержит 34 наименования.

## Основное содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются результаты и содержание. Условно диссертация может быть разделена на две части. Главы 1–2 посвящены исследованию асимптотики собственных значений для квантовых бильярдов на софокусных столах. Главы 3–5 целиком посвящены развитию новой динамической системы, в основе которой лежит косинусный закон преломления траектории.

В первой главе приведены сведения, необходимые для исследования асимптотики уровней энергии оператора Шрёдингера на софокусных столах при близком к нулю расстоянии между фокусами. Рассматривается уравнение свободной квантовой частицы с потенциалом «бесконечной ямы». Такой подход устанавливает соответствие между решениями стационарного уравнения Шрёдингера и собственными функциями  $\psi$  оператора Лапласа с условием Дирихле на границе области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Напомним, что в полярной системе координат  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  в предположении  $\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$  уравнение Гельмгольца расщепляется в систему дифференциальных уравнений на функции  $R(r)$  и  $\Phi(\varphi)$ . В частности, радиальная составляющая  $R(r)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя. Ввиду значительной роли функций Бесселя в дальнейших соображениях, в главе приводится основная теория функций Бесселя. Связь собственных значений оператора Лапласа и нулей функций Бесселя для задачи в полярной системе координат проиллюстрирована на примере свободной квантовой частицы в круге. Также приводится анализ задачи в круговом кольце и секторе, поскольку эти области являются предельными для аналогичных областей в эллиптической системе координат  $(x, y) = (\delta \cosh \rho \cos \varphi, \delta \sinh \rho \sin \varphi)$  с фокусами в точках  $(\pm\delta, 0)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Уравнение Гельмгольца в новой системе

координат также расщепляется: если  $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ , то функции  $\Phi(\varphi)$  и  $R(\rho)$  удовлетворяют *угловому* и *радиальному уравнению Матъё*, соответственно. Ключевым свойствам решений этих уравнений, *функциям Матъё*, посвящен отдельный раздел первой главы. Приводятся элементы теории Флоке и теории Штурма.

В отличие от квантового бильярда в круге, в эллипсе появляется дополнительное условие на решения стационарного уравнения Шрёдингера. Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  и  $J$  – это часть соединяющего фокусы  $(\pm\delta, 0)$  отрезка. Предположим, что  $J$  содержится во внутренности области  $\Omega$ . Тогда гладкое решение  $\psi(\rho, \varphi)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\psi(0, \varphi) = \psi(0, -\varphi) \quad (\text{непрерывность сдвига через } J), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \varphi)|_{\rho \rightarrow 0} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, -\varphi)|_{\rho \rightarrow 0} \quad (\text{непрерывность производной через } J), \quad (1.5)$$

Один из разделов первой главы посвящен задаче об асимптотике уровня энергии свободной квантовой частицы в эллипсе с точки зрения теории специальных функций. Эта задача призвана сформировать базовый инструментарий, который получит дальнейшее развитие и применение при рассмотрении задач из следующей главы. В частности, показано, что при  $\delta \rightarrow 0$  собственные значения в эллипсе имеют своим пределом значения в круге. Этот же характер асимптотического поведения сохраняется и для иных областей, рассмотренных во второй главе. В завершение первой главы приводится общий вид собственных функций для «эллиптического кольца», анализ задачи продолжен в первом разделе следующей главы.

Асимптотика собственных значений для «эллиптического кольца» приводится в начале **второй главы**. Доказана следующая теорема:



**Теорема 5.** Для собственных функций  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi)$  оператора  $\hat{H}$  справедливы выражения

$$\psi_{k,m}(\rho, \varphi) = \begin{cases} Ce_\nu(\rho, q)se_\nu(\varphi, q), & \text{нечетный } k \geq 1 \\ Se_\nu(\rho, q)se_\nu(\varphi, q), & \text{четный } k \geq 2 \end{cases} \quad (2.9)$$

с параметрами

$$\nu = \nu_{k,m} = \nu_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{4r_0^2} \nu_1 + o(\delta^2), \quad q = q_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4},$$

где

$$\nu_0 = \frac{\pi k}{2\varphi_0} \quad \text{и} \quad \nu_1 = \frac{\pi k \sin 2\varphi_0}{\pi^2 k^2 - 4\varphi_0^2}.$$

Соответствующие собственные значения  $E_{k,m}$  выражаются через величины  $\varkappa_{k,m}^2$  по формуле  $E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \varkappa_{k,m}^2}{2M}$ , при этом для последних справедливы равенства

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{\varkappa_1}{\left. \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} + o(\delta^2), \quad (2.10)$$

где

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \frac{J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4(\nu_0-1)} - \frac{J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4(\nu_0+1)} - \nu_1 \left. \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}), & \text{для нечетных } k \geq 1; \\ \frac{(\nu_0-2)J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0-1)} - \frac{(\nu_0+2)J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0+1)} - \nu_1 \left. \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}), & \text{для четных } k \geq 2. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha_{\nu_0,m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя первого рода  $J_{\nu_0}(x)$ .

Случай  $k = 1$  для области  $A_\delta$  при  $\varphi_0 = \pi/2$  рассматривается отдельно. Для этого случая формула имеет следующий вид:

$$\varkappa_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{1,m}^3}{16r_0^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\left. \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2), \quad (2.18)$$

Для несимметричной области  $B_\delta$  аналогичная асимптотика подчиняется следующей формуле:

**Теорема 6.** В области  $B_\delta$  для собственных функций  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi)$  оператора  $\hat{H}$  справедливы выражения

$$\psi_{k,m}(\rho, \varphi) = Se_\nu(\rho, q) \left( ce_\nu(\varphi_0, q)se_\nu(\varphi, q) - ce_\nu(\varphi, q)se_\nu(\varphi_0, q) \right), \quad (2.19)$$

с параметрами

$$\nu = \nu_{k,m} = \nu_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{4r_0^2} \nu_1 + o(\delta^2), \quad q = q_{k,m} = \frac{\chi_{k,m}^2 \delta^2}{4},$$

где

$$\nu_0 = \frac{\pi k}{\varphi_1 - \varphi_0}, \quad \text{и} \quad \nu_1 = \frac{\pi k (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)}{\pi^2 k^2 - (\varphi_1 - \varphi_0)^2}.$$

Соответствующие собственные значения  $E_{k,m}$  выражаются через величины  $\chi_{k,m}^2$  по формуле  $E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \chi_{k,m}^2}{2M}$ , при этом для последних справедливы равенства

$$\begin{aligned} \chi_{k,m}^2 = & \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} \left( \frac{(\nu_0 - 2) J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 - 1)} \right. \\ & \left. - \frac{(\nu_0 + 2) J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 + 1)} - \nu_1 \left. \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0} (\alpha_{\nu_0,m}) \right) + o(\delta^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь  $\alpha_{\nu_0,m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя первого рода  $J_{\nu_0}(x)$ .

Случай  $k = 1$  для области  $B_\delta$  для  $(\varphi_0, \varphi_1) = (0, \pi)$  рассматривается отдельно. Для нее имеет место следующая формула:

$$\chi_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{3\alpha_{1,m}^3}{16r_0^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\left. \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2). \quad (2.21)$$

В завершение главы приведена постоянная наблюдаемая величина для квантовой свободной частицы на софокусных столах.

**Третья глава** содержит основные понятия теории интегрируемого математического бильярда, а также формулировку косинусного закона преломления.

Приведем косинусный закон преломления как изложено в работе. Пусть две области  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  граничат по кривой  $C$ . Показатели преломления для этих областей равны  $n_i$  и  $n_j$ , соответственно. Будем считать, что движение материальной точки при достижении кривой  $C$  подчиняется следующим правилам (далее мы будем ссылаться на них как на модифицированный закон преломления (\*)).

1. Выполнено соотношение  $n_i \cos \theta_i = n_j \cos \theta_j$ , где  $\theta_i, \theta_j \in [0, \frac{\pi}{2}]$  – углы, которые образуют отрезки траектории в соответствующих областях с нормалью к кривой  $C$ , если  $\theta_i$  и  $\theta_j$  корректно определены.

2. Если  $n_i > n_j$  и материальная точка, двигаясь в области  $\Omega_i$ , достигает кривой  $C$ , причем в точке пересечения траектории с кривой  $C$  выполнено неравенство  $\cos \theta_i > \frac{n_j}{n_i}$ , то происходит полное внутреннее отражение траектории в область  $\Omega_i$  по закону «угол падения равен углу отражения» (в этом случае угол  $\theta_j$  не определен, поскольку  $\frac{n_i}{n_j} \cos \theta_i > 1$ ).
3. В предыдущих двух пунктах два соседних отрезка траектории с общей точкой на кривой  $C$  лежат по разные стороны от нормали к кривой  $C$  в этой точке.
4. Если  $n_i > n_j$  и материальная точка, двигаясь в области  $\Omega_j$ , достигает кривой  $C$ , причем  $\theta_j = 0$ , тогда  $\cos \theta_i = \frac{n_j}{n_i}$  и материальная точка продолжает движение в области  $\Omega_i$  вдоль любого из двух возможных направлений, образующих угол  $\theta_i$  с нормалью к кривой  $C$ .
5. Аналогично при  $n_i < n_j$ .

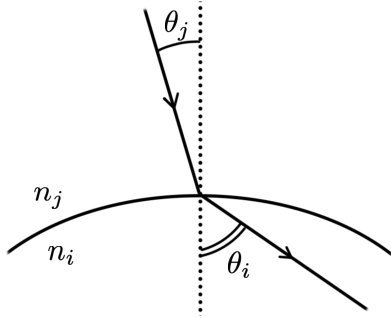


Рисунок 3.1 — Иллюстрация к пункту 1.

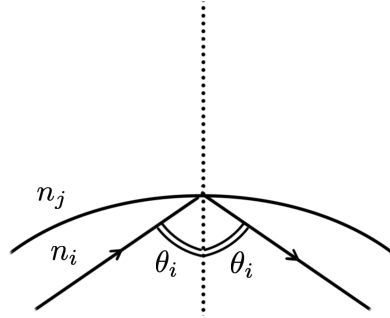


Рисунок 3.2 — Иллюстрация к пункту 2.

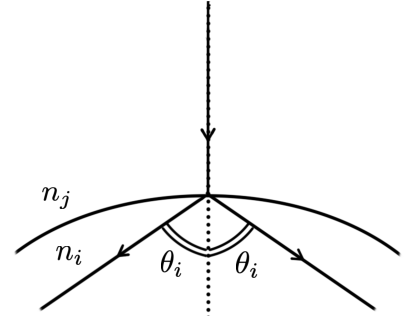


Рисунок 3.3 — Иллюстрация к пункту 4.

Под *софокусным столом* будем понимать область, ограниченную дугами эллипсов и гипербол с общими фокусами в точках  $(\pm c, 0)$ ,  $c > 0$ . В частности каждая из *софокусных квадратик*  $Q_\lambda$  удовлетворяет уравнению  $\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$  для некоторого параметра  $\lambda \in (0, a^2)$ . В теории классического математического бильярда в эллипсе в качестве постоянной движения часто рассматривают параметр *каустики* – такой софокусной квадратик, которая является касательной к каждому звену бильярдной траектории. Этот параметр может быть вычислен явно как функция координат точки и компонент вектора скорости:

$$\Lambda(x, y, v_x, v_y) = \frac{a^2 v_y^2 + b^2 v_x^2 - (x v_y - y v_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для бильярдов на софокусных столах, подчиняющихся этому закону, приводится выражение для постоянной движения. А именно, если преломление по

закону (\*) происходит на дугах непересекающихся квадратик  $Q_1, \dots, Q_k$ , тогда справедливо следующее утверждение:

**Теорема 9.** Пусть внутренность эллипса разбита попарно непересекающимися дугами софокусных квадратик на области  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ . Перенумеруем области так, чтобы общие границы имели только области с соседними номерами. Пусть  $\lambda_j$  – параметр софокусной квадратик, разделяющей  $\Omega_j$  и  $\Omega_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ . Здесь и далее показатель преломления для области  $\Omega_j$  обозначается через  $n_j$ . Определим функцию  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  по формуле:

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1; \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq k. \end{cases}$$

Функция  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  является константой на траекториях бильярда с косинусным законом преломления (\*).

Два возможных варианта таких разбиений показаны на рис. 3.4 и 3.5. Возникает **задача А**: описать слоение изоэнергитического многообразия на по-

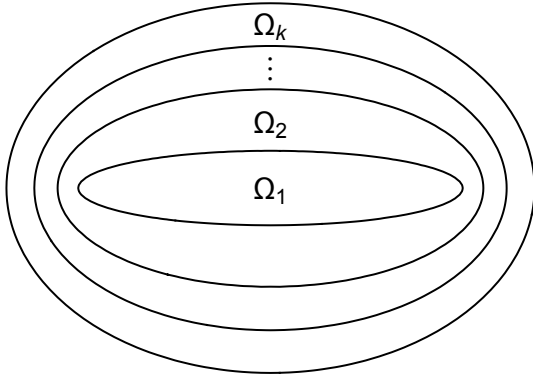


Рисунок 3.4 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ .

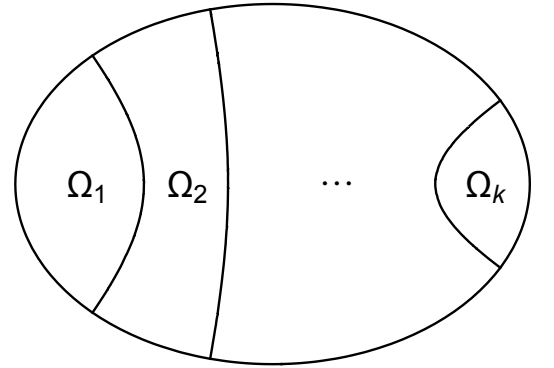


Рисунок 3.5 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ .

верхности уровня первого интеграла  $\Xi$  для случаев, показанных на рис. 3.4 и 3.5. В следующей главе подробно рассматривается случай двух областей, разделенных одним софокусным эллипсом (см. рис. 3.4 при  $k = 2$ ). Динамика этой системы и перестройки поверхностей постоянного значения интеграла  $\Xi$  уже в этом случае очень нетривиальны.

Случай пересекающихся квадратик оказывается гораздо сложнее. Каждой точке  $A$  пересечения разделяющих среды квадратик требуется поставить в

соответствие коэффициент  $\gamma_A$ , имеющий смысл *коэффициента ветвления*. Величина  $\gamma_A$  явно зависит от параметров пересекающихся в точке  $A$  квадратик и параметров  $n_j$  примыкающих областей  $\Omega_j$ .

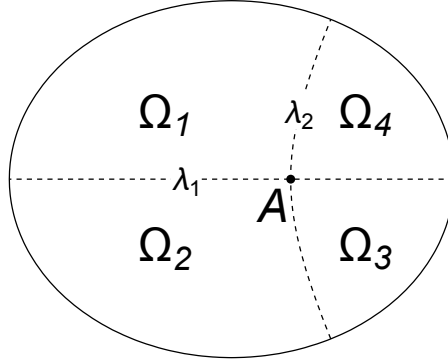


Рисунок 3.6 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_4$ .

К примеру, для области с изображенным на рис. 3.6 разбиением введем коэффициент  $\gamma_A$  в точке  $A$ , имеющий смысл коэффициента ветвления, по формуле

$$\gamma_A = (\lambda_1 - \lambda_2)(n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2).$$

Определим вспомогательную функцию  $\tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y)$

$$\tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{\sigma(j)}(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq 4, \end{cases}$$

где  $\sigma(j)$  — номер квадратки, разделяющей  $\Omega_j$  и  $\Omega_{j+1}$ . Неформально говоря, величина  $\tilde{\Xi}$  почти подходит на роль дополнительного интеграла, но имеет разрыв на дуге, разделяющей области  $\Omega_1$  и  $\Omega_4$ . Можно проверить, что на любой бильярдной траектории, пересекающей эту дугу, функция  $\tilde{\Xi}$  испытывает один и тот же скачок, равный  $\pm\gamma_A$ . Поэтому мы определим *первый интеграл*  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  со значениями в  $S^1 = \mathbb{R}/\gamma_A\mathbb{Z}$  по формуле

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y) \pmod{\gamma_A}.$$

Эта величина на траекториях бильярда сохраняется. Аналогичный подход справедлив и в других случаях единственной точки пересечения квадратик, на которых происходит преломление по правилу (\*).

Если границы раздела областей пересекаются по двум и более точкам, то имеет место общая закономерность: Для каждой точки пересечения  $A_i, i = 1, \dots, m$ , определен коэффициент  $\gamma_{A_i}$ . Дополнительный интеграл  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  принимает значения в  $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z})$ . Если  $\gamma_{A_i}$  соизмеримы, т. е. всевозможные дроби  $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}}$  — рациональные числа (или бесконечность), то  $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}) = S^1$ . Если же среди  $\gamma_{A_i}$  есть пара с иррациональным отношением  $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}}$ , то подгруппа  $\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}$  всюду плотна в  $\mathbb{R}$ . В этом случае дополнительный интеграл  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  корректно определен, но использовать его для топологического анализа структуры траекторий представляется весьма затруднительным.

**Четвертая глава** посвящена рассмотрению задачи А: описать слоение изоэнергетического многообразия на поверхности уровня первого интеграла  $\Xi$  для подчиняющейся закону (\*) бильярдной системы в области  $\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{out}$  (см. рис. 4.1).

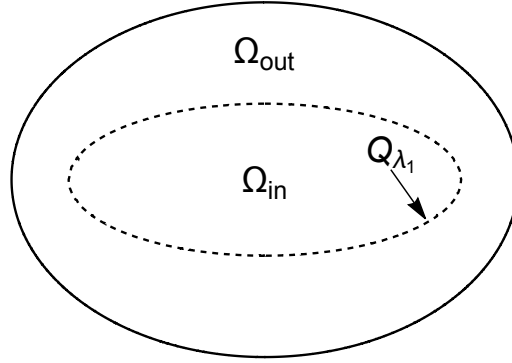


Рисунок 4.1 — Область  $\Omega$  для задачи А.

Для этой системы отрезки произвольной траектории, лежащие в области  $\Omega_{in}$ , касаются квадрики с параметром  $\alpha_{in} \in (\lambda_1, a^2)$ , а ее отрезки, лежащие в  $\Omega_{out}$  — вообще говоря, другой квадрики с параметром  $\alpha_{out} \in (0, a^2)$ . При этом параметры связаны соотношением  $(\alpha_{out} - \lambda_1)n_{out}^2 = (\alpha_{in} - \lambda_1)n_{in}^2$ . Это тождество позволяет построить отображение  $\alpha : \Xi \mapsto L \in \mathbb{R}^2$  — на прямую в плоскости с декартовыми координатами  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$ . А именно, для фиксированных  $\lambda_1, n_{in}, n_{out}$  точка  $\alpha(\Xi)$  лежит на прямой  $L$ , которая в декартовых координатах  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  задается уравнением

$$\alpha_{out} = \alpha_{in} \left( \frac{n_{in}}{n_{out}} \right)^2 + \lambda_1 \frac{n_{out}^2 - n_{in}^2}{n_{out}^2}. \quad (4.2)$$

Отметим, что прямая  $L$  проходит через точку  $(\alpha_{in}, \alpha_{out}) = (\lambda_1, \lambda_1)$ . Мы введем структурную диаграмму критических значений первого интеграла  $\Xi$ .

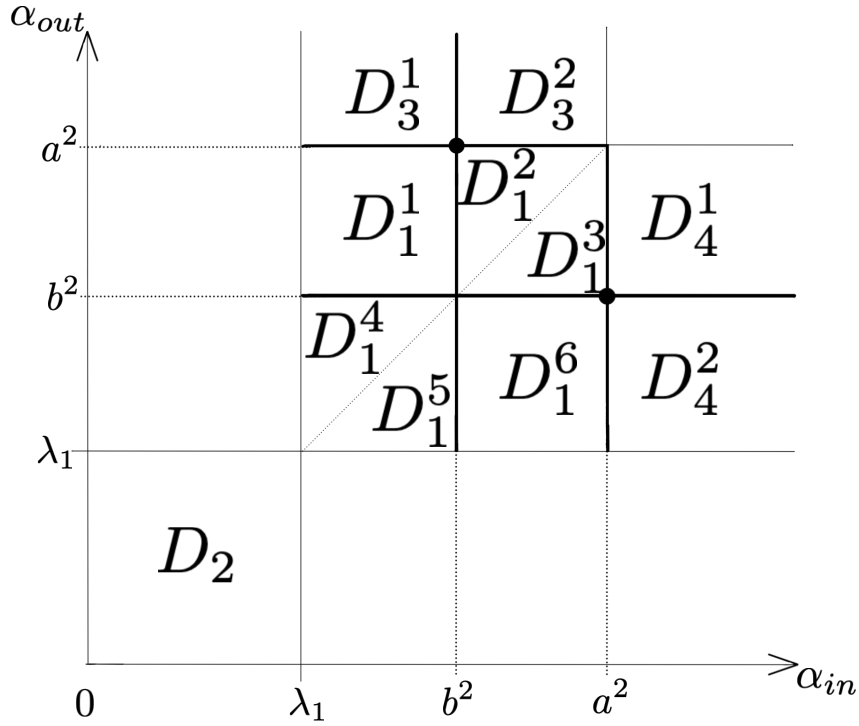


Рисунок 4.4 — Подразбиение областей  $D_1, \dots, D_4$ .

Анализ слоения на поверхности уровня интеграла  $\Xi$  проходит по следующей схеме. Сначала фиксируются параметры  $\lambda_1, n_{in}, n_{out}$ . Они определяют прямую  $L$ , при этом значение интеграла  $\Xi$  однозначно определяет точку на этой прямой. Прямая  $L$  пересекает некоторые области, изображенные на рис. 4.4. Разбиение на рисунке связано с различными типами траекторий (например, возможны траектории, для которых не определен  $\alpha_{in}$  или  $\alpha_{out}$ ). Структура слоения определяется тем, как прямая  $L$  пересекает изображенные области. При этом нерегулярные значения интеграла  $\Xi$  соответствуют точкам пересечения прямой  $L$  с координатными линиями  $\alpha_{in}, \alpha_{out} = b^2, a^2$ . В главе доказана следующая теорема:

**Теорема 10.** *Областям  $D_i^j$  в плоскости  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  соответствуют следующие поверхности  $\Xi = \text{const}$*

$D_1^1$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (b^2, a^2)$	сфера с 5 ручками;
$D_1^2$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (\alpha_{in}, a^2)$	сфера с 5 ручками;
$D_1^3$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (b^2, \alpha_{in})$	сфера с 5 ручками;
$D_1^4$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (\alpha_{in}, b^2)$	2 дизъюнктивных тора;
$D_1^5$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (\lambda_1, \alpha_{in})$	2 дизъюнктивных тора;
$D_1^6$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (\lambda_1, b^2)$	сфера с 5 ручками;
$D_2$	$(\alpha_{out} \in (0, \lambda_1), \alpha_{in} < \lambda_1)$ или $(\alpha_{in} \in (0, \lambda_1), \alpha_{out} < \lambda_1)$	2 дизъюнктивных тора;
$D_3^1$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} > a^2$	2 дизъюнктивных тора;
$D_3^2$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} > a^2$	1 тор;
$D_4^1$	$\alpha_{in} > a^2, \alpha_{out} \in (b^2, a^2)$	2 дизъюнктивных тора;
$D_4^2$	$\alpha_{in} > a^2, \alpha_{out} \in (\lambda_1, b^2)$	2 дизъюнктивных тора;

В завершение приведены особые поверхности, соответствующие пересечению прямой  $L$  и выделенных на рис. 4.4 сегментов координатных линий  $\alpha_{in}, \alpha_{out} = b^2, a^2$ . Приведенные 13 бифуркаций включают в себя «двойные перестройки», соответствующие пересечению прямой  $L$  с точками  $(b^2, a^2)$  и  $(a^2, b^2)$ . Для нетривиальных особых поверхностей приведены иллюстрации.

**Пятая глава** посвящена рассмотрению задачи Б: описать слоения изоэнергитического многообразия на поверхности уровня первого интеграла  $\Xi$  для подчиняющейся закону (\*) бильярдной системы в области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  (см. рис. 5.1). Показатели преломлений  $n_1$  для  $\Omega_1$  и  $n_2$  для  $\Omega_2$  предполагаем фиксированными. Для этой системы в качестве постоянной движения, сохраняющейся в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  до пересечения дуг  $EF$  или  $FG$  рассматривается величина  $\rho^2 = \frac{(xv_y - yv_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}$ . При этом на двух границах раздела сред  $EF$  и  $FG$  параметр каустики  $\rho^2$  преобразуется по-разному:

**Утверждение 10.** *Имеют место следующие соотношения для параметров  $\rho_1, \rho_2$  в точке преломления:*

$$(\rho_1^2 - r_1^2)n_1^2 = (\rho_2^2 - r_1^2)n_2^2 \quad \text{при } (x, y) \in EF, \quad (5.1)$$

$$\rho_1^2 n_1^2 = \rho_2^2 n_2^2 \quad \text{при } (x, y) \in FG. \quad (5.2)$$

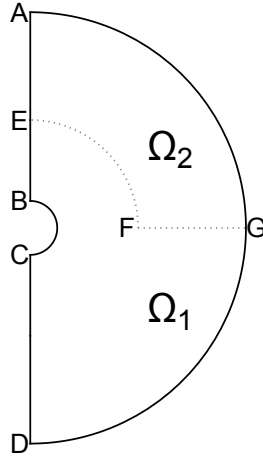


Рисунок 5.1 — Область  $\Omega$  представляет собой объединение 2 областей.

Разобьем бильярдную траекторию в точках пересечения дуги  $EF$  на фрагменты  $T_k, k \geq 1$ . Каждый фрагмент бильярдной траектории  $T_k$  образует ломаную кривую в  $\Omega \setminus EF$ , где  $EF \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . Введем на  $\Omega \setminus EF$  функцию  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  по формуле

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \rho^2(x, y, v_x, v_y) n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \rho^2(x, y, v_x, v_y) n_2^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Эта функция постоянна в каждой точке фрагмента бильярдной траектории  $T_k$ , но на разных фрагментах значения могут различаться.

Направления роста и убывания интеграла  $\Xi$  можно проиллюстрировать на примере рис. 5.2 и 5.3.

Рассмотрим значения интеграла  $\Xi$  для двух последовательных фрагментов  $T_k, T_{k+1}$ . Выясним, как они связаны, или, что то же самое, как меняется интеграл  $\Xi$  при преломлении на дуге  $EF$ .

**Утверждение 11.** *Значения  $\Xi_k$  и  $\Xi_{k+1}$  интеграла  $\Xi$ , соответствующие фрагментам траектории  $T_k$  и  $T_{k+1}$ , различаются на величину  $r_1^2(n_1^2 - n_2^2)$ .*

Значению интеграла  $\Xi$  поставим в соответствие точку плоскости  $\mathbb{R}^2$  по формуле

$$\Xi \mapsto P(\Xi) = (\rho_1^2, \rho_2^2) = \left( \frac{\Xi}{n_1^2}, \frac{\Xi}{n_2^2} \right). \quad (5.4)$$

Тогда для фиксированных параметров  $n_1, n_2$  отображением  $P$  значения величины  $\Xi$  отображаются на прямую  $L \subset \mathbb{R}^2$ . Параметризуем прямую  $L : \xi \mapsto P(\xi) = (\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$ . На ней можно выделить точку  $L_1$ , которая разделяет прямую

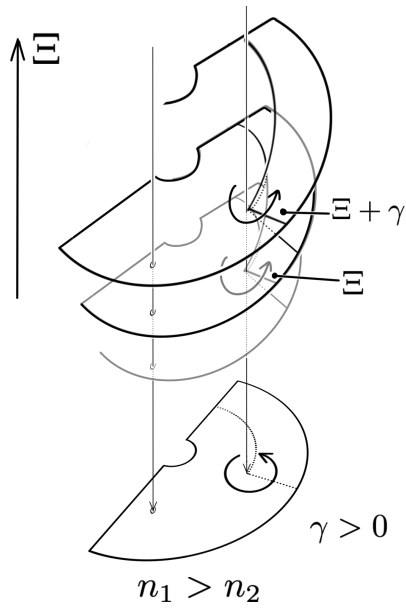


Рисунок 5.2 — Направление роста  $\Xi$  при  $n_1 > n_2$ .

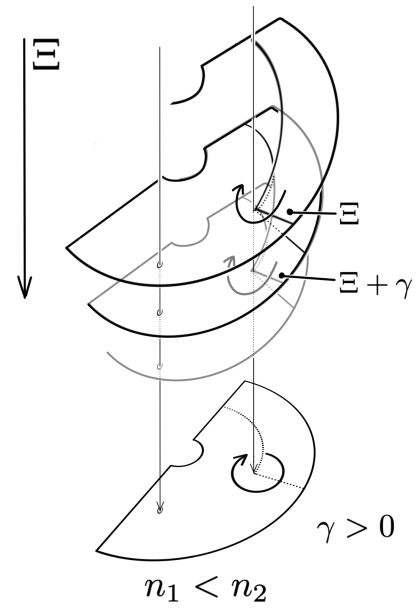


Рисунок 5.3 — Направление роста  $\Xi$  при  $n_1 < n_2$ .

на две части относительно параметра  $\xi$  на прямой  $L$  на две части:  $\{\xi < L_1\}$  и  $\{\xi > L_1\}$ . Объединяя эти части по всевозможным прямым  $L$ , получим области в  $\mathbb{R}^2$ , изображенные на рис. 5.4. При этом показано, что эти множества явля-

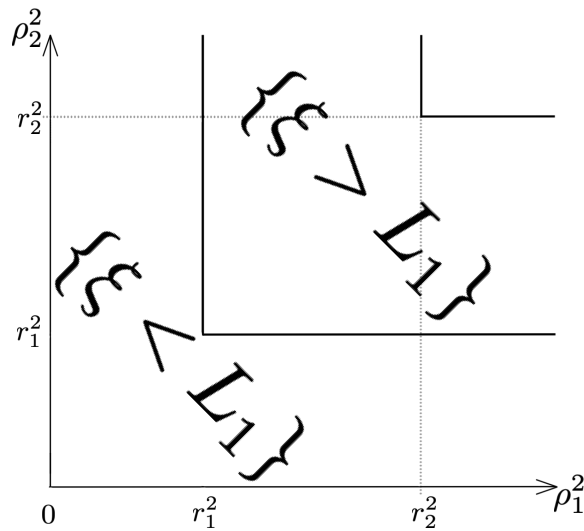


Рисунок 5.4 — Области  $\{\xi < L_1\}$  и  $\{\xi > L_1\}$ .

ются непересекающимися в смысле бильярдных траекторий: если траектория пересекает  $EF$  хотя бы однажды, тогда точки, соответствующие фрагментам  $T_k$  такой траектории, находятся только на части прямой  $L$ , попадающей внутрь области  $\{\xi < L_1\}$ , изображенной на рис. 5.4. Эти области рассматриваются отдельно в соответствующих разделах главы.

Для области  $\{\xi < L_1\}$ , соответствующей «ветвящемуся интегралу», получена бифуркационная диаграмма (см. рис. 5.7), на которой фрагмент  $L \cap \{\xi <$



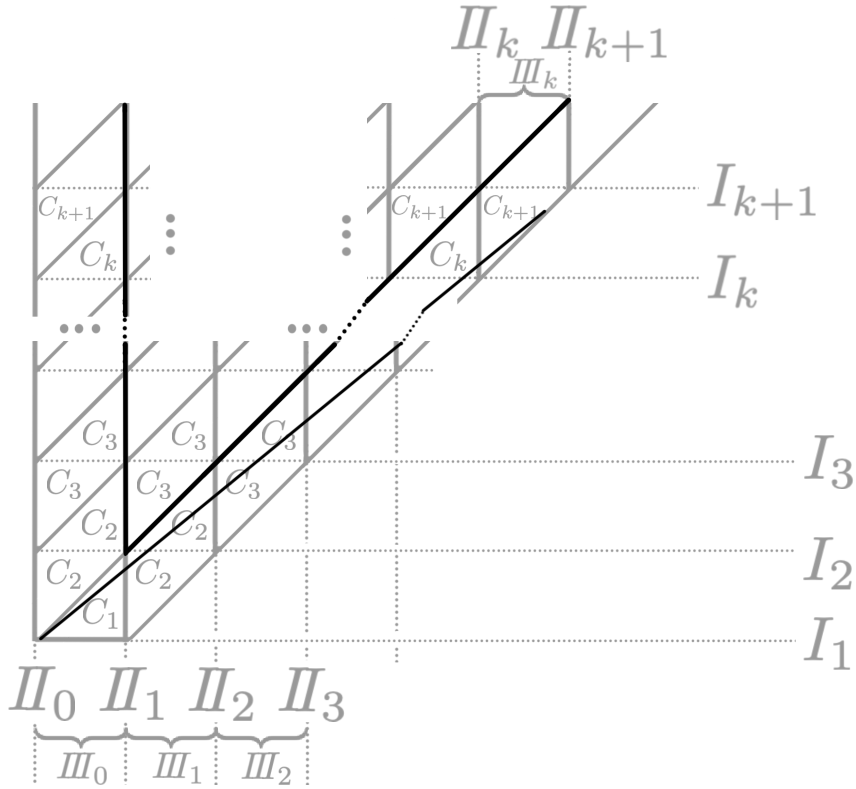


Рисунок 5.9 — Прямая, соответствующая прямой  $\rho_1^2 = r_2^2$ .

**Теорема 12.** Пусть  $n_1^2 > n_2^2$ . В области  $\{\xi < L_1\}$  поверхности  $S_\Xi$  являются сферами с  $2m + 1$  ручками, если  $P(\Xi) \in C_m$  и сферами с  $2m$  ручками, если  $P(\Xi) \in C'_m$  и  $m \leq \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$ .

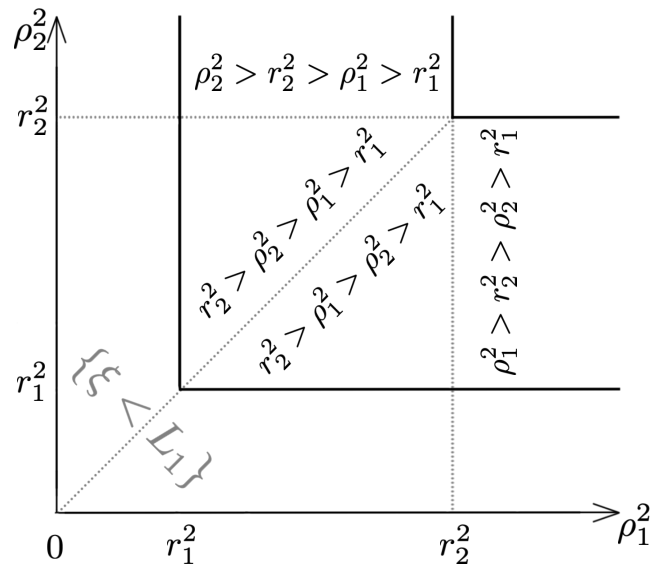
Случай  $\{\xi > L_1\}$  существенно проще предыдущего, поскольку в этом случае дополнительный интеграл  $\Xi$  однозначен: бильярдные траектории лежат на поверхностях уровня дополнительного интеграла  $\Xi = \text{const}$ . Структура слое-ния определяется тем, как прямая  $L \cap \{\xi > L_1\}$  пересекает четыре области, изображенные на рис. 5.28. Доказано следующее:

**Теорема 13.** Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  является

сферой с двумя ручками для случаев тором для случаев

$$\begin{array}{ll} r_2^2 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > r_1^2 & \rho_2^2 > r_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2 \\ r_2^2 > \rho_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2 & \rho_1^2 > r_2^2 > \rho_2^2 > r_1^2 \end{array}$$

В завершение главы приводятся описания особых поверхностей для случаев  $\{\xi < L_1\}$  и  $\{\xi > L_1\}$  с иллюстрациями для ключевых перестроек.

Рисунок 5.28 — Разбиение области  $\{\xi > L_1\}$ .

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Ф. Ю. Попеленскому за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе на всех этапах её подготовки. Автор благодарит заведующего кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ А. Т. Фоменко и весь коллектив кафедры за вдохновляющую, доброжелательную атмосферу и поддержку.

# Глава 1. Предварительные сведения

## 1.1 Квантовый бильярд в области $\Omega$ , ограниченной координатными линиями полярной системы координат

Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^2(x, y)$ . Рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\hat{H}\psi = \left( \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(x, y) \right) \psi = \left( \frac{-\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(x, y) \right) \psi = E\psi,$$

где потенциал  $V(x, y)$  внутри области  $\Omega$  равен нулю, а вне ее обращается в бесконечность.

**Замечание 1.** Такая задача равносильна поиску собственных функций и собственных значений оператора Лапласа в области  $\Omega$  для функций, обращающихся в нуль на границе  $\Omega$ .

Заметим, что при обозначении  $\kappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$  уравнение Шрёдингера можно записать в виде  $\nabla^2 \psi = -\kappa^2 \psi$ .

### 1.1.1 Стационарное уравнение Шрёдингера в полярной системе координат

В полярной системе координат  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  оператор Гамильтона (1.1) внутри области  $\Omega$  имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2M} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)$$

Запишем функцию  $\psi$  в виде  $\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ , и пусть  $E$  — ее собственное значение. Тогда положим  $\kappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$ , и уравнение  $(\nabla^2 + \kappa^2)\psi = 0$  примет вид

$$\frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\Phi}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \Phi + \kappa^2 R \Phi = 0.$$

Обе части уравнения умножим на  $\frac{r^2}{R\Phi}$ :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \kappa^2 r^2 = 0.$$

Введем разделяющий параметр  $\lambda$ , что позволяет рассмотреть исходное уравнение на  $\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ , как систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2, \\ \frac{rR'}{R} + \frac{r^2R''}{R} + \varkappa^2r^2 = \lambda^2 \end{cases} \quad (\text{уравнение Бесселя}). \quad (1.1)$$

решениями последнего уравнения являются функции Бесселя первого и второго рода  $J_\lambda(\varkappa r)$  и  $Y_\lambda(\varkappa r)$ , соответственно.

### 1.1.2 Функции Бесселя

Функция Бесселя первого рода  $J_\alpha(x)$  является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0,$$

где параметр  $\alpha$  выбирается так, что разложение  $J_\alpha(x)$  в точке  $x = 0$  имеет вид

$$J_\alpha(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2r}}{r! \Gamma(\alpha + r + 1)}.$$

Главная ветвь  $J_\alpha(x)$  соответствует главному значению функции  $\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2r}$  и является аналитической функцией в комплексной плоскости с вырезом вдоль интервала  $(-\infty, 0]$ . При  $\alpha \in \mathbb{Z}$  функция  $J_\alpha(x)$  является целой для  $x \in \mathbb{C}$ , причем  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ . Если  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , то функции  $J_\alpha$  и  $J_{-\alpha}$  линейно независимы. Если  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то функции Бесселя  $J_\alpha(x)$  имеют счетное число положительных вещественных нулей  $\{j_{\alpha,k}\}_{k=1}^{\infty}$ . Традиционно их нумеруют по возрастанию

$$j_{\alpha,1} < j_{\alpha,2} < j_{\alpha,3} < \dots$$

Для функций Бесселя справедливы связующие соотношения:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos \pi\alpha - J_{-\alpha}(x)}{\sin \pi\alpha}$$

и рекуррентные соотношения, справедливые для  $F = J$  и  $F = Y$ .

$$\frac{2\alpha}{x} F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}(x) + F_{\alpha+1}(x), \quad 2 \frac{dF_\alpha(x)}{dx} = F_{\alpha-1}(x) - F_{\alpha+1}(x).$$

Также существуют (см. [26, § 10.19]) асимптотики функций Бесселя для больших аргументов и для больших значений порядка  $\alpha$ :

$$J_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} \left(\frac{ex}{2\alpha}\right)^\alpha.$$

Для нулей  $j_{\alpha,m}$ ,  $y_{\alpha,m}$  функций Бесселя первого и второго рода выведена на [27] их асимптотика при  $m \rightarrow \infty$ :

$$j_{\alpha,m}, y_{\alpha,m} \approx a - \frac{\mu - 1}{8a} - \frac{4(\mu - 1)(7\mu - 31)}{3(8a)^3} - \frac{32(\mu - 1)(83\mu^2 - 982\mu + 3779)}{15(8a)^5} + \dots,$$

где  $\mu = 4\alpha^2$ ,  $a = (m + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4})\pi$  для  $j_{\alpha,m}$  или  $a = (m + \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4})\pi$  для  $y_{\alpha,m}$ . Для произведений функций Бесселя вида  $Y_\nu(x)J_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)J_\nu(x)$  асимптотика  $m$ -го положительного нуля  $\alpha_{\nu,m}$  также известна [28, § 9, с. 358]:

$$\alpha_{\nu,m} = \sigma + \frac{\chi}{\sigma} + \frac{\omega - \chi^2}{\sigma^3} + \frac{\eta - 4\chi\omega + 2\chi^3}{\sigma^5} + \dots,$$

где  $\mu = 4\nu^2$ ,  $\sigma = \frac{\pi m}{\lambda - 1}$ ,  $\chi = \frac{\mu - 1}{8\lambda}$ ,  $\omega = \frac{(\mu - 1)(\mu - 25)(\lambda^3 - 1)}{6(4\lambda)^3(\lambda - 1)}$ ,  $\eta = \frac{(\mu - 1)(\mu^2 - 114\mu + 1073)(\lambda^5 - 1)}{5(4\lambda)^5(\lambda - 1)}$ .

### 1.1.3 Квантовый бильярд в круге

Пусть  $\Omega = D^2$  — двумерный диск радиуса  $r_0$ . Для этой системы гамильтониан имеет вид как в уравнении (1.1), где потенциал  $V(x, y)$  определяется как

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & \sqrt{x^2 + y^2} < r_0 \\ \infty, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq r_0. \end{cases}$$

В силу замечания 1, для решения задачи достаточно найти такие собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в области  $\Omega$ , которые обращаются в нуль на границе  $\Omega$ .

**Утверждение 1.** В области  $D^2$  собственные функции  $\psi_{k,m}(r, \varphi)$  и собственные значения  $E_{k,m}$  оператора  $\hat{H}$  имеют вид

$$\psi_{k,m}(r, \varphi) = J_k\left(\frac{\alpha_{k,m}r}{r_0}\right) \cos(k\varphi + \varphi_0), \quad E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \alpha_{k,m}^2}{2Mr_0^2}, \quad k \geq 0, m \in \mathbb{N},$$

где  $\alpha_{k,m}$  —  $m$ -й ноль функции Бесселя первого рода  $J_k(x)$ .

*Доказательство.* Для  $r < r_0$  получаем дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных  $(\nabla^2 + \varkappa^2)\psi = 0$ , где  $\varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$ . Запишем

искомую функцию в виде  $\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ . Тогда, в силу соображений из подраздела 1.1.1,  $\Phi(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi$  и  $R(r) = J_k(\varkappa r)$ , где  $J_k(x)$  - функция Бесселя первого рода. Таким образом,  $\psi(r, \varphi) = J_k(\varkappa r)(\tilde{A} \cos k\varphi + \tilde{B} \sin k\varphi)$ .

Из граничного условия заметим, что

$$\psi(r, \varphi)|_{\partial D^2} = 0 \implies J_k(\varkappa r)|_{r=r_0} = 0 \implies \varkappa r_0 \in \{\alpha : J_k(\alpha) = 0\},$$

откуда допустимые значения  $\varkappa \in \{\frac{\alpha}{r_0} : J_k(\alpha) = 0\}$ . Значения  $k$  должны быть такими, чтобы выполнялось равенство  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ , справедливое при условии  $k \in \mathbb{Z}$ . Учитывая также, что  $\varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$ , допустимыми значениями  $E$  являются

$$E = \frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2M} \in \left\{ \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2Mr_0^2} : J_k(\alpha) = 0 \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда, выбирая из множества  $\alpha$  один конкретный  $\alpha_{k,m}$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ , получим вид собственных функций системы (с точностью до умножения на константу)

$$\psi_{k,m}(r, \varphi) = J_k\left(\frac{\alpha_{k,m} r}{r_0}\right) \cos(k\varphi + \varphi_0),$$

и их собственными значениями будут

$$E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \alpha_{k,m}^2}{2Mr_0^2}, \quad k \geq 0, m \in \mathbb{N},$$

где  $\alpha_{k,m}$  -  $m$ -й ноль функции  $J_k(x)$ . □

### 1.1.4 Квантовый бильярд в круговом кольце и накрытии кругового кольца

Пусть  $\Omega$  — область,  $p$ -листно накрывающая кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями радиусов  $0 < r_0 < r_1$ . Случай  $p = 1$  относится к классической теории колебаний (см. [24]). Будем считать, что обе окружности имеют центр в начале координат. В области  $\Omega$  удобно рассматривать аналог полярных координат — расстояние  $r$  до начала координат и угол  $\varphi$ , определенный  $\text{mod } 2\pi p$ . В  $\Omega$  рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера (1.1), где

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & r_0 < \sqrt{x^2 + y^2} < r_1 \\ \infty, & r_1 < \sqrt{x^2 + y^2} \text{ или } \sqrt{x^2 + y^2} < r_0. \end{cases}$$

$V(r)$  внутри области  $\Omega$  равен нулю, а вне ее обращается в бесконечность. Задача равносильна поиску собственных функций и собственных значений оператора Лапласа в области  $\Omega$  для функций, обращающихся в нуль на границе  $\Omega$ . Положим  $\varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$ . Далее  $J_\nu$  и  $Y_\nu$  — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

**Теорема 1.** (для  $p = 1$  см. [29, с. 165.]).

В области  $\Omega$  ( $p$ -листном накрытии кругового кольца) собственные функции  $\Psi_{k,m}(r, \varphi)$  и собственные значения  $E_{k,m}$  оператора  $\hat{H}$  имеют вид

$$\Psi_{k,m}(r, \varphi) = \left[ Y_\nu(\alpha_{\nu,m}) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,m} r}{r_0}\right) - Y_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,m} r}{r_0}\right) J_\nu(\alpha_{\nu,m}) \right] \cos(\nu\varphi + \varphi_0),$$

$$E_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \hbar^2}{2M},$$

где  $\nu = \frac{k}{p}$ ,  $\lambda = \frac{r_1}{r_0}$ ,  $\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{\nu,m}^2}{r_0^2}$ ,  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{\nu,m}$  —  $m$ -й нуль функции  $f(x) = Y_\nu(x)J_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)J_\nu(x)$ .

