

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Майоров Павел Александрович

**Балансно-характеристический подход к численному
моделированию гидродинамических течений со свободной
поверхностью в гидростатическом приближении**

Специальность 1.2.2.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Соловьев Андрей Валерьевич

Москва — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	4
 Глава 1. Балансно-характеристический метод КАБАРЕ для	
модели мелкой воды с переменной плотностью	15
1.1 Уравнения мелкой воды с переменной плотностью, учетом внешнего давления и донного рельефа	16
1.2 Схема КАБАРЕ для системы уравнений мелкой воды с переменной плотностью	20
1.3 Свойство сбалансированности	26
1.4 Тест на сохранение стационарного состояния жидкости с переменной плотностью	27
1.5 Задача о динамике жидкости со свободной поверхностью и переменной плотностью на неровном дне	28
1.6 Задача о приливной динамике в Белом море.	30
 Глава 2. Балансно-характеристический метод КАБАРЕ для	
модели двухслойной мелкой воды	33
2.1 Математическая модель динамики двухслойной мелкой воды . .	34
2.1.1 Потеря гиперболичности	35
2.2 Характеристическая форма системы уравнений двухслойной мелкой воды	37
2.3 Схема КАБАРЕ для системы уравнений двухслойной мелкой воды	40
2.4 Модельная задача о перепаде высоты	43
2.5 Модельная задача о внутренней волне	44
2.6 Модельная задача о динамике двухслойной жидкости при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями	45
 Глава 3. Многослойная гидростатическая модель	
SABARET-MFSH на основе гиперболической	
декомпозиции в двумерной постановке	49

3.1	Уравнения многослойной мелкой воды с переменной плотностью, учетом внешнего давления и донного рельефа на основе гиперболической декомпозиции	50
3.2	Схема КАБАРЕ для послойного решения уравнений многослойной мелкой воды	53
3.3	Нарушение гиперболичности, перестройка сетки и фильтрация .	57
3.4	Свойство сбалансированности	61
3.5	Верификационная задача расчета баротропного течения по многослойной модели с учетом обмена массой и импульсом между слоями	65
3.6	Валидация модели CABARET-MFSH на лабораторных тестах по исследованию гравитационных течений в стратифицированной жидкости	66
3.7	Валидация модели CABARET-MFSH на задаче интрузивного течения	89
Глава 4. Многослойная гидростатическая модель		
	CABARET-MFSH в трехмерной постановке	92
4.1	Уравнения многослойной мелкой воды в случае трех пространственных координат	92
4.2	Численный алгоритм в случае трех пространственных переменных	96
4.3	Численное моделирование трехмерных течений жидкости с переменной плотностью	100
Заключение		104
Список сокращений и условных обозначений		106
Список литературы		107
Публикации автора по теме диссертации		118
Список рисунков		121
Список таблиц		126
Приложение А. Описание программного комплекса		127

Введение

Среди практических вопросов динамики жидкости значительную роль занимает моделирование течений со свободной верхней поверхностью. Под свободной поверхностью понимается граница раздела между жидкостью и другой средой, изменяющаяся под воздействием внешних и внутренних сил. Такие течения встречаются в широком диапазоне масштабов – от лабораторных экспериментов до глобальных океанических процессов.

Лабораторные эксперименты [1–3] позволяют изучать динамику плотностных и инерционных гравитационных течений, включая расслоение потока и взаимодействие с подстилающей поверхностью. Такие течения имеют важное значение для геологии и экологии, особенно в контексте переноса и осаждения осадочного материала [4; 5]. В природе они часто проявляются в виде редких и разрушительных явлений — пирокластических потоков, снежных лавин [6; 7] — что ограничивает возможности наблюдения. В этих условиях лабораторные данные становятся ключевыми для численного моделирования и оценки рисков.

В средних масштабах течения со свободной поверхностью проявляются в реках, водохранилищах и прибрежных зонах [8; 9]. Здесь важную роль играет взаимодействие водных масс с донным рельефом, что влияет на устойчивость береговых линий, процессы дельтообразования и распределение загрязняющих веществ в водоемах [10; 11]. Численное моделирование таких процессов помогает оценить последствия гидротехнического строительства и разработать меры по защите экосистем.

В то же время изучение глобальных океанических процессов важно для понимания климатических явлений [12–14], экологического мониторинга и морской инфраструктуры [15–17]. Исследования, такие как мониторинг Эль-Ниньо и Ла-Нинья, позволяют прогнозировать засухи или наводнения в определенных регионах. Моделирование движения разливов вредных химических веществ, мусорных островов с пластиковыми отходами помогает в локализации и ликвидации последствий таких загрязнений. Например, в ситуации с аварией на АЭС Фукусима-1 в 2011 году благодаря изучению и прогнозированию морских течений, стало возможным отслеживать распространение радиоактивного загряз-

нения, что позволило предпринимать своевременные меры для минимизации рисков для морской экосистемы.