*Доказательство.* Стационарное уравнение Шрёдингера (1.1) в полярной системе координат приводит к системе вида (1.1). Решением углового уравнения является функция  $\Phi(\varphi) = \cos(\nu\varphi + \varphi_0)$  для некоторого вещественного значения  $\varphi_0$ . Из условия периодичности  $\Phi(0) = \Phi(2\pi p)$  следует, что  $\nu = \frac{k}{p}$ , где  $k$  — произвольное неотрицательное целое число.

Решение радиального уравнения ищется в виде линейной комбинации функций Бесселя первого и второго рода [28, § 9, с. 358]:

$$R(r) = AJ_\nu(\varkappa r) + BY_\nu(\varkappa r).$$

Из граничного условия  $R(r_0) = 0$  установим значения констант:  $A = Y_\nu(\varkappa r_0)$ ,  $B = -J_\nu(\varkappa r_0)$  (либо пропорциональные им).

Теперь рассмотрим функцию  $f(x) = Y_\nu(x)J_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)J_\nu(x)$ , где  $\lambda = \frac{r_1}{r_0}$ . Тогда граничное условие  $R(r_1) = Y_\nu(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) - J_\nu(\varkappa r_0)Y_\nu(\varkappa r_1) = 0$  можно записать в виде  $f(\varkappa r_0) = 0$ . Обозначим  $m$ -й положительный нуль этой функции через  $\alpha_{\nu,m}$ . Тогда  $\varkappa r_0 = \alpha_{\nu,m}$  для какого-то значения  $m$ , откуда следует, что  $\varkappa$  может принимать только значения  $\varkappa_{k,m}^2$ , приведенные в формулировке теоремы 1. □

### 1.1.5 Квантовый бильярд в секторе круга $D^2 : \varphi \in (0, \theta)$

Зафиксируем угол  $\theta \in (0, 2\pi)$  и в полярных координатах  $(r, \varphi)$  в качестве  $\Omega$  рассмотрим область  $S^2 = \{r, \varphi : 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi \leq \theta\}$ .

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & r \in (0, r_0), \varphi \in (0, \theta) \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Утверждение 2.** [25, р. 4] В области  $S^2$  собственные функции  $\psi_{k,m}(r, \varphi)$  и собственные значения  $E_{k,m}$  оператора  $\hat{H}$  имеют вид

$$\psi_{k,m}(r, \varphi) = J_\lambda \left( \frac{\alpha_{\lambda,m} r}{r_0} \right) \sin \lambda \varphi, \quad E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \alpha_{\lambda,m}^2}{2Mr_0^2}, \quad k, m \in \mathbb{N},$$

где  $\lambda = \frac{\pi k}{\theta}$ ,  $\alpha_{\lambda,m}$  -  $m$ -й ноль функции Бесселя первого рода  $J_\lambda(x)$ .

*Доказательство.* Ищем решение в виде  $\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ . Повторяя соображения из предыдущего пункта, получим систему дифференциальных уравнений для бильярда в круге

$$\begin{cases} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2, \\ \frac{rR'}{R} + \frac{r^2 R''}{R} + \varkappa^2 r^2 = \lambda^2, \end{cases}$$

решение которой должно удовлетворять новому граничному условию  $\Phi(0) = \Phi(\theta) = 0$ . Поэтому  $\Phi(\theta) = \sin(\lambda\theta) \in \{\pi k, k \in \mathbb{N}\} \implies \lambda = \frac{\pi k}{\theta}, k \in \mathbb{N}$ .

В силу соображений из предыдущего пункта, решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\psi_{k,m}(r, \varphi) = J_\lambda \left( \frac{\alpha_{\lambda,m} r}{r_0} \right) \sin \lambda \varphi, \quad \lambda = \frac{\pi k}{\theta}.$$

Аналогичными рассуждениями можно обнаружить, что собственные значения в этом случае принимают вид  $E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \alpha_{\lambda,m}^2}{2Mr_0^2}$  для  $\lambda = \frac{\pi k}{\theta}$ .  $\square$

**Следствие 1.** [25, р. 4] Нетрудно заметить, что индексы  $\lambda_m = \frac{m\pi}{\theta}$ , соответствующие сектору  $0 \leq \varphi \leq \theta$  связаны с индексами  $\mu_n = \frac{n\pi}{2\pi-\theta}$  ( $\mu_n$  соответствуют решениям в дополнении сектора, т.е. для  $\theta \leq \varphi \leq 2\pi$ ) следующим образом:

$$\lambda_m = \frac{\mu_n}{2\mu_n - n} m, \quad \mu_n = \frac{\lambda_m}{2\lambda_m - m} n$$

*Доказательство.* Действительно, имеем  $\frac{n\pi}{2\pi-\theta} = \mu_n, \frac{m\pi}{\theta} = \lambda_m$ , тогда из равенства  $2\pi = \theta + (2\pi - \theta) = \frac{m\pi}{\lambda_m} + \frac{n\pi}{\mu_n}$  получаются равенства из утверждения 2.  $\square$

## 1.2 Квантовый бильярд в областях $\Omega$ , ограниченных софокусными квадриками

Рассмотрим область, ограниченную эллипсом с большой и малой полуосями, соответственно равными  $w$  и  $h$ . Обозначим половину расстояния между фокусами эллипса через  $\delta = \sqrt{w^2 - h^2}$ . Введем эллиптические координаты  $\rho, \varphi$ ,  $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , где

$$(x, y) = (\delta \cosh \rho \cos \varphi, \delta \sinh \rho \sin \varphi).$$

Они регулярны вне отрезка, соединяющего фокусы  $(\pm\delta, 0)$ . Рассматриваемая область задается неравенством  $0 \leq \rho \leq \operatorname{arccosh}(\frac{w}{\delta})$ . При фиксированном  $w = r_0$  и  $\delta \rightarrow 0$  область “стремится” к кругу радиуса  $r_0$ .

В этой системе координат оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}{\delta^2(\cosh^2 \rho - \cos^2 \varphi)} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}{\frac{\delta^2}{2}(\cosh 2\rho - \cos 2\varphi)}.$$

Стационарное уравнение Шрёдингера переписывается как

$$\nabla^2 \psi + \varkappa^2 \psi = 0, \quad \text{где } \varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$$

с условием, что  $\psi$  на границе области обращается в нуль. Разделяя переменные  $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ , приведем уравнение к виду

$$\Phi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R + R \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi + \frac{(\varkappa\delta)^2}{2}(\cosh 2\rho - \cos 2\varphi)R\Phi = 0.$$

В скобках добавим и вычтем разделяющий параметр  $\frac{2\zeta}{(\varkappa\delta)^2}$ , получим *уравнения Матьё*, в которых  $q = \frac{(\varkappa\delta)^2}{4}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi + (\zeta - 2q \cos 2\varphi)\Phi = 0 & (\text{угловое уравнение Матьё}), \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R - (\zeta - 2q \cosh 2\rho)R = 0 & (\text{радиальное уравнение Матьё}). \end{cases} \quad (1.2)$$

### 1.2.1 Функции Матьё.

Рассмотрим угловое уравнение Матьё  $\frac{d^2}{dz^2} \Phi(z) + (\zeta - 2q \cos 2z)\Phi(z) = 0$ . Поскольку коэффициенты углового уравнения Матьё периодичны по  $z$ , по теореме Флоке [28] существует решение в виде  $F_{\mathbf{v}}(z) = e^{i\mathbf{v}z} P(z)$ , где  $\mathbf{v}$  зависит

от параметров  $\zeta$  и  $q$ , а функция  $P(z)$  имеет тот же период  $\pi$ , что и коэффициенты уравнения. Постоянную  $\nu$  называют характеристической экспонентой. При  $\nu \notin \mathbb{Z}$  функции  $F_\nu(z)$  и  $F_\nu(-z)$  являются независимыми решениями дифференциального уравнения. При  $\nu \in \mathbb{Z}$  функции  $F_\nu(z)$  и  $F_\nu(-z)$  являются пропорциональными и имеют период  $\pi$  или  $2\pi$  (см. [28]).

Согласно теории Штурма при  $q \neq 0$  возможно существование не более чем одного периодического решения с периодом  $\pi$  или  $2\pi$ . В зависимости от четности и периода этого решения параметр<sup>2</sup>  $\zeta$  относится к одному из двух типов:

$$\zeta = \begin{cases} a_\nu(q), & \nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \\ b_{-\nu}(q), & -\nu \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

более точно, для  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  (см. табл. 1).

Таблица 1 — Периодические функции Матьё целого порядка

$\zeta$	Периодическое решение углового уравнения Матьё <sup>3</sup>	Период	Четность функции
$a_{2n}(q)$	$ce_{2n}(z, q)$	период $\pi$	четная
$a_{2n+1}(q)$	$ce_{2n+1}(z, q)$	антипериод <sup>4</sup> $\pi$	четная
$b_{2n+1}(q)$	$se_{2n+1}(z, q)$	антипериод $\pi$	нечетная
$b_{2n+2}(q)$	$se_{2n+2}(z, q)$	период $\pi$	нечетная

Для  $\zeta = a_n(q)$  соответствующие непериодичные нечетные решения обозначают как  $fe_n(z, q)$ . Аналогично, для  $\zeta = b_n(q)$  непериодичные четные решения обозначают как  $ge_n(z, q)$ . Выделяют также третий тип:  $\zeta = \lambda_\nu(q)$ ,  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , которому соответствуют функции Матьё нецелого порядка  $ce_\nu(z, q)$ ,  $se_\nu(z, q)$ . В общем случае при  $\nu \notin \mathbb{Q}$  обе функции являются непериодическими, однако для  $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\nu = \frac{n}{p}$ , обе имеют период не более  $2\pi p$ . Таблица 1 для  $\nu = \frac{n}{p}$  может быть продолжена (см. табл. 2).

Смысл параметра  $\nu$  становится понятным при подстановке  $q = 0$  в угловое уравнение Матьё (1.2). В этом случае угловая функция получается той же, что и в случае диска, следовательно,  $\lambda_\nu(0) = \nu^2$ ,  $ce_\nu(z, 0) = \cos(\nu z)$ ,  $se_\nu(z, 0) = \sin(\nu z)$ .

<sup>2</sup>Можно рассмотреть уравнение Матьё как задачу на собственные значения и собственные функции оператора  $D(y) = \frac{d^2y}{dx^2} - 2q \cos(2x)y$  (или оператора  $D(y) = \frac{d^2y}{dx^2} - 2q \cosh(2x)y$ ). Поэтому в литературе  $\zeta$  часто называют собственными значениями.

<sup>3</sup>В табл. 1 приведены только собственные функции периода  $\pi$  или  $2\pi$ .

<sup>4</sup>Антипериод  $\pi$ :  $f(x + \pi) = -f(x)$ .

Таблица 2 — Периодические функции Матьё нецелого порядка  $\nu$ 

$\zeta$	Периодическое решение углового уравнения Матьё	Период	Четность функции
$\lambda_\nu(q)$	$ce_\nu(z, q)$	период $\pi p$	четная
$\lambda_\nu(q)$	$se_\nu(z, q)$	антипериод $\pi p$	нечетная

Ряды Фурье для угловых функций Матьё сходятся равномерно и абсолютно на всех компактных множествах в комплексной плоскости. В приведенных ниже формулах предполагается, что  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ,  $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}
ce_{2n}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{2n}(q) \cos 2mz, & ce_{2n+1}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2n+1}(q) \cos (2m+1)z, \\
se_{2n+1}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{2n+1}(q) \sin (2m+1)z, & se_{2n+2}(z, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}^{2n+2}(q) \sin (2m+2)z, \\
ce_\nu(z, q) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m}^\nu(q) \cos (\nu+2m)z, & se_\nu(z, q) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m}^\nu(q) \sin (\nu+2m)z.
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_k^l, B_k^l, c_k^\nu$  удовлетворяют определенным рекуррентным соотношениям (см. [28] ).

Похожие разложения для функций  $fe_n(z, q)$  и  $ge_n(z, q)$  не приводятся, поскольку для  $n \geq 2$  разность между  $ce_n(z, q)$  и  $ge_n(z, q)$  (и между  $se_n(z, q)$  и  $fe_n(z, q)$ ) имеет порядок  $o(q)$ , чего достаточно для целей настоящей работы. Заметим, что для  $\nu = 1$  разложения для  $fe_1(z, q)$  и  $ge_1(z, q)$  соответствуют особым случаям, выходящим за рамки исследования.

Теперь обратимся к радиальным функциям Матьё. Радиальные функции Матьё первого рода и целого порядка определяются как  $Se_n(z, q) = ce_n(\pm iz, q)$ ,  $Se_n(z, q) = \mp ise_n(\pm iz, q)$  (см., например, [23]). Для них и для радиальной функции нецелого порядка  $M_\nu^{(1)}(z, q)$  имеют место разложения по функциям Бесселя первого рода (здесь равенство понимается с точностью до умножения на не зависящую от  $z$  постоянную, которая не представляет интереса для настоящей работы):

$$\begin{aligned}
Se_{2n+1}(z, q) &\propto \tanh z \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (2m+1) B_{2m+1}^{2n+1}(q) J_{2m+1}(x), \\
Se_{2n}(z, q) &\propto \tanh z \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 2m B_{2m}^{2n}(q) J_{2m}(x), \\
Ce_{2n}(z, q) &\propto \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m}^{2n}(q) J_{2m}(x), & Ce_{2n+1}(z, q) &\propto \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} A_{2m+1}^{2n+1}(q) J_{2m+1}(x), \\
M_\nu^{(1)}(z, q) &\propto \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m c_{2m}^\nu(q) J_{\nu+2m}(x), & & \text{везде для краткости } x = 2\sqrt{q} \cosh z.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь коэффициенты  $A_k^l, B_k^l, c_k^\nu$  те же, что и в разложении функций  $ce_l(z, q), se_l(z, q), ce_\nu(z, q)$  в ряды Фурье (см. [23, гл. VIII, с. 158–169]). Заменой функций Бесселя первого рода  $J_m(x)$  на функции Бесселя второго рода

$Y_m(x)$  в вышеизложенных формулах можно получить независимые решения соответствующих уравнений. Так, для радиальных функций первого рода целого порядка  $Ce_n(z, q)$  имеем второе решение  $Fey_n(z, q)$ , а для функций  $Se_n(z, q)$  такое второе решение обозначают как  $Gey_n(z, q)$  (см. [23, гл. VIII, § 8.11–13, с. 158–162]). Из тех же соображений применительно к  $M_v^{(1)}(z, q)$  появляется независимое решение  $M_v^{(2)}(z, q)$  для случая нецелого порядка.

## 1.2.2 Квантовый бильярд в эллипсе

Рассмотрим спектр оператора Лапласа в области, ограниченной эллипсом с большой и малой полуосями, равными  $a$  и  $b$ . В соответствии с 1.2, при половине расстояния между фокусами  $\delta = \sqrt{a^2 - b^2}$  в эллиптической системе координат  $(x, y) = (\delta \cosh \rho \cos \varphi, \delta \sinh \rho \sin \varphi)$  этот эллипс задается неравенством  $0 \leq \rho \leq \rho_0 = \operatorname{arccosh}(\frac{a}{\delta})$ .

Эллиптическая система координат имеет особенности на соединяющем фокусы отрезке, который целиком содержится во внутренности рассматриваемой области. Пусть  $J$  – отрезок, содержащий особые точки эллиптической системы координат. Собственная функция  $\psi(\rho, \varphi)$  оператора Лапласа в эллипсе и ее производная должны удовлетворять условиям непрерывности на  $J$ :

$$\begin{aligned} \psi(0, \varphi) &= \psi(0, -\varphi) \\ &\text{(непрерывность сдвига через } J), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \varphi)|_{\rho \rightarrow 0} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, -\varphi)|_{\rho \rightarrow 0} \\ &\text{(непрерывность производной через } J), \end{aligned} \quad (1.5)$$

также см. [23, XVI р. 294].

Используя уравнения (1.4) и (1.5), мы покажем, что если собственная функция  $\psi(\rho, \varphi)$  оператора  $\hat{H}$  в содержащей особые точки эллиптической системы координат области представлена в виде произведения функций одного переменного  $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ , тогда функции  $R(\rho), \Phi(\varphi)$  имеют одинаковую четность.

Общее решение радиального и углового уравнений Матьё (1.2) представимо в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta, q, \varphi) &= A_\varphi \Phi_{\text{even}}(\zeta, q, \varphi) + B_\varphi \Phi_{\text{odd}}(\zeta, q, \varphi) \\ R(\zeta, q, \rho) &= A_\rho R_{\text{even}}(\zeta, q, \rho) + B_\rho R_{\text{odd}}(\zeta, q, \rho). \end{aligned}$$

Очевидно,  $\psi(0, \pm \varphi) = \Phi(\pm \varphi) A_\rho R_{even}(0)$ . Из непрерывности сдвига (1.4) мы получаем

$$\Phi(\varphi) A_\rho = \Phi(-\varphi) A_\rho. \quad (1.6)$$

Также,  $\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \pm \varphi)|_{\rho \rightarrow 0} = \Phi(\pm \varphi) B_\rho R'_{odd}(0)$ .

Условие непрерывности производной (1.5) влечет

$$\Phi(\varphi) B_\rho = -\Phi(-\varphi) B_\rho \quad (1.7)$$

Наконец, из уравнений (1.6), (1.7) следует, что одна из постоянных  $A_\rho$  и  $B_\rho$  равна нулю. Таким образом, возможны два случая:

$$\psi(\rho, \varphi) = \Phi_{even}(\varphi) R_{even}(\rho)$$

или

$$\psi(\rho, \varphi) = \Phi_{odd}(\varphi) R_{odd}(\rho).$$

### 1.2.2.1 Собственные функции

В случае эллипса на угловую функцию Матьё накладывается условие периодичности:  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ . Тогда, как следует из табл. 1, четные периодические функции  $\Phi_{even}(\varphi)$  соответствуют случаю  $\zeta = a_m(q)$ , при этом  $\Phi_{even}(\varphi) = ce_m(\varphi, q)$ . Нечетные периодические решения  $\Phi_{odd}(\varphi)$  – это функции  $se_m(\varphi, q)$ , соответствующие случаю  $\zeta = b_m(q)$  для некоторого натурального  $m$ . Таким образом, нами доказано

**Утверждение 3.** *Собственные функции  $\psi(\rho, \varphi)$  оператора  $\hat{H}$  в эллипсе имеют вид:*

$$\psi_{k,m}(\rho, \varphi) = \begin{cases} Ce_k(\rho, q_{k,m}) ce_k(\varphi, q_{k,m}), & \zeta = a_k(q_{k,m}), \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \\ Se_k(\rho, q_{k,m}) se_k(\varphi, q_{k,m}), & \zeta = b_k(q_{k,m}), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$m \in \mathbb{N}$ . При этом собственное значение  $q_{k,m}$  –  $m$ -й нуль функции  $Ce_k(\rho_0, q)$  или  $Se_k(\rho_0, q)$  как функции от  $q$ . Значение параметра  $q_{k,m}$  связано с соответствующим собственным значением  $E_{k,m}$  формулой  $q_{k,m} = \frac{ME_{k,m}\delta^2}{2\hbar^2} = \frac{\varkappa_{k,m}^2\delta^2}{4}$ .

### 1.2.2.2 Асимптотика собственных значений

**Теорема 2.** *Величины  $\varkappa_{k,m}^2(\delta)$ ,  $k \geq 0, m \in \mathbb{N}$  для собственных функций оператора  $\hat{H}$  в эллипсе зависят от половины фокусного расстояния  $\delta$  с точностью*

до  $o(\delta^2)$  следующим образом:

$$\varkappa_{k,m}^2(\delta) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{8a^4} \frac{\frac{1}{k-1} J_{k-2}(u) - \frac{1}{k+1} J_{k+2}(u)}{\frac{\partial J_k(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{k,m}}, \quad \zeta = a_k(q), \quad k \geq 2; \\ \frac{\alpha_{1,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{1,m}^3}{16a^4} \frac{J_3(u)}{\frac{\partial J_1(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{1,m}}, \quad \zeta = a_1(q); \\ \frac{\alpha_{0,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{0,m}^3}{4a^4} \frac{J_2(u)}{\frac{\partial J_0(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{0,m}}, \quad \zeta = a_0(q); \\ \vdots \\ \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{8ka^4} \frac{\frac{k-2}{k-1} J_{k-2}(u) - \frac{k+2}{k+1} J_{k+2}(u)}{\frac{\partial J_k(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{k,m}}, \quad \zeta = b_k(q), \quad k \geq 3; \\ \frac{\alpha_{2,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{2,m}^3}{12a^4} \frac{J_4(u)}{\frac{\partial J_2(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{2,m}}, \quad \zeta = b_2(q); \\ \frac{\alpha_{1,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{3\alpha_{1,m}^3}{16a^4} \frac{J_3(u)}{\frac{\partial J_1(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{1,m}}, \quad \zeta = b_1(q), \end{array} \right. \quad (1.8)$$

где  $\alpha_{k,m}$  –  $m$ -й нуль функции  $J_k(x)$ .

Приведем две леммы, с помощью которых докажем 1.8:

Пусть  $\zeta = a_k(q_{k,m})$ ,  $q = \frac{\varkappa^2 \delta^2}{4}$ , и пусть  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi) = Ce_k(\rho, q)ce_k(\varphi, q)$  – произведение решений радиального и углового уравнений Матьё с указанными параметрами  $\zeta, q$ . Для малых  $q$  справедливо разложение (см. [30, § 2.2, с. 122–124]):

$$ce_k(\varphi, q) = c_k \cos k\varphi + qc_{k+2} \cos(k+2)\varphi + qc_{k-2} \cos(k-2)\varphi + o(q).$$

**Лемма 1.** Пусть  $\zeta = a_k(q_{k,m})$ , тогда  $\varkappa_{k,m}^2$  при малых  $\delta$  имеет вид

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{2a^4} \frac{1}{\frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{k,m}}} \left( \frac{c_{k-2}}{c_k} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) + \frac{c_{k+2}}{c_k} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right) + o(\delta^2),$$

где  $\alpha_{k,m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя первого рода  $J_k(x)$ .

*Доказательство.* Возможные значения  $\varkappa_{k,m}^2$  определяются из условия обращения в нуль радиальной функции Матьё  $Ce_k(\rho, q)$  на граничном эллипсе  $\rho = \rho_0 = \operatorname{arccosh}(\frac{a}{\delta})$ . Коэффициенты  $\{c_k\}$  связаны [28] с точностью до постоянного множителя с разложением радиальной функции Матьё  $Ce_k(\rho, q)$  в

бесконечную сумму функций Бесселя следующим образом:

$$Ce_k(\rho, q) \propto c_k J_k(2\sqrt{q} \cosh \rho) - \\ - qc_{k-2} J_{k-2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) - qc_{k+2} J_{k+2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) + o(q).$$

Заметим, что из-за равенства  $q = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4}$  аргументы имеют вид  $2\sqrt{q} \cosh \rho_0 = 2\sqrt{\frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4}} \frac{a}{\delta} = \varkappa_{k,m} a$ . Запишем для краткости  $u = \varkappa_{k,m} a$  и перепишем граничное условие  $Ce_k(\rho_0, q) = 0$ :

$$0 = Ce_k(\rho_0, q) = c_k J_k(u) - qc_{k-2} J_{k-2}(u) - qc_{k+2} J_{k+2}(u) + o(q).$$

Пусть  $u = u_0 + qu_1 + o(q)$ . Граничное условие может быть переписано с группировкой слагаемых при различных степенях  $q$  следующим образом:

$$0 = c_k J_k(u_0) + q \left( c_k u_1 \frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} - c_{k-2} J_{k-2}(u_0) - c_{k+2} J_{k+2}(u_0) \right) + o(q).$$

Из равенства нулю коэффициентов при каждой степени  $q$  следует

$$u_0 = \alpha_{k,m}, \\ u_1 = \frac{1}{\frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{k,m}}} \left( \frac{c_{k-2}}{c_k} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) + \frac{c_{k+2}}{c_k} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right),$$

где  $\alpha_{k,m}$  –  $m$ -й нуль функции  $J_k(x)$ .

Из равенства  $q = \frac{\varkappa_{k,m}^2 a^2 \delta^2}{4a^2} = \frac{u^2 \delta^2}{4a^2}$  можно получить выражение для собственного значения

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{u_0^2}{a^2} + \frac{2qu_0 u_1}{a^2} + o(q) = \frac{u_0^2}{a^2} + \delta^2 \frac{u_0^3 u_1}{2a^4} + o(\delta^2).$$

Непосредственной подстановкой  $u_0, u_1$  в полученную формулу, получаем

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{2a^4} \frac{1}{\frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{k,m}}} \left( \frac{c_{k-2}}{c_k} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) + \frac{c_{k+2}}{c_k} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right) + o(\delta^2).$$

□

Пусть  $\zeta = b_k(q_{k,m})$ ,  $q = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4}$ , и пусть  $\Psi_{k,m}(\rho, \varphi) = Se_k(\rho, q) se_k(\varphi, q)$  – произведение решений радиального и углового уравнений Матьё с указанными параметрами  $\zeta, q$ . Для малых  $q$  справедливо разложение (см. [30, § 2.2, с. 122–124]):

$$se_k(\varphi, q) = c_k \sin k\varphi + qc_{k+2} \sin(k+2)\varphi + qc_{k-2} \sin(k-2)\varphi + o(q).$$

**Лемма 2.** Пусть  $\zeta = b_k(q_{k,m})$ , тогда  $\varkappa_{k,m}^2$  при малых  $\delta$  имеет вид

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{2a^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{k,m}}} \times \\ \times \left( \frac{(k-2)c_{k-2}}{kc_k} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) + \frac{(k+2)c_{k+2}}{kc_k} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right) + o(\delta^2),$$

где  $\alpha_{k,m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя первого рода  $J_k(x)$ .

*Доказательство.* Возможные значения  $\varkappa_{k,m}^2$  определяются из условия обращения в нуль радиальной функции Матьё  $Se_k(\rho, q)$  на граничном эллипсе  $\rho = \rho_0$ . Коэффициенты  $\{c_k\}$  связаны [28] с точностью до постоянного множителя с разложением радиальной функции Матьё  $Se_k(\rho, q)$  в бесконечную сумму функций Бесселя следующим образом:

$$Se_k(\rho, q) \propto kc_k J_k(2\sqrt{q} \cosh \rho) - \\ - q(k-2)c_{k-2} J_{k-2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) - q(k+2)c_{k+2} J_{k+2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) + o(q).$$

Заметим, что из-за равенства  $q = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4}$  аргументы имеют вид  $2\sqrt{q} \cosh \rho_0 = 2\sqrt{\frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4}} \frac{a}{\delta} = \varkappa_{k,m} a$ . Запишем для краткости  $u = \varkappa_{k,m} a$  и перепишем граничное условие  $Se_k(\rho_0, q) = 0$ :

$$0 = Se_k(\rho_0, q) = kc_k J_k(u) - q(k-2)c_{k-2} J_{k-2}(u) - q(k+2)c_{k+2} J_{k+2}(u) + o(q).$$

Пусть  $u = u_0 + qu_1 + o(q)$ . Граничное условие может быть переписано с группировкой слагаемых при различных степенях  $q$  следующим образом:

$$0 = kc_k J_k(u_0) + q \left( kc_k u_1 \left. \frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \right|_{u=u_0} - \right. \\ \left. - (k-2)c_{k-2} J_{k-2}(u_0) - (k+2)c_{k+2} J_{k+2}(u_0) \right) + o(q).$$

Из равенства нулю коэффициентов при каждой степени  $q$  следует

$$u_0 = \alpha_{k,m}, \\ u_1 = \frac{1}{\left. \frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{k,m}}} \left( \frac{(k-2)c_{k-2}}{kc_k} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) + \frac{(k+2)c_{k+2}}{kc_k} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right),$$

где  $\alpha_{k,m}$  –  $m$ -й нуль функции  $J_k(x)$ .

Из равенства  $q = \frac{\varkappa_{k,m}^2 a^2 \delta^2}{4a^2} = \frac{u^2 \delta^2}{4a^2}$  можно получить выражение для собственного значения

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{u_0^2}{a^2} + \frac{2qu_0u_1}{a^2} + o(q) = \frac{u_0^2}{a^2} + \delta^2 \frac{u_0^3 u_1}{2a^4} + o(\delta^2).$$

Непосредственной подстановкой  $u_0, u_1$  в полученную формулу, получаем

$$\begin{aligned} \varkappa_{k,m}^2 &= \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{2a^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{k,m}}} \times \\ &\times \left( \frac{(k-2)c_{k-2}}{kc_k} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) + \frac{(k+2)c_{k+2}}{kc_k} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

□

Вернемся к доказательству утверждения 2.

*Доказательство. Случай 1:*  $\zeta = a_k(q)$ . Для малых  $q$  справедливо (см. [28]) представление четного решения углового уравнения Матьё  $ce_k(\varphi, q)$  в виде

$$ce_k(\varphi, q) = \begin{cases} \cos k\varphi + \frac{q}{4(k-1)} \cos(k-2)\varphi - \frac{q}{4(k+1)} \cos(k+2)\varphi + o(q), & k \geq 2; \\ \cos \varphi - \frac{q}{8} \cos 3\varphi + o(q), & k = 1; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q}{2} \cos 2\varphi + o(q), & k = 0. \end{cases}$$

Пусть  $k \geq 2$ . Тогда  $c_k = 1, c_{k+2} = \frac{-1}{4(k+1)}, c_{k-2} = \frac{1}{4(k-1)}$ . Применим лемму 1:

$$\begin{aligned} \varkappa_{k,m}^2 &= \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{2a^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{k,m}}} \times \\ &\times \left( \frac{1}{4(k-1)} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) - \frac{1}{4(k+1)} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

Пусть  $k = 1$ . Тогда  $c_k = 1, c_{k+2} = \frac{-1}{8}, c_{k-2} = 0$ , и из леммы 1 получаем

$$\varkappa_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{1,m}^3}{16a^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\left. \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2).$$

Пусть  $k = 0$ . Тогда  $c_k = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_{k+2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}, c_{k-2} = 0$ , и по лемме 1 имеем

$$\varkappa_{0,m}^2 = \frac{\alpha_{0,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{0,m}^3}{4a^4} \frac{J_2(\alpha_{0,m})}{\left. \frac{\partial J_0(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{0,m}}} + o(\delta^2).$$

Случай 2:  $\zeta = b_k(q)$ . Для малых  $q$  справедливо (см. [28]) представление нечетного решения углового уравнения Матъё  $se_k(\varphi, q)$  в виде

$$se_k(\varphi, q) = \begin{cases} \sin k\varphi + \frac{q}{4(k-1)} \sin(k-2)\varphi - \frac{q}{4(k+1)} \sin(k+2)\varphi + o(q), & k \geq 3; \\ \sin 2\varphi - \frac{q}{12} \sin 4\varphi + o(q), & k = 2; \\ \sin \varphi - \frac{q}{8} \sin 3\varphi + o(q), & k = 1. \end{cases}$$

Пусть  $k \geq 3$ . Тогда  $c_k = 1$ ,  $c_{k+2} = \frac{-1}{4(k+1)}$ ,  $c_{k-2} = \frac{1}{4(k-1)}$ . Применим лемму 2:

$$\begin{aligned} \varkappa_{k,m}^2 &= \frac{\alpha_{k,m}^2}{a^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{k,m}^3}{2a^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_k(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{k,m}}} \times \\ &\quad \times \left( \frac{(k-2)}{4k(k-1)} J_{k-2}(\alpha_{k,m}) - \frac{(k+2)}{4k(k+1)} J_{k+2}(\alpha_{k,m}) \right) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

Пусть  $k = 2$ . Тогда  $c_k = 1$ ,  $c_{k+2} = \frac{-1}{12}$ ,  $c_{k-2} = 0$ , и из леммы 2 получаем

$$\varkappa_{2,m}^2 = \frac{\alpha_{2,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{2,m}^3}{12a^4} \frac{J_4(\alpha_{2,m})}{\left. \frac{\partial J_2(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{2,m}}} + o(\delta^2).$$

Пусть  $k = 1$ . Тогда  $c_k = 1$ ,  $c_{k+2} = \frac{-1}{8}$ ,  $c_{k-2} = 0$ , и по лемме 2 имеем

$$\varkappa_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{a^2} - \delta^2 \frac{3\alpha_{1,m}^3}{16a^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\left. \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2).$$

□

### 1.2.3 Квантовый бильярд в эллиптическом кольце и накрытии эллиптического кольца

Рассмотрим область (“эллиптическое кольцо”), ограниченную двумя эллипсами с длинными полуосями  $0 < r_0 < r_1$  и с общими фокусами в точках  $(\pm\delta, 0)$ . В эллиптических координатах  $(\rho, \varphi)$  эта область задается неравенствами  $\rho_0 = \operatorname{arccosh}(\frac{r_0}{\delta}) \leq \rho \leq \operatorname{arccosh}(\frac{r_1}{\delta}) = \rho_1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Для  $p$ -листного накрытия  $\Omega_\delta$  эллиптического кольца неравенство на угловую координату другое:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi\rho$ . Для удобства введем  $\varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$ .

### 1.2.3.1 Собственные функции

Мы хотим получить решения стационарного уравнения Шредингера в  $p$ -листном накрытии  $\Omega_\delta$ , а также асимптотику соответствующих уровней энергии при фокусном расстоянии  $2\delta$ , стремящемся к нулю.

**Теорема 3.** В области  $\Omega_\delta$  ( $p$ -листном накрытии эллиптического кольца) собственные функции  $\Psi_{k,m}(\rho, \varphi)$  и собственные значения  $E_{k,m}$  оператора  $\hat{H}$  имеют вид

$$\Psi_{k,m}(\rho, \varphi) = \left[ \begin{array}{l} \left[ Ce_\nu(\rho_0, q)Fey_\nu(\rho, q) - Ce_\nu(\rho, q)Fey_\nu(\rho_0, q) \right] ce_\nu(\varphi, q) \Big|_{q=\beta_{\nu,m}}, \\ E_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \hbar^2}{2M}, \quad \nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \\ \left[ Se_{-\nu}(\rho_0, q)Gey_{-\nu}(\rho, q) - Se_{-\nu}(\rho, q)Gey_{-\nu}(\rho_0, q) \right] se_{-\nu}(\varphi, q) \Big|_{q=\beta_{\nu,m}}, \\ E_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \hbar^2}{2M}, \quad -\nu \in \mathbb{N}; \\ \left[ M_\nu^{(1)}(\rho_0, q)M_\nu^{(2)}(\rho, q) - M_\nu^{(1)}(\rho, q)M_\nu^{(2)}(\rho_0, q) \right] \times \\ \times (A_1 ce_\nu(\varphi, q) + A_2 se_\nu(\varphi, q)) \Big|_{q=\beta_{\nu,m}}, E_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \hbar^2}{2M}, \quad \text{иначе,} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

где  $\nu = \frac{k}{p}$ ,  $\varkappa_{k,m}^2 = \frac{4\beta_{\nu,m}}{\delta^2}$ ,  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_{\nu,m}$  —  $m$ -й нуль функции

$$f(q) = \left[ \begin{array}{ll} Ce_\nu(\rho_0, q)Fey_\nu(\rho_1, q) - Ce_\nu(\rho_1, q)Fey_\nu(\rho_0, q), & \nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \\ Se_{-\nu}(\rho_0, q)Gey_{-\nu}(\rho_1, q) - Se_{-\nu}(\rho_1, q)Gey_{-\nu}(\rho_0, q), & -\nu \in \mathbb{N}; \\ M_\nu^{(1)}(\rho_0, q)M_\nu^{(2)}(\rho_1, q) - M_\nu^{(1)}(\rho_1, q)M_\nu^{(2)}(\rho_0, q) & \text{иначе.} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

*Доказательство.* Будем искать решение уравнения  $\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi = E\psi$  в виде  $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ , где  $\rho$  и  $\varphi$  — эллиптические координаты. Тогда  $R$  и  $\Phi$  являются решениями уравнений Матьё

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi + (\zeta - 2q \cos 2\varphi) \Phi = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R - (\zeta - 2q \cosh 2\rho) R = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где  $q = \frac{(\varkappa\delta)^2}{4}$  и  $\zeta$  — разделяющая переменная. Для начала рассмотрим угловое уравнение Матьё и определим, при каких  $\zeta$  условие  $\Phi(0) = \Phi(2\pi\rho)$  выполнено.

По теореме Флоке для некоторого  $\nu$  существует решение  $\Phi_\nu(\varphi)$  уравнения Матьё, такое, что  $\Phi_\nu(\varphi + 2\pi\rho) = e^{2i\pi\rho\nu}\Phi_\nu(\varphi)$ . В случае  $p$ -листного накрытия

необходимо наложить условие периодичности  $\Phi_{\mathbf{v}}(0) = \Phi_{\mathbf{v}}(2\pi p)$ . Следовательно,  $e^{2i\pi p\mathbf{v}} = 1$ . Откуда  $p\mathbf{v} = k \in \mathbb{Z}$  и, таким образом,  $\mathbf{v} = \frac{k}{p}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Положим  $\Phi(\varphi) = \Phi_{\mathbf{v}}(\varphi)$ .

Обозначим через  $R_1(\rho, q), R_2(\rho, q)$  два независимых решения радиального уравнения Матьё (1.11), которые зависят от параметра  $q$ . Решением (1.11) является и их линейная комбинация  $R(\rho, q) = AR_1(\rho, q) + BR_2(\rho, q)$ . Из условия  $R(\rho_0, q) = 0$  установим значения констант:  $A = R_2(\rho_0, q), B = -R_1(\rho_0, q)$  (либо значения, пропорциональные им). Теперь рассмотрим функцию  $f(q) = R_2(\rho_0, q)R_1(\rho_1, q) - R_1(\rho_0, q)R_2(\rho_1, q)$ , в зависимости от значения  $\mathbf{v}$  это одна из функций (1.10). Тогда условие  $R(\rho_1, q) = 0$  можно записать как  $f(q) = 0$ . Обозначим  $m$ -й положительный нуль этой функции через  $\beta_{\mathbf{v}, m}$ , тогда  $q = \beta_{\mathbf{v}, m}$  для какого-то значения  $m$ , откуда следует, что  $\varkappa^2 = \frac{4q}{\delta^2}$  может принимать только значения  $\varkappa_{k, m}^2$ , приведенные в формулировке теоремы 3.

В завершение доказательства остается только привести явный вид функций  $\Phi(\varphi), R(\rho)$ . В зависимости от значения  $\mathbf{v} = \frac{k}{p}$  разделяющий параметр  $\zeta$  в системе дифференциальных уравнений (1.11) относится к одному из трех типов:

$$\zeta = \begin{cases} a_{\mathbf{v}}(q), & \mathbf{v} \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \\ b_{-\mathbf{v}}(q), & -\mathbf{v} \in \mathbb{N}; \\ \lambda_{\mathbf{v}}(q) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Периодическими угловыми решениями в первых двух случаях являются функции, описанные в табл. 1, они и будут функциями  $\Phi(\varphi)$  в зависимости от значения  $\mathbf{v}$ .

Радиальные функции получаются в виде линейных комбинаций радиальных функций Матьё целого порядка. В качестве  $R_1(\rho, q)$  возьмем радиальные функции Матьё первого рода 1.3:  $Ce_{\mathbf{v}}(\rho, q)$  при  $\mathbf{v} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  и  $Se_{\mathbf{v}}(\rho, q)$  при  $-\mathbf{v} \in \mathbb{N}$ . Независимыми решениями  $R_2(\rho, q)$  для этих двух случаев являются  $Fey_{\mathbf{v}}(\rho, q)$  и  $Ge_{\mathbf{v}}(\rho, q)$  соответственно.

В случае  $\mathbf{v} = \frac{m_1}{m_2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  обе угловые функции  $ce_{\mathbf{v}}(\varphi, q), se_{\mathbf{v}}(\varphi, q)$  являются периодическими и имеют период не более  $2\pi m_2$  (см. [28]), поэтому в качестве  $\Phi(\varphi)$  подходит в том числе их линейная комбинация. Решение радиального уравнения Матьё представляется в виде линейной комбинацией функций  $Ce_{\mathbf{v}}(\rho, q)$  и  $Se_{\mathbf{v}}(\rho, q)$ . Однако в следующей теореме будет удобнее использовать линейную комбинацию функций  $M_{\mathbf{v}}^{(1)}(\rho, q), M_{\mathbf{v}}^{(2)}(\rho, q)$  (см. [26, § 28.23]; [30, гл. 2, § 2.4, с. 165]), также образующих фундаментальную систему.  $\square$



$Y_{\nu+1}(u)$ ,  $2\frac{\partial J_\nu(u)}{\partial u} = J_{\nu-1}(u) - J_{\nu+1}(u)$ . Непосредственным дифференцированием  $W_{\nu,\nu}(u)$  получаем

$$\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u} = \lambda(Y_\nu(u)J_{\nu-1}(\lambda u) + Y_{\nu+1}(\lambda u)J_\nu(u)) - (Y_\nu(\lambda u)J_{\nu-1}(u) + Y_{\nu+1}(u)J_\nu(\lambda u)).$$

По предыдущей теореме 3 собственные значения  $E_{k,m}$  оператора  $\hat{H}$ , а следовательно, числа  $\varkappa_{k,m}^2 = \varkappa_{k,m}^2(\delta)$  связаны с нулями  $\beta_{\nu,m}$  функции  $f(q)$ . Здесь функция  $f(q)$  имеет один из трех возможных видов (см. (1.10)).

Приведем две леммы, с помощью которых докажем теорему 4.

Пусть  $\nu = \frac{k}{p}$ ,  $k \geq 0$ ,  $\zeta = \lambda_\nu(q)$ ,  $q = \frac{\varkappa^2 \delta^2}{4}$ , и пусть  $ce_\nu(\varphi, q)$  — четное решение углового уравнения Матьё с указанными параметрами  $\zeta, q$ . Напомним, что для малых  $q$  справедливо разложение (см. [30, § 2.2, с. 122–124]):

$$ce_\nu(\varphi, q) = c_\nu \cos \nu \varphi + qc_{\nu+2} \cos(\nu + 2)\varphi + qc_{\nu-2} \cos(\nu - 2)\varphi + o(q).$$

Возможные значения  $\varkappa^2$  определяются из условия обращения в нуль радиальной функции Матьё на граничных эллипсах. А именно положим  $R(\rho)$  решением радиального уравнения Матьё с этими же параметрами и граничным условием  $R(\rho_0) = R(\rho_1) = 0$ ,  $\rho_0 < \rho_1$ .

**Лемма 3.** Пусть  $r_0 = \delta \cosh \rho_0$ ,  $r_1 = \delta \cosh \rho_1$ ,  $\lambda = \frac{r_1}{r_0}$ ,  $\alpha_{\nu,m}$  —  $m$ -й нуль функции  $W_{\nu,\nu}(u)$ . Тогда  $\varkappa^2$  при малых  $\delta$  имеет вид

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu,m}^3}{2c_\nu r_0^4} \times \left. \frac{c_{\nu+2}(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)) + c_{\nu-2}(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}} \right|_{u=\alpha_{\nu,m}} + o(\delta^2).$$

*Доказательство.* При  $\zeta = \lambda_\nu(q)$ ,  $\nu = \frac{k}{p}$ ,  $k \geq 0$  коэффициенты разложения Фурье четной угловой функции Матьё  $ce_\nu(\varphi, q)$  связаны [28] с точностью до постоянного множителя с разложением радиальной функции Матьё  $R_1(\rho, q) = \begin{cases} Ce_\nu(\rho, q), & \nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \\ M_\nu^{(1)}(\rho, q), & \nu \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$  в бесконечную сумму функций Бесселя следующим образом:

$$R_1(\rho, q) = c_\nu J_\nu(2\sqrt{q} \cosh \rho) - qc_{\nu-2} J_{\nu-2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) - qc_{\nu+2} J_{\nu+2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) + o(q).$$

Второе решение  $R_2(\rho, q)$  радиального уравнения Матьё можно получить из  $R_1(\rho, q)$  заменой функций Бесселя первого рода  $J_\nu(x)$  на функции Бесселя второго рода  $Y_\nu(x)$ . В частности, это будут функции  $Fey_\nu(\rho, q)$  при  $\nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  и  $M_\nu^{(2)}(\rho, q)$  при  $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \nu \geq 0$ .

Напомним граничное условие  $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$ . Заметим, что аргументы имеют вид  $2\sqrt{q} \cosh \rho_s = 2\sqrt{\frac{\varkappa^2 \delta^2 r_s}{4} \frac{r_s}{\delta}} = \varkappa r_s, s = 0, 1$ . Рассмотрим первое слагаемое в граничном условии:

$$\begin{aligned} R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) &= \\ &\left( c_\nu Y_\nu(\varkappa r_0) - qc_{\nu-2}Y_{\nu-2}(\varkappa r_0) - qc_{\nu+2}Y_{\nu+2}(\varkappa r_0) + o(q) \right) \times \\ &\times \left( c_\nu J_\nu(\varkappa r_1) - qc_{\nu-2}J_{\nu-2}(\varkappa r_1) - qc_{\nu+2}J_{\nu+2}(\varkappa r_1) + o(q) \right) = \\ &= c_\nu^2 Y_\nu(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) - qc_\nu \left( c_{\nu-2}(Y_{\nu-2}(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0)J_{\nu-2}(\varkappa r_1)) + \right. \\ &\quad \left. + c_{\nu+2}(Y_{\nu+2}(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0)J_{\nu+2}(\varkappa r_1)) \right) + o(q). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Разделив обе части последнего выражения на  $c_\nu^2$ , для удобства определим  $u = \varkappa r_0, \lambda = \frac{r_1}{r_0}, \varkappa r_1 = \lambda u$ . Запишем полное выражение  $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$ : поскольку слагаемые отличаются друг от друга только перестановкой аргументов  $u$  и  $\lambda u$ , использование формулы (2.3) приведет к появлению функций (2.1). Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 &= R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = W_{\nu,\nu}(u) - \\ &- q \left( \frac{c_{\nu-2}}{c_\nu} (W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)) + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu} (W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)) \right) + o(q). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пусть  $\alpha_{\nu,m}$  —  $m$ -й нуль функции  $W_{\nu,\nu}(u)$ . Тогда в достаточно малой его окрестности справедливо

$$W_{\nu,\nu}(u) = (u - \alpha_{\nu,m}) \frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\nu,m}} + \frac{(u - \alpha_{\nu,m})^2}{2} \frac{\partial^2 W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=\alpha_{\nu,m}} + o((u - \alpha_{\nu,m})^2).$$

Положим  $u = \alpha_{\nu, m} + u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta^2)$  и подставим  $q = \frac{\varkappa^2\delta^2}{4} = \frac{u^2\delta^2}{4r_0^2}$  в выражение (2.4):

$$\begin{aligned} & (u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta^2)) \frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + \frac{u_1^2\delta^2 + o(\delta^2)}{2} \frac{\partial^2 W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} - \\ & - \frac{\alpha_{\nu, m}^2\delta^2 + o(\delta^2)}{4r_0^2} \left[ \left( \frac{c_{\nu-2}}{c_\nu} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u)) \right) \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta) \right] + o(\delta^2) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку равенство должно выполняться при каждой степени  $\delta$ , получаем в первую очередь  $u_1 = 0$ , затем, приравняв коэффициенты при  $\delta^2$ , заключаем, что

$$u_2 = \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{4r_0^2} \frac{\frac{c_{\nu-2}}{c_\nu} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}}.$$

Таким образом,

$$u = \alpha_{\nu, m} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{4r_0^2} \frac{\frac{c_{\nu-2}}{c_\nu} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta^2).$$

Поскольку  $u = \varkappa r_0$ , получаем

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu, m}^3}{2c_\nu r_0^4} \frac{c_{\nu+2} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u)) + c_{\nu-2} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta^2).$$

Лемма доказана.  $\square$

Пусть  $\zeta = \lambda_{-\nu}(q)$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $q = \frac{\varkappa^2\delta^2}{4}$ , и пусть  $se_\nu(\varphi, q)$  — нечетное решение углового уравнения Матьё с указанными параметрами  $\zeta, q$ . Напомним, что для малых  $q$  справедливо разложение (см. [30, § 2.2, с. 122–124]):

$$se_\nu(\varphi, q) = c_\nu \sin \nu\varphi + qc_{\nu+2} \sin(\nu+2)\varphi + qc_{\nu-2} \sin(\nu-2)\varphi + o(q).$$

Возможные значения  $\varkappa^2$  определяются из условия обращения в нуль радиальной функции Матьё на граничных эллипсах. А именно положим  $R(\rho)$  решением радиального уравнения Матьё с этими же параметрами и граничным условием  $R(\rho_0) = R(\rho_1) = 0$ ,  $\rho_0 < \rho_1$ .

**Лемма 4.** Пусть  $r_0 = \delta \cosh \rho_0$ ,  $r_1 = \delta \cosh \rho_1$ ,  $\lambda = \frac{r_1}{r_0}$ ,  $\alpha_{\nu, m}$  —  $m$ -й нуль функции  $W_{\nu, \nu}(u)$ , тогда  $\varkappa^2$  зависит от  $\delta$  как

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu, m}^3}{2\nu c_\nu r_0^4} \times \left. \frac{(\nu - 2)c_{\nu-2}(W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + (\nu + 2)c_{\nu+2}(W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \right|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta^2).$$

*Доказательство.* При  $\zeta = \lambda_{-\nu}(q)$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , коэффициенты разложения Фурье нечетной угловой функции Матьё  $se_\nu(\varphi, q)$  связаны [28] с точностью до постоянного множителя с разложением радиальной функции Матьё  $Se_\nu(\rho, q)$  в бесконечную сумму функций Бесселя следующим образом:

$$Se_\nu(\rho, q) = \nu c_\nu J_\nu(2\sqrt{q} \cosh \rho) - q(\nu - 2)c_{\nu-2} J_{\nu-2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) - q(\nu + 2)c_{\nu+2} J_{\nu+2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) + o(q).$$

Второе решение радиального уравнения Матьё  $R_2(\rho) = Ge_{\nu}(\rho, q)$  можно получить из решения  $R_1(\rho) = Se_\nu(\rho, q)$  заменой функций Бесселя первого рода  $J_\nu(x)$  на функции Бесселя второго рода  $Y_\nu(x)$ .

В граничном условии  $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$  аргументы имеют вид  $2\sqrt{q} \cosh \rho_s = 2\sqrt{\frac{\varkappa^2 \delta^2 r_s}{4}} \frac{r_s}{\delta} = \varkappa r_s$ ,  $s = 0, 1$ . Рассмотрим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) &= \\ &= (\nu c_\nu Y_\nu(\varkappa r_0) - q(\nu - 2)c_{\nu-2} Y_{\nu-2}(\varkappa r_0) - q(\nu + 2)c_{\nu+2} Y_{\nu+2}(\varkappa r_0) + o(q)) \times \\ &\times (\nu c_\nu J_\nu(\varkappa r_1) - q(\nu - 2)c_{\nu-2} J_{\nu-2}(\varkappa r_1) - q(\nu + 2)c_{\nu+2} J_{\nu+2}(\varkappa r_1) + o(q)) = \\ &= \nu^2 c_\nu^2 Y_\nu(\varkappa r_0) J_\nu(\varkappa r_1) - q\nu c_\nu \left( (\nu - 2)c_{\nu-2} (Y_{\nu-2}(\varkappa r_0) J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0) J_{\nu-2}(\varkappa r_1)) + \right. \\ &\quad \left. + (\nu + 2)c_{\nu+2} (Y_{\nu+2}(\varkappa r_0) J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0) J_{\nu+2}(\varkappa r_1)) \right) + o(q). \end{aligned}$$

Разделим обе части выражения на  $\nu^2 c_\nu^2$  и для удобства определим  $u = \varkappa r_0$ ,  $\lambda = \frac{r_1}{r_0} \varkappa r_1 = \lambda u$ . Запишем полное выражение  $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$  тем же способом, что и в лемме 3:

$$\begin{aligned} 0 &= R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = \\ &= W_{\nu, \nu}(u) - \frac{q}{\nu c_\nu} \left( (\nu - 2)c_{\nu-2} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + \right. \\ &\quad \left. + (\nu + 2)c_{\nu+2} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u)) \right) + o(q). \quad (2.5) \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha_{\nu, m}$  —  $m$ -й нуль функции  $W_{\nu, \nu}(u)$ . Тогда в достаточно малой его окрестности справедливо

$$W_{\nu, \nu}(u) = (u - \alpha_{\nu, m}) \frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + \frac{(u - \alpha_{\nu, m})^2}{2} \frac{\partial^2 W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o((u - \alpha_{\nu, m})^2).$$

Положим  $u = \alpha_{\nu, m} + u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta)$  и подставим  $q = \frac{\varkappa^2\delta^2}{4} = \frac{u^2\delta^2}{4r_0^2}$  в выражение (2.5):

$$(u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta^2)) \frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + \frac{u_1^2\delta^2 + o(\delta^2)}{2} \frac{\partial^2 W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} - \\ - \frac{\alpha_{\nu, m}^2\delta^2 + o(\delta^2)}{4r_0^2} \left[ \left( \frac{(\nu-2)c_{\nu-2}}{\nu c_\nu} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\nu+2)c_{\nu+2}}{\nu c_\nu} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u)) \right) \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta) \right] + o(\delta^2) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при каждой степени, получаем

$$u = \alpha_{\nu, m} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{4r_0^2} \frac{1}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \left( \frac{(\nu-2)c_{\nu-2}}{\nu c_\nu} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + \right. \\ \left. + \frac{(\nu+2)c_{\nu+2}}{\nu c_\nu} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u)) \right) \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta^2),$$

откуда из определения  $u = \varkappa r_0$  следует равенство

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu, m}^3}{2\nu c_\nu r_0^4} \times \\ \times \frac{(\nu-2)c_{\nu-2} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) + (\nu+2)c_{\nu+2} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta^2).$$

Лемма доказана.  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 4.

*Доказательство. Случай 1:*  $\zeta = \lambda_\nu(q)$ ,  $\nu = \frac{k}{p}$ ,  $k \geq 0$ . Тогда для малых  $q$  справедливо (см. [28]) представление четного решения углового уравнения Матье  $ce_\nu(\varphi, q)$  в виде

$$ce_\nu(\varphi, q) = \begin{cases} \cos \nu\varphi + \frac{q}{4(\nu-1)} \cos(\nu-2)\varphi - \frac{q}{4(\nu+1)} \cos(\nu+2)\varphi + o(q), & \nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ или } \nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}; \\ \cos \varphi - \frac{q}{8} \cos 3\varphi + o(q), & \nu = 1; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q}{2} \cos 2\varphi + o(q), & \nu = 0. \end{cases}$$

Пусть  $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  или  $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ . Тогда  $c_\nu = 1$ ,  $c_{\nu+2} = \frac{-1}{4(\nu+1)}$ ,  $c_{\nu-2} = \frac{1}{4(\nu-1)}$ . Применим лемму 3:

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu, m}^3}{2r_0^4} \frac{\frac{1}{4(\nu-1)} (W_{\nu-2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu-2}(u)) - \frac{1}{4(\nu+1)} (W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta^2).$$

Пусть  $\nu = 1$ . Тогда  $c_\nu = 1$ ,  $c_{\nu+2} = \frac{-1}{8}$ ,  $c_{\nu-2} = 0$ , и из леммы 3 получаем

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu, m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{\nu, m}^3}{16r_0^4} \frac{(W_{\nu+2, \nu}(u) + W_{\nu, \nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu, \nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu, m}} + o(\delta^2).$$

Пусть  $\nu = 0$ . Тогда  $c_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $c_{\nu+2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ ,  $c_{\nu-2} = 0$ , и по лемме 3 имеем

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{\nu,m}^3}{4r_0^4} \frac{(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu,m}} + o(\delta^2).$$

*Случай 2:*  $\zeta = \lambda_{-\nu}(q)$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ . В этом случае для малых  $q$  справедливо (см. [28]) представление нечетного решения  $se_\nu(\varphi, q)$  углового уравнения Матьё в виде

$$se_\nu(\varphi, q) = \begin{cases} \sin \nu\varphi + \frac{q}{4(\nu-1)} \sin(\nu-2)\varphi - \frac{q}{4(\nu+1)} \sin(\nu+2)\varphi + o(q), & \nu \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}; \\ \sin 2\varphi - \frac{q}{12} \sin 4\varphi + o(q), & \nu = 2; \\ \sin \varphi - \frac{q}{8} \sin 3\varphi + o(q), & \nu = 1. \end{cases}$$

Пусть  $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . Тогда  $c_\nu = 1$ ,  $c_{\nu-2} = \frac{1}{4(\nu-1)}$ ,  $c_{\nu+2} = \frac{-1}{4(\nu+1)}$  и из леммы 4 получим

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu,m}^3}{8\nu r_0^4} \times \\ \times \frac{\frac{\nu-2}{\nu-1} (W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)) - \frac{\nu+2}{\nu+1} (W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu,m}} + o(\delta^2).$$

Пусть  $\nu = 2$ . Тогда  $c_\nu = 1$ ,  $c_{\nu-2} = 0$ ,  $c_{\nu+2} = \frac{-1}{12}$ , согласно лемме 4

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{\nu,m}^3(\nu+2)}{24\nu r_0^4} \frac{(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu,m}} + o(\delta^2).$$

Пусть  $\nu = 1$ . Тогда  $c_\nu = 1$ ,  $c_{\nu-2} = 0$ ,  $c_{\nu+2} = \frac{-1}{8}$ , из леммы 4 получаем

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{\nu,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{\nu,m}^3(\nu+2)}{16\nu r_0^4} \frac{(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}} \Big|_{u=\alpha_{\nu,m}} + o(\delta^2).$$

Доказательство теоремы 4 закончено. □

## 2.2 Квантовый бильярд в эллиптическом секторе

Мы рассмотрим квантовую частицу в областях двух типов: симметричной  $A_\delta$  и несимметричной  $B_\delta$ , где симметрия подразумевается относительно оси  $Ox$ . Обе области выбраны таким образом, чтобы при стремлении расстояния между фокусами  $2\delta$  к нулю области приближались к круговому сектору. Поведение

квантовой частицы в круговом секторе рассмотрено в [25]. В частности, доказано, что для собственных функций  $\psi_{k,m}(r, \varphi)$  и соответствующих собственных значений  $E_{k,m}$  справедливы формулы

$$\begin{aligned}\psi_{k,m}(r, \varphi) &= J_\lambda \left( \frac{\alpha_{\lambda,m} r}{r_0} \right) \sin \lambda \varphi, \\ E_{k,m} &= \frac{\hbar^2 \alpha_{\lambda,m}^2}{2Mr_0^2}, \quad k, m \in \mathbb{Z},\end{aligned}\tag{2.6}$$

где  $\lambda = \frac{\pi k}{\varphi_0}$  и  $\alpha_{\lambda,m}$  является  $m$ -ым нулем функции Бесселя первого рода  $J_\lambda(x)$ .

Прежде чем переходить к описанию областей  $A_\delta$  и  $B_\delta$ , введем подходящую эллиптическую систему координат. Зафиксируем  $r_0 > 0$ . В евклидовых координатах эллипс с большой полуосью  $r_0$  и фокусами в точках  $(\pm\delta, 0)$  задается уравнением

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{r_0^2 - \delta^2} = 1.$$

В эллиптических координатах  $(\rho, \varphi)$  таких, что

$$(x, y) = (\delta \cosh \rho \cos \varphi, \delta \sinh \rho \sin \varphi),\tag{2.7}$$

этот эллипс задается координатной линией  $\rho = \rho_0$ , где  $\cosh \rho_0 = \frac{r_0}{\delta}$ .

В декартовых координатах пучок софокусных гипербол определяется равенством  $\frac{x^2}{r_0^2 - \lambda} + \frac{y^2}{r_0^2 - \delta^2 - \lambda} = 1$ , где  $\lambda \in (r_0^2 - \delta^2, r_0^2)$ . Гипербола из пучка имеет большую полуось  $A = \sqrt{r_0^2 - \lambda}$  и малую полуось  $B = \sqrt{\lambda - (r_0^2 - \delta^2)}$ .

Теперь потребуем зависимости параметра  $\lambda$  от  $\delta$  такой, чтобы отношение  $k = B/A$  оставалось постоянным, при этом асимптоты также не будут меняться при изменениях  $\delta$ . Пусть  $k^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi_0$ , где  $\pi/2 \neq \varphi_0 \in (0, \pi)$ . Тогда  $A^2(1 + k^2) = A^2 + B^2 = \delta^2$ . Следовательно,  $A^2 = \frac{\delta^2}{1 + k^2} = \delta^2 \cos^2 \varphi_0$  и  $B^2 = \frac{\delta^2 k^2}{1 + k^2} = \delta^2 \sin^2 \varphi_0$ . Таким образом, будем рассматривать софокусные гиперболы

$$\frac{x^2}{\delta^2 \cos^2 \varphi_0} - \frac{y^2}{\delta^2 \sin^2 \varphi_0} = 1\tag{2.8}$$

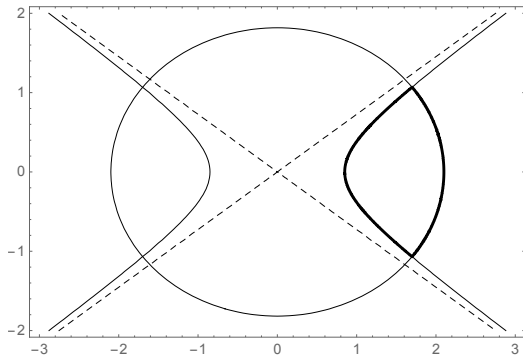
С фокусами в точках  $(\pm\delta, 0)$  и асимптотами  $\frac{x^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{y^2}{\sin^2 \varphi_0} = 0$ . В эллиптической системе координат одна ветвь гиперболы задается равенством  $\varphi = \pm\varphi_0$ , а другая – равенством  $\varphi = \pi \pm \varphi_0$  (или, эквивалентно,  $\varphi = \pm(\pi - \varphi_0)$ ).

Рассмотрим две области, которые в эллиптических координатах (2.7) определены следующим образом:

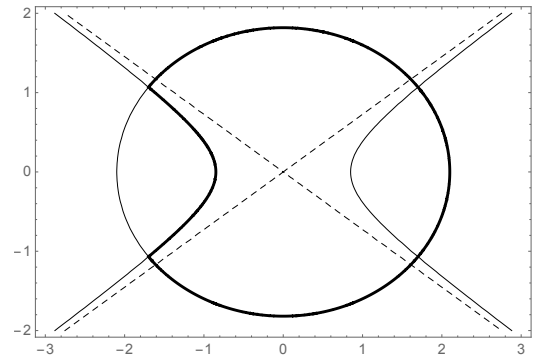
$$A_\delta : \quad \rho \in [0, \rho_0], \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0],$$

$$B_\delta : \quad \rho \in [0, \rho_0], \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1],$$

Заметим, что замыкание  $A_\delta$  содержит множество особых точек эллиптической системы координат (2.7), мы будем считать, что эти точки также принадлежат  $A_\delta$ .



Множество  $A_\delta$ ,  $\varphi_0 < \pi/2$



Множество  $A_\delta$ ,  $\varphi_0 > \pi/2$

Рисунок 2.1 — Примеры множеств  $A_\delta$

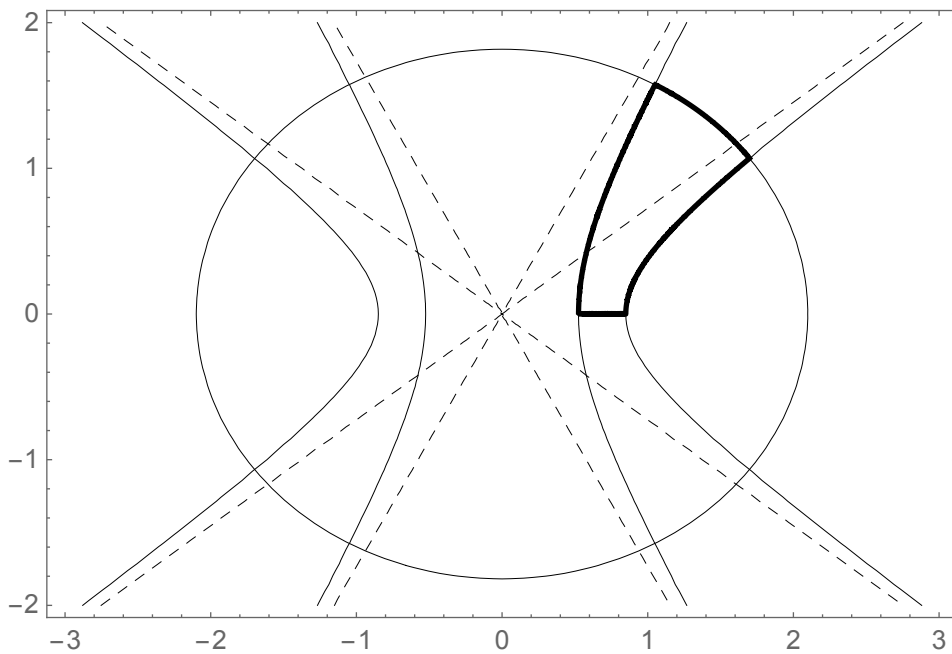


Рисунок 2.2 — Множество  $B_\delta$ ,  $\varphi_0 < \varphi_1 < \pi/2$

Очевидно, что с приближением величины  $\delta$  к 0, эллипс приближается к кругу радиуса  $r_0$ , а любая гипербола (2.8) приближается к собственным асимптотам.

Следовательно, при  $\delta \rightarrow 0$ , область  $A$  приближается к круговому сектору с величиной центрального угла  $2\varphi_0$ , а область  $B$  приближается к круговому сектору с углом  $\varphi_1 - \varphi_0$ .

## 2.2.1 Симметричная область $A_\delta$

### 2.2.1.1 Собственные функции и асимптотика собственных значений

Обозначим через  $\Phi_{even}(\zeta, q, \varphi)$ ,  $\Phi_{odd}(\zeta, q, \varphi)$  четное и нечетное решения уравнения  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi + (\zeta - 2q \cos 2\varphi) \Phi = 0$ , соответственно. В частности, (см. [28])

$$\begin{aligned} \Phi_{even}(a_n(q), q, \varphi) &= ce_n(\varphi, q) & \Phi_{odd}(a_n(q), q, \varphi) &= fe_n(\varphi, q) \\ \Phi_{even}(b_n(q), q, \varphi) &= ge_n(\varphi, q) & \Phi_{odd}(b_n(q), q, \varphi) &= se_n(\varphi, q) \\ \Phi_{even}(\lambda_{\nu+2k}(q), q, \varphi) &= ce_{\nu+2k}(\varphi, q) & \Phi_{odd}(\lambda_{\nu+2k}(q), q, \varphi) &= se_{\nu+2k}(\varphi, q). \end{aligned}$$

Напомним, что эллиптическая система координат имеет особенности на соединяющем фокусы отрезке. Область  $A_\delta$  содержит особые точки эллиптической системы координат, а именно, они находятся на отрезке  $J$  с концами на правом фокусе и на вершине дуги гиперболы. Следовательно, решение  $\psi(\rho, \varphi)$  и его производная должны удовлетворять условиям непрерывности (1.4) и (1.5) на  $J$ . В силу соображений раздела 1.2.3.1, собственная функция  $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$  оператора  $\hat{H}$  в области  $A_\delta$  является произведением радиальной и угловой функций Матьё одинаковой четности:

$$\psi(\rho, \varphi) = \Phi_{even}(\varphi)R_{even}(\rho) \text{ или } \psi(\rho, \varphi) = \Phi_{odd}(\varphi)R_{odd}(\rho).$$

В наших обозначениях для области  $A_\delta$  справедлива следующая теорема

**Теорема 5.** *Для собственных функций  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi)$  оператора  $\hat{H}$  справедливы выражения*

$$\psi_{k,m}(\rho, \varphi) = \begin{cases} Ce_\nu(\rho, q)ce_\nu(\varphi, q), & \text{нечетный } k \geq 1 \\ Se_\nu(\rho, q)se_\nu(\varphi, q), & \text{четный } k \geq 2 \end{cases} \quad (2.9)$$

с параметрами

$$\nu = \nu_{k,m} = \nu_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{4r_0^2} \nu_1 + o(\delta^2), \quad q = q_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4},$$

где

$$\nu_0 = \frac{\pi k}{2\varphi_0} \quad \text{и} \quad \nu_1 = \frac{\pi k \sin 2\varphi_0}{\pi^2 k^2 - 4\varphi_0^2}.$$

Соответствующие собственные значения  $E_{k,m}$  выражаются через величины  $\alpha_{k,m}^2$  по формуле  $E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \alpha_{k,m}^2}{2M}$ , при этом для последних справедливы равенства

$$\alpha_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{\alpha_1}{\left. \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} + o(\delta^2), \quad (2.10)$$

где

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4(\nu_0-1)} - \frac{J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4(\nu_0+1)} - \nu_1 \left. \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}), & \text{для нечетных } k \geq 1; \\ \frac{(\nu_0-2)J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0-1)} - \\ - \frac{(\nu_0+2)J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0+1)} - \nu_1 \left. \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}), & \text{для четных } k \geq 2. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha_{\nu_0,m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя первого рода  $J_{\nu_0}(x)$ .

*Доказательство.* Нечетный и четный случаи мы рассматриваем отдельно.

Сперва рассмотрим нечетный случай:  $\psi(\rho, \varphi) = R_{odd}(\rho)\Phi_{odd}(\varphi)$ .

для  $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  ( $\nu = 1$  соответствует случаю  $\varphi_0 = \pi$ , который в работе не рассматривается) справедливо разложение [30, §2.2],

$$\begin{aligned} \Phi_{odd}(\nu, \varphi, q) &= \\ &= \sin \nu \varphi + \frac{q}{4(\nu-1)} \sin(\nu-2)\varphi - \frac{q}{4(\nu+1)} \sin(\nu+2)\varphi + o(q). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Напомним, что для  $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\Phi_{odd}(\nu, \varphi, q) = se_\nu(\varphi, q)$  и для  $\nu \in \mathbb{Z}$ ,  $\Phi_{odd}(\nu, \varphi, q)$  является  $se_\nu(\varphi, q)$  или  $fe_\nu(\varphi, q)$  в зависимости от  $\nu$ , но с тем же разложением (2.11). Поэтому, для простоты будем использовать запись  $se_\nu(\varphi, q)$  вместо  $fe_\nu(\varphi, q)$ , используя только разложения с точностью до  $o(q)$ . Этот же подход мы будем использовать в дальнейшем без явного упоминания.

Подставим  $\varphi = \varphi_0$  и  $\nu = \nu(q) = \nu_0 + q\nu_1 + o(q)$  в граничное условие  $se_{\nu(q)}(\varphi_0, q) = 0$  угловой функции:

$$\begin{aligned} se_{\nu(q)}(\varphi_0, q) &= \sin \nu_0 \varphi_0 + \\ &+ q \left( \nu_1 \varphi_0 \cos \nu_0 \varphi_0 + \frac{\sin(\nu_0-2)\varphi_0}{4(\nu_0-1)} - \frac{\sin(\nu_0+2)\varphi_0}{4(\nu_0+1)} \right) + o(q) = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при каждой степени  $q$ , мы получим

$$\nu_0 = \frac{\pi(2k)}{2\varphi_0}, \quad \nu_1 = \frac{\pi(2k) \sin 2\varphi_0}{(\pi^2(2k)^2 - 4\varphi_0^2)}.$$

Рассмотрим второе граничное условие  $R(\rho_0) = 0$ . Для функции  $R(\rho) = Se_{\nu}(\rho, q)$  справедливо разложение в ряд по функциям Бесселя первого рода, см. [23, гл. VIII], поэтому:

$$Se_{\nu}(\rho, q) \propto \nu J_{\nu}(2\sqrt{q} \cosh \rho) + q \left( \frac{\nu + 2}{4(\nu + 1)} J_{\nu+2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) - \frac{\nu - 2}{4(\nu - 1)} J_{\nu-2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) \right) + o(q).$$

Символ  $\propto$  означает равенство с точностью до умножения на ненулевую константу.

Заметим, что  $\frac{r_0}{\delta} = \cosh \rho = \cosh \rho_0$ , тогда из  $q = \frac{\varkappa^2 \delta^2}{4}$  следует, что  $2\sqrt{q} \cosh \rho_0 = \varkappa r_0$ . Для краткости обозначим  $u = \varkappa r_0$ . Теперь подставим  $\nu = \nu_0 + q\nu_1 + o(q)$  в граничное условие  $0 = Se_{\nu(q)}(\rho_0, q)$ :

$$0 = \nu_0 J_{\nu_0}(u) + q \left( \nu_1 J_{\nu_0}(u) - \frac{\nu_0 - 2}{4(\nu_0 - 1)} J_{\nu_0-2}(u) + \frac{\nu_0 + 2}{4(\nu_0 + 1)} J_{\nu_0+2}(u) + \nu_0 \nu_1 \frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_0} (u) \right) + o(q).$$

После чего подставим  $u = u_0 + qu_1 + o(q)$  в последнее равенство:

$$0 = \nu_0 J_{\nu_0}(u_0) + q \left( \nu_0 u_1 \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} + \nu_1 J_{\nu_0}(u_0) - \frac{\nu_0 - 2}{4(\nu_0 - 1)} J_{\nu_0-2}(u_0) + \frac{\nu_0 + 2}{4(\nu_0 + 1)} J_{\nu_0+2}(u_0) + \nu_0 \nu_1 \frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_0} (u_0) \right) + o(q).$$

Снова приравнявая к 0 коэффициенты при степенях  $q$ , получим

$$u_0 = \alpha_{\nu_0, m}, \tag{2.12}$$

$$u_1 = \frac{1}{\frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\nu_0, m}}} \left( \frac{(\nu_0 - 2) J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0, m})}{4\nu_0(\nu_0 - 1)} - \frac{(\nu_0 + 2) J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0, m})}{4\nu_0(\nu_0 + 1)} - \nu_1 \frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_0} (\alpha_{\nu_0, m}) \right), \tag{2.13}$$

где  $\alpha_{\nu_0, m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя  $J_{\nu_0}(x)$ .

Из равенства  $q = \frac{\varkappa^2 \delta^2}{4} = \frac{u^2 \delta^2}{4r_0^2}$  можно получить выражение для собственного значения

$$\varkappa_{k, m}^2 = \frac{u^2}{r_0^2} = \frac{u_0^2}{r_0^2} + \frac{2qu_0 u_1}{r_0^2} + o(q) = \frac{u_0^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{u_0^3 u_1}{2r_0^4} + o(\delta^2).$$

Из уравнений (2.12) и (2.13) для  $u_0, u_1$  верны выражения

$$\nu_0 = \frac{2\pi k}{2\varphi_0}, \quad \nu_1 = \frac{2\pi k \sin 2\varphi_0}{4k^2\pi^2 - 4\varphi_0^2}, \quad (2.14)$$

$$\nu_{k,m} = \nu_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{4r_0^2} \nu_1 + o(\delta^2), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{k,m}^2 = & \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} \left( \frac{(\nu_0 - 2)J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 - 1)} - \right. \\ & \left. - \frac{(\nu_0 + 2)J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 + 1)} - \nu_1 \frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}) \right) + o(\delta^2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теперь рассмотрим случай  $\psi(\varphi, \rho) = \Phi_{even}(\varphi)R_{even}(\rho)$  с четными функциями  $\Phi_{even}(\varphi)$  и  $R_{even}(\rho)$ . В силу аналогичных соображений, рассмотрим разложение четного решения:

$$ce_{\nu}(\varphi, q) = \cos \nu\varphi + \frac{q}{4(\nu - 1)} \cos(\nu - 2)\varphi - \frac{q}{4(\nu + 1)} \cos(\nu + 2)\varphi + o(q).$$

Используя равенство  $ce_{\nu}(\varphi_0, q) = 0$  и разложение  $\nu = \nu_0 + q\nu_1 + o(q)$ , запишем разложение  $ce_{\nu}$  по степеням  $q$ :

$$\begin{aligned} 0 = ce_{\nu}(\varphi_0, q) = & \cos \nu_0\varphi_0 + \\ & + q \left( \frac{\cos(\nu_0 - 2)\varphi_0}{4(\nu_0 - 1)} - \frac{\cos(\nu_0 + 2)\varphi_0}{4(\nu_0 + 1)} - \nu_1\varphi_0 \sin \nu_0\varphi_0 \right) + o(q). \end{aligned}$$

Приравнявая к 0 коэффициенты при различных степенях  $q$ , получаем

$$\nu_0 = \frac{\pi(1 + 2k)}{2\varphi_0}, \quad \nu_1 = \frac{\pi(1 + 2k) \sin 2\varphi_0}{\pi^2(1 + 2k)^2 - 4\varphi_0^2}.$$

Чтобы вывести формулу для  $\varkappa^2$ , рассмотрим граничное условие  $R(\rho_0) = 0$ . Поскольку  $R(\rho) = Ce_{\nu}(\rho, q)$ , можно воспользоваться разложением в сумму по функциям Бесселя первого рода:

$$\begin{aligned} Ce_{\nu}(\rho, q) = & J_{\nu}(2\sqrt{q} \cosh \rho) + \\ & + q \left( \frac{1}{4(\nu + 1)} J_{\nu+2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) - \frac{1}{4(\nu - 1)} J_{\nu-2}(2\sqrt{q} \cosh \rho) \right) + o(q). \end{aligned}$$

Заметим, что  $\frac{r_0}{\delta} = \cosh \rho = \cosh \rho_0$ , тогда из  $q = \frac{\varkappa^2 \delta^2}{4}$  следует, что  $2\sqrt{q} \cosh \rho_0 = \varkappa r_0$ . Обозначим для краткости  $u = \varkappa r_0$ .

Подставим  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + q\mathbf{v}_1 + o(q)$  в граничное условие  $0 = Ce_{\mathbf{v}(q)}(\rho_0, q)$ :

$$0 = J_{\mathbf{v}_0}(u) + q \left( \frac{J_{\mathbf{v}_0+2}(u)}{4(\mathbf{v}_0+1)} - \frac{J_{\mathbf{v}_0-2}(u)}{4(\mathbf{v}_0-1)} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial J_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} (u) \right) + o(q). \quad (2.17)$$

Теперь подставим  $u = u_0 + qu_1 + o(q)$  в полученное выражение (2.17):

$$0 = Ce_{\mathbf{v}(q)}(\rho_0, q) = J_{\mathbf{v}_0}(u_0) + q \left( u_1 \frac{\partial J_{\mathbf{v}_0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} + \frac{J_{\mathbf{v}_0+2}(u_0)}{4(\mathbf{v}_0+1)} - \frac{J_{\mathbf{v}_0-2}(u_0)}{4(\mathbf{v}_0-1)} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial J_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} (u_0) \right) + o(q).$$

Из равенства 0 коэффициентов при каждой степени  $q$  следует

$$u_0 = \alpha_{\mathbf{v}_0, m},$$

$$u_1 = \frac{1}{\frac{\partial J_{\mathbf{v}_0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\mathbf{v}_0, m}}} \left( \frac{J_{\mathbf{v}_0-2}(\alpha_{\mathbf{v}_0, m})}{4(\mathbf{v}_0-1)} - \frac{J_{\mathbf{v}_0+2}(\alpha_{\mathbf{v}_0, m})}{4(\mathbf{v}_0+1)} - \mathbf{v}_1 \frac{\partial J_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} (\alpha_{\mathbf{v}_0, m}) \right),$$

где  $\alpha_{\mathbf{v}_0, m}$  –  $m$ -й нуль функции  $J_{\mathbf{v}_0}(x)$ .

Как и в предыдущем случае, собственное значение

$$\kappa_{k, m}^2 = \frac{u^2}{r_0^2} = \frac{u_0^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{u_0^3 u_1}{2r_0^4} + o(\delta^2)$$

получается подстановкой значений  $u_0, u_1$ :

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\pi(1+2k)}{2\varphi_0}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\pi(1+2k) \sin 2\varphi_0}{\pi^2(1+2k)^2 - 4\varphi_0^2},$$

$$\mathbf{v}_{k, m} = \mathbf{v}_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\mathbf{v}_0, m}^2}{4r_0^2} \mathbf{v}_1 + o(\delta^2),$$

$$\kappa_{k, m}^2 = \frac{\alpha_{\mathbf{v}_0, m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\mathbf{v}_0, m}^3}{2r_0^4} \frac{1}{\frac{\partial J_{\mathbf{v}_0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\mathbf{v}_0, m}}} \left( \frac{J_{\mathbf{v}_0-2}(\alpha_{\mathbf{v}_0, m})}{4(\mathbf{v}_0-1)} - \frac{J_{\mathbf{v}_0+2}(\alpha_{\mathbf{v}_0, m})}{4(\mathbf{v}_0+1)} - \mathbf{v}_1 \frac{\partial J_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} (\alpha_{\mathbf{v}_0, m}) \right) + o(\delta^2).$$

### 2.2.1.2 Особый случай: $A_\delta$ для $\varphi_0 = \pi/2$

Для  $\mathbf{v} \neq 1$  формулы для собственных функций и собственных значений, см. уравнения (2.9) и (2.10), верны. Единственным исключением является случай  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = 1$ . Для  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = 1$  для четного решения справедливо разложение (см. [28, Subsect. 20.2.27]):

$$ce_1(\varphi, q) = \cos \varphi - \frac{q}{8} \cos 3\varphi + o(q),$$

для которого граничное условие  $ce_1(\varphi_0, q) = 0$  выполняется. Рассмотрим второе граничное условие  $R(\rho_0) = 0$ . Для  $R(\rho) = Ce_1(\rho, q)$  существует разложение по функциям Бесселя первого рода:

$$Ce_1(\rho, q) = J_1(2\sqrt{q} \cosh \rho) + \frac{q}{8} J_3(2\sqrt{q} \cosh \rho) + o(q).$$

Из подстановок  $\cosh \rho = \cosh \rho_0 = \frac{r_0}{\delta}$  и  $q = \frac{\varkappa^2 \delta^2}{4}$  следует равенство  $2\sqrt{q} \cosh \rho_0 = \varkappa r_0$ . Для краткости  $\varkappa r_0$  обозначим через  $u$ .

Подставим  $\nu = 1$  в граничное условие  $0 = Ce_1(\rho_0, q)$  и рассмотрим разложение в ряд по степеням  $q$ :

$$0 = J_1(u) + q \left( \frac{J_3(u)}{8} \right) + o(q).$$

Подстановкой  $u = u_0 + qu_1 + o(q)$  получим:

$$0 = J_1(u_0) + q \left( u_1 \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} + \frac{J_3(u_0)}{8} \right) + o(q).$$

Поэтому,

$$u_0 = \alpha_{1,m}, \quad u_1 = \frac{-J_3(\alpha_{1,m})}{8 \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{1,m}}},$$

где  $\alpha_{1,m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя  $J_1(x)$ . По аналогии с предыдущим случаем, собственное значение  $\varkappa_{1,m}^2 = \frac{u^2}{r_0^2} = \frac{u_0^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{u_0^3 u_1}{2r_0^4} + o(\delta^2)$  получается из подстановки величин  $u_0, u_1$ :

$$\varkappa_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{1,m}^3}{16r_0^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2), \quad (2.18)$$

□

## 2.2.2 Несимметричная область $B_\delta$

### 2.2.2.1 Собственные функции и асимптотика собственных значений

Внутренность области  $B_\delta$  не содержит особых точек эллиптической системы координат (2.7). Поэтому, условия непрерывности сдвига или непрерывности производной, рассмотренные для случая симметричной области (в частности,

для эллипса), здесь не требуются. Хотя эти особые точки, тем не менее, появятся на границе  $B_\delta$  (а именно, они образуют горизонтальный отрезок в составе границы).

Рассмотрим собственную функцию  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ . Обращение  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi)$  в нуль на горизонтальном отрезке на границе  $B_\delta$  подразумевает, что  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi)$  может быть представлена в виде

$$\psi(\rho, \varphi) = (\Phi_{even}(\varphi_0)\Phi_{odd}(\varphi) - \Phi_{even}(\varphi)\Phi_{odd}(\varphi_0)) R_{odd}(\rho).$$

**Теорема 6.** В области  $B_\delta$  для собственных функций  $\psi_{k,m}(\rho, \varphi)$  оператора  $\hat{H}$  справедливы выражения

$$\psi_{k,m}(\rho, \varphi) = Se_\nu(\rho, q) \left( ce_\nu(\varphi_0, q)se_\nu(\varphi, q) - ce_\nu(\varphi, q)se_\nu(\varphi_0, q) \right), \quad (2.19)$$

с параметрами

$$\nu = \nu_{k,m} = \nu_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{4r_0^2} \nu_1 + o(\delta^2), \quad q = q_{k,m} = \frac{\chi_{k,m}^2 \delta^2}{4},$$

где

$$\nu_0 = \frac{\pi k}{\varphi_1 - \varphi_0}, \quad \nu_1 = \frac{\pi k (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)}{\pi^2 k^2 - (\varphi_1 - \varphi_0)^2}.$$

Соответствующие собственные значения  $E_{k,m}$  выражаются через величины  $\chi_{k,m}^2$  по формуле  $E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \chi_{k,m}^2}{2M}$ , при этом для последних справедливы равенства

$$\begin{aligned} \chi_{k,m}^2 = & \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} \left( \frac{(\nu_0 - 2)J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 - 1)} \right. \\ & \left. - \frac{(\nu_0 + 2)J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 + 1)} - \nu_1 \left. \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}) \right) + o(\delta^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь  $\alpha_{\nu_0,m}$  –  $m$ -й нуль функции Бесселя первого рода  $J_{\nu_0}(x)$ .

*Доказательство.* Мы хотим найти решение углового решения в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi, q) = & \Phi_{even}(\varphi_0)\Phi_{odd}(\varphi) - \Phi_{even}(\varphi)\Phi_{odd}(\varphi_0) = \\ = & ce_\nu(\varphi_0, q)se_\nu(\varphi, q) - ce_\nu(\varphi, q)se_\nu(\varphi_0, q). \end{aligned}$$

Подставим  $\nu(q) = \nu_0 + q\nu_1 + o(q)$  в граничное условие  $\Phi(\varphi_1, q) = 0$  и из разложения функций  $ce_\nu(\varphi, q)$  и  $se_\nu(\varphi, q)$ , в ряды по степеням  $q$  получим

$$\begin{aligned} 0 = \Phi(\varphi_1, q) &= ce_\nu(\varphi_0, q)se_\nu(\varphi_1, q) - ce_\nu(\varphi_1, q)se_\nu(\varphi_0, q) = \\ &= \sin \nu_0(\varphi_1 - \varphi_0) + q \left( \frac{1}{4(\nu_0 + 1)} \sin(2\varphi_0 + \nu_0(\varphi_0 - \varphi_1)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4(\nu_0 + 1)} \sin(\nu_0(\varphi_0 - \varphi_1) - 2\varphi_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(\nu_0 - 1)} \cos(\varphi_0 + \varphi_1) \sin(\nu - 1)(\varphi_0 - \varphi_1) - \right. \\ &\quad \left. - \nu_1(\varphi_0 - \varphi_1) \cos \nu_0(\varphi_0 - \varphi_1) \right) + o(q). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nu_0 = \frac{\pi k}{\varphi_1 - \varphi_0}, \quad \nu_1 = \frac{\pi k(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)}{\pi^2 k^2 - (\varphi_1 - \varphi_0)^2}.$$

Из соображений, аналогичных тем, что были проведены для  $\Psi_{k,m}(\rho, \varphi) = \Phi_{odd}(\varphi)R_{odd}(\rho)$  из предыдущего подраздела, мы получаем разложение радиальной функции и соответствующих собственных значений:

$$\begin{aligned} \nu_{k,m}^2 &= \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{1}{\left. \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} \left( \frac{(\nu_0 - 2)J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 - 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\nu_0 + 2)J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0 + 1)} - \nu_1 \left. \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}) \right) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

### 2.2.2.2 Особые случаи: $B_\delta$ для $(\varphi_0, \varphi_1) = (0, \pi)$ и для $(\varphi_0, \varphi_1) = (0, \pi/2)$

Хотя  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \pi/2$  является особым случаем при  $k = 1$ , несложно проверить, что уравнения (2.19) и (2.20) выполняются.