Разномасштабные явления течения жидкости со свободной поверхностью описываются одними и теми же фундаментальными законами. Будь то лабораторные эксперименты, речные системы или океанические течения, математические модели и численные методы, используемые для их анализа, остаются универсальными. На практике эти уравнения решаются с различными упрощениями, что естественно ограничивает область применимости каждой конкретной методики. Тем не менее общая физическая база позволяет переносить проверенные численные подходы между масштабами, адаптируя их к нужной степени детализации и тем самым охватывая широкий спектр задач — от интерпретации лабораторных опытов до прогноза динамики природных водоёмов.

Существует множество крупных вычислительных комплексов, позволяющих моделировать процессы со свободной поверхностью на различных масштабах. Например, такие системы, как INMOM [18; 19], NEMO [20; 21] или MITgcm [22], охватывают широкий спектр геофизических задач — от моделирования течений в прибрежных зонах и устьях рек до прогнозирования глобальных океанических циркуляций. Данные комплексы учитывают влияние целого ряда физических факторов: переменная температура и солёность, сложный рельеф дна, сила Кориолиса и другие процессы, характерные для реальных течений. При всём многообразии параметризаций и дополнительных модулей, их вычислительное «ядро» сводится к решению систем уравнений движения жидкости со свободной границей. Именно разработкам, связанным с вычислительным «ядром», посвящена данная работа. Рассматриваются модели динамики жидкости со свободной поверхностью, предлагаются и анализируются методы численного моделирования.

Одним из фундаментальных математических описаний движения жидкости является система уравнений Навье–Стокса [23–25]. Эти уравнения формулируют законы сохранения массы, импульса и энергии для вязкой ньютоновской жидкости. Для моделирования течений со свободной поверхностью можно использовать как прямое решение этой системы уравнений [26–28], так и применение различных моделей [29–31], позволяющих, путем некоторых предположений, упростить получение решения. Настоящая работа относится ко второму классу подходов и нацелена на разработку новых гидростатических алгоритмов.

Оценка вычислительных затрат существенно зависит от выбранной численной методики. В прямых методах решения системы уравнений Навье-Стокса определение давления сводится к решению уравнения Пуассона. При современных реализациях [32], использующих обобщенный метод минимальных невязок с предобуславливателем и адаптивные сетки, эта часть не является узким местом и хорошо масштабируется.

В гидростатическом подходе выигрыш достигается иным путём — за счёт упрощения вертикальной динамики. Давление в каждый момент времени определяется из условия гидростатического равновесия, что снимает необходимость решать полную нестационарную систему Навье-Стокса и снижает стоимость расчёта [33; 34], особенно в геометрически сложных прибрежных областях и на подробных трёхмерных сетках.

Использование гидростатического приближения не приводит к существенным ошибкам, когда толщина слоя жидкости заметно меньше характерных горизонтальных размеров [35; 36], что выполняется для многих реальных течений. Вместе с тем у этого подхода есть ограничения: вертикальные скорости восстанавливаются из уравнения неразрывности, что затрудняет описание вихревых движений по вертикали. Кроме того, соответствующая система уравнений может быть плохо обусловлена, что усложняет выбор численных методов [37; 38].

Современные методы вычислительной гидродинамики разрабатываются с учетом требований к точности, устойчивости, вычислительной эффективности и выполнению фундаментальных физических законов. Одним из ключевых подходов построения консервативных численных схем является метод конечных объемов [39—41]. Различия между методами во многом определяются аппроксимацией конвективных потоков. Так, в схемах высокой разрешающей способности (TVD[42], WENO[43], MUSCL[44] и другие) конвективные потоки находятся из точного или приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва. Альтернативу этим методам составляют так называемые «балансно – характеристические схемы» [45—47] (в частности, схема КАБАРЕ), разработанные в последние годы в МГУ имени М.В. Ломоносова и ИБРАЭ РАН, и органично сочетающие достоинства консервативных и характеристических методов. Практика их использования в задачах индустриальной математики показала, что они обладают определенными преимуществами над схемами высокой разрешающей

способности [48] при расчетах вихревых и турбулентных течений с неполным разрешением спектра турбулентных пульсаций [49].

При численном моделировании течений жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести используются различные приближения, которые накладывают свои ограничения на их применимость. Наиболее простой и робастной моделью является однослойное гидростатическое приближение, когда скорость и плотность вдоль каждой вертикальной линии предполагаются постоянными. Это приводит к системе уравнений Сен-Венана (однослойной мелкой воды), которая является безусловно гиперболической и для численного решения которой можно использовать широкий набор устойчивых численных методов [50—52].

К вычислительным алгоритмам решения однослойных уравнений мелкой воды обычно предъявляют следующие требования: консервативность, заключающуюся в сохранении массы и импульса с учетом сил реакции рельефа дна, сил Кориолиса и действия ветра на свободную поверхность, монотонность и сбалансированность, что предполагает устойчивость состояния покоя однородно стратифицированной жидкости над произвольным рельефом дна.