Для  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \pi$  особым является случай  $k = 1$  (следовательно,  $\nu_0 = 1$ ). Для остальных величин  $k$  равенства (2.19) и (2.20) справедливы. Теперь предположим  $k = 1$  (и  $\nu = \nu_0 = 1$ ). Тогда для соответствующего нечетного решения углового уравнения справедливо разложение (см. [28, Subsect. 20.2.27])

$$se_1(\varphi, q) = \sin \varphi - \frac{q}{8} \sin 3\varphi + o(q),$$

для которого выполняется граничное условие  $se_1(\varphi_0, q) = 0$ . Теперь рассмотрим второе граничное условие  $R(\rho_0) = 0$ . Для функции  $R(\rho) = Se_1(\rho, q)$  справедливо разложение по функциям Бесселя первого рода:

$$Se_1(\rho, q) = J_1(2\sqrt{q} \cosh \rho) + \frac{3q}{8} J_3(2\sqrt{q} \cosh \rho) + o(q).$$

Подставим  $\cosh \rho = \cosh \rho_0 = \frac{r_0}{\delta}$ . Тогда из  $q = \frac{\varkappa^2 \delta^2}{4}$  следует равенство  $2\sqrt{q} \cosh \rho_0 = \varkappa r_0$ .

Для краткости положим  $u = \varkappa r_0$ . Подставим  $\nu = 1$  в граничное условие радиальной функции и разложим ее в ряд степенной ряд по  $q$ :

$$0 = Se_1(\rho_0, q) = J_1(u) + q \frac{3J_3(u)}{8} + o(q).$$

Теперь подставим  $u = u_0 + qu_1 + o(q)$ :

$$0 = Se_1(\rho_0, q) = J_1(u_0) + q \left( u_1 \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} + \frac{3J_3(u_0)}{8} \right) + o(q).$$

Отсюда

$$u_0 = \alpha_{1,m}, \quad u_1 = \frac{-3J_3(\alpha_{1,m})}{8 \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{1,m}}},$$

где  $\alpha_{1,m}$  –  $m$ -й нуль функции  $J_1(x)$ .

Наконец, как в предыдущем случае, подстановкой  $u_0, u_1$  в  $\varkappa_{1,m}^2 = \frac{u^2}{r_0^2} = \frac{u_0^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{u_0^3 u_1}{2r_0^4} + o(\delta^2)$ , получим выражение для собственного значения:

$$\varkappa_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{3\alpha_{1,m}^3}{16r_0^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2). \quad (2.21)$$

□

## 2.3 Постоянная наблюдаемая величина

Как было показано в [25], наблюдаемая  $(\hat{L}_z)^2 = \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  сохраняется для квантового бильярда в круговом секторе. В частности, решению  $\psi(r, \varphi) = J_{\lambda_p}(\frac{\alpha_{\lambda_p, n}}{r_0} r) \sin \lambda_p \varphi$  уравнения Шрёдингера в секторе  $0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi \leq \theta_s$  соответствует величина

$$\langle \psi, (\hat{L}_z)^2 \psi \rangle = \hbar^2 \lambda_p^2.$$

В наших условиях интегрируемость классического билиарда следует из сохраняемой величины, а именно, произведение угловых моментов относительно фокусов.

Определим два оператора  $\hat{L}_{\pm c} = (x \pm c)\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$  угловых моментов относительно фокусов  $(x, y) = (\mp c, 0)$ .

Рассмотрим оператор  $\hat{A} = \frac{-1}{2}(L_c L_{-c} + L_{-c} L_c + c^2 \nabla^2)$ . Пусть функция  $\psi(\varphi, \rho) = \Phi(\zeta, q, \varphi)R(\zeta, q, \rho)$  является собственной функцией для оператора  $\nabla^2$ .

Тогда  $\hat{A}\psi = \zeta\psi$ , в частности,

$$\langle \psi, \hat{A}\psi \rangle = \zeta \langle \psi, \psi \rangle. \quad (2.22)$$

$\hat{A}$  в эллиптических координатах можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{2}{\cos 2\varphi - \cosh 2\rho} \left( \sinh \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \varphi^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) - \frac{c^2}{2} \nabla^2 = \\ &= \frac{\cos 2\varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \cosh 2\rho \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}{\cos 2\varphi - \cosh 2\rho}. \end{aligned}$$

Угловая  $\Phi(\zeta, q, \varphi)$  и радиальная  $R(\zeta, q, \rho)$  составляющие являются решениями соответствующих функций Матьё с параметрами  $\zeta, q$ . Таким образом,  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi) = -(\zeta - 2q \cos \varphi) \Phi(\varphi)$  и  $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R(\rho) = (\zeta - 2q \cosh \rho) R(\rho)$ . Поэтому,

$$\begin{aligned} A\psi &= R(\rho)\Phi(\varphi) \times \\ &\quad \times \frac{\zeta(\cos 2\varphi - \cosh 2\rho) + (2q - 2q) \cos 2\varphi \cosh 2\rho}{\cos 2\varphi - \cosh 2\rho} = \\ &= \zeta\psi. \end{aligned}$$

## Глава 3. Эллиптический бильярд с косинусным законом преломления на софокусных квадраках.

### 3.1 Предварительные сведения.

#### 3.1.1 Классический бильярд.

Зафиксируем большую и малую полуоси эллипса  $a$  и  $b$ , где  $a > b > 0$  и во внутренности эллипса  $\left(f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right)$  рассмотрим движение материальной точки с координатами  $\mathbf{x} = (x, y)$  и вектором скорости  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ , при котором на границе эллипса  $f(x, y) = 1$  векторы скорости до отражения и после него образуют равные по величине углы с вектором нормали  $n = \nabla f(x, y)|_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right)$  к эллипсу в точке отражения  $(x_0, y_0)$ .

Обозначим  $\Psi = \{Q_\lambda \mid \lambda \in (0, a^2)\}$  – однопараметрическое семейство софокусных квадрак, где квадрака  $Q_\lambda$  задается уравнением

$$f_\lambda(x, y) = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1.$$

Интегрируемость классического бильярда обусловлена классической теоремой из геометрии: если какое-то звено бильярдной траектории коснулось софокусной квадраки  $Q_\lambda$  из семейства  $\Psi$ , то и все остальные звенья касаются этой же квадраки, поэтому  $\lambda$  является первым интегралом.

#### 3.1.2 Интеграл Иоахимсталя.

Пусть  $M = Q_0 \times \mathbb{R}^2$  – фазовый цилиндр бильярда в эллипсе  $Q_0$ . Для точки  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = ((x, y), (v_x, v_y)) \in M$  рассмотрим функцию  $J(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\left(\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2}\right)$ . Функция  $J(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  не является интегралом движения точки в эллиптическом бильярде, так как не сохраняется на прямолинейных отрезках траектории. Тем не менее, для «дискретного» бильярда в эллипсе, когда траектория записывается последовательностью точек на эллипсе, в которых траектории испытывают отражения, функция  $J(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  является интегралом. А именно, прямолинейное звено бильярдной траектории будем кодировать начальной точкой звена  $(x, y)$  и его вектором скорости  $(v_x, v_y)$ . Тогда выполняется следующее утверждение:

**Теорема 7.** [7, с. 61]. Пусть  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \in M$ ,  $i = 1, \dots$ , – последовательность точек на фазовом цилиндре, кодирующая последовательные звенья некоторой бильярдной траектории. Тогда  $J(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) = J(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1})$  для всех  $i$ .

Функцию  $J$  называют интегралом Иоахимсталя. Заметим, что эту функцию можно переписать в виде

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \nabla f_0(x, y) \rangle,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение.

Прежде чем перейти к геометрическому смыслу интеграла Иоахимсталя, рассмотрим следующий вопрос: сколько квадриков из семейства  $\Psi = \{Q_\lambda \mid \lambda \in (0, a^2)\}$  касаются фиксированной произвольным образом прямой в  $\mathbb{R}^2$ ?

**Утверждение 4.** Рассмотрим прямую  $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ , проходящую через точку  $\mathbf{x} = (x, y)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  и имеющую направление  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ . Тогда:

(i) Прямая касается не более одной квадрики  $Q_\lambda$  из семейства  $\Psi$ .

(ii) Исключая вертикальную ось  $x = 0$  и прямые, проходящие хотя бы через один из фокусов, такая касательная квадрака  $Q_\lambda$  существует и ее параметр  $\lambda$  определяется по формуле

$$\lambda = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{a^2 v_y^2 + b^2 v_x^2 - (xv_y - yv_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}. \quad (3.1)$$

*Доказательство.* Прямая  $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$  касается квадрики  $Q_\lambda$  тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{(x + tv_x)^2}{a^2 - \lambda} + \frac{(y + tv_y)^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

имеет ровно одно решение по  $t$ , то есть когда дискриминант квадратного уравнения с переменной  $t$  равен нулю. Приравнивая дискриминант к нулю и решая равенство относительно параметра софокусной квадрики  $\lambda$  можно получить формулу (3.1) из второго пункта формулировки утверждения. В случаях, если  $\lambda = a^2$  или  $\lambda = b^2$ , касательная квадрака  $Q_\lambda$  вырождается в прямую (проходящую через малую полуось при  $\lambda = a^2$  и проходящая через большую полуось при  $\lambda = b^2$ ), следовательно прямая  $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$  не касается никакой софокусной квадрики  $Q_\lambda$ .  $\square$

Заметим, что для бильярда в эллипсе вычисленный в точке  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  фазового цилиндра  $M$  интеграл Иоахимстала связан с параметром софокусной квадррики  $\lambda$ , которой касается прямая с направляющим вектором  $\mathbf{v}$ , проходящая через точку  $\mathbf{x}$ .

**Утверждение 5.** Пусть  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  кодируют некоторое звено бильярдной траектории. Пусть  $\lambda$  – параметр квадррики  $Q_\lambda$ , касающейся прямой  $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ . Тогда

$$\lambda = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = a^2 b^2 \frac{J^2(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad (3.2)$$

*Доказательство.* Выражение (3.1) для  $\lambda$  перепишем, домножив обе части на знаменатель:

$$(v_x^2 + v_y^2)\lambda = a^2 v_y^2 + b^2 v_x^2 - (xv_y - yv_x)^2 = (a^2 - x^2)v_y^2 + (b^2 - y^2)v_x^2 + 2xyv_x v_y. \quad (3.3)$$

Точка  $(x, y)$  находится на эллипсе  $Q_0$ , поэтому

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2} \text{ и } b^2 - y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем

$$\|\mathbf{v}\|^2 \lambda = \frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} + 2xyv_x v_y = \|\mathbf{v}\|^2 a^2 b^2 \left( \frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2} \right)^2 = a^2 b^2 J^2(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

□

## 3.2 Косинусный закон преломления.

Пусть две области  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  граничат по кривой  $C$ . Показатели преломления для этих областей равны  $n_i$  и  $n_j$ , соответственно. Будем считать, что движение материальной точки при достижении кривой  $C$  подчиняется следующим правилам (далее мы будем ссылаться на них как на модифицированный закон преломления (\*)).

1. Выполнено соотношение  $n_i \cos \theta_i = n_j \cos \theta_j$ , где  $\theta_i, \theta_j \in [0, \frac{\pi}{2}]$  – углы, которые образуют отрезки траектории в соответствующих областях с нормалью к кривой  $C$ , если  $\theta_i$  и  $\theta_j$  корректно определены.
2. Если  $n_i > n_j$  и материальная точка, двигаясь в области  $\Omega_i$ , достигает кривой  $C$ , причем в точке пересечения траектории с кривой  $C$  выполнено неравенство  $\cos \theta_i > \frac{n_j}{n_i}$ , то происходит полное внутреннее отражение траектории в область  $\Omega_i$  по закону «угол падения равен углу отражения» (в этом случае угол  $\theta_j$  не определен, поскольку  $\frac{n_i}{n_j} \cos \theta_i > 1$ ).

3. В предыдущих двух пунктах два соседних отрезка траектории с общей точкой на кривой  $C$  лежат по разные стороны от нормали к кривой  $C$  в этой точке.
4. Если  $n_i > n_j$  и материальная точка, двигаясь в области  $\Omega_j$ , достигает кривой  $C$ , причем  $\theta_j = 0$ , тогда  $\cos \theta_i = \frac{n_j}{n_i}$  и материальная точка продолжает движение в области  $\Omega_i$  вдоль любого из двух возможных направлений, образующих угол  $\theta_i$  с нормалью к кривой  $C$ .
5. Аналогично при  $n_i < n_j$ .

Для удобства будем считать, что при преломлении модуль вектора скорости не меняется.

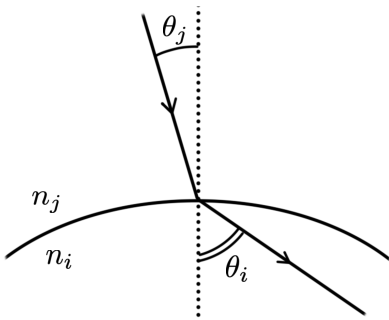


Рисунок 3.1 — Иллюстрация к пункту 1.

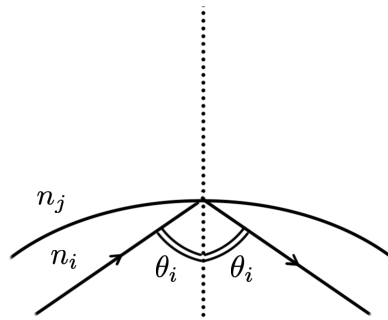


Рисунок 3.2 — Иллюстрация к пункту 2.

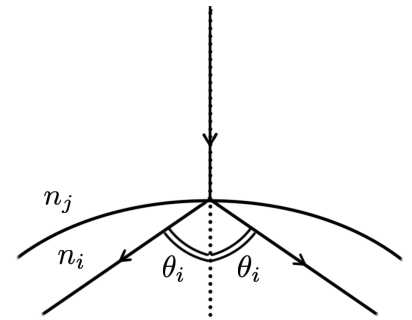


Рисунок 3.3 — Иллюстрация к пункту 4.

### 3.2.1 Постоянная движения

Пусть задана область  $\Omega$ , ограниченная эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где  $a > b > 0$ . Дуга софокусной квадрики  $Q_{\lambda_0} = \left\{ \frac{x^2}{a^2 - \lambda_0} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_0} = 1 \right\}$  разделяет  $\Omega$  на области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . В случае  $0 < \lambda_0 < b^2$  квадрика  $Q_{\lambda_0}$  является эллипсом, а при  $b^2 < \lambda_0 < a^2$  — гиперболой.

Припишем каждой области  $\Omega_i$  коэффициент  $n_i$ ,  $i = 1, 2$ , имеющий смысл показателя преломления. Рассмотрим движение материальной точки в области  $\Omega$ . Будем считать, что на внешней границе области  $\Omega$  движение подчиняется закону «угол падения равен углу отражения», а на общей границе областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  выполняется модифицированный закон преломления (\*).

Определим функцию  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  положения и скорости материальной точки (в декартовых координатах) по формуле

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_2^2 + \lambda_0(n_1^2 - n_2^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь величина  $\Lambda(x, y, v_x, v_y)$  определена как в уравнении (3.1) и имеет смысл коэффициента  $\alpha$  софокусной квадррики  $Q_\alpha$ , которая касается прямой, проходящей через точку  $(x, y)$  в направлении вектора  $(v_x, v_y)$ .

Функция  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  является первым интегралом рассматриваемой динамической системы в области  $\Omega$ . Доказательство изложено в разделе 3.2.1.2.

### 3.2.1.1 Вспомогательные утверждения

**Утверждение 6.** Пусть  $\mathbf{n}$  – вектор нормали разделяющей среды кривой  $C$  в точке преломления  $(x_0, y_0)$ , а также пусть  $\mathbf{v}$  – вектор скорости до преломления. Считаем, что траектория бильярда в точке  $(x_0, y_0)$  переходит из среды с показателем преломления  $n_1$  в область с показателем  $n_2$ . Тогда если вектор  $\mathbf{v}$  не параллелен вектору  $\mathbf{n}$ , то для вектора  $\mathbf{w}$  после преломления справедливо выражение  $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{n}$ , где

$$\beta = \frac{\|\mathbf{w}\|\mu - \|\mathbf{v}\|\alpha}{\|\mathbf{n}\|} \cos \theta_1, \quad \alpha = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\|} \sqrt{\frac{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1}{1 - \cos^2 \theta_1}},$$

$\theta_1$  – угол, образованный векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$ ,  $\mu = \frac{n_1}{n_2}$ .

*Доказательство.* Из закона преломления (\*) следует  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{n}\| \cos \theta_2 = \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{n}\| \mu \cos \theta_1$ .

В то же время, из линейности скалярного произведения  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle + \beta \|\mathbf{n}\|^2 = \alpha \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\| \cos \theta_1 + \beta \|\mathbf{n}\|^2$ , следовательно,  $\beta = \frac{\|\mathbf{w}\|\mu - \|\mathbf{v}\|\alpha}{\|\mathbf{n}\|} \cos \theta_1$ .

Подставляя полученное значение  $\beta$  в равенство  $\|\mathbf{w}\|^2 = \|\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{n}\|^2 = \alpha^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta_1) + \mu^2 \|\mathbf{w}\|^2 \cos^2 \theta_1$ , получим нужную формулу для  $\alpha$ .  $\square$

**Замечание 5.** Эти формулы очевидным образом упрощаются для  $\|\mathbf{n}\| = 1$  и  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$ . В дальнейшем мы будем использовать эти формулы при  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$ , но  $\|\mathbf{n}\| \neq 1$ .

**Утверждение 7.** Если траектория подходит к границе раздела сред  $Q_{\lambda_0}$  под прямым углом (т.е. вектор скорости  $\mathbf{v}$  пропорционален вектору нормали  $\mathbf{n}$

квадрики  $Q_{\lambda_0}$  в точке преломления  $(x_0, y_0)$  и коэффициенты преломления не дают полное отражение (то есть  $n_1 \cos \theta_1 = n_1 \leq n_2$ ), то вектор скорости после преломления может быть определен предельным переходом:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} - \mu \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} &= \sqrt{\frac{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1}{1 - \cos^2 \theta_1}} \left( \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} - \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_1}} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 - 1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 - 1 \end{pmatrix} \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \\ &= \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1} \begin{pmatrix} -\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} & -1 \\ 1 & -\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \xrightarrow{\theta_1 \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - \mu^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}, \end{aligned}$$

что эквивалентно пункту 4 закона (\*).

**Утверждение 8.** Рассмотрим точку  $\mathbf{x} = (x, y) \in Q_{\lambda_0}$  и пару векторов скоростей  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  до и после преломления в точке  $\mathbf{x}$ , соответственно. Имеет место равенство

$$\frac{n_2 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{n_1 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Из определения функции  $J_{\lambda_0}$  следует равенство  $J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\| \cos \theta_1$ , а с учетом формул для коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  из утверждения 6 получаем

$$\begin{aligned} J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) &= \alpha J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \beta J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \alpha J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \frac{\beta}{2} \|\mathbf{n}\|^2 = \\ &= \alpha J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{n}\|^2 \frac{\|\mathbf{w}\| \mu - \|\mathbf{v}\| \alpha}{\|\mathbf{n}\|} \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\|} = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\|} \mu J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

где  $\mu = \frac{n_1}{n_2}$ . Следовательно,  $\frac{n_2 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{n_1 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|}$ .  $\square$

**Утверждение 9.** (i) При  $\theta_1 = 0$  и  $n_1 \leq n_2$  равенство (3.6) тоже выполняется  
(ii) Более того, величины  $J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  для «левой» и «правой» траекторий совпадают.

*Доказательство.* (i) Поскольку  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$ ,  $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|$ , то очевидно равенство

$$J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\| \cos \arccos \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1}{n_2} J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

(ii) В силу четности косинуса из определения  $J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  следует, что

$$\begin{aligned} J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, R(\theta_2)\mathbf{v}) &= -\frac{1}{2}\langle \mathbf{n}, R(\theta_2)\mathbf{v} \rangle = -\frac{1}{2}\|\mathbf{n}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta_2 = \\ &= -\frac{1}{2}\|\mathbf{n}\|\|\mathbf{v}\|\cos(-\theta_2) = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{n}, R(-\theta_2)\mathbf{v} \rangle = J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, R(-\theta_2)\mathbf{v}). \end{aligned}$$

□

### 3.2.1.2 Постоянная движения $\Xi$ (доказательство)

Вернемся к системе, описанной в разделе 3.2.1.

**Теорема 8.** *Функция  $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , определенная как в уравнении (3.5), является постоянной на траекториях для бильярда с законом преломления (\*).*

*Доказательство.* Очевидно, что функция  $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  является константой на каждом отрезке бильярдной траектории с преломлением, полностью лежащем в  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ . Легко сообразить, что в момент отражения функция  $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  также не меняет своего значения. Остается рассмотреть момент преломления. С геометрической точки зрения удобно воспользоваться функцией

$$J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\left(\frac{xv_x}{a^2 - \lambda_0} + \frac{yv_y}{b^2 - \lambda_0}\right) = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{v}, \nabla f_{\lambda_0}(x, y) \rangle,$$

определенной на дуге  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  квадрики  $Q_{\lambda_0}$ , заданной уравнением  $f_{\lambda_0}(x, y) = 1$ .

На дуге  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  имеет место равенство

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Рассмотрим траекторию бильярда в момент преломления. Для определенности предположим, что до преломления частица движется в среде с коэффициентом преломления  $n_1$  с вектором скорости  $\mathbf{v}$ , который меняется на вектор  $\mathbf{w}$  после перехода в среду с коэффициентом преломления  $n_2$ . При движении в обратном порядке эти два звена меняются местами, а нижеследующие утверждения по-прежнему справедливы.

Сначала рассмотрим каустику для области, коэффициент преломления которой равен  $n_1$ : пусть  $(x, y) \in Q_{\lambda_0}$  и прямая  $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$  касается квадрики с параметром  $\alpha_1$ .

Перепишем выражение для  $\Lambda$  (см. (3.1)) эквивалентным способом:

$$\alpha_1 = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{(a^2 - x^2)v_y^2 + (b^2 - y^2)v_x^2 + 2xyv_xv_y}{v_x^2 + v_y^2}. \quad (3.7)$$

Из условия  $(x, y) \in Q_{\lambda_0}$ , т.е. из равенства  $\frac{x^2}{a^2 - \lambda_0} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_0} = 1$ , используя соотношения (3.4), получаем:

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 - \lambda_0}{b^2 - \lambda_0}y^2 + \lambda_0 \quad \text{и} \quad b^2 - y^2 = \frac{b^2 - \lambda_0}{a^2 - \lambda_0}x^2 + \lambda_0.$$

Подставим эти выражения в формулу (3.7) для  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\frac{a^2 - \lambda_0}{b^2 - \lambda_0}y^2v_y^2 + \lambda_0v_y^2 + \frac{b^2 - \lambda_0}{a^2 - \lambda_0}x^2v_x^2 + \lambda_0v_x^2 + 2xyv_xv_y}{v_x^2 + v_y^2} = \\ &= \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{\left(\frac{xv_x}{a^2 - \lambda_0} + \frac{yv_y}{b^2 - \lambda_0}\right)^2}{v_x^2 + v_y^2} = \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}. \end{aligned}$$

Повторяя те же рассуждения для преломленного луча  $\mathbf{w}$ , для параметра каустики  $\alpha_2 = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  имеем

$$\alpha_2 = \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^2}{\|\mathbf{w}\|^2} = \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2. \quad (3.8)$$

В результате из равенств (3.7) и (3.8) следует, что  $\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \lambda_0 = (\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - \lambda_0) \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$ .  $\square$

### 3.3 Общий случай

Утверждение теоремы 8 для  $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  оказывается верным в значительно более общей ситуации.

**Теорема 9** ([31]). *Пусть внутренность эллипса разбита попарно непересекающимися дугами софокусных квадрик на области  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ . Перенумеруем области так, чтобы общие границы имели только области с соседними номерами. Пусть  $\lambda_j$  — параметр софокусной квадрики, разделяющей  $\Omega_j$  и  $\Omega_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ . Здесь и далее показатель преломления для области  $\Omega_j$  обозначается через  $n_j$ .*

Определим функцию  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  по формуле:

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1; \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq k. \end{cases}$$

Функция  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  является константой на траекториях бильярда с косинусным законом преломления (\*).

*Доказательство.* Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 8.  $\square$

Два возможных варианта таких разбиений показаны на рис. 3.4 и 3.5. Таким образом, возникает следующая важная естественная задача.

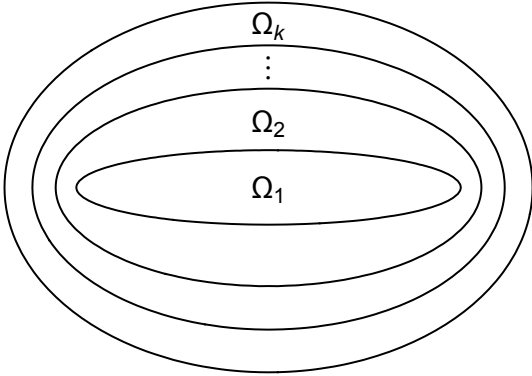


Рисунок 3.4 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ .

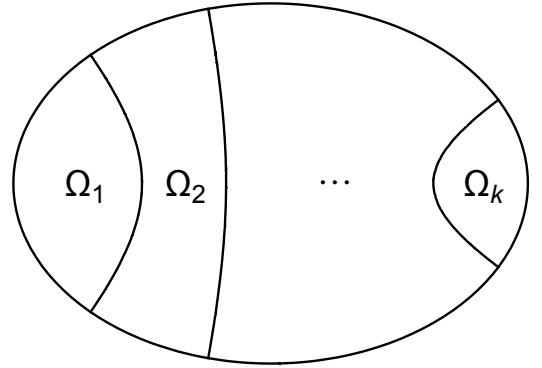


Рисунок 3.5 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ .

**Задача А:** описать слоение изоэнергетического многообразия на поверхности уровня первого интеграла  $\Xi$  для случаев, показанных на рис. 3.4 и 3.5.

В работе подробно рассматривается случай двух областей, разделенных одним софокусным эллипсом (см. рис. 3.4 при  $k = 2$ ). Динамика этой системы и перестройки поверхностей постоянного значения интеграла  $\Xi$  уже в этом случае очень нетривиальны.

Случай, когда область  $\Omega$  разбивается на подобласти дугами *пересекающихся* софокусных квадратик, оказываются гораздо сложнее. В частности, дополнительный интеграл принимает значения не в  $\mathbb{R}$ , а в фактор-группе  $\mathbb{R}$  по аддитивной подгруппе, допускающей явное описание.

*Случай 1: одна точка пересечения.*

Предположим, что внутренность эллипса разделена на области дугами софокусных квадратик таким образом, что имеются всего одна точка их пересечения, которую обозначим  $A$ . Занумеруем области против часовой стрелки  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  (см. рис. 3.6). Пусть общая часть границы  $\Omega_1 \cup \Omega_4$  и  $\Omega_2 \cup \Omega_3$  — дуга софокусной квадратки с параметром  $\lambda_1$ , а общая часть границы  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  и  $\Omega_3 \cup \Omega_4$  — дуга софокусной квадратки с параметром  $\lambda_2$  (см. рис. 3.6).

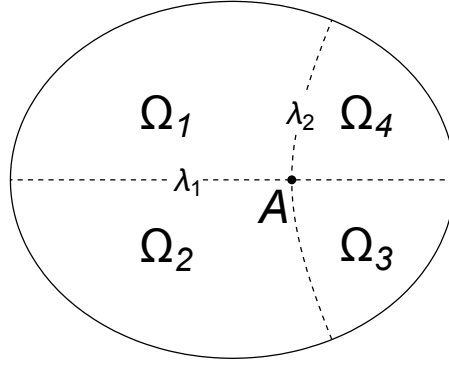


Рисунок 3.6 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_4$ .

Введем коэффициент  $\gamma_A$  в точке  $A$ , имеющий смысл коэффициента ветвления, по формуле

$$\gamma_A = \lambda_1(n_1^2 - n_2^2) + \lambda_2(n_2^2 - n_3^2) + \lambda_1(n_3^2 - n_4^2) + \lambda_2(n_4^2 - n_1^2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2).$$

Определим вспомогательную функцию  $\tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y)$

$$\tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{\sigma(j)}(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq 4, \end{cases}$$

где  $\sigma(j)$  – номер квадрики, разделяющей  $\Omega_j$  и  $\Omega_{j+1}$ . Неформально говоря, она почти подходит на роль дополнительного интеграла, но имеет разрыв на дуге, разделяющей области  $\Omega_1$  и  $\Omega_4$ . Можно проверить, что на любой бильярдной траектории, пересекающей эту дугу, функция  $\tilde{\Xi}$  испытывает один и тот же скачок, равный  $\pm\gamma_A$ . Поэтому мы определим *первый интеграл*  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  со значениями в  $S^1 = \mathbb{R}/\gamma_A\mathbb{Z}$  по формуле

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y) \pmod{\gamma_A}.$$

Эта величина на траекториях бильярда сохраняется.

Если границы раздела областей пересекаются по двум и более точкам, то имеет место общая закономерность:

*Для каждой точки пересечения  $A_i, i = 1, \dots, t$ , определен коэффициент  $\gamma_{A_i}$ . Дополнительный интеграл  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  принимает значения в  $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z})$ . Если  $\gamma_{A_i}$  соизмеримы, т. е. всевозможные дроби  $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}} -$*

рациональные числа (или бесконечность), то  $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}) = S^1$ . Если же среди  $\gamma_{A_i}$  есть пара с иррациональным отношением  $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}}$ , то подгруппа  $\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}$  всюду плотна в  $\mathbb{R}$ . В этом случае дополнительный интеграл  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  корректно определен, но использовать его для топологического анализа структуры траекторий представляется весьма затруднительным.

*Случай 2: две точки пересечения.* Рассмотрим области, изображенные

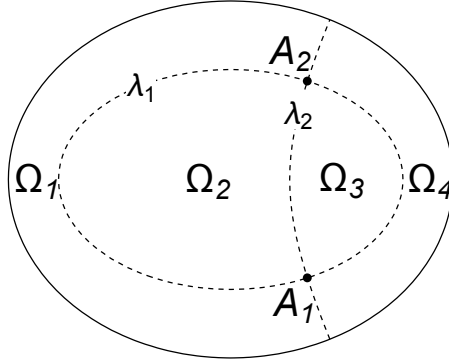


Рисунок 3.7 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_4$ .

на рис. 3.7. Легко вычислить коэффициенты  $\gamma_{A_1}$  и  $\gamma_{A_2}$  в точках  $A_1, A_2$  (т.е. скачки дополнительного интеграла при обходе против часовой стрелки вокруг соответствующей точки):

$$\begin{aligned}\gamma_{A_1} &= \lambda_2(n_1^2 - n_4^2) + \lambda_1(n_4^2 - n_3^2) + \lambda_2(n_3^2 - n_2^2) + \lambda_1(n_2^2 - n_4^2), \\ \gamma_{A_2} &= \lambda_1(n_1^2 - n_2^2) + \lambda_2(n_2^2 - n_3^2) + \lambda_1(n_3^2 - n_4^2) + \lambda_2(n_4^2 - n_1^2).\end{aligned}$$

Как видно, в этом случае

$$\gamma_{A_1} = -\gamma_{A_2}.$$

Поэтому дополнительный интеграл  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$ , сохраняющийся на траекториях бильярда, может быть задан по модулю  $\gamma_{A_1}$  формулой  $\Xi = \tilde{\Xi} \bmod \gamma_{A_1}$ , где

$$\tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{\sigma(j)}(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq 4, \end{cases}$$

где  $\sigma(j)$  – номер квадрики, разделяющей  $\Omega_j$  и  $\Omega_{j+1}$ .

*Случай 3: две точки пересечения.* Рассмотрим области, изображенные на рис. 3.8.

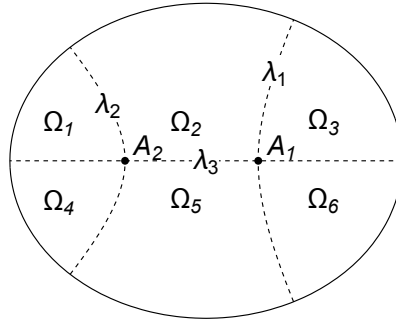


Рисунок 3.8 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_6$ .

Легко видеть, что коэффициенты  $\gamma_{A_1}, \gamma_{A_2}$  в точках  $A_1, A_2$ , соответственно, задаются формулами:

$$\begin{aligned}\gamma_{A_1} &= (\lambda_3 - \lambda_1)(n_2^2 - n_5^2 + n_6^2 - n_3^2), \\ \gamma_{A_2} &= (\lambda_3 - \lambda_2)(n_1^2 - n_4^2 + n_5^2 - n_2^2).\end{aligned}$$

В зависимости от значений параметров отношение  $\frac{\gamma_{A_1}}{\gamma_{A_2}}$  может быть как рациональным, так и иррациональным.

Роль коэффициента  $\gamma_A$  проявляется в следующей задаче, которую мы решим в рамках настоящей работы.

**Задача Б.** Рассмотрим в качестве бильярдной области  $\Omega$  «прямоугольник», образованный дугами концентрических окружностей  $BC, AD$  и отрезками вертикально проведенного диаметра  $AB$  и  $CD$ . (см. рис. 3.9). Область  $\Omega$  разбивается на две части дугой  $EF$  концентрической окружности и отрезком  $FG$  горизонтально проведенного диаметра. Нумерация областей показана на рис. 3.9.

Требуется описать как изоэнергетическое многообразие расслаивается на поверхности уровня первого интеграла  $\Xi$ .

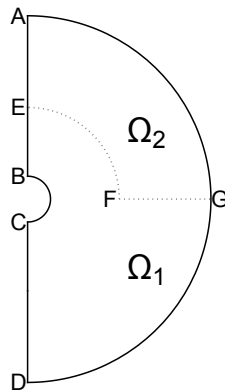


Рисунок 3.9 — Взаимное расположение областей  $\Omega_1, \Omega_2$ .

## Глава 4. Задача А

### 4.1 Постановка задачи

Пусть задан эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где  $a > b > 0$ . Он ограничивает область  $\Omega$ . Область  $\Omega$  разбивается некоторым софокусным эллипсом  $Q_{\lambda_1}$ , где  $0 < \lambda_1 < b^2$ , на две части: эллипс  $\Omega_{in}$  и кольцо  $\Omega_{out}$ , см. рис. 4.1. Зафиксируем показатели преломления  $n_{out}$  для кольца  $\Omega_{out}$  и  $n_{in}$  для  $\Omega_{in}$ .

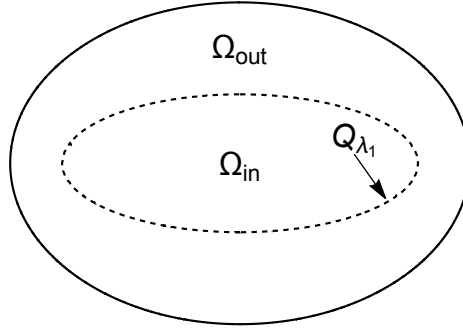


Рисунок 4.1 — Область  $\Omega$  для задачи А.

В области  $\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{out}$  рассмотрим бильярдную систему, подчиняющуюся закону (\*). В работе [31] показано, что для любой бильярдной траектории ее отрезки, лежащие в области  $\Omega_{in}$ , касаются одной и той же софокусной квадрики с параметром  $\alpha_{in} \in (\lambda_1, a^2)$ , а ее отрезки, лежащие в  $\Omega_{out}$  — вообще говоря, другой квадрики с параметром  $\alpha_{out} \in (0, a^2)$ . При этом параметры  $\alpha_{in}$  и  $\alpha_{out}$  связаны соотношением  $(\alpha_{out} - \lambda_1)n_{out}^2 = (\alpha_{in} - \lambda_1)n_{in}^2$ .

Введем функцию  $\Lambda$  положения и скорости материальной точки по формуле  $\Lambda(x, y, v_x, v_y) = \frac{a^2 v_y^2 + b^2 v_x^2 - (x v_y - y v_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}$ . Она имеет смысл коэффициента  $\alpha$  софокусной квадрики  $Q_\alpha$ , которая касается прямой, проходящей через точку  $(x, y)$  в направлении вектора  $(v_x, v_y)$ . Для классического бильярда в эллипсе эта величина является первым интегралом, не зависящим от полной энергии.

Введем функцию  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  по формуле:

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_{in}^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_{in} \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_{out}^2 + \lambda_1(n_{in}^2 - n_{out}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_{out}. \end{cases}$$

Она принимает одно и то же значение на любых отрезках траекторий, лежащих как в  $\Omega_{in}$  так и в  $\Omega_{out}$ . Этот факт следует из равенства  $(\alpha_{out} - \lambda_1)n_{out}^2 = (\alpha_{in} - \lambda_1)n_{in}^2$  (см. [31]).

Задача состоит в том, чтобы для указанной динамической системы описать слоение изоэнергетического трехмерного многообразия на поверхности уровня первого интеграла  $\Xi$ .

Рассмотрим плоскость  $\mathbb{R}^2$  и отложим по горизонтальной оси величину  $\alpha_{in}$  и  $\alpha_{out}$  – по вертикальной оси. Значению интеграла  $\Xi$  поставим в соответствие точку плоскости по формуле

$$\Xi \mapsto \alpha(\Xi) = (\alpha_{in}, \alpha_{out}) = \left( \frac{\Xi}{n_{in}^2}, \frac{\Xi - \lambda_1(n_{in}^2 - n_{out}^2)}{n_{out}^2} \right) = (\Lambda|_{\Omega_{in}}, \Lambda|_{\Omega_{out}}). \quad (4.1)$$

Для фиксированных  $\lambda_1, n_{in}, n_{out}$  точка  $\alpha(\Xi)$  лежит на прямой  $L$ , которая в декартовых координатах  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  задается уравнением

$$\alpha_{out} = \alpha_{in} \left( \frac{n_{in}}{n_{out}} \right)^2 + \lambda_1 \frac{n_{out}^2 - n_{in}^2}{n_{out}^2}. \quad (4.2)$$

Отметим, что прямая  $L$  проходит через точку  $(\lambda_1, \lambda_1)$  и имеет угловой коэффициент наклона, равный  $\frac{n_{in}^2}{n_{out}^2}$ . Наглядно можно представлять себе, что возможные случаи соотношений между числами  $\lambda_1, n_{in}, n_{out}$  соответствуют всевозможным прямым, проходящим через точку  $(\lambda_1, \lambda_1)$  и образующим угол с горизонтальной осью, который меняется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ .

Мы введем структурную диаграмму критических значений первого интеграла  $\Xi$ . Бильярдные траектории могут иметь один из следующих типов, см. рис. 4.2.

*D1* : Сначала рассмотрим траекторию, которая заходит в каждую из областей  $\Omega_{in}$  и  $\Omega_{out}$ . Будем обозначать через  $\alpha_{in}$  и  $\alpha_{out}$  параметры квадратик, которых касаются отрезки траектории бильярда, находящиеся в областях  $\Omega_{in}$  и  $\Omega_{out}$ , соответственно. В этом случае  $\alpha_{in} \in (\lambda_1, a^2)$ ,  $\alpha_{out} \in (\lambda_1, a^2)$ .

*D2* : Возможна траектория, целиком находящаяся в области  $\Omega_{out}$  и имеющая каустикой эллипс. В этом случае параметр  $\alpha_{in}$  не определен, а  $\alpha_{out}$  лежит в интервале  $\alpha_{out} \in (0, \lambda_1)$ .

*D3* : В случае, если траектория целиком содержится в  $\Omega_{in}$ , параметр  $\alpha_{out}$  не определен. При этом если траектория имеет каустикой эллипс, то  $\alpha_{in}$  лежит в интервале  $(\lambda_1, b^2)$ , а если гиперболу — в интервале  $(b^2, a^2)$ . Такие траектории испытывают полное внутреннее отражение на границе областей  $\Omega_{in}, \Omega_{out}$  и возникают при определенных соотношениях между параметрами  $n_{in}, n_{out}$ .

*D4* : Для траекторий, целиком находящихся в области  $\Omega_{out}$  и имеющих каустикой гиперболу, параметр  $\alpha_{in}$  также не определен, а  $\alpha_{out}$  лежит в интервале

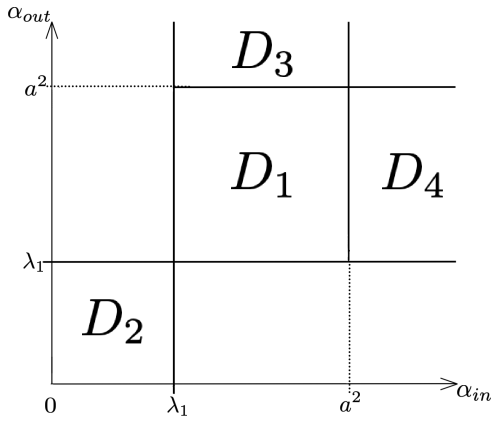


Рисунок 4.2 — Области возможного движения бильярдной траектории.

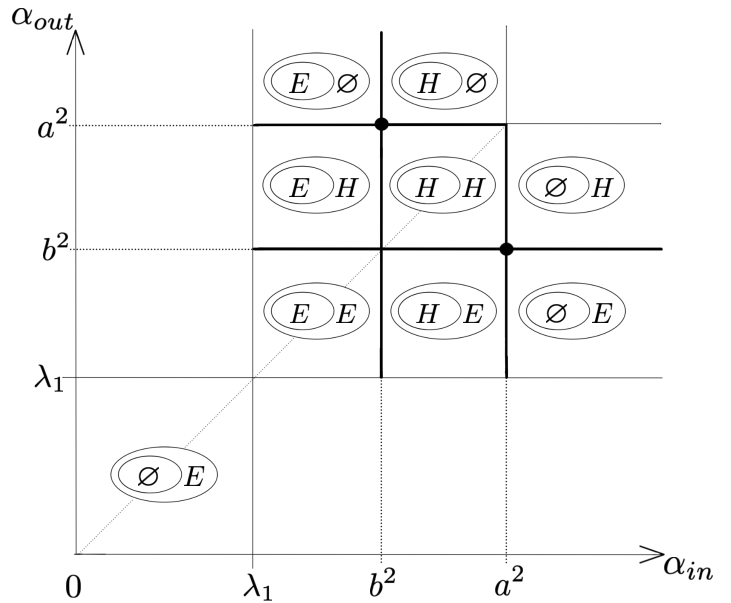


Рисунок 4.3 — Возможные типы каустик в  $\Omega_{in}$  и  $\Omega_{out}$ . Жирным выделены особые значения для  $\alpha_{in}$ ,  $\alpha_{out}$ . См. также замечание 6.

( $b^2, a^2$ ). Такие траектории также испытывают полное внутреннее отражение на границе областей  $\Omega_{in}, \Omega_{out}$  и возникают при определенных соотношениях между параметрами  $n_{in}, n_{out}$ .

Анализ слоения на поверхности уровня интеграла  $\Xi$  проходит по следующей схеме. Сначала фиксируются параметры  $\lambda_1, n_{in}, n_{out}$ . Они определяют прямую  $L$ , при этом значение интеграла  $\Xi$  однозначно определяет точку на этой прямой. Структура слоения определяется тем, как прямая  $L$  пересекает области  $D_1, D_2, D_3, D_4$ . Пересечение прямой  $L$  с областью  $D_1$  определяет значения  $\Xi$ , при которых имеет место движение типа  $D_1$ ; определены оба параметра  $\alpha_{in}, \alpha_{out}$ . Пересечение этой прямой с областью  $D_2$  определяет движение типа  $D_2$ , и при этом параметр  $\alpha_{in}$  не имеет смысла; для  $D_3$  аналогично. Пересечение прямой с областью  $D_4$  определяет движение типа  $D_4$ , в этом случае не определен параметр  $\alpha_{out}$ .

При этом нерегулярные значения интеграла  $\Xi$  соответствуют точкам пересечения прямой  $L$  с координатными линиями  $\alpha_{in}, \alpha_{out} = b^2, a^2$ , изображенным жирными линиями на рис. 4.3. Особый интерес вызывают случаи, когда  $L$  проходит через точку  $(\alpha_{in}, \alpha_{out}) = (a^2, b^2)$  или точку  $(\alpha_{in}, \alpha_{out}) = (b^2, a^2)$ .

**Замечание 6.** В случае, когда совпадают коэффициенты  $n_{in}$  и  $n_{out}$ , траектории проходят из  $\Omega_{in}$  в  $\Omega_{out}$  и обратно без преломления, тем самым мы

получаем динамику классического бильярда в эллипсе. Этому соответствует прямая  $L$ , проходящая по пунктирной диагонали на рис. 4.3.

На рис. 4.3 схематично показаны типы каустик в областях  $\Omega_{in}$  и  $\Omega_{out}$ :  $H$  означает, что каустика является гиперболой,  $E$  соответствует эллипсу, а  $\emptyset$  означает, что траектория не заходит внутрь соответствующей области.

Параметры  $\alpha_{in}$ ,  $\alpha_{out}$  имеют критические значения  $b^2$ ,  $a^2$ . Соответствующие вертикальные и горизонтальные прямые, а также диагональ  $\alpha_{in} = \alpha_{out}$ , разбивают области  $D_1, \dots, D_4$  на подобласти, показанные на рис. 4.4. Формально эти подобласти определены в теореме 10.

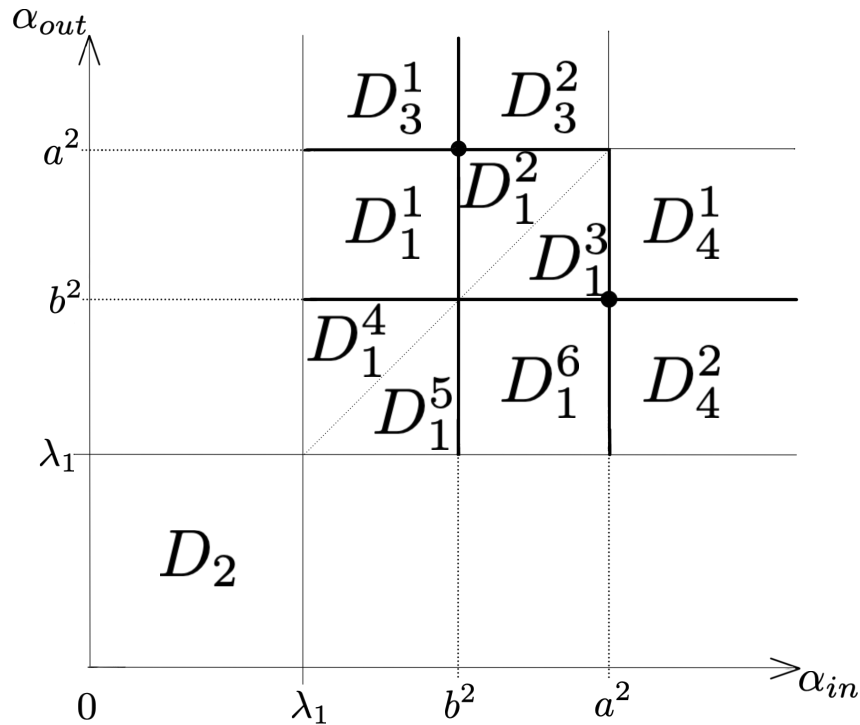


Рисунок 4.4 — Подразбиение областей  $D_1, \dots, D_4$ .

## 4.2 Поверхности уровня для регулярных значений интеграла $\Xi$

**Теорема 10.** *Областям  $D_i^j$  в плоскости  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  соответствуют следующие поверхности  $\Xi = \text{const}$*

**Замечание 7.** *При этом в случаях  $D_1^1$ ,  $D_1^2$ ,  $D_1^3$  и  $D_1^6$  на изоинтегральной поверхности имеется 4 прокола, подробности см. ниже.*

$D_1^1$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (b^2, a^2)$	сфера с 5 ручками;
$D_1^2$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (\alpha_{in}, a^2)$	сфера с 5 ручками;
$D_1^3$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (b^2, \alpha_{in})$	сфера с 5 ручками;
$D_1^4$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (\alpha_{in}, b^2)$	2 дизъюнктивных тора;
$D_1^5$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (\lambda_1, \alpha_{in})$	2 дизъюнктивных тора;
$D_1^6$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (\lambda_1, b^2)$	сфера с 5 ручками;
$D_2$	$(\alpha_{out} \in (0, \lambda_1), \alpha_{in} < \lambda_1)$ или $(\alpha_{in} \in (0, \lambda_1), \alpha_{out} < \lambda_1)$	2 дизъюнктивных тора;
$D_3^1$	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} > a^2$	2 дизъюнктивных тора;
$D_3^2$	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} > a^2$	1 тор;
$D_4^1$	$\alpha_{in} > a^2, \alpha_{out} \in (b^2, a^2)$	2 дизъюнктивных тора;
$D_4^2$	$\alpha_{in} > a^2, \alpha_{out} \in (\lambda_1, b^2)$	2 дизъюнктивных тора;

*Доказательство. Случай  $D_1^4, D_1^5$ .* Продолжения звеньев траектории, лежащих в  $\Omega_{out}$ , касаются каустики с параметром  $\alpha_{out}$ , а звенья траектории в области  $\Omega_{in}$  касаются каустики с параметром  $\alpha_{in}$ . При этом оба параметра  $\alpha_{in}, \alpha_{out}$  находятся в интервале  $(\lambda_1, b^2)$ , то есть обе каустики являются эллипсами.

Спроектируем точку траектории  $(x, y, v_x, v_y)$  на бильярдную область:

$$\pi : (x, y, v_x, v_y) \mapsto (x, y).$$

Рассмотрим всевозможные траектории с фиксированным значением  $\Xi$ , относящимся к случаям  $D_1^4, D_1^5$ . Тогда проекция  $(x, y) \in \Omega_{out}$  замечает всю область  $\Omega_{out}$ , а проекция  $(x, y) \in \Omega_{in}$  замечает кольцо  $\tilde{\Omega}_{in} = \Omega_{in} \setminus \text{int}(\Omega_{\alpha_{in}})$ , где  $\Omega_{\alpha_{in}}$  — это область, ограниченная квадрикой  $Q_{\alpha_{in}}$ .

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  склеена из нескольких копий  $\tilde{\Omega}_{in}$  и  $\Omega_{out}$ .

Во всех внутренних точках  $\tilde{\Omega}_{in}$  и  $\Omega_{out}$  проекция  $(x, y, v_x, v_y) \mapsto (x, y)$  четырехлистная. В прообразе этой проекции на поверхности  $\Xi = \text{const}$  выберем по 4 прообраза для областей  $\Omega_{out}$  и  $\tilde{\Omega}_{in}$ , обозначим эти прообразы  $\Omega_{out,j}$  и  $\Omega_{in,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , где нумерация определена по следующему правилу:

- 1 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен по часовой стрелке к эллипсу  $Q_\alpha$ ,
  - 2 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен против часовой стрелки к эллипсу  $Q_\alpha$ ,
  - 3 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен против часовой стрелки от эллипса  $Q_\alpha$ ,
  - 4 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен по часовой стрелке от эллипса  $Q_\alpha$ ,
- (4.3)

где  $\alpha$  — параметр каустики, т.е.  $\alpha = \alpha_{out}$  для  $(x, y) \in \Omega_{out}$  и  $\alpha = \alpha_{in}$  для  $(x, y) \in \tilde{\Omega}_{in}$ .

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  в рассматриваемом случае склеена из 8 эллиптических колец  $\Omega_{out,j}, \Omega_{in,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Проследим правила склейки:

- $\Omega_{out,j}$  и  $\Omega_{in,j}$  отождествляются по общей границе, которая проектируется в  $Q_{\lambda_1}$ , поскольку правила (\*) сохраняют номер в случае, когда обе каустики являются эллипсами. Получим 4 области, которые обозначим как  $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3, \tilde{\Omega}_4$ , где  $\tilde{\Omega}_j = \Omega_{out,j} \cup \tilde{\Omega}_{in,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

- На внешней границе  $\tilde{\Omega}_1$  приклеивается к  $\tilde{\Omega}_4$ , а  $\tilde{\Omega}_2$  к  $\tilde{\Omega}_3$  в силу стандартного закона отражения.

- На внутренней границе  $\tilde{\Omega}_1$  подклеивается к  $\tilde{\Omega}_4$ , а  $\tilde{\Omega}_2$  подклеивается к  $\tilde{\Omega}_3$  в силу смены номера листа после касания звеном траектории каустики  $Q_{\alpha_{in}}$ .

Таким образом, для случая  $D_1^4, D_1^5$  поверхности уровня интеграла  $\Xi$  являются несвязным объединением двух торов.

**Случай  $D_2$ .** Траектория целиком содержится в  $\Omega_{out}$ . Точки проекции  $(x, y)$  замечают  $\tilde{\Omega} = \Omega_{out} \setminus \Omega_{\alpha_{out}}$ , при этом проекция четырехлистная, как и в предыдущем случае. Четыре прообраза  $\tilde{\Omega}$  нумеруются по правилам, указанным в предыдущем случае. Внешние и внутренние границы  $\tilde{\Omega}_1$  подклеиваются к соответствующим границам  $\tilde{\Omega}_4$ , аналогично для  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатом склейки являются два дизъюнктивных тора.

**Случай  $D_4^2$ .** Все звенья траектории содержатся в  $\Omega_{out}$ . Траектория отражается от обеих границ эллиптического кольца  $\Omega_{out}$ . Рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, показывают, что в этом случае поверхностью уровня  $\Xi = \text{const}$  являются два дизъюнктивных тора.

**Случай  $D_3^1$ .** аналогичен случаю  $D_4^2$  с той лишь разницей, что траектория целиком содержится в  $\Omega_{in}$ . Более точно, в кольце между эллипсами  $Q_{\lambda_1}$  и  $Q_{\alpha_{in}}$ . Поверхностью уровня снова служат два тора.

**Случай  $D_3^2$ .** Траектория целиком содержится в  $\Omega_{in}$ , при этом касается ветвей гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$  и отражается от внешней границы эллипса  $\Omega_{in}$ .

По аналогии с предыдущими случаями определим  $\tilde{\Omega}$  как часть внутренней области  $\Omega_{in}$ , лежащую между ветвей гиперболы  $Q_{\alpha_{in}}$  (см. рис. 4.5). При проекции  $\pi$  прообразом области  $\tilde{\Omega}$  служат 4 листа  $\tilde{\Omega}_j, j = 1, \dots, 4$ . Нумерацию

листов см. рис. 4.6. Сплошным изображены те векторы  $(v_x, v_y)$  которые направлены в сторону точки касания звена траектории с каустикой.

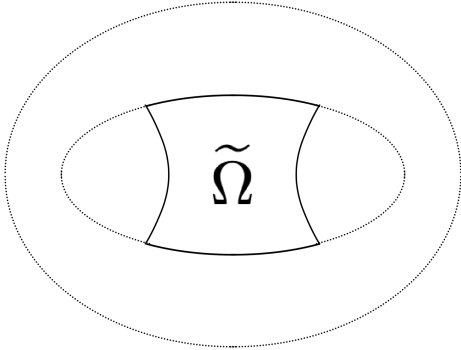


Рисунок 4.5 — Результирующая область  $\tilde{\Omega}$  для случая  $D_3^2$ .

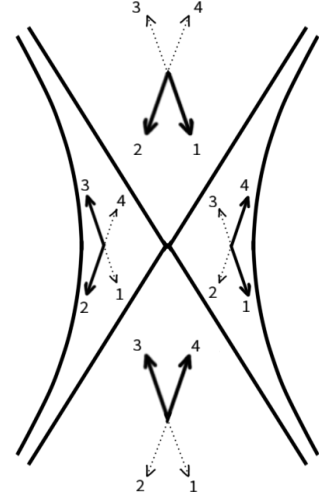


Рисунок 4.6 — Направления векторов скорости  $v_i$

Граничные эллиптические дуги области  $\tilde{\Omega}_1$  склеиваются с одноименными эллиптическими дугами области  $\tilde{\Omega}_4$ , аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3$ . Эти склейки дают нам две трубки. Обе граничные гиперболы области  $\tilde{\Omega}_1$  отождествляются с соответствующими граничными гиперболами области  $\tilde{\Omega}_2$ , аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ . Результатом склейки является один тор.

**Случай  $D_4^1$ .** В этом случае проекция точки  $(x, y, v_x, v_y)$ , лежащей на поверхности  $\Xi = \text{const}$  при проекции  $\pi$  замечает несвязную область, которая получается пересечением эллиптического кольца, ограниченного эллипсами  $Q_{\lambda_1}$  и  $Q_0$ , и областью, содержащейся между ветвями гиперболы с параметром  $\alpha_{out}$  (см. рис. 4.7).

Ясно, что определенная таким образом  $\tilde{\Omega}$  имеет две компоненты связности. Прообраз  $\tilde{\Omega}$  — четыре листа  $\tilde{\Omega}_j, j = 1, \dots, 4$ , где нумерация листов определена в соответствии с рис. 4.6. Каждый лист  $\tilde{\Omega}_j$  является дизъюнктивным объединением связных листов  $\tilde{\Omega}_j^u \sqcup \tilde{\Omega}_j^d$  (см. рис. 4.7). Рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущего пункта, показывают, что для  $i = 1, \dots, 4$  области  $\tilde{\Omega}_i^u$  склеиваются в один тор, а области  $\tilde{\Omega}_i^d$  — в другой тор.

**Случай  $D_1^2, D_1^3$ .** Оба случая разбираются по одной схеме.

Звенья и продолжения звеньев траектории, лежащие в  $\Omega_{out}$ , касаются гиперболы с параметром  $\alpha_{out}$ . Лежащие в  $\Omega_{in}$  звенья и их продолжения касаются гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$ .

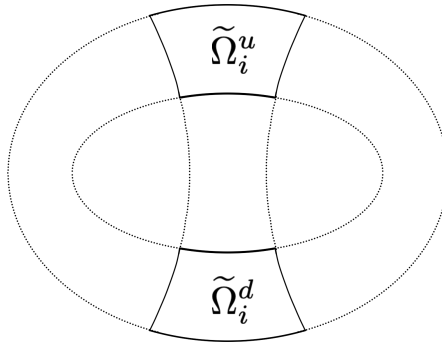


Рисунок 4.7 — Лист склейки  $\tilde{\Omega}_i$  для случая  $D_4^1$  состоит из двух областей.

Определим область  $\tilde{\Omega}_{in}$  как часть внутреннего эллипса  $\Omega_{in}$ , находящуюся между ветвей гиперболы  $Q_{\alpha_{in}}$ . Положим  $\tilde{\Omega}_{out}$  — пересечение эллиптического кольца  $\Omega_{out}$  с областью, лежащей между ветвями гиперболы с параметром  $\alpha_{out}$ ;  $\tilde{\Omega}_{out}$  имеет две компоненты связности.

Проекция бильярдной траектории в эллиптической области замечает  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{in} \cup \tilde{\Omega}_{out}$  (см. рис. 4.8). Относительно проекции  $\pi$  прообраз  $\tilde{\Omega}$  состоит из 4 листов  $\tilde{\Omega}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Нумерацию листов снова сделаем в соответствии с рис. 4.6.

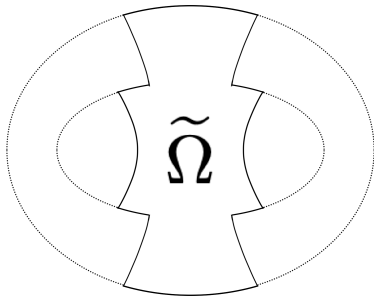


Рисунок 4.8 — Область  $\tilde{\Omega}$  для случая  $D_1^2$ .

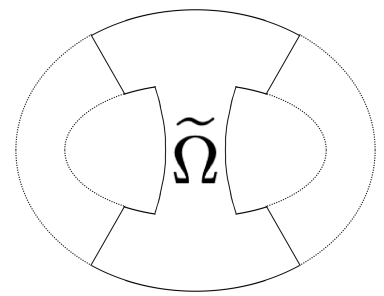


Рисунок 4.9 — Область  $\tilde{\Omega}$  для случая  $D_1^3$ .

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  склеена из  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$ . Шесть граничных эллиптических дуг области  $\tilde{\Omega}_1$  склеиваются с соответствующими граничными эллиптическими дугами области  $\tilde{\Omega}_4$ . Аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатом этих склеек являются две сферы с шестью дырками каждая. Каждая дырка ограничивается двумя дугами, проектирующимися в одну граничную гиперболическую дугу области  $\tilde{\Omega}$ .

Остается отождествить края этих дырок. Для этого заметим, что граничные гиперболические дуги области  $\tilde{\Omega}_1$  отождествляются с соответствующими граничными гиперболами области  $\tilde{\Omega}_2$ , аналогичное справедливо для областей  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ . Результатом этих склеек является сфера с пятью ручками.

Отметим, что траектория, попадающая в точку листа, соответствующую вершине с внутренним углом  $3\pi/2$ , не продолжается далее. Тем самым, поверхность имеет проколы, соответствующие точкам склеиваемых листов — вершинам с внутренним углом величиной  $3\pi/2$ . Таких точек на поверхности четыре.

**Случай  $D_1^1$ .** Звенья траектории бильярда, лежащие в области  $\Omega_{out}$ , лежат на касательных к гиперболе с параметром  $\alpha_{out}$ , в то время как сегменты траектории, находящиеся в области  $\Omega_{in}$ , касаются эллипса с параметром  $\alpha_{in}$ .

Определим область  $\tilde{\Omega}_{in} = \Omega_{in} \setminus \Omega_{\alpha_{in}}$  (эллиптическое кольцо), а область  $\tilde{\Omega}_{out}$  определим как пересечение эллиптического кольца  $\Omega_{out}$  с областью, лежащей между ветвями гиперболы с параметром  $\alpha_{out}$ ;  $\tilde{\Omega}_{out}$  имеет две компоненты связности (см. предыдущий случай):  $\tilde{\Omega}_{out} = \tilde{\Omega}_{out}^u \sqcup \tilde{\Omega}_{out}^d$ .

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  склеена из областей  $\tilde{\Omega}_{in,j}, \tilde{\Omega}_{out,j}^u, \tilde{\Omega}_{out,j}^d, j = 1, \dots, 4$ . Здесь листы  $\tilde{\Omega}_{out,j}^u, \tilde{\Omega}_{out,j}^d$  занумерованы в соответствии с рис. 4.6. Листы  $\tilde{\Omega}_{in,j}$  занумерованы в соответствии с правилом (4.3).

Области  $\tilde{\Omega}_{out,j}^u$  и  $\tilde{\Omega}_{in,j}$  отождествляются по общей граничной дуге, которую проекция  $\pi$  отображает в дугу  $\partial\tilde{\Omega}_{out}^u \cap \partial\tilde{\Omega}_{in}$ . В симметрично расположенную дугу эллипса в нижней полуплоскости проекция  $\pi$  отображает граничные дуги, на которых отождествляются следующие пары областей:  $\tilde{\Omega}_{out,1}^d$  с  $\tilde{\Omega}_{in,3}$ ,  $\tilde{\Omega}_{out,3}^d$  с  $\tilde{\Omega}_{in,1}$ ,  $\tilde{\Omega}_{out,2}^d$  с  $\tilde{\Omega}_{in,4}$  и  $\tilde{\Omega}_{out,4}^d$  с  $\tilde{\Omega}_{in,2}$ .

Таким образом, поверхность  $\Xi = \text{const}$  склеена из четырех листов:  $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_{out,1}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,1} \cup \tilde{\Omega}_{out,3}^d$ ,  $\tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_{out,2}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,2} \cup \tilde{\Omega}_{out,4}^d$ ,  $\tilde{\Omega}_3 = \tilde{\Omega}_{out,3}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,3} \cup \tilde{\Omega}_{out,1}^d$  и  $\tilde{\Omega}_4 = \tilde{\Omega}_{out,4}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,4} \cup \tilde{\Omega}_{out,2}^d$  (лист  $\tilde{\Omega}_1$  показан на рис. 4.10).

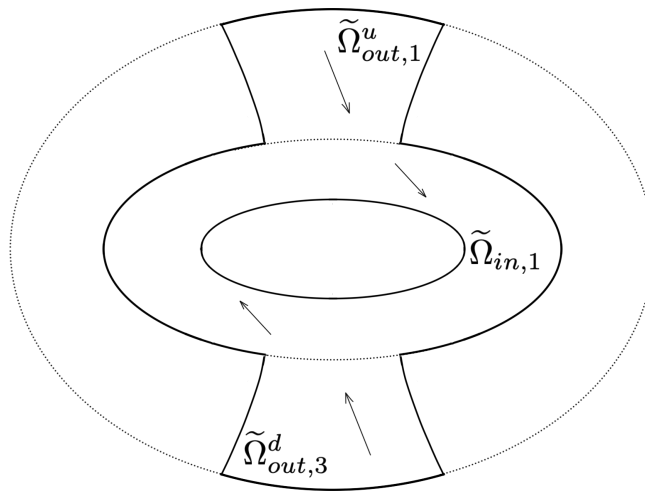


Рисунок 4.10 — Лист склейки  $\tilde{\Omega}_1$ .

Граничные эллиптические дуги области  $\tilde{\Omega}_1$  склеиваются с соответствующими эллиптическими дугами области  $\tilde{\Omega}_4$ , аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатом этих склеек являются два тора с четырьмя дырками каждый. Каждая дырка ограничивается двумя дугами, проектирующимися в одну граничную гиперболическую дугу области  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{in} \cup \tilde{\Omega}_{out}$ .

Остается отождествить края этих дырок. Для этого заметим, что граничные гиперболические дуги области  $\tilde{\Omega}_1$  отождествляются с одноименными граничными гиперболами области  $\tilde{\Omega}_2$ , аналогичное справедливо для областей  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ . Результатом этих склеек является сфера с пятью ручками.

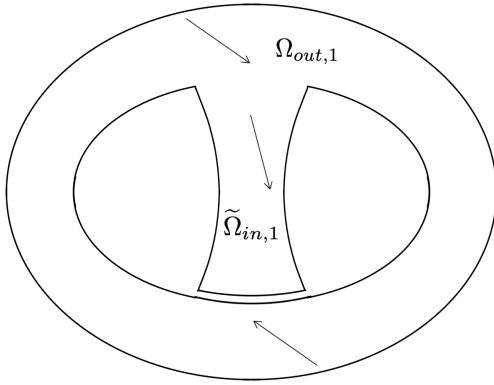
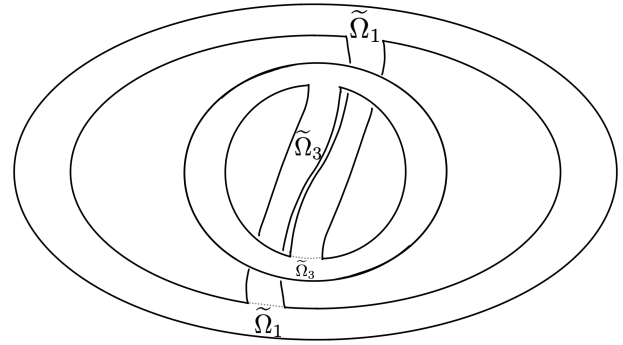
Как и ранее, траектория, попадающая в точку листа, соответствующую вершине с внутренним углом  $3\pi/2$ , не продолжается далее. Тем самым, поверхность имеет проколы, соответствующие точкам склеиваемых листов — вершинам с внутренним углом величиной  $3\pi/2$ . Таких точек на поверхности четыре.

**Случай  $D_1^6$ .** Продолжения звеньев бильярдной траектории, лежащие в  $\Omega_{out}$ , касаются эллипса с параметром  $\alpha_{out}$ , а сегменты траектории, находящиеся в  $\Omega_{in}$ , касаются гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$ .

Определим область  $\tilde{\Omega}_{in}$  как пересечение эллипса  $\Omega_{in}$  и области, лежащей между двумя ветвями гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$ . Поверхность  $\Xi = \text{const}$  проектируется на объединение  $\tilde{\Omega}_{in} \cup \Omega_{out}$ . Каждой внутренней точке этой области соответствуют четыре точки-прообраза на поверхности  $\Xi = \text{const}$ . Тем самым, поверхность  $\Xi = \text{const}$  склеена из областей  $\tilde{\Omega}_{in,j}, \Omega_{out,j}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ . Здесь области  $\Omega_{out,j}$  нумеруются в соответствии с правилом (4.3), а области  $\tilde{\Omega}_{in,j}$  нумеруются согласно рис. 4.6.

В силу закона преломления (\*) области  $\tilde{\Omega}_{in,j}$  и  $\Omega_{out,j}$  для каждого  $j = 1, \dots, 4$  отождествляются по общему участку границы, который проекция  $\pi$  отображает в дугу эллипса  $Q_{\lambda_1}$ , а именно, в дугу  $\partial\tilde{\Omega}_{in} \cap \partial\Omega_{out}$ , находящуюся в верхней полуплоскости. В симметричную ей дугу в нижней полуплоскости проектируются общие участки границы для областей  $\tilde{\Omega}_{in,1}$  и  $\Omega_{out,3}$  в силу того же закона (\*). Аналогично отождествляются области  $\tilde{\Omega}_{in,2}$  и  $\Omega_{out,4}$ ,  $\tilde{\Omega}_{in,3}$  и  $\Omega_{out,1}$ , а также  $\tilde{\Omega}_{in,4}$  и  $\Omega_{out,2}$ .

Определим листы  $\tilde{\Omega}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  (пример см. рис. 4.11) следующим образом:  $\tilde{\Omega}_j = \tilde{\Omega}_{in,j} \cup \Omega_{out,j}$ , где объединение листов осуществляется по общей дуге, проектирующейся на верхнюю дугу эллипса  $Q_{\lambda_1}$ .

Рисунок 4.11 — Область  $\tilde{\Omega}_1$ .Рисунок 4.12 — Результат склейки  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_3$ 

(одно эллиптическое кольцо уменьшено для наглядности).

Склеим области  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_3$  по эллиптическим граничным дугам, проектирующимся в нижнюю полуплоскость. Результат склейки изображен на рис. 4.12, пунктиром показано место склейки. Аналогичным образом склеим области  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_4$ . отождествляя одноименные эллиптические границы  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_4$ , получим два соединенных лентами тора (см. рис. 4.13) (поверхность рода 2 с 4 дырками). Склейка областей  $\tilde{\Omega}_1$  с  $\tilde{\Omega}_2$  (аналогично  $\tilde{\Omega}_3$  с  $\tilde{\Omega}_4$ ) по сегментам граничных гипербол отождествляет границы лент (склеивает края двух дырок друг с другом), что превращает их в две ручки. Таким образом, поверхность  $\Xi = \text{const}$  является сферой с пятью ручками.

Как и ранее, траектория, попадающая в точку листа, соответствующую вершине с внутренним углом  $3\pi/2$ , не продолжается далее. Тем самым, поверхность имеет проколы, соответствующие точкам склеиваемых листов — вершинам с внутренним углом величиной  $3\pi/2$ . Таких точек на поверхности четыре.  $\square$

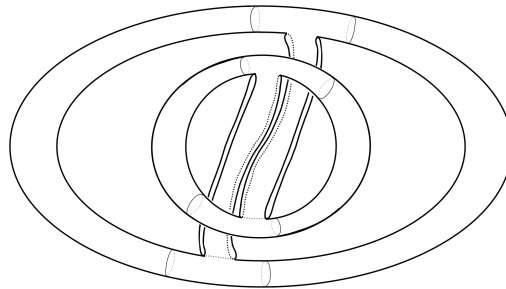


Рисунок 4.13 — Склейка листов по эллиптическим листам — это два тора, соединенных лентами.

### 4.3 Поверхности уровня для нерегулярных значений интеграла $\Xi$

Теперь обратимся к перестройкам поверхностей уровня интеграла  $\Xi$ . Согласно теореме 10, особые значения соответствуют точкам пересечения координатных линий  $\alpha_{out}$ ,  $\alpha_{in} = b^2, a^2$  с прямой (4.2), которая определяется тройкой  $(\lambda_1, n_{in}, n_{out})$ . Дополним диаграмму 4.4, на которой жирными линиями отмечены места, где интеграл  $\Xi$  может принимать нерегулярные значения. А именно на рис. 4.14 мы перенумеровали различные варианты перестроек поверхностей уровня интеграла  $\Xi$ . Например, стрелка с номером 2 означает, что прямая (4.2) пересекает области  $D_1^5$  и  $D_1^6$  и при росте значения интеграла  $\Xi$  при определенном критическом значении пересекает границу  $\alpha_{in} = b^2$ . Эта перестройка описывается ниже в подразделе **Перестройка 2**.

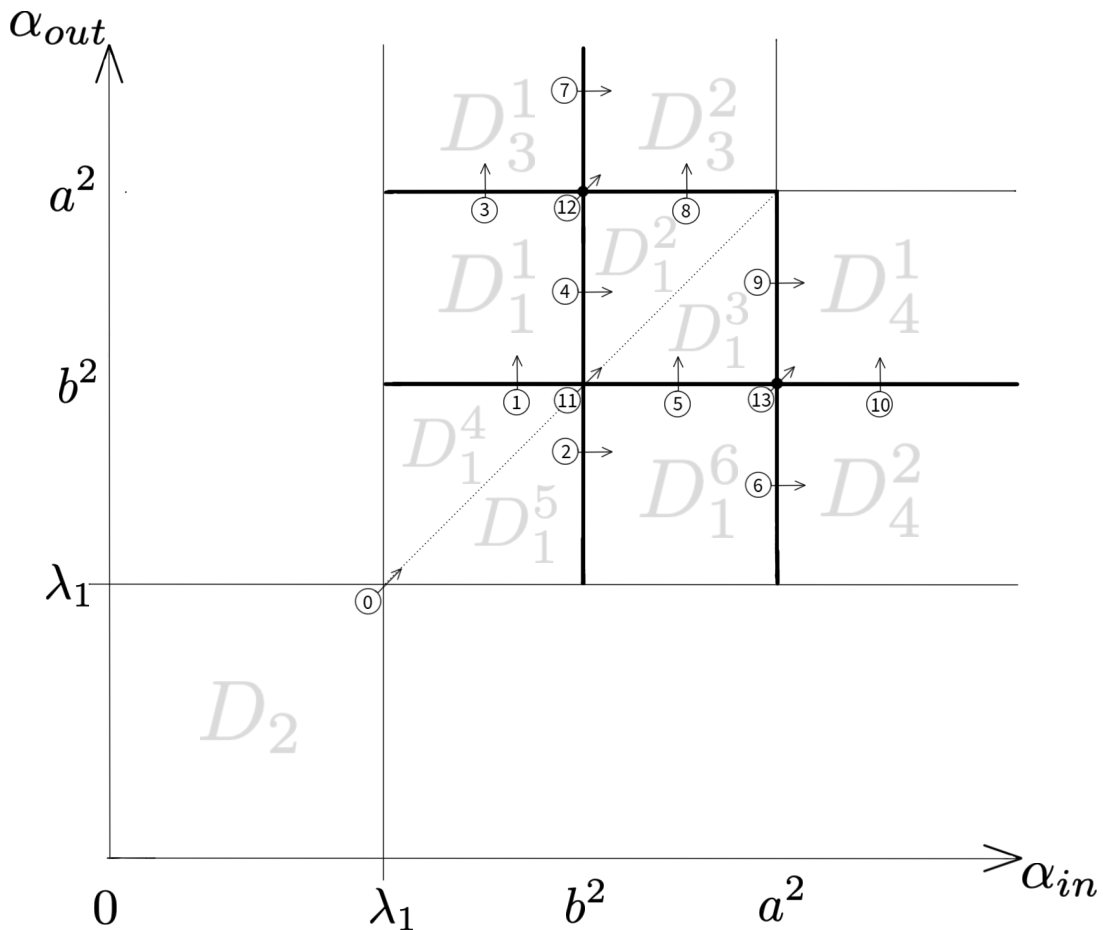


Рисунок 4.14 — Расположение точек, соответствующих нерегулярным значениям  $\Xi$ .

Напомним, что прямая (4.2) проходит через точку  $(\alpha_{in}, \alpha_{out}) = (\lambda_1, \lambda_1)$  и имеет коэффициент наклона  $\frac{n_{in}^2}{n_{out}^2}$ . Формула (4.1) устанавливает соответствие между значениями интеграла  $\Xi$  и точками этой прямой. При возрастании значения интеграла  $\Xi$  соответствующая точка на прямой движется направо вверх.

**Перестройка 0** объединяет три случая: переход из  $D_2$  в область  $D_1^4$ , в область  $D_1^5$  или на разделяющую их диагональ. В каждом из этих трех случаев с топологической точки зрения перестройки не происходит: при проходе через особое значение поверхности уровня не меняются (2 тора).

**Перестройка 1.** Сегменты траектории, находящиеся в области  $\Omega_{in}$ , касаются эллипса с параметром  $\alpha_{in}$ . В эллиптическом кольце  $\Omega_{out}$  звенья траектории лежат на проходящих через фокусы прямых.

Положим  $\tilde{\Omega}_{in} = \Omega_{in} \setminus \Omega_{\alpha_{in}}$ . В каждой точке  $(x, y) \in \Omega_{out} \setminus \{y = 0\}$  проекция  $\pi$  четырехлистка. Разрежем эллиптическое кольцо вдоль горизонтальной прямой:  $\Omega_{out} = \Omega_{out}^u \cup \Omega_{out}^d$ , тогда проекция  $(x, y, v_x, v_y) \mapsto (x, y)$  будет четырехлистка в каждой внутренней точке любой из полученных областей. На поверхности  $\Xi = \text{const}$  выберем по 4 прообраза для верхней и нижней половины кольца. Обозначим эти прообразы  $\Omega_{out,j}^u, \Omega_{out,j}^d, j = 1, \dots, 4$ , где нумерацию определим согласно следующему правилу:

- 1 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен к правому фокусу ,
  - 2 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен к левому фокусу ,
  - 3 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен от правого фокуса ,
  - 4 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен от левого фокуса.
- (4.4)

При этом прообразы  $\tilde{\Omega}_{in,j}, j = 1, \dots, 4$  занумерованы в соответствии с правилом (4.3).

Области  $\Omega_{out,j}^u$  и  $\tilde{\Omega}_{in,j}$  для каждого  $j = 1, \dots, 4$  отождествляются по общей границе в соответствии с законом преломления (\*); общая граница указанных областей проецируется в дугу эллипса  $Q_{\lambda_1} \cap \{y > 0\}$ . В симметричную ей дугу в нижней полуплоскости отображается общая для областей  $\tilde{\Omega}_{in,1}$  и  $\Omega_{out,2}^d$  граница на поверхности  $\Xi = \text{const}$ . Области  $\tilde{\Omega}_{in,2}$  и  $\Omega_{out,1}^d$ ,  $\tilde{\Omega}_{in,3}$  и  $\Omega_{out,4}^d$ , а также  $\tilde{\Omega}_{in,4}$  и  $\Omega_{out,3}^d$  отождествляются похожим образом.

Отметим, что горизонтальная прямая пересекается с кольцом  $\Omega_{out}$  по двум отрезкам  $I_1$  и  $I_2$ . На каждый из них проецируются общие границы для четверок областей:  $\Omega_{out,1}^u, \Omega_{out,1}^d, \Omega_{out,2}^u, \Omega_{out,2}^d$ . Аналогично для областей  $\Omega_{out,3}^u, \Omega_{out,3}^d, \Omega_{out,4}^u, \Omega_{out,4}^d$ .

Определим области  $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_{out,1}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,1} \cup \Omega_{out,2}^d$ ,  $\tilde{\Omega}_2 = \Omega_{out,2}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,2} \cup \Omega_{out,1}^d$ , аналогично определим области  $\tilde{\Omega}_3 = \Omega_{out,3}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,3} \cup \Omega_{out,4}^d$  и  $\tilde{\Omega}_4 = \Omega_{out,4}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,4} \cup \Omega_{out,3}^d$ . Пример области  $\tilde{\Omega}_1$  см. рис. 4.15, жирным пунктиром изображен отрезок, проецирующийся в  $I_1$ , а жирным сплошным — проецирующийся в  $I_2$ .

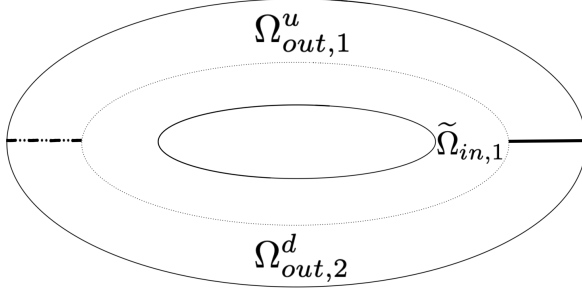


Рисунок 4.15 — Пример области  $\tilde{\Omega}_1$  для перестройки 1.

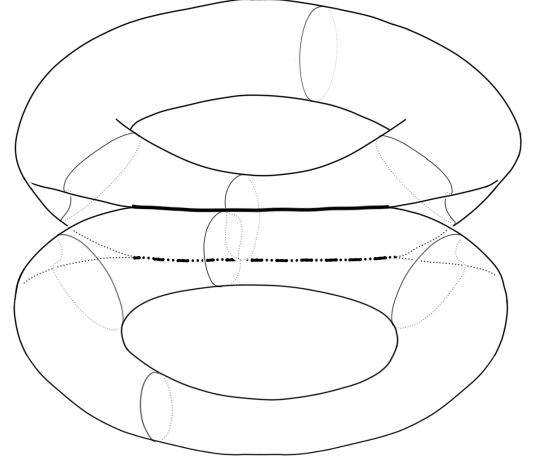


Рисунок 4.16 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для перестройки 1.

Склеим области  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  по одноименным эллиптическим границам, получим один тор. Аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ .

При этом на торе  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  в одной конечной точке отождествляются два прообраза пунктирного отрезка  $I_1$ , аналогично для сплошного отрезка  $I_2$ . На торе  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$  также присутствуют кривые, двулистно накрывающие отрезки  $I_1$  и  $I_2$ . На рис. 4.16 кривые изображены жирным и пунктиром. Остается отождествить два тора по этим кривым, тогда поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  представляет собой склейку двух торов по паре сплошных и паре штрихпунктирных кривых (см. рис. 4.16).

**Перестройка 2.** Сегменты бильярдной траектории в области  $\Omega_{in}$  лежат на прямых, проходящих через фокусы, а продолжения звеньев траектории в кольце  $\Omega_{out}$  касаются эллипса с параметром  $\alpha_{out}$ .

Проекция поверхности  $\Xi = \text{const}$  замечает всю область  $\Omega$ . При этом каждой внутренней точке  $\Omega_{out} \cup (\Omega_{in} \setminus \{y = 0\})$  соответствует четыре точки на поверхности. Разрежем область  $\Omega$  по горизонтальной прямой и представим ее в виде объединения  $\Omega_{out}^u \cup \Omega_{in}^u \cup \Omega_{in}^d \cup \Omega_{out}^d$ . Каждой из указанных областей соответствует по четыре области на поверхности  $\Xi = \text{const}$ , обозначим их

$\Omega_{out,j}^u, \Omega_{in,j}^u, \Omega_{in,j}^d, \Omega_{out,j}^d, j = 1, \dots, 4$ . При этом для прообразов  $\Omega_{out,j}^u$  и  $\Omega_{out,j}^d$  используем нумерацию в соответствии с правилом (4.3). Прообразы  $\Omega_{in,j}^u$  и  $\Omega_{in,j}^d$  пронумерованы как в правиле (4.4).

Заметим, что на поверхности  $\Xi = \text{const}$  области  $\Omega_{out,j}^u$  и  $\Omega_{in,j}^u$  отождествляются по общей границе, которая проектируется в дугу эллипса  $Q_{\lambda_1} \cap \{y > 0\}$ , где  $j = 1, \dots, 4$ . Обозначим  $\Omega_j^u = \Omega_{out,j}^u \cup \Omega_{in,j}^u, j = 1, \dots, 4$ .

В симметричную дугу в нижней полуплоскости проектируется общий сегмент границ областей  $\Omega_{in,1}^d$  и  $\Omega_{out,3}^d$ , на котором эти области отождествляются. Аналогично отождествляются  $\Omega_{in,2}^d$  с  $\Omega_{out,1}^d$ , а также  $\Omega_{in,1}^d$  с  $\Omega_{out,2}^d$  и  $\Omega_{in,3}^d$  с  $\Omega_{out,4}^d$ .

На горизонтальной оси можно выделить пять сегментов: два из них попадают в  $\Omega_{out}$  и три в  $\Omega_{in}$ , один из которых соединяет фокусы. В отрезок между фокусов проектируется общая граница для четырех областей  $\Omega_1^u, \Omega_4^u, \Omega_{in,1}^d$  и  $\Omega_{in,4}^d$ . Аналогично общая граница областей  $\Omega_2^u, \Omega_3^u, \Omega_{in,2}^d$  и  $\Omega_{in,3}^d$  проектируется на этот же отрезок.

Определим области

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \Omega_1^u \cup \Omega_{in,4}^d \cup \Omega_{out,3}^d, & \tilde{\Omega}_2 &= \Omega_2^u \cup \Omega_{in,3}^d \cup \Omega_{out,4}^d, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \Omega_3^u \cup \Omega_{in,2}^d \cup \Omega_{out,1}^d, & \tilde{\Omega}_4 &= \Omega_4^u \cup \Omega_{in,1}^d \cup \Omega_{out,2}^d. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пример области  $\tilde{\Omega}_1$  изображен на рис. 4.17.

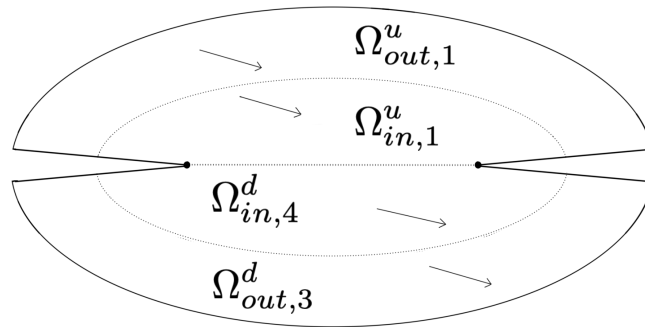


Рисунок 4.17 — Пример области  $\tilde{\Omega}_1$  для перестройки 2.

Склеим области  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  по граничным эллиптическим дугам, а также по прообразу соединяющего фокусы отрезка на  $\Xi = \text{const}$ . Аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Получим два цилиндра; поперечное сечение каждого даст восьмерку.

Рассмотрим прообраз на  $\Xi = \text{const}$  горизонтального отрезка, левый конец которого находится в правом фокусе, а правый — в правой вершине  $Q_{\lambda_1}$ . В этот сегмент прямой, в силу изложенных в [16, §4] соображений, проектируется

общая граница для областей  $\Omega_{in,1}^u$  и  $\Omega_{in,2}^d$ . Аналогично для пар областей  $\Omega_{in,2}^u$  и  $\Omega_{in,1}^d$ ,  $\Omega_{in,3}^u$  и  $\Omega_{in,4}^d$  и для пары  $\Omega_{in,4}^u$  и  $\Omega_{in,3}^d$ . То есть на поверхности  $\Xi = \text{const}$  (см. (4.5)) *верхняя* граница области  $\tilde{\Omega}_1$  отождествляется с *нижней* границей области  $\tilde{\Omega}_3$  и наоборот. Аналогично для двух других областей: *верхняя* граница  $\tilde{\Omega}_2$  — с *нижней* границей области  $\tilde{\Omega}_4$  и наоборот. Из аналогичных соображений следуют такие же склейки на прообразе симметричного отрезка, соединяющем левую вершину эллипса  $Q_{\lambda_1}$  и левый фокус.

Рассмотрим отрезки  $\Omega_{out} \cap \{y = 0\}$ . На каждый из них проектируются общие границы областей  $\Omega_{out,j}^u$  и  $\Omega_{out,j}^d$  для  $j = 1, \dots, 4$ . То есть, по прообразу каждого из отрезков отождествляются листы (см. (4.5))  $\tilde{\Omega}_1$  с  $\tilde{\Omega}_3$ , а также  $\tilde{\Omega}_2$  с  $\tilde{\Omega}_4$ .

Склеим листы  $\tilde{\Omega}_1$  с  $\tilde{\Omega}_4$  по трем общим дугам и получим два соединенных вдоль общей горизонтальной прямой цилиндра (или, что то же самое, цилиндр с восьмеркой в сечении). Аналогично склеим листы  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . При этом две дуги, ограничивающие левую окружность верхнего цилиндра  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$ , проектируются в отрезок горизонтальной прямой, соединяющий левую вершину граничного эллипса с левым фокусом. В этот же отрезок проецируются дуги, ограничивающие левую окружность нижнего цилиндра  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$ . Аналогично для  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . То же самое справедливо для дуг, ограничивающих правые окружности цилиндров, только проецируются они на симметричный горизонтальный отрезок от правого фокуса к правой вершине граничного эллипса. Остается склеить цилиндры между собой: левая окружность *верхнего* цилиндра  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  отождествляется с левой окружностью *нижнего* цилиндра  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ , а левая окружность *нижнего* цилиндра  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  — с левой окружностью *верхнего* цилиндра  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Аналогичные склейки возникают на правых окружностях цилиндров.

Таким образом, поверхность  $\Xi = \text{const}$  представляет собой тор с восьмеркой в продольном сечении, см. рис. 4.18.

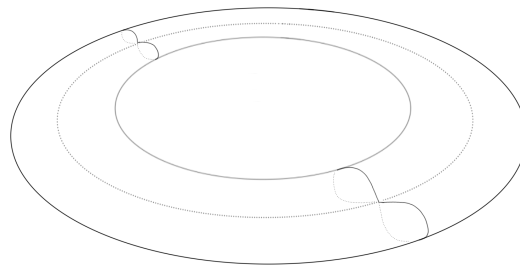


Рисунок 4.18 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для перестройки 2.

**Перестройка 3.** Траектории бильярда в области  $\Omega_{in}$  касаются эллипса с параметром  $\alpha_{in}$ , а в области  $\Omega_{out}$  совпадают с вертикальной полуосью эллипса.

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  можно представлять себе как предельный случай неособой поверхности  $D_1^1$  (см. рис. 4.14), когда две ручки «схлопываются» в окружности.

Более подробно, склеим листы  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  по общим границам, которые проецируются в эллиптические граничные дуги  $\tilde{\Omega}$  (пример области  $\tilde{\Omega}_1$  изображен на рис. 4.10). Аналогично для  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатом склейки являются два тора с четырьмя дырками каждый. При этом каждая дырка ограничена двумя дугами, которые проецируются в гиперболические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$ .

Области  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  отождествляются по дугам общей границы, которые проектируются в гиперболические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$ , аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ .

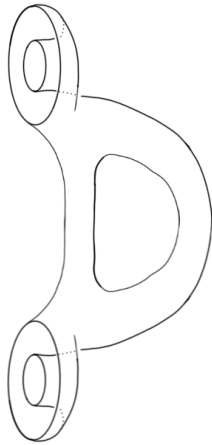


Рисунок 4.19 — Склейка  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$   
(перестройка 3).

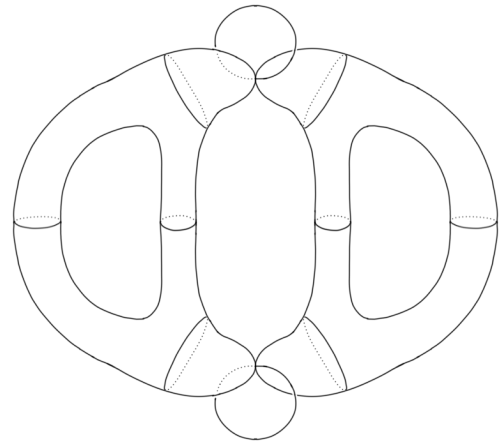


Рисунок 4.20 — Поверхность уровня  
 $\Xi = \text{const}$  для перестройки 3.

На рис. 4.19 изобразим результат склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$ . Его границей являются две пары окружностей, по которым приклеивается аналогичный результат склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . В момент перестройки две верхние (соответственно, две нижние) граничные окружности  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  стягиваются в одну окружность. То есть поверхность  $\Xi = \text{const}$  представляет собой два касающихся в двух точках тора, при этом в каждой общей точке этих двух торов «растет» по одной окружности, см. рис. 4.20.

**Перестройка 4.** Траектории бильярда в области  $\Omega_{in}$  лежат на проходящих через фокусы прямых, а продолжения звеньев в области  $\Omega_{out}$  касаются гиперболы с параметром  $\alpha_{out}$ .

Определим область  $\tilde{\Omega}$  как объединение  $\Omega_{in}$  и  $\tilde{\Omega}_{out}$ , где область  $\tilde{\Omega}_{out}$  определена как пересечение  $\Omega_{out}$  с областью, лежащей между ветвями гиперболы с параметром  $\alpha_{out}$ .

Горизонтальная ось пересекает область  $\Omega_{in}$  по трем отрезкам, один из которых соединяет фокусы. Разрежем область  $\tilde{\Omega}$  горизонтальной осью. Тогда можем определить разбиение области  $\tilde{\Omega}$  на четыре области  $\tilde{\Omega}_{out}^u, \Omega_{in}^u, \Omega_{in}^d, \tilde{\Omega}_{out}^d$ . Проекция  $\pi$  четырехлистка в каждой внутренней точке любой из этих областей. Обозначим прообразы этих областей на поверхности  $\Xi = \text{const}$  как  $\tilde{\Omega}_{out,j}^u, \Omega_{in,j}^u, \Omega_{in,j}^d, \tilde{\Omega}_{out,j}^d, j = 1, \dots, 4$ . Области  $\Omega_{in,j}^u, \Omega_{in,j}^d, j = 1, \dots, 4$  занумерованы в соответствии с правилом (4.4), а области  $\tilde{\Omega}_{out,j}^u, \tilde{\Omega}_{out,j}^d, 1, \dots, 4$  — как на рис. 4.6.

Области  $\tilde{\Omega}_{out,j}^u$  и  $\Omega_{in,j}^u$  на поверхности  $\Xi = \text{const}$  для каждого  $j = 1, \dots, 4$  отождествляются по общей границе, которая на  $\tilde{\Omega}$  проектируется в часть дуги эллипса  $Q_{\lambda_1}$ , заключенная между ветвями гиперболы  $Q_{\alpha_{out}}$  в верхней полуплоскости. В симметричную ей дугу в нижней полуплоскости проектируется общая граница для областей  $\tilde{\Omega}_{out,1}^d$  и  $\Omega_{in,4}^d$ . Аналогичным образом отождествляются дуги на границах областей  $\tilde{\Omega}_{out,2}^d$  и  $\Omega_{in,3}^d$ ,  $\tilde{\Omega}_{out,3}^d$  и  $\Omega_{in,2}^d$ , а также  $\tilde{\Omega}_{out,4}^d$  и  $\Omega_{in,1}^d$ .

В соединяющий фокусы отрезок проектируется общая граница для областей  $\Omega_{in,1}^u, \Omega_{in,1}^d, \Omega_{in,4}^u, \Omega_{in,4}^d$ , аналогично для областей  $\Omega_{in,2}^u, \Omega_{in,2}^d, \Omega_{in,3}^u, \Omega_{in,3}^d$ . На той же прямой можно выделить отрезки, которые соединяют правый (левый) фокус с правой (левой) вершиной эллипса  $Q_{\lambda_1}$ . На каждый из этих отрезков проектируются границы областей  $\Omega_{in,1}^u, \Omega_{in,2}^d, \Omega_{in,1}^d, \Omega_{in,2}^u$ , аналогично для областей  $\Omega_{in,3}^u, \Omega_{in,4}^d, \Omega_{in,3}^d, \Omega_{in,4}^u$ .

Определим листы склейки  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$  следующим образом (пример области  $\tilde{\Omega}_1$  см. рис. 4.21):

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \tilde{\Omega}_{out,1}^u \cup \Omega_{in,1}^u \cup \Omega_{in,4}^d \cup \tilde{\Omega}_{out,1}^d, & \tilde{\Omega}_2 &= \tilde{\Omega}_{out,2}^u \cup \Omega_{in,2}^u \cup \Omega_{in,3}^d \cup \tilde{\Omega}_{out,2}^d, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \tilde{\Omega}_{out,3}^u \cup \Omega_{in,3}^u \cup \Omega_{in,2}^d \cup \tilde{\Omega}_{out,3}^d, & \tilde{\Omega}_4 &= \tilde{\Omega}_{out,4}^u \cup \Omega_{in,4}^u \cup \Omega_{in,1}^d \cup \tilde{\Omega}_{out,4}^d. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Склеим листы  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  по общим граничным дугам на поверхности  $\Xi = \text{const}$ , которые проецируются на эллиптические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$ , а также на соединяющий фокусы отрезок. Аналогичные склейки повторим для листов  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатом склеек являются две фигуры, каждая из которых является склейкой цилиндров с двумя дырками (гомеоморфных сферам с четырьмя дырками) вдоль общей образующей (см. рис. 4.22).

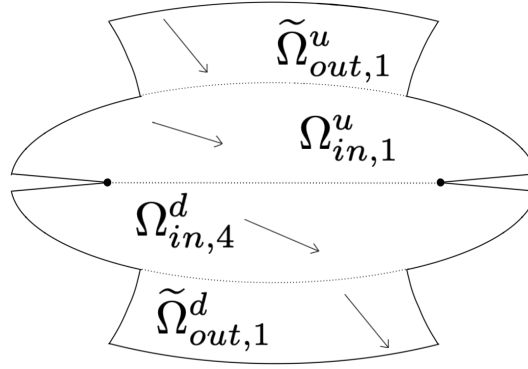


Рисунок 4.21 — Пример области  $\tilde{\Omega}_1$  для перестройки 4.

Ветви гиперболы с параметром  $\alpha_{out}$  пересекаются с областью  $\tilde{\Omega}_{out}$  по четырем дугам, в каждую из которых проектируются по две дуги на  $\Xi = \text{const}$ , ограничивающие одну из дырок на склейке  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$ . Аналогично для склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . При этом на дуги в верхней полуплоскости проектируются общие границы для  $\tilde{\Omega}_{out,1}^u$  и  $\tilde{\Omega}_{out,4}^u$ , а также  $\tilde{\Omega}_{out,2}^u$  и  $\tilde{\Omega}_{out,3}^u$ . Аналогичные склейки для  $\tilde{\Omega}_{out,1}^d$  и  $\tilde{\Omega}_{out,4}^d$ , а также  $\tilde{\Omega}_{out,2}^d$  и  $\tilde{\Omega}_{out,3}^d$  возникают на прообразе дуг в нижней полуплоскости.

Граничные окружности цилиндров проецируются на отрезки  $\{y = 0\} \cap \Omega_{in}$  вне фокусов. Точнее, в правый такой отрезок проектируются пары дуг  $\Omega_{in,1}^u \cap \Omega_{in,4}^u$ ,  $\Omega_{in,1}^d \cap \Omega_{in,4}^d$ , которые ограничивают верхнюю и нижнюю граничные окружности, соответственно. Аналогично для пар дуг  $\Omega_{in,2}^u \cap \Omega_{in,3}^u$ ,  $\Omega_{in,2}^d \cap \Omega_{in,3}^d$ . По этим граничным окружностям склеим также возникают склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  и  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Торцевые окружности при этом в правой части подклеиваются с «перекруткой»: *нижняя* граничная окружность  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  отождествляется с *верхней* окружностью на  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ , аналогично *верхняя* на  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  — с *нижней* на  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Аналогичные соображения для тех же листов справедливы в симметричном отрезке в левой полуплоскости.

Остается склеить отождествить  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  и  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$  по указанным дугам (см. рис. 4.22). Результирующая поверхность  $\Xi = \text{const}$  изображена на рис. 4.23.

**Перестройка 5.** Звенья траектории в области  $\Omega_{in}$  касаются гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$ , а в области  $\Omega_{out}$  лежат на проходящих через фокусы прямых.

Определим область  $\tilde{\Omega}_{in}$  как часть эллипса  $\Omega_{in}$  между ветвей гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$ . Область  $\tilde{\Omega}$  определим как объединение  $\tilde{\Omega}_{in} \cup \Omega_{out}$ .

Проекция поверхности  $\Xi = \text{const}$  на область  $\tilde{\Omega}$  четырехлистка в каждой внутренней точке  $\tilde{\Omega}$  кроме отрезков  $\Omega_{out} \cap \{y = 0\}$ . Разрежем  $\Omega_{out}$  вдоль

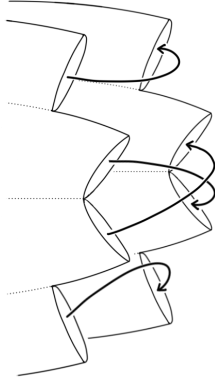


Рисунок 4.22 — Схема склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  (на переднем плане) и  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$  (на заднем плане).

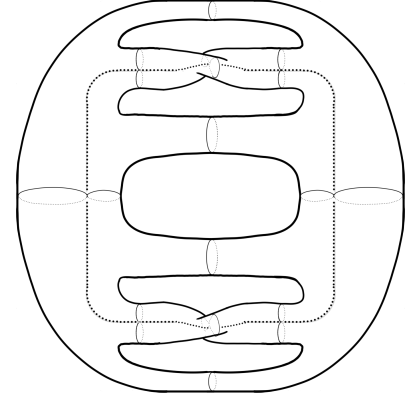


Рисунок 4.23 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для перестройки 4.

этих горизонтальных отрезков и получим области  $\Omega_{out}^u, \Omega_{out}^d$ . Тогда проекция четырехлистка в каждой области  $\tilde{\Omega}_{in}, \Omega_{out}^u, \Omega_{out}^d$ . Прообразы этих областей на поверхности  $\Xi = \text{const}$  обозначим как  $\tilde{\Omega}_{in,j}, \Omega_{out,j}^u, \Omega_{out,j}^d, j = 1, \dots, 4$ . При этом области  $\Omega_{out,j}^u, \Omega_{out,j}^d$  занумерованы в соответствии с правилом (4.4), а области  $\tilde{\Omega}_{in,j}$  — как на рис. 4.6.

На поверхности  $\Xi = \text{const}$  области  $\tilde{\Omega}_{in,j}$  и  $\Omega_{out,j}^u$  для каждого  $j = 1, \dots, 4$  отождествляются по дуге, которая проектируется в  $\tilde{\Omega}$  на дугу эллипса  $Q_{\lambda_1}$ , заключенную между ветвями гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$  в верхней полуплоскости. На симметричную дугу в нижней полуплоскости проектируются общие граничные дуги для областей  $\tilde{\Omega}_{in,1}$  и  $\Omega_{out,4}^d$ , аналогично для пары областей  $\tilde{\Omega}_{in,2}$  и  $\Omega_{out,3}^d$ , для пары  $\tilde{\Omega}_{in,3}$  и  $\Omega_{out,2}^d$ , а также для пары  $\tilde{\Omega}_{in,4}$  и  $\Omega_{out,1}^d$ .

Определим листы  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \Omega_{out,1}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,1} \cup \Omega_{out,4}^d, & \tilde{\Omega}_2 &= \Omega_{out,2}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,2} \cup \Omega_{out,3}^d, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \Omega_{out,3}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,3} \cup \Omega_{out,2}^d, & \tilde{\Omega}_4 &= \Omega_{out,4}^u \cup \tilde{\Omega}_{in,4} \cup \Omega_{out,1}^d. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Пример области  $\tilde{\Omega}_1$  изображен на рис. 4.24.

Области  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  склеиваются по общим дугам на поверхности  $\Xi = \text{const}$ , которые проектируются на граничные гиперболические дуги области  $\tilde{\Omega}$ . Аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ . Те же пары областей также склеиваются по дугам, которые проектируются на горизонтальные отрезки  $\Omega_{out} \cap \{y = 0\}$ . А именно, прообраз каждого из этих отрезков на поверхности  $\Xi = \text{const}$  эквивалентен окружности, половина дуги которого является общей границей областей  $\Omega_{out,1}^u, \Omega_{out,2}^u, \Omega_{out,1}^d, \Omega_{out,2}^d$ , а вторая половина дуги — общая граница для областей  $\Omega_{out,3}^u, \Omega_{out,4}^u, \Omega_{out,3}^d, \Omega_{out,4}^d$ .

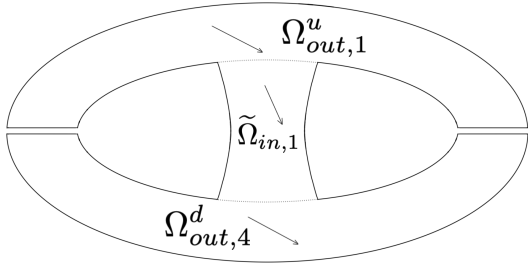


Рисунок 4.24 — Пример области  $\tilde{\Omega}_1$  для перестройки 5.

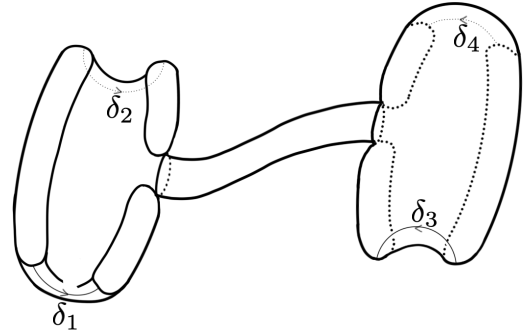


Рисунок 4.25 — Результат склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$  для перестройки 5.

Тогда склейка областей  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  по общим граничным дугам приводит к поверхности, изображенной на рис. 4.25, край которой состоит из шести окружностей, которые проецируются на эллиптические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$  (см. рис. 4.24). На склейке отметим дуги  $\delta_1, \dots, \delta_4$ , которые проецируются на горизонтальные отрезки  $\Omega_{out} \cap \{y = 0\}$ . Склейка областей  $\tilde{\Omega}_3 \cup \tilde{\Omega}_4$  устроена аналогично.

Для получения поверхности  $\Xi = \text{const}$  остается склеить  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3 \cup \tilde{\Omega}_4$  по общим граничным дугам, а также вдоль дуг  $\delta_1, \dots, \delta_4$ . Поверхность  $\Xi = \text{const}$  до отождествления вдоль  $\delta_1, \dots, \delta_4$  изображена на рис. 4.26.

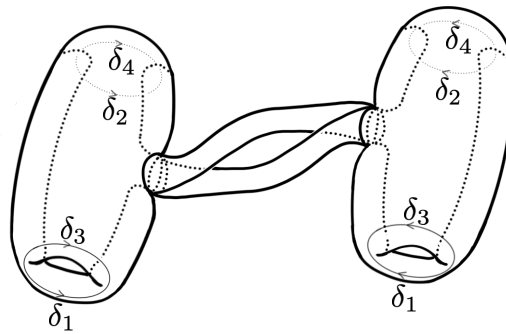


Рисунок 4.26 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для перестройки 5.

**Перестройка 6.** Продолжения звеньев траектории, находящихся в области  $\Omega_{out}$  касаются эллипса с параметром  $\alpha_{out}$ , а в области  $\Omega_{in}$  сегменты траектории совпадают с вертикальной полуосью эллипса.

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  можно представлять себе как предельный случай неособой поверхности, соответствующей случаю  $D_1^6$ , при  $\alpha_{in} \rightarrow a^2$  (см. рис. 4.14), когда две ручки схлопываются в две дуги, причем имеющие общие концы.

Напомним рассуждения, проведенные нами для случая  $D_1^6$ . Рассмотрим склейку областей  $\tilde{\Omega}_1$  (см. рис. 4.11) и  $\tilde{\Omega}_3$  (см. рис. 4.12) и аналогичную склейку областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_4$ . Затем  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_4$  склеиваются по тем граничным дугам, которые проецируются в эллиптические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$ . Результатом склейки являются два тора, соединенные лентами (см. рис. 4.13). Каждая лента ограничивается дугами, которые проецируются в граничные гиперболические дуги области  $\tilde{\Omega}$ . Области  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  отождествляются по общим границам, проектирующимся на левую и правую ветви гиперболы  $Q_{\alpha_{in}}$  в области  $\Omega_{in}$ .

В момент перестройки ручка, образованная склейкой областей  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  (соответственно,  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ ) стягивается в кривую. То есть поверхность  $\Xi = \text{const}$  представляет собой два касающихся в двух точках тора, при этом обе общие точки этих двух торов соединены двумя кривыми, см. рис. 4.27.

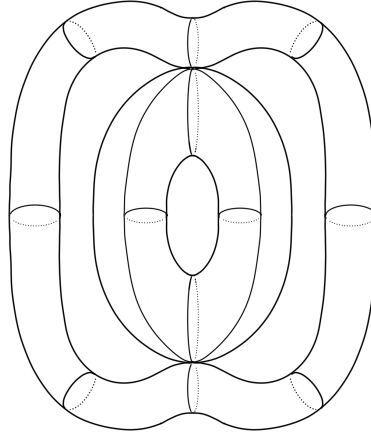


Рисунок 4.27 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для перестройки 6.

**Перестройка 7.** Сегменты бильярдной траектории в области  $\Omega_{in}$  лежат на проходящих через фокусы прямых, не заходя при этом в область  $\Omega_{out}$ .

Положим  $\tilde{\Omega} = \Omega_{in}$ . Проекция  $\pi$  четырехлистка в любой внутренней точке  $\tilde{\Omega} \setminus \{y = 0\} = (\Omega_{in} \cap \{y > 0\}) \cup (\Omega_{in} \cap \{y < 0\}) = \Omega_{in}^u \cup \Omega_{in}^d$ . Тогда последние две области имеют на поверхности  $\Xi = \text{const}$  по четыре прообраза  $\Omega_{in,j}^u, \Omega_{in,j}^d, j = 1, \dots, 4$ , которые занумерованы в соответствии с правилом (4.4).

На поверхности  $\Xi = \text{const}$  общая граничная дуга областей  $\Omega_{in,1}^u, \Omega_{in,4}^u$  проецируется на дугу эллипса с параметром  $\lambda_1$  в верхней полуплоскости. Аналогично для областей  $\Omega_{in,2}^u, \Omega_{in,3}^u$ . На симметричную дугу эллипса с параметром  $\lambda_1$  проецируются граничные дуги для  $\Omega_{in,1}^d$  и  $\Omega_{in,4}^d$ , аналогично для областей  $\Omega_{in,2}^d, \Omega_{in,3}^d$ . В соединяющий фокусы отрезок горизонтальной прямой проецируются общие граничные дуги областей  $\Omega_{in,1}^u, \Omega_{in,4}^u, \Omega_{in,1}^d, \Omega_{in,4}^d$ . Аналогично для областей  $\Omega_{in,2}^u, \Omega_{in,3}^u, \Omega_{in,2}^d$  и  $\Omega_{in,3}^d$ .

Определим области

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \Omega_{in,1}^u \cup \Omega_{in,4}^d, & \tilde{\Omega}_2 &= \Omega_{in,2}^u \cup \Omega_{in,3}^d, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \Omega_{in,3}^u \cup \Omega_{in,2}^d, & \tilde{\Omega}_4 &= \Omega_{in,4}^u \cup \Omega_{in,1}^d.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Склеим области  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  по общим граничным областям, которые проецируются на эллиптические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$ , а также по общей дуге, которая проецируется на соединяющие фокусы отрезок. Аналогично склеим области  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатами склеек являются два цилиндра с восьмерками в поперечных сечениях каждого.

Окружности, ограничивающие восьмерки на левом и правом торцах цилиндров, проецируются в левый и правый отрезки  $\Omega_{in} \cap \{y = 0\}$ . На этих отрезках отождествляются области  $\Omega_{in,1}^u$  и  $\Omega_{in,2}^d$ . Аналогично для областей  $\Omega_{in,2}^u$  и  $\Omega_{in,1}^d$ , для  $\Omega_{in,3}^u$  и  $\Omega_{in,4}^d$ , а также  $\Omega_{in,4}^u$  и  $\Omega_{in,3}^d$ . Тогда на правом отрезке  $\Omega_{in} \cap \{y = 0\}$  *верхняя* граничная окружность склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  склеивается с *нижней* граничной окружностью склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ , а *нижняя* окружность на  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  — с *верхней* на  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Аналогично на левом отрезке  $\Omega_{in} \cap \{y = 0\}$ .

Таким образом, два цилиндра с восьмерками в сечении склеиваются в один тор с восьмеркой в сечении, образуя поверхность  $\Xi = \text{const}$ .

**Перестройка 8.** Звенья траектории в области  $\Omega_{in}$  касаются гиперболы с параметром  $\alpha_{in}$ , а в области  $\Omega_{out}$  совпадают вертикальной полуосью граничного эллипса.

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  можно представлять себе как предельный случай неособой поверхности, соответствующей случаю  $D_1^2$ , при  $\alpha_{out} \rightarrow a^2$  (см. рис. 4.14), когда две ручки схлопываются в окружности.

Напомним рассуждения, проведенные нами для случая  $D_1^2$ . Рассмотрим склейку областей  $\tilde{\Omega}_1$  (см. рис. 4.8) и  $\tilde{\Omega}_4$  по общим границам, которые проецируются в эллиптические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$  и аналогичную склейку областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатом склейки является сфера с шестью дырками, при этом каждая дырка ограничивается парой дуг на поверхности  $\Xi = \text{const}$ , которые проецируются в граничные гиперболические дуги области  $\tilde{\Omega}$ . Части границ областей  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  отождествляются по дугам, которые проектируются в часть границы области  $\tilde{\Omega}$ , аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ .

На рис. 4.28 изображен результат склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$ . Его границей являются три пары окружностей, по которым приклеивается поверхность, полученная в результате аналогичной склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ .

В момент перестройки две верхние (соответственно, две нижние) граничные окружности  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  схлопываются в одну окружность.

Таким образом, поверхность  $\Xi = \text{const}$  представляет собой тор, на котором отмечены две пары отождествленных точек, при этом из точек, полученных в результате отождествления, «растет» по одной окружности, см. рис. 4.29.

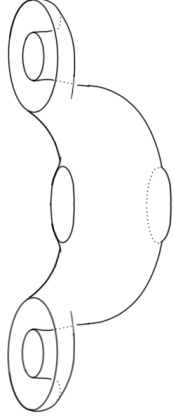


Рисунок 4.28 — Результат склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  для перестройки 8.

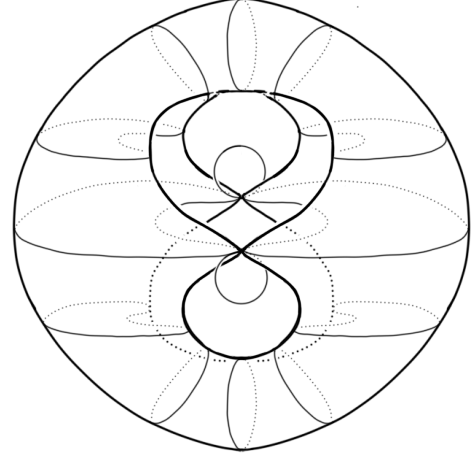


Рисунок 4.29 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для случая 8.

**Перестройка 9.** Звенья траектории в области  $\Omega_{out}$  лежат на касательных к гиперболе с параметром  $\alpha_{out}$ , а в области  $\Omega_{in}$  совпадают с вертикальной полуосью эллипса.

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  можно представить себе как предельный случай неособой поверхности, соответствующей случаю  $D_1^3$ , при  $\alpha_{in} \rightarrow a^2$  (см. рис. 4.14), когда две ручки схлопываются в окружность.

Напомним рассуждения случая  $D_1^3$ . Рассмотрим склейку областей  $\tilde{\Omega}_1$  (см. рис. 4.9) и  $\tilde{\Omega}_4$  по общим границам, которые проецируются в эллиптические граничные дуги области  $\tilde{\Omega}$  и аналогичную склейку для областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . Результатом склейки является сфера с шестью дырками, при этом каждая дырка ограничивается парой дуг на поверхности  $\Xi = \text{const}$ , которые проецируются в граничные гиперболические дуги области  $\tilde{\Omega}$ .

Части границ областей  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  отождествляются по дугам, которые проектируются в гиперболические дуги области  $\tilde{\Omega}$ , аналогично для областей  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ .

На рис. 4.30 изображен результат склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$ . Границей этой поверхности являются три пары окружностей, по которым приклеивается поверхность, полученная в результате аналогичной склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ .

В момент перестройки две граничные окружности  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$ , которые проецируются в область  $\Omega_{in}$ , стягиваются в одну окружность.

Таким образом, поверхность  $\Xi = \text{const}$  представляет собой два тора, на каждом из которых отождествлено по две точки. При этом точки, полученные в результате такого отождествления, соединены двумя дугами, см. рис. 4.31.

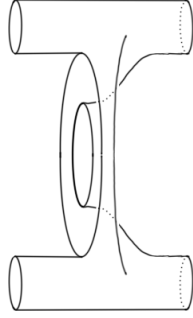


Рисунок 4.30 — Результат склейки  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  для перестройки 9.

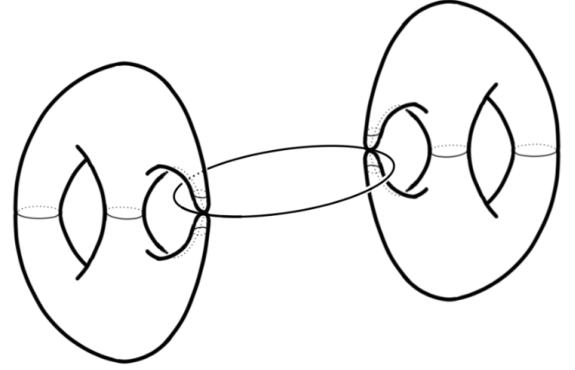


Рисунок 4.31 — Поверхность  $\Xi = \text{const}$  для случая 9.

**Перестройка 10.** Эта перестройка совпадает с перестройкой  $\alpha_{out} \rightarrow b^2$  классического бильярда в эллиптическом кольце  $\Omega_{out}$ . Перестройка подробно разобрана в [16, §3].

**Перестройка 11.** Как было отмечено выше, прямая (4.2) проходит через точку  $(\alpha_{in}, \alpha_{out}) = (\lambda_1, \lambda_1)$  и имеет коэффициент наклона  $\frac{n_{in}^2}{n_{out}^2}$ . Следовательно, такая перестройка возможна лишь в случае  $n_{in}^2 = n_{out}^2$ , что соответствует отсутствию преломления. Такая перестройка рассматривается в теории классического бильярда, см. [16, §3].

**Перестройка 12.** Звенья траектории в области  $\Omega_{in}$  лежат на проходящих через фокусы прямых, а в области  $\Omega_{out}$  совпадают с вертикальной полуосью эллипса.

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  можно представить себе как комбинацию перестроек 4 и 8 (или перестроек 3 и 7).

Определим области  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$ , как в (4.21) (пример области см. рис. 4.21). Склеим листы  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  так же, как указано в **перестройке 4**. В момент перестройки граничные окружности должны схлопнуться в одну окружность. Поэтому те части склейки, которые проецируются в кольцо  $\Omega_{out}$ , продеформируем так же, как в **перестройке 8** (результат склейки см. рис. 4.32).

Таким образом, поверхность  $\Xi = \text{const}$  представляет собой тор с восьмеркой в сечении, на котором отмечены две пары отождествленных точек, принадлежащих разным «компонентам» восьмерок. При этом из точек, полученных в результате отождествления, «растет» по одной окружности, см. рис. 4.33.

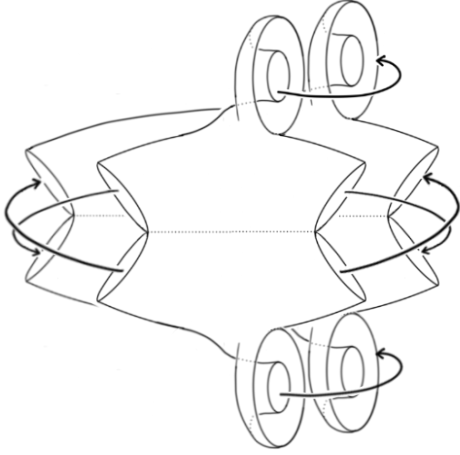


Рисунок 4.32 — Схема склейки  $\Omega_1 \cup \Omega_4$  и  $\Omega_2 \cup \Omega_3$  для случая 12.

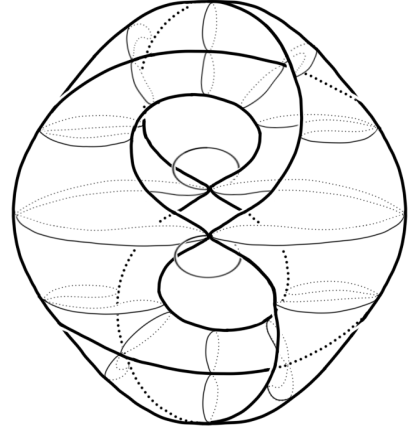


Рисунок 4.33 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для случая 12.

**Перестройка 13.** Звенья траектории в области  $\Omega_{out}$  лежат на проходящих через фокусы прямых, а в области  $\Omega_{in}$  совпадают с вертикальной полуосью эллипса.

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  можно представить себе как комбинацию перестроек **5** и **9** (или перестроек **6** и **10**).

Определим области  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$ , как в (4.7) (пример области см. рис. 4.24). Склеим листы  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  так же, как указано в **перестройке 5**. В момент перестройки две трубки, образованные проецирующимися в  $\Omega_{in}$  частями листов, должны схлопнуться в одну окружность. Отождествим полученную поверхность вдоль дуг  $\delta_1, \dots, \delta_4$ , результат склейки изображен на рис. 4.34.

Поверхность  $\Xi = \text{const}$  получается склейкой поверхности по граничным окружностям, результат изображен на рис. 4.35.

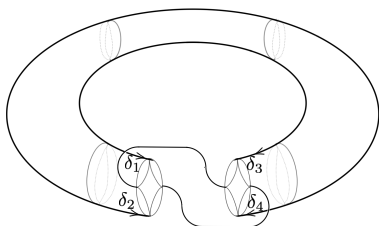


Рисунок 4.34 — Схема склейки  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  и  $\Omega_3 \cup \Omega_4$  для случая 13.

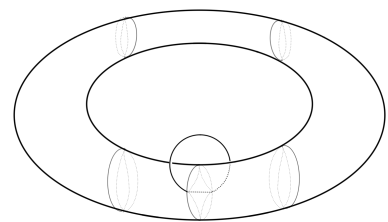


Рисунок 4.35 — Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  для случая 13.

## Глава 5. Задача Б.

### 5.1 Постановка задачи

Пусть область  $\Omega$  — пересечение кольца  $\{r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$  с правой полуплоскостью  $\{x \geq 0\}$ . Область  $\Omega$  разбита на две части  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  дугой  $EF$  окружности радиуса  $r_1$ , где  $r_0 < r_1 < r_2$  и сегментом  $FG$  горизонтального диаметра (см. рис. 5.1). Зафиксируем показатели преломления:  $n_1$  для области  $\Omega_1$  и  $n_2$  — для  $\Omega_2$ .

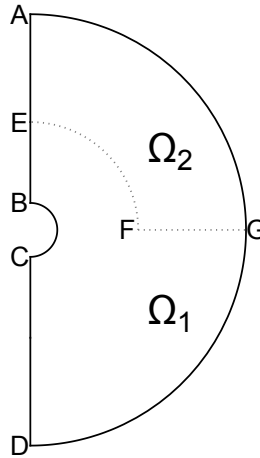


Рисунок 5.1 — Область  $\Omega$  представляет собой объединение 2 областей.

В области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  рассмотрим бильярдную систему, подчиняющуюся закону (\*). В предыдущем разделе была введена функция  $\Lambda(x, y, v_x, v_y)$ : ее значение равно параметру  $\alpha$  софокусной квадрики  $\frac{x^2}{a^2 - \alpha} + \frac{y^2}{b^2 - \alpha} = 1$ , которой касается бильярдная траектория, проходящая через точку  $(x, y)$  с вектором скорости  $(v_x, v_y)$ . В частном случае, когда большая и малая полуоси  $a$  и  $b$  эллипса совпадают, уравнение квадрики можно записать в виде  $x^2 + y^2 = a^2 - \alpha = \rho^2$ , где  $\rho$  — радиус окружности, касающейся звена траектории. Величина  $\rho^2$  является функцией положения и скорости материальной точки и задается формулой

$$\rho^2(x, y, v_x, v_y) = a^2 - \Lambda(x, y, v_x, v_y) = \frac{(xv_y - yv_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для классического бильярда в круге функция  $\rho^2$  является первым интегралом, не зависящим от полной энергии.

## 5.2 Интеграл $\rho^2$ . Условия полного внутреннего отражения

Общая граница областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  состоит из двух кривых: из сегмента окружности  $EF$  и отрезка прямой  $FG$ . Пусть материальная точка движется с вектором скорости  $(v_x, v_y)$  в области  $\Omega_1$  и в точке с координатами  $(x, y) \in EF \cup FG$  преломляется, после чего продолжает движение в области  $\Omega_2$  с вектором скорости  $(w_x, w_y)$ .

Проведем через точку  $(x, y)$  прямую с вектором направления  $(v_x, v_y)$ : она касается некоторой окружности с центром в начале координат. Обозначим ее радиус через  $\rho_1$ . Аналогично  $\rho_2$  определим как радиус окружности, касательной к проходящей через ту же точку  $(x, y)$  прямой с вектором направления  $(w_x, w_y)$ . Тогда в зависимости от того, к какой части общей границы областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  принадлежит точка  $(x, y)$ , величины  $\rho_1^2$  и  $\rho_2^2$  удовлетворяют одному из двух равенств.

**Утверждение 10.** *Имеют место следующие соотношения для параметров  $\rho_1, \rho_2$  в точке преломления:*

$$(\rho_1^2 - r_1^2)n_1^2 = (\rho_2^2 - r_1^2)n_2^2 \quad \text{при } (x, y) \in EF, \quad (5.1)$$

$$\rho_1^2 n_1^2 = \rho_2^2 n_2^2 \quad \text{при } (x, y) \in FG. \quad (5.2)$$

**Замечание 8.** *В доказательстве будут заодно отмечены условия, при которых бильярдная траектория преломляется и при которых испытывает полное отражение.*

*Доказательство.* Пусть  $(x, y) \in EF$ , то есть траектория преломляется на дуге окружности с радиусом  $r_1$ . Угол  $\theta_1$  откладывается между вектором скорости  $(v_x, v_y)$  и вектором нормали окружности, который пропорционален радиус-вектору  $(x, y)$ . Тогда в обозначениях  $\mathbf{x}^2 = x^2 + y^2$ ,  $\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2$  рассмотрим величину

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2 - \rho_1^2}{r_1^2} &= \frac{1}{\mathbf{x}^2} \left( \mathbf{x}^2 - \frac{(xv_y - yv_x)^2}{\mathbf{v}^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\mathbf{x}^2 \mathbf{v}^2} (\mathbf{x}^2 \mathbf{v}^2 - (x^2 v_y^2 - 2xyv_x v_y + y^2 v_x^2)) = \frac{1}{\mathbf{x}^2 \mathbf{v}^2} (x^2 v_x^2 + 2xyv_x v_y + y^2 v_y^2) = \\ &= \frac{1}{\mathbf{x}^2 \mathbf{v}^2} (xv_x + yv_y)^2 = \frac{1}{\mathbf{x}^2 \mathbf{v}^2} \langle (x, y), (v_x, v_y) \rangle^2 = \cos^2 \theta_1, \end{aligned}$$

где угол  $\theta_1$  корректно определен при  $\cos^2 \theta_1 \in (0,1)$ , то есть косинус угла имеет смысл при  $\rho_1^2 \in (0, r_1^2)$ .

Эта формула теряет смысл при  $\rho_1 > r_1$  (когда бильярдная траектория не пересекает дугу  $EF$ ) — тогда  $\cos^2 \theta_1 < 0$ ; случай  $\cos^2 \theta_1 > 1$  соответствует  $\rho_1^2 < 0$ . Аналогичные соображения справедливы для  $\cos^2 \theta_2 = \frac{r_1^2 - \rho_2^2}{r_1^2}$ .

Пусть  $n_1 < n_2$ . Тогда если величина  $\frac{n_2}{n_1} \cos \theta_2 \in [-1,1]$ , то в силу закона (\*) она совпадает с корректно определенным  $\cos \theta_1$ , откуда следует первое равенство утверждения. Остается лишь записать тождество  $(n_1 \cos \theta_1)^2 = (n_2 \cos \theta_2)^2$  через  $r_1, \rho_1, \rho_2$ , согласно приведенным выше выражениям. При  $\cos \theta_2 > \frac{n_1}{n_2}$  не существует удовлетворяющий закону преломления  $\cos \theta_1$ , и траектория отражается от  $EF$  в область  $\Omega_2$ .

Случай  $n_1 > n_2$  рассматривается аналогично: величина  $\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_1 \in [-1,1]$ , соответствует корректно определенному  $\cos \theta_2$ , что позволяет получить нужное равенство. При  $\cos \theta_1 > \frac{n_2}{n_1}$  траектория отражается от  $EF$  в область  $\Omega_1$ .

Пусть  $(x,y) \in FG$ , то есть траектория преломляется на отрезке горизонтальной прямой  $\{x \in (r_1, r_2), y = 0\}$ . Тогда

$$\frac{\rho_1^2}{x^2} = \frac{(xv_y - yv_x)^2}{x^2 \mathbf{v}^2} = \frac{(xv_y)^2}{x^2 \mathbf{v}^2} = \frac{v_y^2}{\mathbf{v}^2} = \cos^2 \theta_1,$$

аналогично получается равенство  $\frac{\rho_2^2}{x^2} = \cos^2 \theta_2$ . Из закона (\*) следует второе равенство утверждения везде, где корректно определены  $\cos^2 \theta_1$  и  $\cos^2 \theta_2$ . Опишем области корректного определения указанных величин.

Для первой координаты точки на сегменте  $FG$  справедливо  $x \in (r_1, r_2)$ , следовательно  $\frac{1}{x^2} \in (\frac{1}{r_2^2}, \frac{1}{r_1^2})$ . Косинус  $\cos \theta_1$  корректно определен тогда и только тогда, когда  $\frac{\rho_1^2}{x^2} \in (0,1)$ , то есть  $\frac{1}{x^2} \in (0, \frac{1}{\rho_1^2})$ . Комбинируя эти неравенства, выделим следующие случаи:

- При  $\frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{\rho_1^2}$  в каждой точке  $FG$  определен  $\cos \theta_1$ ;
- При  $\frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{\rho_1^2} < \frac{1}{r_1^2}$  в точках  $x > \rho_1$  отрезка  $FG$  определен  $\cos \theta_1$ ;
- При  $\frac{1}{\rho_1^2} < \frac{1}{r_2^2}$  ни в одной точке отрезка  $FG$  не определен  $\cos \theta_1$ .

Аналогично выделяются случаи, в которых определен  $\cos \theta_2$ . Таким образом, бильярдная траектория преломляется в любой точке  $FG$  при  $\max(\rho_1, \rho_2) < r_1$ . При  $r_1 < \max(\rho_1, \rho_2)$  траектория может преломиться в точках  $(x,0) \in FG$ , где  $\max(\rho_1, \rho_2) < x < r_2$ .

□

**Замечание 9.** Если траектория при переходе из  $\Omega_1$  в  $\Omega_2$  преломляется на дуге  $EF$ , то для величины  $\rho_2^2$  справедливо  $0 < \rho_2^2 < r_1^2$ . И наоборот, если траектория при переходе из  $\Omega_2$  в  $\Omega_1$  преломляется на дуге  $EF$ , то для величины  $\rho_1^2$  справедливо  $0 < \rho_1^2 < r_1^2$ .

Разобьем бильярдную траекторию в точках пересечения дуги  $EF$  на фрагменты  $T_k, k \geq 1$ .

Каждый фрагмент бильярдной траектории  $T_k$  образует ломаную кривую в  $\Omega \setminus EF$ , где  $EF \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . Введем на  $\Omega \setminus EF$  функцию  $\Xi(x, y, v_x, v_y)$  по формуле

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \rho^2(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \rho^2(x, y, v_x, v_y)n_2^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Эта функция постоянна в каждой точке фрагмента бильярдной траектории  $T_k$ , но на разных фрагментах значения могут различаться.

Рассмотрим значения интеграла  $\Xi$  для двух последовательных фрагментов  $T_k, T_{k+1}$ . Выясним, как они связаны, или, что то же самое, как меняется интеграл  $\Xi$  при преломлении на дуге  $EF$ .

**Утверждение 11.** Значения  $\Xi_k$  и  $\Xi_{k+1}$  интеграла  $\Xi$ , соответствующие фрагментам траектории  $T_k$  и  $T_{k+1}$ , различаются на величину  $r_1^2(n_1^2 - n_2^2)$ .

*Доказательство.* Значение  $\Xi_k$  на фрагменте  $T_k$  определяет радиусы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  по формуле (5.3). Здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  являются радиусами окружностей, которых касаются звенья (или их продолжения) фрагмента  $T_k$ , содержащиеся в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , соответственно. Аналогично определяются радиусы  $\tilde{\rho}_1$  и  $\tilde{\rho}_2$  для фрагмента  $T_{k+1}$  бильярдной траектории.

Пусть бильярдная траектория при преломлении на дуге  $EF$  переходит из области  $\Omega_1$  в область  $\Omega_2$ . Тогда радиусы  $\rho_1^2$  и  $\tilde{\rho}_2^2$  связаны формулой (5.1):  $(\rho_1^2 - r_1^2)n_1^2 = (\tilde{\rho}_2^2 - r_1^2)n_2^2$ . С другой стороны, по формуле (5.3):  $\Xi_k = \rho_1^2 n_1^2$  и  $\Xi_{k+1} = \tilde{\rho}_2^2 n_2^2$ . Следовательно,  $\Xi_k = \Xi_{k+1} + r_1^2(n_1^2 - n_2^2)$ .

Аналогично рассматривается случай, когда траектория переходит из области  $\Omega_2$  в  $\Omega_1$ , преломляясь на дуге  $EF$ . Получим  $\Xi_k = \Xi_{k+1} - r_1^2(n_1^2 - n_2^2)$ .  $\square$

Значению интеграла  $\Xi$  поставим в соответствие точку плоскости  $\mathbb{R}^2$  по формуле

$$\Xi \mapsto P(\Xi) = (\rho_1^2, \rho_2^2) = \left( \frac{\Xi}{n_1^2}, \frac{\Xi}{n_2^2} \right). \quad (5.4)$$

Если рассмотреть фрагмент  $T_k$  бильярдной траектории, который проходит по обеим областям  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , то первая (вторая) координата точки  $P(\Xi_k)$  является квадратом радиуса окружности  $\rho_1(\rho_2)$ , которой касаются звенья фрагмента  $T_k$ , лежащие в  $\Omega_1$  (в  $\Omega_2$ ). Отметим, что если фрагмент  $T_k$  целиком содержится в  $\Omega_1$  (в  $\Omega_2$ ), то только первая (вторая) координата точки  $P(\Xi_k)$  имеет смысл, а другая координата информации не несет.

**Замечание 10.** Для фиксированных  $r_1, n_1, n_2$  точка  $P(\Xi_k)$ , соответствующая каждому фрагменту бильярдной траектории  $T_k$ , лежит на прямой  $L$ , которая в декартовых координатах  $(\rho_1^2, \rho_2^2)$  задается уравнением

$$\rho_2^2 = \rho_1^2 \frac{n_1^2}{n_2^2}. \quad (5.5)$$

Наглядно можно представлять себе, что возможные случаи соотношений между числами  $r_1, n_1, n_2$  соответствуют всевозможным прямым, проходящим через начало координат и образующим с горизонтальной осью угол  $\theta = \arctg \frac{n_1^2}{n_2^2}$ , который меняется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ .

Дальнейший анализ задачи Б по сравнению с задачей А значительно сложнее из-за того, что  $\Xi$  может испытывать скачки. Но вместе с тем ясно, что при анализе системы нужно следить за тем, как по отношению к величинам  $r_0^2, r_1^2, r_2^2$  расположены значения  $\frac{\Xi}{n_1^2}$  и  $\frac{\Xi}{n_2^2}$ , то есть квадраты радиусов окружностей, касающихся звеньев траектории, расположенных в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , соответственно.

**Замечание 11.** Ясно, что на форму траектории влияют не абсолютные величины  $n_1, n_2$ , а только их отношение. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать их нормированными таким образом, что  $\frac{1}{n_1^4} + \frac{1}{n_2^4} = 1$ . Удобно выбрать угол  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , для которого  $\operatorname{tg} \theta = \frac{n_1^2}{n_2^2}$ .

Отображение  $\Xi \mapsto P(\Xi)$ , заданное формулой (5.4), запишем в виде

$$P(\Xi) = (\Xi \cos \theta, \Xi \sin \theta).$$

**Замечание 12.** Для произвольной точки плоскости с координатами  $(\rho_1^2, \rho_2^2)$  соответствующая ей прямая  $L$  определяется углом  $\theta = \arctg \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}$ . Соответствующее точке значение  $\Xi$  на этой прямой  $L$  совпадает с нормью

радиус-вектора точки. Для величины  $\gamma = r_1^2(n_1^2 - n_2^2)$  между значениями  $\Xi_k$  и  $\Xi_{k+1}$  справедливо следующее выражение:

$$\gamma = r_1^2(n_1^2 - n_2^2) = r_1^2 \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right).$$

Параметризуем прямую  $L: \xi \mapsto P(\xi) = (\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$ . Прямая  $L$ , заданная уравнением (5.5) пересекает координатную линию  $\{\rho_1^2 = r_1^2\}$  в точке  $(r_1^2, r_1^2 \operatorname{tg} \theta) = P(\frac{r_1^2}{\cos \theta})$ . Аналогично, прямая  $L$  и координатная линия  $\{\rho_2^2 = r_1^2\}$  пересекаются в точке  $(\frac{r_1^2}{\operatorname{tg} \theta}, r_1^2) = P(\frac{r_1^2}{\sin \theta})$ .

**Замечание 13.** Удобно выбрать  $\gamma$  положительным. Для  $n_1^2 < n_2^2$  имеем  $\theta < \frac{\pi}{4}$  и тогда  $\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} > 0$ , поэтому положим  $\gamma = r_1^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \right)$ . В случае  $n_1^2 > n_2^2$  величину  $\gamma$  определим как  $\gamma = r_1^2 \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right)$ . Также определим точки пересечения  $L$  с координатными линиями  $\{\rho_1^2 = r_1^2\}$  и  $\{\rho_2^2 = r_1^2\}$  как  $L_0 = P(\frac{r_1^2}{\cos \theta})$  и  $L_1 = P(\frac{r_1^2}{\sin \theta})$  для  $n_1^2 < n_2^2$  и наоборот, если  $n_1^2 > n_2^2$ . Тогда вне зависимости от отношения  $n_1^2 : n_2^2$  выполняются соотношения  $\gamma_L = \overrightarrow{L_0 L_1}$  и  $\gamma > 0$ . Здесь вектор  $\gamma_L$  соответствует вектору, направленному из точки  $P(\Xi_k)$  в точку  $P(\Xi_{k+1})$ , где  $\Xi_k < \Xi_{k+1}$ .

В определениях замечания 13 направления роста и убывания интеграла  $\Xi$  можно проиллюстрировать на примере рис. 5.2 и 5.3.

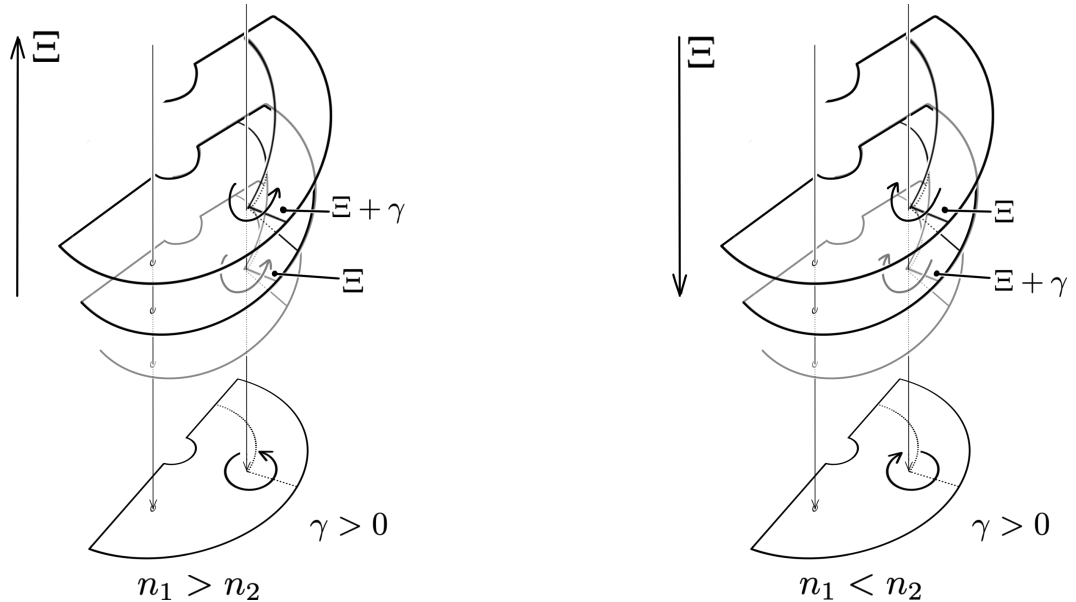


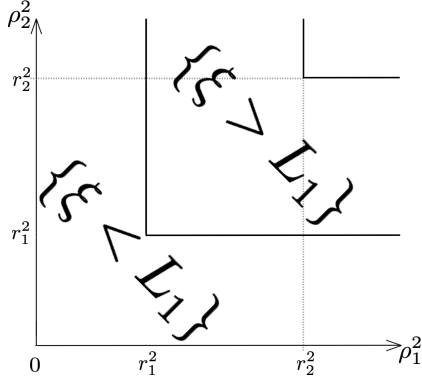
Рисунок 5.2 — Направление роста  $\Xi$  при  $n_1 > n_2$ .

Рисунок 5.3 — Направление роста  $\Xi$  при  $n_1 < n_2$ .

Точка  $L_1$  разделяет прямую  $L$  на две части относительно параметра  $\xi$  на прямой  $L: \{\xi < L_1\}$  и  $\{\xi > L_1\}$ . Объединяя эти части по всевозможным прямым

$L$ , получим области в  $\mathbb{R}^2$ , изображенные на рис. 5.4. Формальные определения областей см. неравенства (5.6) и (5.7).

При этом в силу замечания 9 если бильярдная траектория пересекает  $EF$  хотя бы однажды, тогда точки, соответствующие фрагментам  $T_k$  такой траектории, находятся только на части прямой  $L$ , попадающей внутрь области  $\{\xi < L_1\}$ , изображенной на рис. 5.4.



$$\{\xi < L_1\} = \{\rho_1^2 > 0, \rho_2^2 > 0\} \setminus \{\rho_1^2 > r_1^2, \rho_2^2 > r_1^2\}, \quad (5.6)$$

$$\{\xi > L_1\} = \{\rho_1^2 > r_1^2, \rho_2^2 > r_1^2\} \setminus \{\rho_1^2 > r_2^2, \rho_2^2 > r_2^2\}. \quad (5.7)$$

Рисунок 5.4 — Области  $\{\xi < L_1\}$  и  $\{\xi > L_1\}$ .

### 5.3 Случай $\{\xi < L_1\}$

В область  $\{\xi < L_1\}$  попадают точки, соответствующие таким и только таким фрагментам бильярдных траекторий, которые хотя бы в одной точке попадают на дугу  $EF$ . При этом любым двум соседним фрагментам  $T_m, T_{m+1}$  таких траекторий на прямой  $L$  соответствуют такие точки  $P(\Xi_m), P(\Xi_{m+1}) = P(\Xi_m \pm \gamma)$ , которые соединяются вектором  $\gamma_L$ .

В силу коллинеарности радиус-векторов точек  $L_0$  и  $L_1$ , справедливо равенство

$$\gamma = \|\gamma_L\| = \|L_1 - L_0\| = \|L_1\| - \|L_0\| < \|L_1\|.$$

Введем величину

$$\varepsilon = \|L_1\| - k\gamma, \quad \text{где } k = \left\lfloor \frac{\|L_1\|}{\gamma} \right\rfloor. \quad (5.8)$$

Тогда для  $\xi < \varepsilon$  справедливо следующее неравенство:

$$\xi + k\gamma < \varepsilon + k\gamma = \varepsilon + \left\lfloor \frac{\|L_1\|}{\gamma} \right\rfloor \gamma = \|L_1\|.$$

Для  $\varepsilon < \xi < \gamma$  получим

$$\begin{aligned}\xi + (k-1)\gamma &< \gamma + (k-1)\gamma < \|L_1\|, \\ \xi + k\gamma &> \varepsilon + k\gamma = \|L_1\|.\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную пару параметров  $r_1, n_1/n_2$  и прямую  $L$ , соответствующую ей. Положим  $k = \left\lfloor \frac{\|L_1\|}{\gamma} \right\rfloor$ . Тогда множество точек вида  $(\rho_1^2, \rho_2^2) = P(\xi) \in [0, L_1] \subset L$ , можно разделить на два непересекающихся множества:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{k+1}, & \text{ если } \left\{ \frac{\xi}{\gamma} \right\} < \frac{\varepsilon}{\gamma}, \\ \tilde{C}_k, & \text{ если } \left\{ \frac{\xi}{\gamma} \right\} > \frac{\varepsilon}{\gamma}.\end{aligned}$$

Теперь заметим, что  $\Xi_m = \Xi_1 \pmod{\gamma}$ , т.е.  $\Xi_m$  отличается от  $\Xi_1$  на целочисленное кратное  $\gamma$ . Однако набор всех значений  $\Xi_m$  на траектории конечен. Это легко видеть из рис. 5.4. А именно, точки  $P(\Xi)$  должны лежать на отрезке, соединяющем точку  $0$  и точку  $L_1$ .

Отсюда следует, что если на каком-то фрагменте  $T_{m_0}$  бильярдной траектории значение  $\Xi_{m_0}$  принадлежит  $\tilde{C}_n$ , тогда множество значений  $\Xi_m$  для всех фрагментов  $T_m$  этой же бильярдной траектории содержится в  $\tilde{C}_n$ .

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

**Утверждение 12.** *Если на бильярдной траектории для какого-то ее фрагмента  $T_{m_0}$  выполнено  $\Xi_{m_0} \in \tilde{C}_n$ ,  $n \geq 1$ , то на этой бильярдной траектории  $\Xi$  принимает не более  $n$  различных значений. Значение  $\Xi$  меняется при пересечении траекторией дуги  $EF$ .*

**Утверждение 13.** *Для величины  $k$ , заданной соотношением (5.8), справедлива формула*

$$k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} \right\rfloor & n_1 < n_2; \\ \left\lfloor \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} \right\rfloor & n_1 > n_2. \end{cases}$$

*Доказательство.* Согласно замечанию 13, для  $n_1 < n_2$  справедливы определения  $L_1 = P\left(\frac{r_1^2}{\sin\theta}\right)$  и  $\gamma = r_1^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)$ . Тогда

$$\frac{\|L_1\|}{\gamma} = \frac{r_1^2 \sin\theta \cos\theta}{\sin\theta r_1^2 (\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\theta},$$

где из равенства  $\operatorname{tg} \theta = \frac{n_1^2}{n_2^2}$  получим  $\frac{\|L_1\|}{\gamma} = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}$ . Целая часть от левой части равенства совпадает с  $k$ .

Для  $n_1 > n_2$  нужно рассуждать аналогичным образом, с учетом того, что в этом случае  $L_1 = P(\frac{n_1^2}{\cos \theta})$  и  $\gamma = r_1^2 (\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta})$  (см. зам. 13).  $\square$

Объединим множества  $\tilde{C}_k$  по всевозможным прямым  $L$  (5.5), определенным всевозможными отношениями  $\frac{n_1^2}{n_2^2}$ . Аналогичным образом объединим  $\tilde{C}_{k+1}$  по всевозможным прямым  $L$ . Эти объединения будем обозначать  $C_k$  и  $C_{k+1}$ , соответственно.

Опишем кривые, которые разделяют множества  $C_k$  и  $C_{k+1}$ . Если  $(x, y)$  — точка плоскости, то положим  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние до начала координат. В рассуждениях ниже  $\xi = \|(\rho_1^2, \rho_2^2)\|$ . Введем обозначения для трех семейств кривых:

$$I = \{\|L_1\| = m\gamma\}_{m \geq 2}, \quad II = \{\xi = m\gamma\}_{m \geq 1}, \quad III = \{\xi = m\gamma + \varepsilon\}_{m \geq 0}. \quad (5.9)$$

Зафиксируем  $\frac{n_1^2}{n_2^2}$ . Множество  $\tilde{C}_k$  на прямой  $L$  соответствует параметру  $\xi$ , для которого  $1 > \left\{ \frac{\xi}{\gamma} \right\} > \frac{\varepsilon}{\gamma}$ . Это неравенство можно переписать в виде

$$\varepsilon + \left\lfloor \frac{\xi}{\gamma} \right\rfloor \gamma < \xi < \left( 1 + \left\lfloor \frac{\xi}{\gamma} \right\rfloor \right) \gamma.$$

Таким образом,  $P(\xi)$  находится над кривой  $III_m$  и ниже кривой  $II_{m+1}$ , где  $m = \left\lfloor \frac{\xi}{\gamma} \right\rfloor$ .

Множество  $\tilde{C}_{k+1}$  на прямой  $L$  соответствует параметру  $\xi$ , для которого  $0 < \left\{ \frac{\xi}{\gamma} \right\} < \frac{\varepsilon}{\gamma}$ , что можно записать как

$$\left\lfloor \frac{\xi}{\gamma} \right\rfloor \gamma < \xi < \varepsilon + \left\lfloor \frac{\xi}{\gamma} \right\rfloor \gamma.$$

Таким образом,  $P(\xi)$  находится над кривой  $II_m$  и ниже кривой  $III_m$ , где  $m = \left\lfloor \frac{\xi}{\gamma} \right\rfloor$ .

#### 5.4 Уравнения кривых, разделяющих множества $C_k$

Ранее мы определили  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{n_1^2}{n_2^2}$ . В то же время, для любой точки области  $\Omega$  с разрезом вдоль кривой  $EF$ , где функция  $\Xi$  однозначна, выполняется равенство  $\rho_1^2 n_1^2 = \rho_2^2 n_2^2$ , где  $(\rho_1^2, \rho_2^2)$  — декартовы координаты точки. Тогда можем считать  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}$ . Для удобства будем писать  $x = \rho_1^2$  и  $y = \rho_2^2$ .

**Утверждение 14.** Для кривых из семейств I, II, III, см. (5.9) справедливы следующие уравнения:

Таблица 3 — Уравнения кривых семейств I, II и III

кривая	$n_1^2 < n_2^2$	$n_1^2 > n_2^2$	параметр
$I_m$	$y = \frac{m-1}{m}x$	$y = \frac{m}{m-1}x$	$m \geq 2$
$II_m$	$xy = mr_1^2(x-y)$	$xy = mr_1^2(y-x)$	$m \geq 1$
$III_m$	$xy = r_1^2(x-y) \left( m + \left\{ \frac{x}{x-y} \right\} \right)$	$xy = r_1^2(y-x) \left( m + \left\{ \frac{y}{y-x} \right\} \right)$	$m \geq 0$

*Доказательство.* Пусть  $n_1^2 < n_2^2$ .

Кривые  $I_m$  первого семейства определяются из соображения  $\|L_1\| = m\gamma$ , где целое  $m \geq 2$ . Тогда  $\|L_1\| = \frac{r_1^2}{\sin \theta}$  и  $\gamma = r_1^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \right)$ . Подстановка  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$  в уравнение позволяет привести равенство  $\|L_1\| = m\gamma$  к виду  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}r_1^2}{y} = m \frac{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}r_1^2}{xy}$ , откуда элементарными преобразованиями можно получить эквивалентное уравнение

$$y = \frac{m-1}{m}x, \quad m \geq 2.$$

Кривые  $II_m$  второго семейства удовлетворяют равенству  $\xi = m\gamma$ ,  $m \geq 1$ , где  $\xi = \|(x,y)\|$ . Подстановка  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$  в уравнение  $\xi = m\gamma$  позволяет получить уравнение вида

$$xy = mr_1^2(x-y), \quad m \geq 1.$$

Для кривых  $III_m$  третьего семейства справедливо  $\xi = m\gamma + \varepsilon$ ,  $m \geq 0$ . Напомним, что  $\varepsilon = \left\{ \frac{\|L_1\|}{\gamma} \right\} \gamma$ . Подстановкой  $\theta$  упростим отношение  $\frac{\varepsilon}{\gamma} = \left\{ \frac{x}{x-y} \right\}$ , тогда после подстановки  $\theta$  в равенство  $\frac{\xi}{\gamma} = m + \frac{\varepsilon}{\gamma}$  получим

$$xy = r_1^2(x-y) \left( m + \left\{ \frac{x}{x-y} \right\} \right), \quad m \geq 0.$$

Случай  $n_1^2 > n_2^2$  рассматривается аналогично. Отличаться будут лишь определения величин:  $\|L_1\| = \frac{r_1^2}{\cos \theta}$ ,  $\gamma = r_1^2 \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right)$ .  $\square$

## 5.5 «Решетка» областей случая $\{\xi < L_1\}$

На рис. 5.5 в области  $\{\xi < L_1\}$  штриховкой выделены области  $\left\{ \frac{\xi}{\gamma} \right\} < \frac{\varepsilon}{\gamma}$ . Также изображены несколько кривых семейств I, ..., III (черные сплошные

кривые соответствуют случаю  $n_1^2 < n_2^2$ , пунктирные — случаю  $n_1^2 > n_2^2$ ), разделяющих классы  $C_k$ . На рис. 5.5, 5.6 есть продолжения кривых вне области  $\{\xi < L_1\}$  — это сделано только для наглядности, для нас смысл имеют только кривые в области  $\{\xi < L_1\}$ .

На рис. 5.6 некоторые кривые семейств  $I, \dots, III$  подписаны.

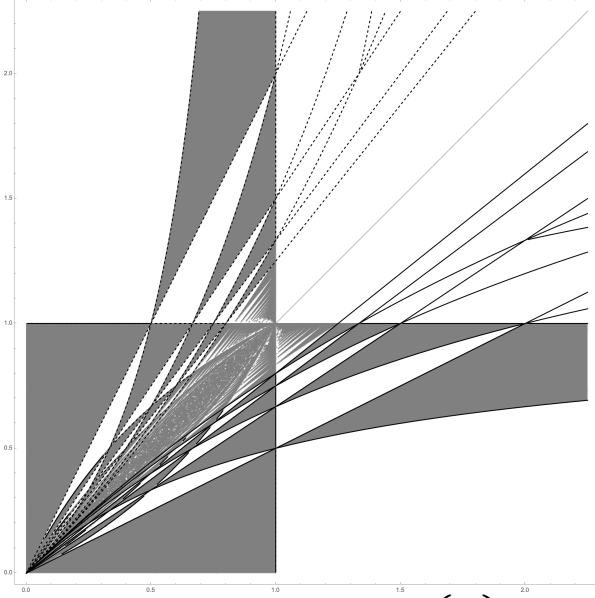


Рисунок 5.5 — Области  $\left\{ \frac{\xi}{\gamma} \right\} < \frac{\varepsilon}{\gamma}$  (без штриховки) и  $\left\{ \frac{\xi}{\gamma} \right\} > \frac{\varepsilon}{\gamma}$ .

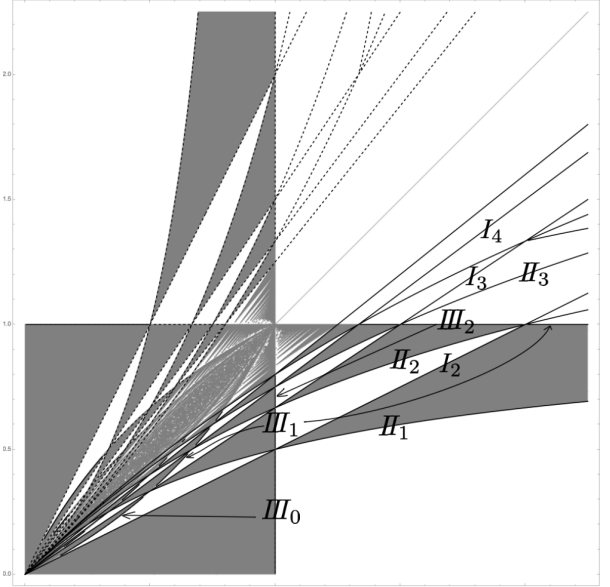


Рисунок 5.6 — Области с обозначениями некоторых граничных кривых.

Далее мы рассматриваем случай  $n_1^2 < n_2^2$ . Рассуждения для  $n_1^2 > n_2^2$  аналогичны.

Введем обозначение  $(x = \rho_1^2, y = \rho_2^2)$  в области  $y < x, y < 1$  введем координаты  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  по формуле

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left( \frac{xy}{(x-y)r_1^2}, \frac{x}{x-y} \right). \quad (5.10)$$

Тогда приведенные в утверждении 14 уравнения можно переписать в следующем виде:

Таблица 4 — Уравнения кривых трех семейств после преобразования

кривая	в координатах $(x, y)$	в координатах $(\tilde{x}, \tilde{y})$	параметр
$I_m$	$y = \frac{m-1}{m}x$	$\tilde{y} = m$	$m \geq 2$
$II_m$	$xy = mr_1^2(x-y)$	$\tilde{x} = m$	$m \geq 1$
$III_m$	$xy = r_1^2(x-y) \left( m + \left\{ \frac{x}{x-y} \right\} \right)$	$\tilde{x} = m + \{\tilde{y}\}$	$m \geq 0$

Замена координат (5.10) обладает замечательным свойством: прямая  $L$ , которая задавалась уравнением (5.5):  $y = \frac{n_2^2}{n_2}x$ , переходит в прямую  $\tilde{L} : \left\{ \tilde{y} = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} \right\}$ . Более того, несмотря на нелинейность замены координат (5.10), сдвиг на вектор  $\gamma_L$  вдоль прямой  $L$  соответствует сдвигу на вектор  $\tilde{\gamma}_L = (1, 0)$  вдоль прямой  $\tilde{L}$ . Чтобы не загромождать обозначения, далее вместо  $\tilde{L}$  и  $\tilde{\gamma}_L$  будем писать  $L$  и  $\gamma_L$ ; это не вызовет недоразумений.

Для фиксированных  $n_1, n_2$  точка прямой  $L$ , соответствующая значениям интеграла  $\Xi$ , в старой системе координат пробегает отрезок от  $(0, 0)$  до  $P\left(\frac{r_1^2}{\sin \theta}\right) = \left(\frac{r_1^2}{\operatorname{tg} \theta}, r_1^2\right)$ , а в новой системе координат — от  $\left(0, \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}\right)$  до  $\left(\frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}, \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}\right)$ .

Фрагмент диаграммы 5.5 для  $n_1 < n_2$  в новой системе координат изображен на рис. 5.7.

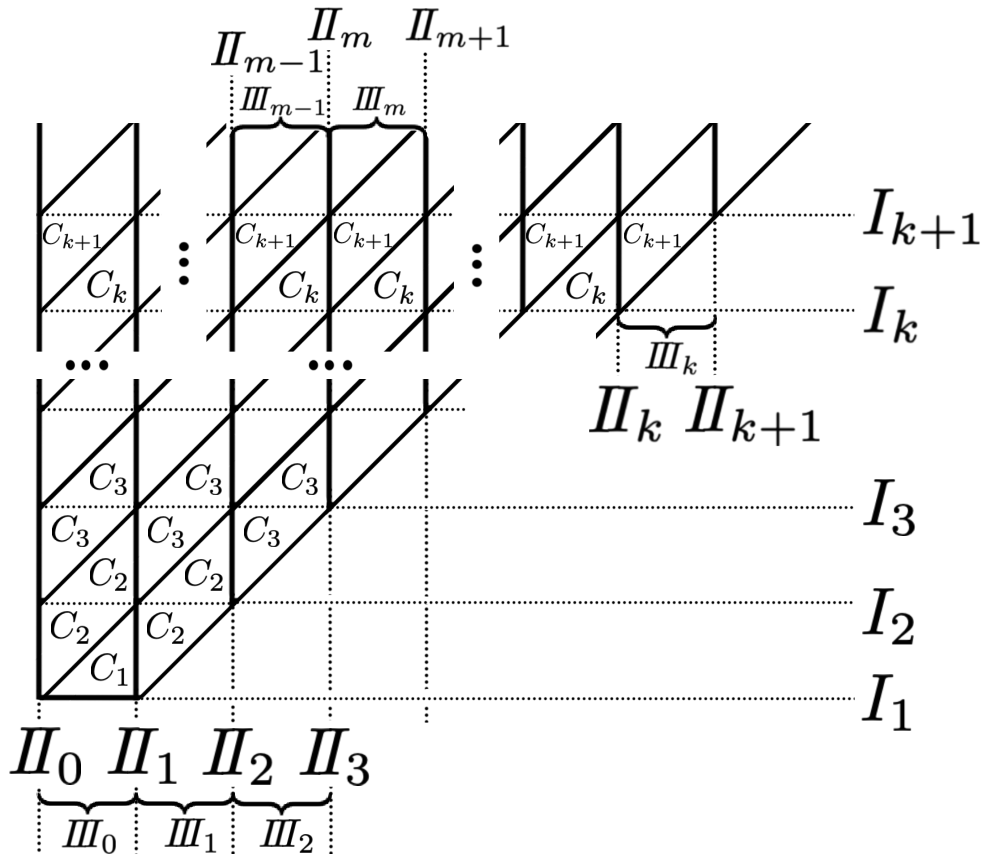


Рисунок 5.7

**Замечание 14.** Заметим, что на рис. 5.7 появляются новые прямые  $II_0$  и  $I_1$ , которые отсутствовали на рис. 5.5. Они введены для удобства и продолжают определения из уравнения (5.9). Кривая  $II_0$  соответствует (см. утверждение 14 и определение координат  $\tilde{x}, \tilde{y}$ ) случаю, когда  $\rho_1^2 = 0$  или

$\rho_2^2 = 0$ . Кривая  $I_1$  соответствует предельному случаю при  $n_1 \rightarrow 0$ , который не соответствует бильярду с законом преломления (\*).

## 5.6 Классификация фрагментов $T_m$ бильярдной траектории

Фрагменты  $T_m$  произвольной траектории можно разделить на те, которые допускают преломление через дугу  $EF$  в обоих направлениях (1) и на те, которые допускают переход через  $EF$  только в одном направлении (2). Последние, в свою очередь, могут допускать переход либо только в сторону увеличения интеграла  $\Xi$  (2а), либо только в сторону его уменьшения (2б).

Эти три случая описываются следующим образом в терминах значения интеграла  $\Xi$ :

(1) При  $\Xi \in (\gamma, \|L_1\| - \gamma)$  величина  $\Xi \pm \gamma$  остается в пределах  $(0, \|L_1\|)$ , где определены обе каустики;

(2) В противном случае преломления не происходит:

(2а) При пересечении  $EF$  в сторону уменьшения  $\Xi$  при  $\Xi < \gamma$ , поскольку должно выполняться неравенство  $\cos^2 \theta > 1$ ;

(2б) При пересечении  $EF$  в сторону увеличения  $\Xi$  при  $\Xi > \|L_1\| - \gamma$ , поскольку должно выполняться неравенство  $\cos^2 \theta < 0$ . В частности, этому случаю соответствует  $\rho_1 > r_1$ .

Равенство  $\Xi = \gamma$  для произвольной прямой  $L$  эквивалентно ее пересечению с кривой  $II_1$  (см. 5.9). Аналогично равенство  $\Xi = \|L_1\| - \gamma$  эквивалентно пересечению  $L$  с кривой  $\widehat{III}$ , составленной из сегментов кривых  $III_{k-1}$  (см. табл. 3 и 4). Для наглядности кривые показаны на рис. 5.8.

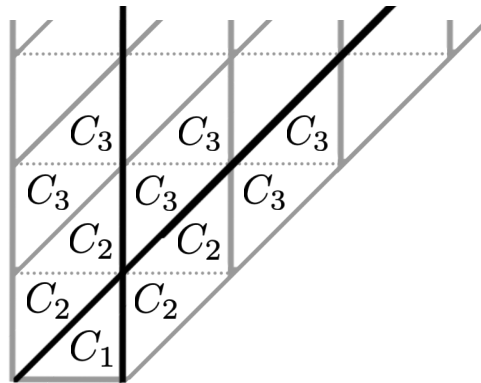


Рисунок 5.8 — Кривые  $II_1$  и  $\widehat{III}$ .

Кривые  $II_1$  и  $\widehat{III}$  разбивают диаграмму, изображенную на рис. 5.8 на четыре части. Поведение фрагмента бильярдной траектории на дуге  $EF$  можно описать, зная какой из четырех частей принадлежит точка  $P(\Xi)$  (см. (5.4)), где  $\Xi$  – соответствующее этому фрагменту значение интеграла.

- Для точек левее  $II_1$  невозможно преломление с уменьшением  $\Xi$ , поэтому (см. рис. 5.3) траектория в области  $\Omega_2$  отражается от  $EF$ .
- Для точек правее  $\widehat{III}$  радиус кастуки  $\rho_1$  превосходит радиус  $r_1$  окружности, содержащей дугу  $EF$ , потому траектория не может пересечь эту дугу в области  $\Omega_1$ .

Для траекторий, соответствующих точкам правее  $\widehat{III}$ , поведение фрагмента траектории можно уточнить: а именно, рассмотрим  $IV_0$  как фрагмент прямой  $\tilde{y} = \tilde{x} \frac{r_1^2}{r_2^2} + 1$  в области  $\{\tilde{x} > 0\} \cap \{\tilde{y} < \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\}$ .

- Тогда для точек правее  $IV_0$  соответствующий фрагмент траектории в области  $\Omega_2$  отражается от ребра  $FG$ .

На рис. 5.9 изобразим диаграмму 5.8, дополненную отрезком  $IV_0$ .

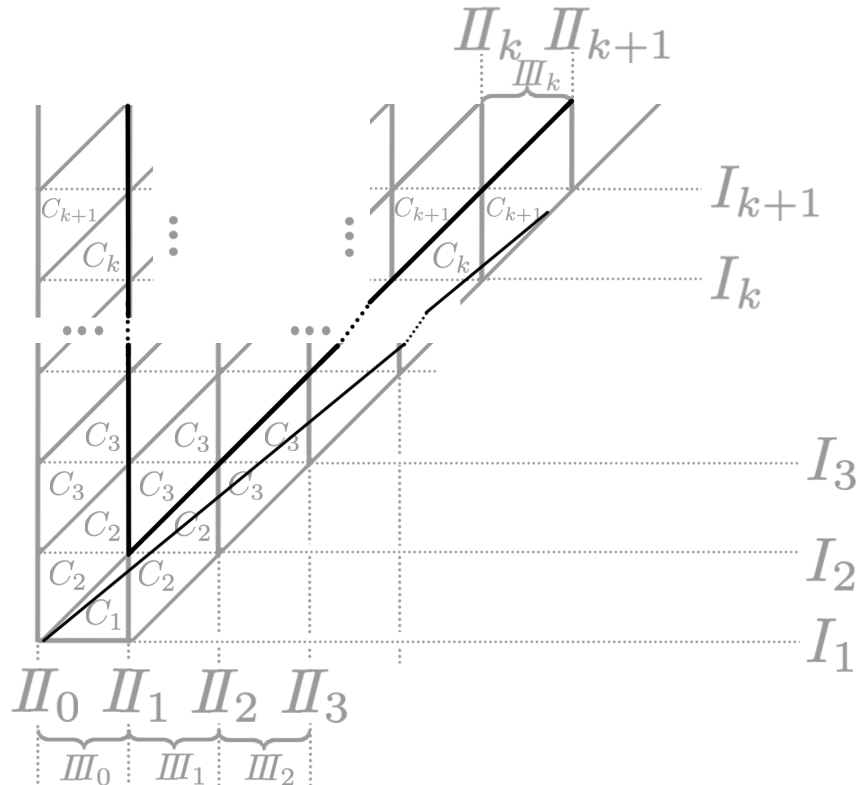


Рисунок 5.9 — Прямая, соответствующая прямой  $\rho_1^2 = r_2^2$ .

Из вышесказанного справедливо следующее:

**Утверждение 15.** Пусть  $n_1 < n_2$ . Рассмотрим произвольную точку  $Q$  в области  $\{\xi < L_1\}$ . Тогда, в зависимости от расположения точки  $Q$  относительно кривых  $II_1$ ,  $\widehat{III}$  и  $IV_0$ , всевозможные фрагменты  $T_m$  бильярдных траекторий, соответствующие точке  $Q$ , замечают следующие области:

- изображенную на рис. 5.10, если точка  $Q$  левее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$ .
- изображенную на рис. 5.11, если точка  $Q$  правее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$ .
- изображенную на рис. 5.12, если точка  $Q$  правее  $II_1, \widehat{III}$  и левее  $IV_0$ .
- изображенную на рис. 5.13, если точка  $Q$  левее  $II_1, IV_0$  и правее  $\widehat{III}$ .
- изображенную на рис. 5.14, если точка  $Q$  правее  $II_1$  и  $IV_0$ .
- изображенную на рис. 5.15, если точка  $Q$  левее  $II_1$  и правее  $IV_0$ .

При этом случаям, показанным на рис. 5.13, 5.15, соответствует только множество  $C_1$ , остальным соответствуют множества  $C_k, k \geq 2$ .

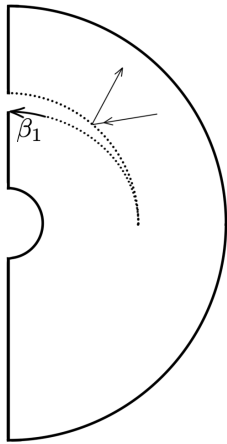


Рисунок 5.10 — левее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$ .

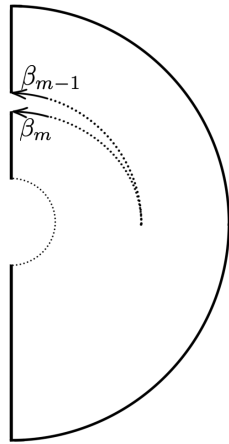


Рисунок 5.11 — правее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$ .

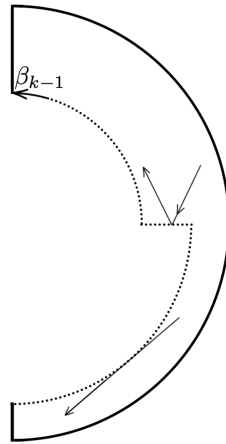


Рисунок 5.12 — правее  $II_1, \widehat{III}$  и левее  $IV_0$ .

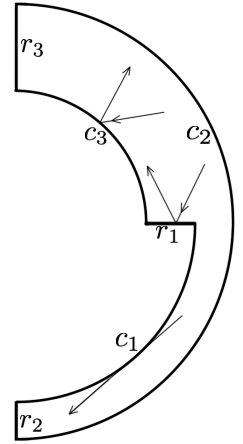


Рисунок 5.13 — левее  $II_1, IV_0$ , правее  $\widehat{III}$ .

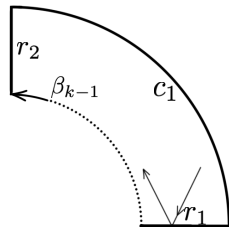


Рисунок 5.14 — правее  $II_1$  и  $IV_0$ .

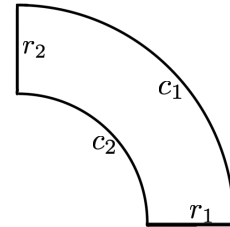


Рисунок 5.15 — левее  $II_1$  и правее  $IV_0$ .

**Замечание 15.** Приведенные соображения справедливы для  $n_1^2 < n_2^2$ . Случай  $n_1^2 > n_2^2$  рассматривается аналогично: рассмотрим замену координат  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left( \frac{xy}{(y-x)r_1^2}, \frac{y}{y-x} \right)$ . Тогда кривые  $I_m$  будут задаваться уравнением  $\tilde{y} = t$ , уравнения для  $II_m$  — уравнением  $\tilde{x} = t$ , а для  $III_m$  примут вид  $\tilde{x} = t + \{\tilde{y}\}$ .

Прямая  $L$  снова будет горизонтальной прямой ( $\tilde{y} = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2}$ ). При пересечении дуги  $EF$  интеграл  $\Xi$  меняется таким образом, что точка на прямой  $L$  сдвигается на вектор  $\pm\gamma_L$ , где  $\gamma_L = (1, 0)$ . В свою очередь, прямая  $y = \rho_2^2 = r_2^2$  соответствует прямой  $\tilde{y} = \tilde{x} \frac{r_1^2}{r_2^2} + 1$ .

Тогда изображенные на рис. 5.7–5.9 диаграммы справедливы и для  $n_1^2 > n_2^2$ . Но листы склейки на рис. 5.10–5.15 будут выглядеть иначе.

## 5.7 Неособые поверхности для случая $\{\xi < L_1\}$

### 5.7.1 Случай $n_1^2 < n_2^2$

На рис. 5.9 отрезок  $IV_0$  в  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  пересекает по одной области, относящейся к классам  $C_1, \dots, C_k, C_{k+1}$ , где  $k = \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$ . Для каждой области  $C_i$ , пересеченной отрезком  $IV_0$  выделим ту часть, что находится по правую часть от  $IV_0$  в отдельный класс  $C'_i$ . Определим отрезки прямых

$$IV_m = \left\{ \tilde{y} = (\tilde{x} + m) \frac{r_1^2}{r_2^2} + 1 \right\} \cap \left\{ \tilde{y} < \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\}. \quad (5.11)$$

Отрезки  $IV_m, m \leq k$ , пересекают множества типа  $C_2, \dots, C_k, C_{k+1}$ . По аналогии с  $IV_0$  из пересеченных множеств выделим множества  $C'_2, \dots, C'_k$  (см. пример на рис. 5.16).

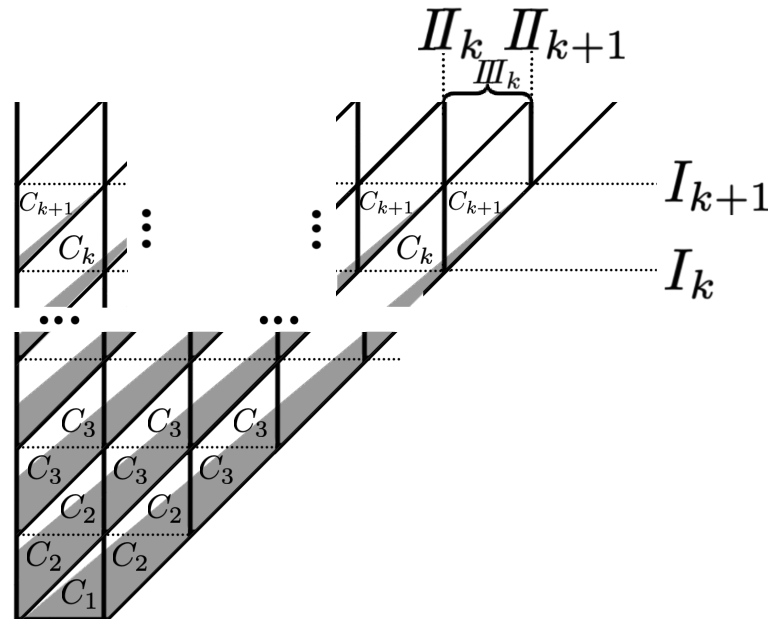


Рисунок 5.16 — Область  $C'_m$  — это часть  $C_m$ ; область  $C'_m$  выделена серым.

**Замечание 16.** Классы  $C'_k$  не определены при  $k > \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$ , поскольку отрезки прямых  $IV_k$  не пересекают области, относящиеся к таким  $C_k$ .

Напомним, что при  $\Xi$  таком, что  $P(\Xi) \in \{\xi < L_1\}$ , бильярдные траектории разбиваются на фрагменты  $T_m, m \geq 1$ , точками пересечения с дугой  $EF$ . При этом каждому фрагменту  $T_m$  сопоставляется одна из уникальных точек  $P(\Xi_1), \dots, P(\Xi_k)$ , соответствующих возможным значениям интеграла  $\Xi$  (напомним: он многозначен). В свою очередь, каждая из точек  $P(\Xi_j)$  соответствует одной из поверхностей с краем и может быть определена как изоинтегральная поверхность  $\Xi = \Xi_j$ .

Попарно поверхности с краем  $\{\Xi = \Xi_m\}$  и  $\{\Xi = \Xi_{m+1}\}$ ,  $m = 1, \dots, k - 1$  отождествляются по дуге, которую мы обозначим  $\beta_m$ . При проекции  $\pi$  все дуги  $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$  отображаются в дугу  $EF$ .

Таким образом, соответствующая бильярдной траектории кривая расположена на склейке поверхностей  $\{\Xi = \Xi_m\}, m = 1, \dots, k$ . Формально эту поверхность можно определить как

$$S_\Xi = \{\Xi - \varkappa = 0 \pmod{\gamma} \mid \varkappa : P(\varkappa) \in \{\xi < L_1\}\}.$$

**Теорема 11.** Пусть  $n_1^2 < n_2^2$ . В области  $\{\xi < L_1\}$  поверхности  $S_\Xi$  являются сферами с  $2m$  ручками, если  $P(\Xi) \in C_m$  и сферами с  $2m - 1$  ручками, если  $P(\Xi) \in C'_m$  и  $m \leq \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$ .

*Доказательство.* Для точек бильярдной траектории  $(x, y, v_x, v_y)$  изоэнергитического многообразия определим проекцию на заметаемую область в  $\Omega$  по формуле

$$\pi : (x, y, v_x, v_y) \mapsto (x, y).$$

Поверхность  $S_\Xi$  разбивается на несколько частей  $\{\Xi = \Xi_m\}, m = 1, \dots, k$ , по дугам, которые проекция  $\pi$  отображает на дугу  $EF$ .

Часть  $\Xi = \Xi_m$  поверхности  $S_\Xi$  при проекции  $\pi$  покрывает собой образ  $(\Omega_1 \setminus B_{\rho_1}) \cup (\Omega_2 \setminus B_{\rho_2}) \setminus EF = \tilde{\Omega}_m$ , где  $B_r$  обозначает диск радиуса  $r$  с радиусом в нуле. При этом в каждой внутренней точке образа покрытие четырехлистно.

Следовательно, в прообразе  $\tilde{\Omega}_m$  при отображении  $\pi$  можно выбрать на поверхности  $\Xi = \Xi_m$  по 4 прообраза для областей, проектирующихся в  $\Omega_1 \setminus B_{\rho_1}$  и  $\Omega_2 \setminus B_{\rho_2}$ . Обозначим эти прообразы как  $\Omega_{1,j}$  и  $\Omega_{2,j}, j = 1, \dots, 4$ , где нумерация

определена по следующему правилу:

- 1 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен по часовой стрелке к каустике,
  - 2 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен против часовой стрелки к каустике,
  - 3 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен против часовой стрелки от каустики,
  - 4 : вектор  $(v_x, v_y)$  направлен по часовой стрелке от каустики.
- (5.12)

Проследим правила склейки:

- Области  $\Omega_{1,j}, \Omega_{2,j}$  отождествляются по общей границе, которая проектируется в отрезок  $FG$ , поскольку правила (\*) сохраняют номер в случае, когда обе каустики являются окружностями. Нумерация соседствующих через дугу  $EF$  областей также сохраняется.

- В силу стандартного закона отражения области  $\Omega_{1,1}$  приклеиваются к областям  $\Omega_{1,4}$  на дугах окружностей, аналогично  $\Omega_{1,2}$  подклеивается к области  $\Omega_{1,3}$ . Аналогичное правило справедливо для областей  $\Omega_{2,1}, \Omega_{2,2}, \Omega_{2,3}, \Omega_{2,4}$ . Для краткости обозначим это отождествление  $(1 \sim 4, 2 \sim 3)$ .

- Описанное выше правило склейки возникает на дугах каустик в силу совпадания векторов.

- В силу стандартного закона отражения области  $\Omega_{1,1}$  приклеиваются к областям  $\Omega_{1,2}$  на проходящих через центр окружности прямых, то же справедливо для  $\Omega_{1,3}$  и  $\Omega_{1,4}$ . Аналогичное правило справедливо для областей  $\Omega_{2,1}, \Omega_{2,2}, \Omega_{2,3}, \Omega_{2,4}$ . Для краткости обозначим это отождествление  $(1 \sim 2, 3 \sim 4)$ .

$$c = (1 \sim 4, 2 \sim 3), \quad r = (1 \sim 2, 3 \sim 4) \quad (5.13)$$

*Случай  $C_k$ , где  $k \geq 2$ .*

Как следует из утверждения 15, поверхность  $S_{\Xi}$  получается склейкой нескольких листов, а именно:

- одного листа, соответствующего точке  $Q$  **левее**  $II_1$  и **левее**  $\widehat{III}$
- одного листа, соответствующего точке  $Q$  **правее**  $II_1, \widehat{III}$  и **левее**  $IV_0$ .
- и  $k - 2$  листов, каждый из которых соответствует точкам  $Q$  **правее**  $II_1$  и **левее**  $\widehat{III}$ .

Эти листы склейки (см. рис. 5.10–5.12) требуется склеить по дугам  $\beta_m, m = 1, \dots, k - 1$ . На рис. 5.17–5.19 листы деформированы для наглядности.

Результат склейки  $\tilde{\Omega}$  листов вдоль дуг  $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$  показан на рис. 5.20.

Рассмотрим количество последовательных правил склейки  $rc$ , возникающих при обходе границы получившегося многоугольника. При этом, если на

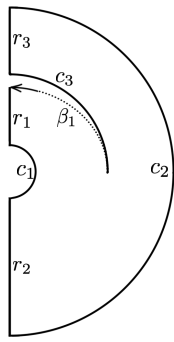


Рисунок 5.17

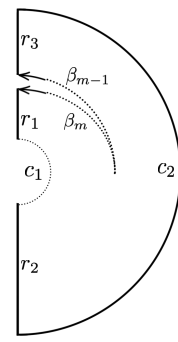
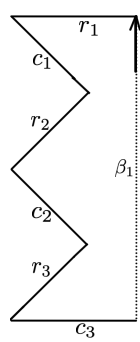


Рисунок 5.18

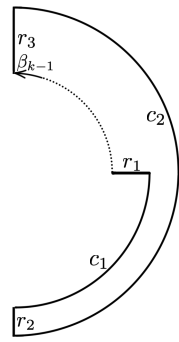
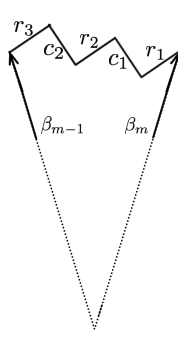
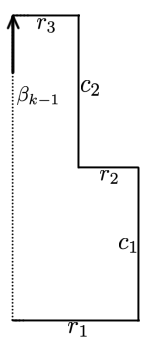


Рисунок 5.19



Представление областей с рис. 5.10—5.12 в виде многоугольников.

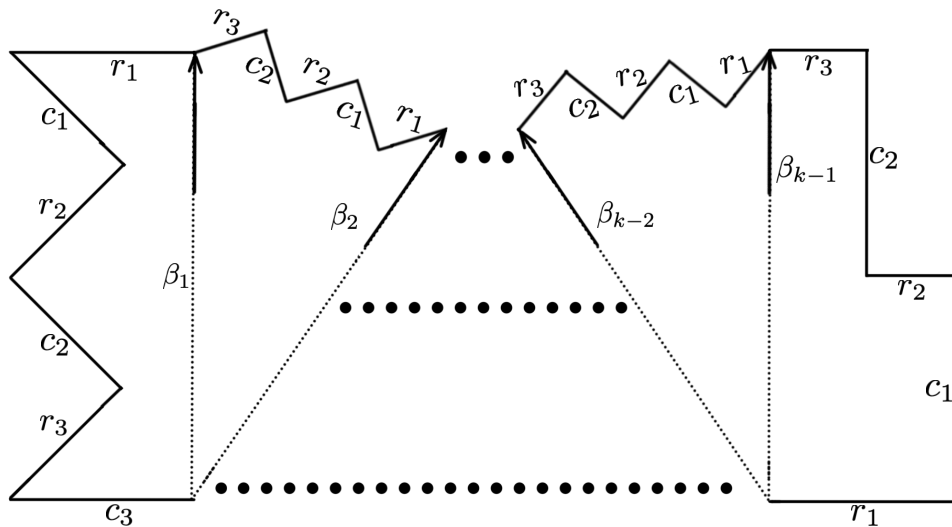


Рисунок 5.20 — Область  $\tilde{\Omega}$ .

соседних ребрах склейки указано одно и то же правило склейки, мы объединим эти ребра в одно. При обходе самого левого листа на рис. 5.20 пара правил  $rc$  встретится трижды. Обход самого правого листа добавит еще две таких пары. Каждый из  $k - 2$  листов посередине добавляет еще по две пары  $rc$ . Таким образом, при обходе границы правил склейки  $rc$  будет  $3 + 2 + 2(k - 2) = 2k + 1$  штук.

Для получения поверхности  $\Xi = \text{const}$  остается склеить четыре многоугольника  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$  (каждый имеет изображенный на рис. 5.20 вид) по общим ребрам. Склейка листов  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  по правилам склейки  $r$  является сферой с  $2k + 1$  дырками, границы которых проецируются в дуги граничных окружностей или каустик. Аналогично для листов  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Последующая склейка двух сфер с  $2k + 1$  с дырками по границам соответствующих дырок будет сферой с  $2k$  ручками.

Случай  $C'_k$ , где  $2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$  устроен аналогично, но вместо изображенного на рис. 5.19 в склейке участвует область, изображенная на рис.

5.14. Повторяя соображения предыдущего случая получим, что склейка листов  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  по правилам склейки  $r$  является сферой с  $2k$  дырками. Склейка с такой же сферой  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$  по  $2k$  дыркам является сферой с  $2k - 1$  ручками.

*Случай  $C_1$ .*

Траектория «путешествует» по единственному листу  $\Omega$ : сегменты траектории в  $\Omega_1$  касаются окружности с радиусом  $\rho_1 > r_1$ , в области  $\Omega_2$  звенья траектории отражаются от дуги  $EF$  и могут перейти в область  $\Omega_1$  только через отрезок  $FG$  (см. рис. 5.13).

Чтобы получить поверхность  $S_{\Xi}$ , рассмотрим листы склейки  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$  (каждый имеет вид изображенный как на рис. 5.13). Нумерация листов та же, что в (5.12). Склейка двух областей  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  по правилу склейки  $r$  является сферой с тремя дырками, аналогично для склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Склейка двух сфер с тремя дырками по соответствующим границам дырок является сферой с двумя ручками.

*Случай  $C'_1$*  рассматривается аналогично. Бильярдная траектория путешествует по одному листу  $\Omega$ , изображенному на рис. 5.15. Повтор изложенных выше соображений позволяет заключить, что поверхность в этом случае является тором.  $\square$

### 5.7.2 Случай $n_1^2 > n_2^2$

Напомним, что согласно замечанию 15 диаграмма, изображенная на рис. 5.16 имеет смысл и для случая  $n_1^2 > n_2^2$ . Классы  $C_m$  и  $C'_m$  (см. рис. 5.16) отличаются друг от друга тем, какое неравенство выполняется листе склейки с наибольшим значением интеграла  $\rho_1^2 < r_1^2 < \rho_2^2 < r_2^2$  для класса  $C_m$  и  $\rho_1^2 < r_1^2 < r_2^2 < \rho_2^2$  для  $C'_m$ .

**Теорема 12.** Пусть  $n_1^2 > n_2^2$ . В области  $\{\xi < L_1\}$  поверхности  $S_{\Xi}$  являются сферами с  $2m + 1$  ручками, если  $P(\Xi) \in C_m$  и сферами с  $2m$  ручками, если  $P(\Xi) \in C'_m$  и  $m \leq \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$ .

*Доказательство.* Случай  $C_k$ , где  $k \geq 2$ .

Для  $n_1^2 > n_2^2$  справедливо утверждение, аналогичное 15: поверхность  $S_{\Xi}$  получается склейкой нескольких листов, а именно:

- одного листа, соответствующего точке  $Q$  левее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$
- одного листа, соответствующего точке  $Q$  правее  $II_1, \widehat{III}$  и левее  $IV_0$ .

• и  $k - 2$  листов, каждый из которых соответствует точкам  $Q$  правее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$ .

При этом области будут выглядеть как изображено на рис. 5.21–5.23

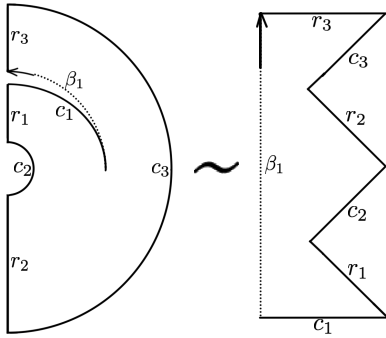


Рисунок 5.21 — Для  $Q$  левее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$ .

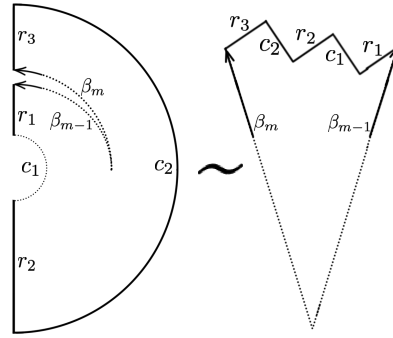


Рисунок 5.22 — Для  $Q$  правее  $II_1$  и левее  $\widehat{III}$ .

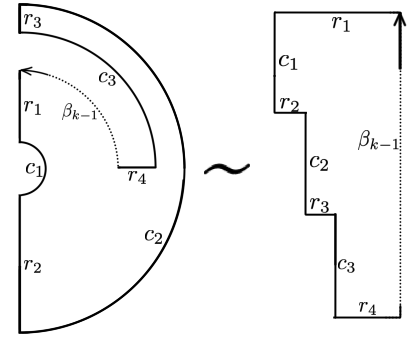


Рисунок 5.23 — Для  $Q$  правее  $II_1, \widehat{III}$  и левее  $IV_0$ .

Далее доказательство проводится так же, как в теореме 11. Поверхность  $S_{\Xi}$  склеивается из четырех копий области  $\tilde{\Omega}$ , показанной на рис. 5.24. Для класса  $C_k, k \geq 2$  каждый большой лист получается склейкой изображенных на рис. 5.21–5.23 листов вдоль одноименных склеек  $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$  (см. рис. 5.24).

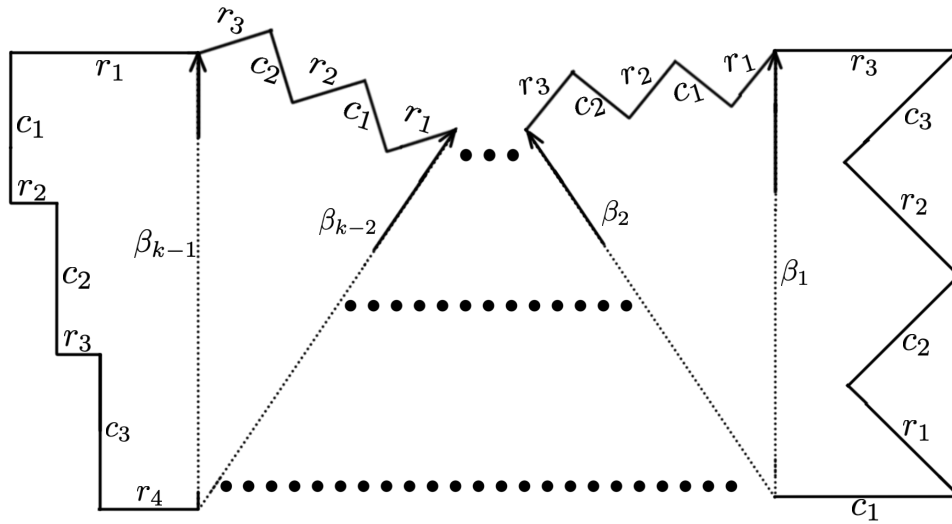


Рисунок 5.24

Пара правил склейки  $rc$  на границе левого листа встретится трижды, так же как на границе правого листа. Каждый из  $k - 2$  листов между ними вносит по две таких пары. Тогда на границе  $\tilde{\Omega}$  правил склейки  $rc$  будет  $3 + 3 + 2(k - 2) = 2k + 2$  штук. Так же как в доказательстве теоремы 11 заключаем, что поверхность  $S_{\Xi}$  является сферой с  $2k + 1$  ручками.

Случай  $C'_k, k \geq 2$ , рассматривается аналогично, но вместо листа, изображенного на рис. 5.23 участвует лист, показанный на рис. 5.25. Как видно, отличия от рис. 5.23 заключаются в отсутствии  $r_3$  и  $c_3$ , а также в том, что дуга  $r_4$  продолжается до пересечения с  $c_2$ . Повторяя соображения выше, получим, что склейка  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  по правилу склейки  $r$  является сферой с  $2k + 1$  дырками. Вся поверхность является сферой с  $2k$  ручками.

Случай  $C_1$ . Траектория «путешествует» по одному листу  $\Omega$ : сегменты траектории в области  $\Omega_2$  касаются окружности с радиусом  $\rho_2 > r_1$ , в области  $\Omega_1$  звенья траектории отражаются от дуги  $EF$  (см. рис. 5.26).

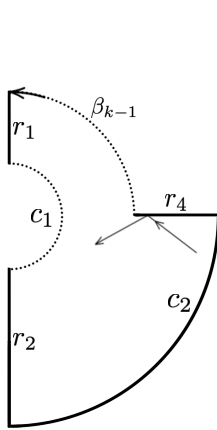


Рисунок 5.25 —  
Склейка листа  $\tilde{\Omega}$   
для случая  $C'_k$ .

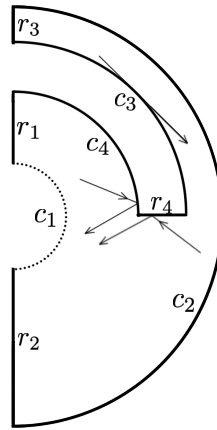


Рисунок 5.26 —  
Склейка листа  $\tilde{\Omega}$   
для случая  $C_1$ .

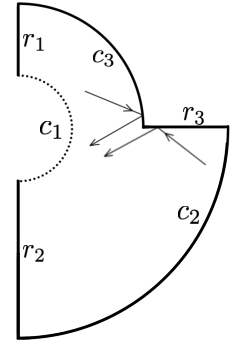


Рисунок 5.27 —  
Склейка листа  $\tilde{\Omega}$   
для случая  $C'_1$ .

Определим векторы скорости как в (5.12). Склейка двух областей  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  по правилу склейки  $r$  является сферой с четырьмя дырками, аналогично для склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Склейка двух сфер с четырьмя дырками является сферой с тремя ручками.

Случай  $C'_1$ . Траектория «путешествует» по одному листу  $\Omega$ , изображенному на рис. 5.27. Тогда  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  является сферой с тремя дырками. Следовательно, вся поверхность является сферой с двумя ручками.  $\square$

## 5.8 Неособые поверхности для случая $\{\xi > L_1\}$

Этот случай существенно проще предыдущего, поскольку в этом случае дополнительный интеграл  $\Xi$  однозначен. Поэтому бильярдные траектории лежат на поверхностях уровня дополнительного интеграла  $\Xi = \text{const}$ .

Область  $\{\xi > L_1\}$  (см. рис. 5.4) разбивается на четыре области, показанные на рис. 5.28.

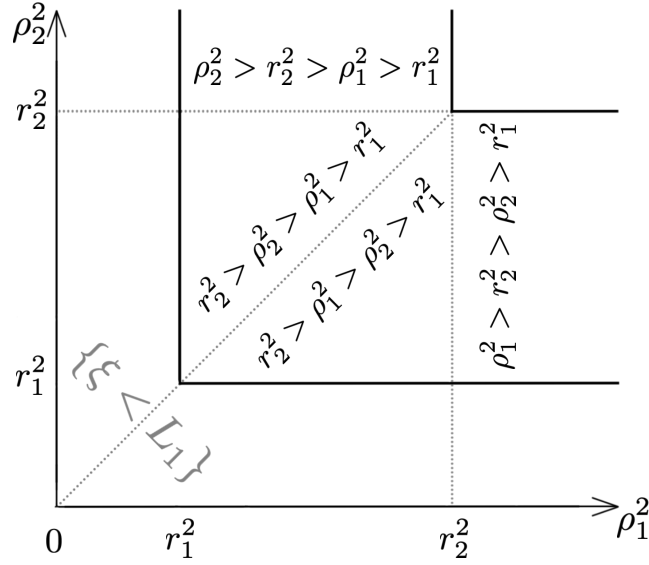


Рисунок 5.28 — Разбиение области  $\{\xi > L_1\}$ .

**Теорема 13.** *Поверхность уровня  $\Xi = \text{const}$  является*

*сферой с двумя ручками для случаев тором для случаев*

$$\begin{array}{ll} r_2^2 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > r_1^2 & \rho_2^2 > r_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2 \\ r_2^2 > \rho_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2 & \rho_1^2 > r_2^2 > \rho_2^2 > r_1^2 \end{array}$$

*Доказательство.* Каждый случай разберем по отдельности.

*Случай  $r_2^2 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > r_1^2$ .* Траектория в области  $\Omega_1$  касается окружности радиуса  $\rho_1 < r_2$ , а в области  $\Omega_2$  — окружности радиуса  $r_1 < \rho_2$ . Проекция бильярдной траектории замечает область  $\tilde{\Omega} = (\Omega_1 \setminus B_{\rho_1}) \cup (\Omega_2 \setminus B_{\rho_2})$ , где  $B_r$  обозначает диск радиуса  $r$  с радиусом в нуле. Область  $\tilde{\Omega}$  изображена на рис. 5.29. Пунктиром изображена дуга  $EF$  окружности радиуса  $r_1$ .

Определим векторы скоростей  $v_1, \dots, v_4$  в соответствии с правилами (5.12). С каждым вектором скорости ассоциируем по одной из областей  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$ , каждая выглядит как показано на рис. 5.29. Склежкой областей  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  по дугам, проектирующимся на дуги граничных окружностей  $\tilde{\Omega}$ , получим сферу с тремя дырками. Аналогично для склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Склежкой двух таких сфер по общим границам дырок, которые проектируются на прямолинейные граничные отрезки  $\tilde{\Omega}$ , получим поверхность  $\Xi = \text{const}$ , которая является сферой с двумя ручками.

*Случай  $r_2^2 > \rho_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2$ .* Данный случай рассматривается аналогично предыдущему пункту. Замечаемая точкой область  $\tilde{\Omega}$  изображена на рис. 5.30,

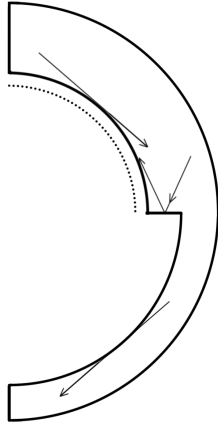


Рисунок 5.29 — Заметаемая траекторией область для случая  $r_2^2 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > r_1^2$ .

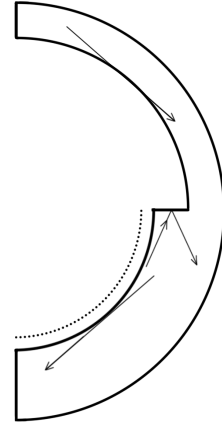


Рисунок 5.30 — Заметаемая траекторией область для случая  $r_2^2 > \rho_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2$ .

дальнейшие рассуждения повторяют пункт предыдущего случая. Поверхность  $\Xi = \text{const}$  также является сферой с двумя ручками.

*Случай  $\rho_2^2 > r_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2$  и случай  $\rho_1^2 > r_2^2 > \rho_2^2 > r_1^2$ .* В обоих случаях точка при движении замечает область  $\tilde{\Omega}$ , которая ограничивается дугами двух окружностей и отрезками двух прямых (см. рис. 5.31, 5.32).

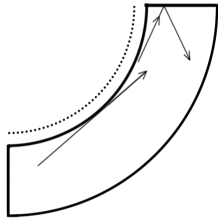


Рисунок 5.31 — Заметаемая траекторией область для случая  $\rho_2^2 > r_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2$ .

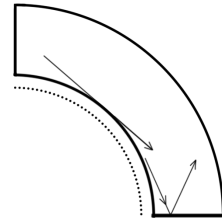


Рисунок 5.32 — Заметаемая траекторией область для случая  $\rho_1^2 > r_2^2 > \rho_2^2 > r_1^2$ .

Определим векторы  $v_1, \dots, v_4$  в соответствии с правилами (5.12), области  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$  зададим так же, как и ранее. Склежкой областей  $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_4$  по дугам, проектирующимся на дуги граничных окружностей  $\tilde{\Omega}$ , получим сферу с двумя дырками. Аналогично для склейки  $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Omega}_3$ . Склежкой двух таких сфер по общим границам дырок, получим поверхность  $\Xi = \text{const}$ , которая является тором.  $\square$

## 5.9 Особые поверхности для случая $\{\xi < L_1\}$

Для простоты ограничимся случаем  $n_1^2 < n_2^2$ . На рис. 5.16 серые клинья с одной стороны ограничиваются кривыми семейства  $III$ , а с другой — кривыми семейства  $IV$ , см. (5.11).

Перемещаясь вдоль прямой  $L$ , мы меняем значение интеграла  $\Xi$ ; в точках пересечения прямой  $L$  с кривыми из семейств  $II$ ,  $III$  или  $IV$  поверхность  $S_\Xi$  испытывает перестройку.

Заметим, что не имеет значения, какую именно кривую мы пересекаем: важно только семейство кривых, к которому она относится. Поверхность  $S_\Xi$  будет испытывать одну и ту же бифуркацию при пересечении любой кривой, относящейся к данному семейству.

### 5.9.1 Семейство $II$

В момент пересечения кривой  $II_m$  область  $\tilde{\Omega}$ , изображенная на рис. 5.20, меняется следующим образом: к ее левой части подклеивается новый семиугольник, см. рис. 5.17.

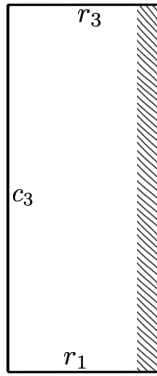


Рисунок 5.33 — До бифуркации.

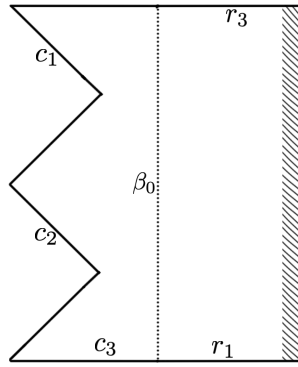


Рисунок 5.34 — В момент бифуркации.

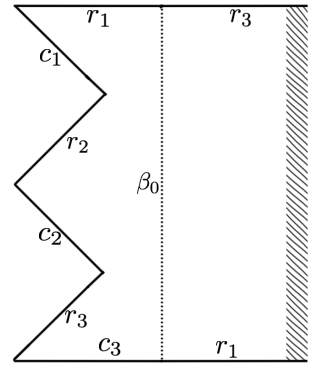


Рисунок 5.35 — После бифуркации.

При этом оказывается, что правило (5.12) на этом новом подклеенном семиугольнике не действует, так как для любой внутренней точки нового листа определены не четыре вектора скорости, а всего два: к общему центру окружностей или от него. Поэтому для каждой точки этого семиугольника на особой поверхности  $S_\Xi$  заданы всего два прообраза.

Типичная траектория на особой поверхности показана на рис. 5.36. Аналог докритической траектории изображен на рис. 5.37.

Для четырех докритических  $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_4$  сохраним нумерацию по правилу (5.12). Добавим к склейке два семиугольника, которые проектируются на область, изображенную на рис. 5.38. После их склейки по граничным дугам окружностей получается поверхность с краем, изображенная на рис. 5.39 —

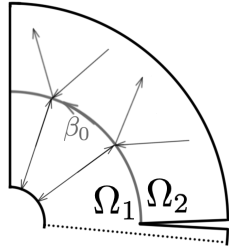


Рисунок 5.36 — Пример траекторий в момент бифуркации.

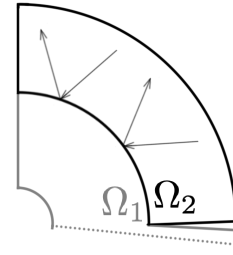


Рисунок 5.37 — Пример траекторий до бифуркации, заданных кривыми  $II$ .

диск с двумя дырками и выделенными отрезками  $\beta_0$  на одной из его граничных окружностей.

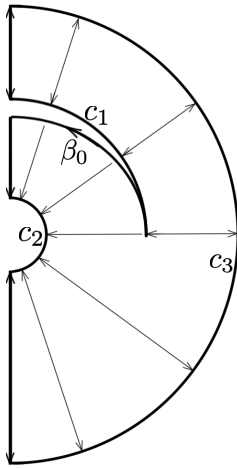


Рисунок 5.38 — Пример траекторий на новом листе.

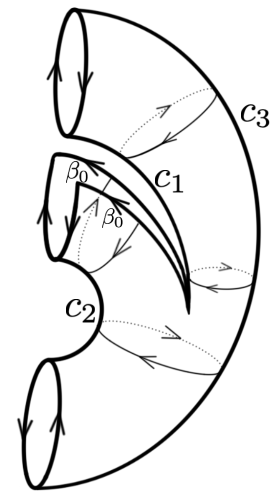


Рисунок 5.39 — Фрагмент поверхности, образованный новым листом.

При склейке  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$  (а также  $\tilde{\Omega}_3$  и  $\tilde{\Omega}_4$ ), как и в разделе 5.7, нужно отождествить дуги  $\beta_0 \subset \tilde{\Omega}_1$  и  $\beta_0 \subset \tilde{\Omega}_2$  и приклеить их к одной из дуг  $\beta_0$  на новой поверхности, изображенной на рис. 5.39. Ко второй дуге  $\beta_0$  поверхности с того же рисунка подклеивается дуга  $\beta_0$ , полученная отождествлением  $\beta_0 \subset \tilde{\Omega}_3$  и  $\beta_0 \subset \tilde{\Omega}_4$ .

После бифуркации этот диск с двумя дырками «надувается» и превращается в пару ручек, поскольку теперь в прообразе точки добавленного семиугольника не две вершины, как в момент бифуркации, а четыре (см. рис. 5.42).

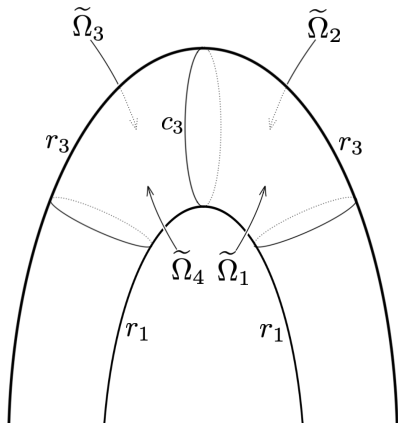


Рисунок 5.40 — Фрагмент поверхности до бифуркации.

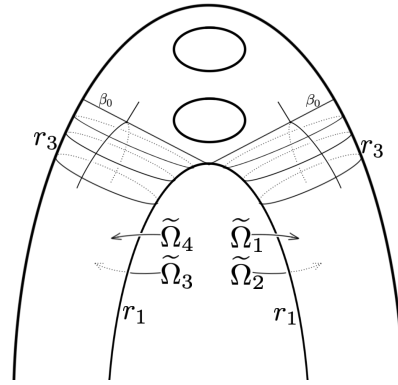


Рисунок 5.41 — Фрагмент поверхности в момент бифуркации.

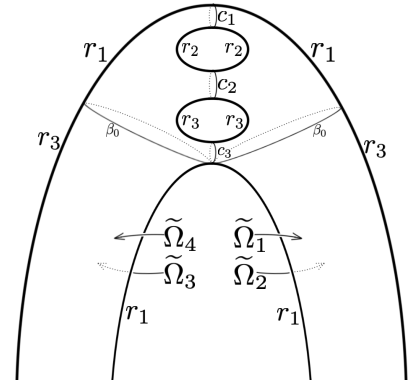


Рисунок 5.42 — Фрагмент поверхности после бифуркации.

### 5.9.2 Семейство III

Уравнение произвольной кривой  $III_m$  имеет вид

$$\xi = m\gamma + \varepsilon = \|L_1\| + \left( m - \left\lfloor \frac{\|L_1\|}{\gamma} \right\rfloor \right) \gamma.$$

Тогда можно выделить особый сегмент большого листа 5.20, соответствующий значению  $\xi = \|L_1\|$ , на котором  $\rho_1^2 > r_1^2$ ,  $\rho_2^2 = r_1^2$ . Для конкретности считаем, что  $\rho_1^2 < r_2^2$ . Получается, что изображенный на рис. 5.43 шестиугольник в процессе бифуркации «отрезается» вдоль дуги, обозначенной  $\beta_{k-1}$  на листе  $\tilde{\Omega}$  (см. рис. 5.20). Рассмотрим эту часть листа  $\tilde{\Omega}$ .

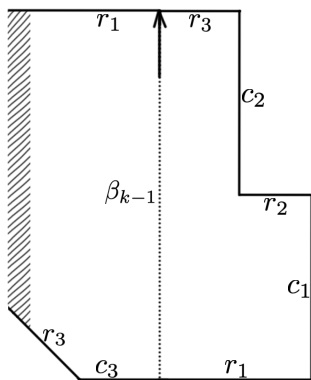


Рисунок 5.43 — Лист  $\tilde{\Omega}$  до бифуркации.

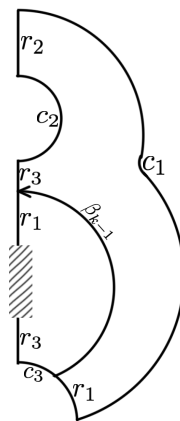


Рисунок 5.44 — Лист  $\tilde{\Omega}$  до бифуркации.

Заштрихованная часть листа не изменится, если мы пересекаем только одну прямую. Преобразуем лист склейки, чтобы результат выглядел как на рис. 5.44.

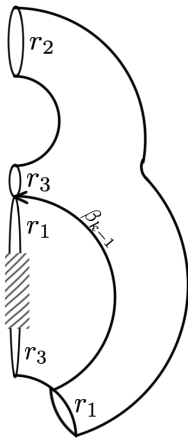


Рисунок 5.45 — Склейка  $\Omega_1 \cup \Omega_4$  по правилу склейки  $s$ .

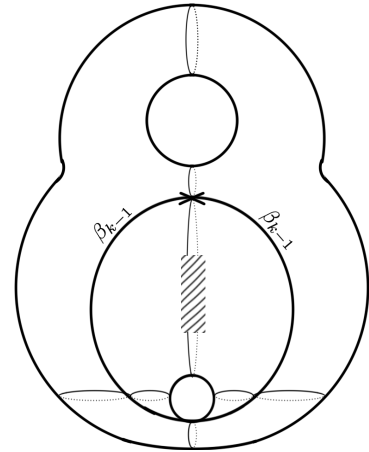


Рисунок 5.46 — Особая поверхность.

В точке бифуркации траектории в области  $\Omega_2$  направлены по касательным к окружности радиуса  $r_1$ . Тогда на месте дуги  $\beta_{k-1}$  появляется правило отождествления векторов  $s$ , определенное в уравнении (5.13). Склеим листы  $\tilde{\Omega}_1$  и  $\tilde{\Omega}_4$  по дугам, проецирующимся на дуги окружностей (то есть по правилам склейки  $s$ ), результат изображен на рис. 5.45. Аналогично для  $\tilde{\Omega}_2$  и  $\tilde{\Omega}_3$ . По общим границам склеивая получившиеся поверхности, получим особую поверхность, как изображено на рис. 5.46: на сфере с двумя ручками выделена окружность ( $\beta_{k-1}$ ), которая отождествлена с незамкнутой кривой на «внутренней» сфере с ручками. Содержащая ручки часть поверхности скрыта за косой штриховкой — она не важна для описания бифуркации.

После бифуркации склейка на месте  $\beta_{k-1}$  исчезает, и две поверхности (обе являются сферами с ручками) перестают быть соединены. При этом, если пересекалась прямая  $III_m$  с параметром  $m = \left\lfloor \frac{\|L_1\|}{\gamma} \right\rfloor$ , то после бифуркации мы остаемся на «внешней» сфере с ручками. При меньших значениях параметра после точки бифуркации поверхность уровня является поверхностью, на которой под косой штриховкой спрятана содержащая ручки часть поверхности.

**Замечание 17.** Приведенные рассуждения для  $\rho_1^2 > r_2^2$  аналогичны, особая поверхность снова будет получаться как отождествление отрезка на сфере с заштрихованными ручками с окружностью на другой поверхности, как на рис. 5.46. Единственное отличие заключается в том, что при  $\rho_1^2 > r_2^2$  в качестве «внешней» сферы с ручками выступает тор.

### 5.9.3 Семейство $IV$

Пересечение произвольной кривой  $IV_m$  соответствует случаю  $\rho_1^2 = r_2^2$ . Тогда в области  $\Omega_1$  траектории направлены вдоль граничной окружности радиуса  $r_2$ . Эта бифуркация соответствует особой поверхности, которая получается из 5.12 переходом к 5.14 (или переходом из 5.13 к 5.15). Очевидно, что особая поверхность получается как предел неособой, при котором одна из ручек схлопывается в дугу окружности.

### 5.9.4 Случай $n_1^2 > n_2^2$

Применимы соображения, аналогичные приведенным в 5.7.2. Следует использовать уравнения для кривых семейств  $I, \dots, III$ , приведенные в утверждении 14. Сами особые поверхности будут соответствовать пересечениям кривых семейств  $II, III, IV$ . При этом, как можно заметить из сходств рис. 5.20 и рис. 5.24, особенности будут повторять те, что были приведены в предыдущем разделе.

## Заключение

В диссертации были получены новые важные результаты о квантовых и модифицированных классических бильярдах на софокусных столах.

Автором исследовано асимптотическое поведение уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора. Полученные аналитические выражения справедливы при стремлении фокального расстояния к нулю с точностью до второго порядка включительно, при этом коэффициент при нулевом порядке совпадает с энергетическим спектром свободной частицы в круговом секторе. Заметим, что предложенная в диссертации техника может быть продолжена на более высокие порядки. Ожидается, что для коэффициентов таким образом могут быть получены аналитические выражения в терминах специальных функций. Автором также вычислен спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

Также в работе доказана интегрируемость классического бильярда на софокусных столах, разделенных софокусными квадрами на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' в предположении, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления. Приведена явная формула дополнительного интеграла. Отметим, что в зависимости от параметров 'оптических плотностей' изотропных сред и параметров разделяющих их квадрик, дополнительный интеграл может принимать значения не только в вещественной прямой, но и, к примеру, в окружности. В общем случае в каждой точке пересечения софокусных квадрик дополнительный интеграл имеет по одной точке ветвления.

Автором исследованы и описаны слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух таких систем. А именно, в четвертой и пятой главах рассмотрены два показательных примера: в одном случае дополнительный интеграл не имеет ветвления, а во втором — имеет одну точку ветвления. В работе приведено описание поверхностей регулярного значения дополнительного интеграла, а также их бифуркации для обоих примеров. Оказалось, что в рассматриваемых системах помимо торов возникают также поверхности более высокого рода с проколами. Получено описание поверхностей особых поверхностей, соответствую-

ющих одновременным разным бифуркациям в разных областях бильярдного стола. Приведена техника построения бифуркационных диаграмм, которые одновременно учитывают все возможные значения 'оптических параметров' областей, в том числе для случая интеграла, имеющего одну точку ветвления.

Результаты диссертации могут быть полезны специалистам по теории интегрируемых систем, классической механике и математической физике.

# Литература

## Список литературы

1. *Биркгоф, Д. Д.* Динамические системы / Д. Д. Биркгоф. — Ижевск : Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. — С. 408. — Пер. с англ.: G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 9, Amer. Math. Soc., New York, 1927, viii+295 pp.
2. *В.В., К.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами / К. В.В., Т. Д.В. — Изд-во МГУ, 1991.
3. *Табачников, С.* Геометрия и бильярды, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, М / С. Табачников. — 2011.
4. *Poritsky, H.* The billiard ball problem on a table with a convex boundary — an illustrative dynamical problem / H. Poritsky // *Annals of Mathematics*. — 1950. — Т. 51, № 2. — С. 446—470. — (2-я сер.)
5. *Bialy, M.* Angular billiard and algebraic Birkhoff conjecture / M. Bialy, A. E. Mironov // *Advances in Mathematics*. — 2017. — Т. 313. — С. 102—126.
6. *Bialy, M.* Polynomial non-integrability of magnetic billiards on the sphere and the hyperbolic plane / M. Bialy, A. E. Mironov // *Russian Mathematical Surveys*. — 2019. — Т. 74, № 2. — С. 187.
7. *Bialy, M.* Magnetic billiards: non-integrability for strong magnetic field; Gutkin type examples / M. Bialy, A. E. Mironov, L. Shalom // *Journal of Geometry and Physics*. — 2020. — Т. 154. — С. 103716.
8. *Глуцюк, А. А.* О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны / А. А. Глуцюк // *Доклады Российской академии наук*. — 2018. — Т. 481, № 6. — С. 594—598. — English translation: A. A. Glutsyuk, “On two-dimensional polynomially integrable billiards on surfaces of constant curvature”, *Doklady Mathematics*, 98:1 (2018), 382–385.
9. *Avila, A.* An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse / A. Avila, J. De Simoi, V. Kaloshin // *Annals of Mathematics*. — 2016. — Т. 184, № 2. — С. 527—558.

10. *Kaloshin, V.* On the local Birkhoff conjecture for convex billiards / V. Kaloshin, A. Sorrentino // *Annals of Mathematics*. — 2018. — Т. 188, № 1. — С. 315–380.
11. *Dragović, V.* Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards / V. Dragović, M. Radnović // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2009. — Т. 14, № 4/5. — С. 479–494.
12. *Драгович, В.* Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе / В. Драгович, М. Раднович // Ижевск: Издательство РХД. — 2010.
13. *Фокичева, В. В.* Описание особенностей системы 'бильярд в эллипсе' / В. В. Фокичева // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. — 2012. — № 5. — С. 31–34. — English translation: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for system 'billiard in an ellipse'", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 67:5-6 (2012), 217–220.
14. *Фокичева, В. В.* Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами / В. В. Фокичева // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. — 2014. — № 4. — С. 18–27. — English translation: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 69:4 (2014), 148–158.
15. *Фокичева, В. В.* Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболами / В. В. Фокичева // *Математический сборник*. — 2014. — Т. 205, № 8. — С. 139–160. — English translation: V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas", *Sbornik: Mathematics*, 205:8 (2014), 1201–1221.
16. *Фокичева, В. В.* Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик / В. В. Фокичева // *Математический сборник*. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 127–176. — English translation: V. V. Fokicheva, "A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics", *Sbornik: Mathematics*, 206:10 (2015), 1463–1507.
17. *Ведюшкина, В. В.* Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов / В. В. Ведюшкина // *Математический сборник*. — 2019. — Т. 210, № 3. — С. 17–74.

18. *Kozlov, V.* Some integrable extensions of Jacobi's Problem of geodesics on an ellipsoid / V. Kozlov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1995. — Т. 59, № 1. — С. 1—7.
19. *А. Т. Фоменко, В. В. В.* Биллиарды и интегрируемые системы / В. В. В. А. Т. Фоменко // УМН. — 2023. — Т. 78, 5 (473). — С. 93—176.
20. *В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Ф.* Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды / А. Т. Ф. В. В. Ведюшкина (Фокичева) // Изв. РАН. Сер. матем. — 2019. — Т. 83, № 6. — С. 63—103.
21. *Fomenko, A. T.* Liouville foliations of topological billiards with slipping / A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, V. N. Zav'yalov // Russ. J. Math. Phys. — 2021. — Т. 28, № 1. — С. 37—55.
22. *А. Т. Фоменко, В. В. В.* Эволюционные силовые бильярды / В. В. В. А. Т. Фоменко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2022. — Т. 86, № 5. — С. 116—156.
23. *McLachlan, N. W.* Theory and application of Mathieu functions / N. W. McLachlan. — Clarendon Press, Oxford, 1947.
24. *Rayleigh, J. W. S. B.* The theory of sound. Т. 2 / J. W. S. B. Rayleigh. — Macmillan, 1896.
25. Quantum and classical solutions for a free particle in wedge billiards / A. Góngora-T [и др.] // Physics Letters A. — 2000. — Т. 274, № 3/4. — С. 117—122.
26. *NIST Digital Library of Mathematical Functions.* — URL: <https://dlmf.nist.gov/28> ; F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds. <https://dlmf.nist.gov/>, Release 1.1.9 of 2023-03-15.
27. *McMahon, J.* On the roots of the Bessel and certain related functions / J. McMahon // Annals of Mathematics. — 1894. — Т. 9, № 1/6. — С. 23—30.
28. *Abramowitz, M.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Т. 55 / M. Abramowitz, I. A. Stegun. — US Government printing office, 1968.

29. *Kuttler, J. R.* Eigenvalues of the Laplacian in two dimensions / J. R. Kuttler, V. G. Sigillito // *Siam Review*. — 1984. — Т. 26, № 2. — С. 163–193.
30. *Mathieusche Funktionen* / J. Meixner [и др.]. — Springer, 1954. — С. 98–221.

## Публикации автора по теме диссертации

31. *М. А. Никулин.* Эллиптический бильярд с косинусным законом преломления на софокусных квадриках / М. А. Никулин // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. — 2025. — № 2. — С. 16–23. — EDN: WBVJCF  
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.438 п.л.;  
Перевод: *Nikulin M. A.* An elliptic billiard with the cosine law of refraction at confocal quadrics // *Moscow University Mathematics Bulletin*. — 2025. — Vol. 80, №2 — pp. 97–105. — EDN: SITVSK  
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.5 п.л.
32. *М. А. Никулин.* Спектр оператора Шрёдингера в накрытии эллиптического кольца / М. А. Никулин // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. — 2023. — № 5. — С. 22–32. — EDN: FONQIF  
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.625 п.л.  
Перевод: *Nikulin M. A.* Spectrum of the Schrödinger operator in an elliptical ring cover // *Moscow University Mathematics Bulletin*. — 2023. — Vol. 78, №5 — pp. 230–243. — EDN: JDTKZE  
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.812 п.л.
33. *Nikulin, M. A.* Asymptotic behaviour of energy levels of a quantum free particle in an elliptic sector / M. A. Nikulin, T. Y. Popelensky, A. I. Shafarevich // *Physica Scripta*. — 2024. — Vol. 99, № 1. — P. 015207. — EDN: CALAWQ  
Импакт фактор 2.6 (JIF), объем 0.813 п.л.  
М.А. Никулиным доказаны теоремы 1, 2 и 3. Общая доля диссертанта составляет 80%.
34. *М. А. Никулин.* Поверхности уровня интеграла для системы бильярд с косинусным преломлением / М. А. Никулин, Ф. Ю. Попеленский // *Математический сборник*. — 2025. — Т. 216, № 10. — С. 101–158. — EDN: ANZYFI  
Импакт фактор 0.8 (JIF), объем 3.562 п.л.

Перевод: *Nikulin M.A., Popelenskii F.Yu.* Level surfaces of the first integral for a billiard system with cosine refraction // Sbornik: Mathematics. — 2025. — Vol. 216, №10 — pp. 1428–1482. — EDN: AKYXVW

Импакт фактор 0.8 (JIF), объем 3.375 п.л.

М.А. Никулиным были получены результаты разделов 2 и 3. Общая доля диссертанта составляет 88%.