Использование метода конечных объемов автоматически гарантирует консервативность алгоритма при соответствующей записи разностных соотношений. Существует множество вариантов расчета потоков, например, решением задачи Римана [50], либо методом характеристик [51], либо схемами с центральными разностями [53]. Следует отметить, что методы, основанные на задаче Римана, в случае неплоского рельефа дна сталкиваются с дополнительными трудностями. Однако они были успешно преодолены [54; 55].

Однослойное приближение мелкой воды не позволяет моделировать внутренние волны. Следующим приближением в иерархии гидростатических моделей является модель «двухслойной мелкой воды» [30; 56; 57], описывающая движение двух слоев жидкости, разделенных непроницаемой подвижной поверхностью. Расчетными переменными двухслойной модели являются горизонтальные скорости в двух слоях и их толщины. Плотности слоев различны и не меняются со временем.

Удвоенное число степеней свободы делает эту модель более адекватной физической реальности, однако, как показано в работе Л.В. Овсянникова [58], система соответствующих уравнений перестает быть безусловно гиперболиче-

ской. Начально-краевая задача становится некорректной и для ее численного решения приходится использовать какую-либо процедуру регуляризации [59]. Обычно используются искусственная вязкость и диффузия, которые интерпретируются как модели турбулентности.

Помимо потери гиперболичности двухслойные модели, использующие методы конечных объемов, имеют проблему с выбором генераторов потока. Решение задачи Римана в этом случае сталкивается с серьезными математическими трудностями [60—62], как и решение задачи о приведении соответствующей системы к характеристическому виду [63].

Все эти трудности только нарастают при использовании многослойных гидростатических моделей [31; 64—66]. Плохая обусловленность задачи, при недостатке искусственной диссипации, приводит к неустойчивости непроницаемых поверхностей раздела между слоями с последующим их «перекрытием». Это делает невозможным продолжение расчета. Естественный способ избежать перекрытий — отказаться от непроницаемости поверхностей между слоями. Поэтому необходим переход к моделям, допускающим обмен массой и импульсом между слоями [67; 68].

Для вывода систем уравнений, описывающих динамику стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в многослойном гидростатическом приближении с обменом массой и импульсом между слоями, используются разные подходы, которые, приводят к разным системам уравнений [69]. Хотя разница между ними невелика (отличия имеют величину порядка аппроксимации относительно толщин слоев), их диссипативные и дисперсионные свойства могут существенно различаться.

Использование моделей с обменом массой и импульсом между слоями не устраняет плохой обусловленности системы, возникающей из предположения о гидростатике. При недостаточности процедур регуляризации происходит катастрофическая деформация свободной поверхности и неограниченный рост скоростей. Благодаря удачному выбору значений коэффициентов искусственной вязкости и диффузии, зависящих от численного решения, расчет при стандартных ограничениях на шаг по времени становится устойчивым. Однако эти значения неизвестны заранее. Их приходится подбирать эмпирически для каждой задачи или для достаточно небольшого класса задач. Слишком высокие значе-

ния приводят к дополнительной диссипации, которая может существенно деформировать решение.

Проблеме избыточности искусственной или схемной диссипации в существующих многослойных гидростатических моделях с обменом массой и импульсом между слоями ранее не уделялось должного внимания. Чрезмерная диссипация может самым негативным образом сказаться на точности расчетов с малыми числами Фруда, характерными для реальных течений.

Все вышеизложенное делает актуальной задачу разработки робастного малодиссипативного численного алгоритма для гидростатической модели динамики стратифицированного течения со свободной поверхностью.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. А.В. Соловьеву и научному наставнику д.ф.-м.н. В.М. Головизнину, а также Майоровой К. В., к.ф.-м.н. Майорову Петру А., к.ф.-м.н. Афанасьеву Н.А., д.ф.-м.н. С.И. Мухину, к.ф.-м.н. М.А. Рязанову и всему коллективу кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ за плодотворное обсуждение представленных в диссертации результатов.

Целью данной работы является построение малодиссипативного балансно-характеристического численного алгоритма расчета динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении и математическое моделирование течений стратифицированной жидкости с помощью построенного численного алгоритма.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- (1) Построение алгоритма моделирования динамики несжимаемой однослойной жидкости со свободной поверхностью и неровным дном с переменной плотностью на основе балансно-характеристического подхода.
- (2) Построение алгоритма моделирования динамики несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в приближении «двухслойной мелкой воды» на основе балансно-характеристического подхода с аналитическим нахождением собственных чисел характеристической матрицы.
- (3) Проведение процедуры неполной факторизации системы уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью, заключаю-

щейся в рассмотрении сил, действующих на границы слоев, как внешних, находящихся в правой части системы уравнений.

- (4) Разработка алгоритма численного решения гиперболизированной системы уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью на основе методики КАБАРЕ.
- (5) Разработка алгоритма регуляризации численного решения по схеме КАБАРЕ уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью и неровным дном.
- (6) Проведение валидации итогового алгоритма на лабораторных экспериментах по исследованию течений в стратифицированной жидкости.

Основные положения, выносимые на защиту:

- (1) Балансно-характеристический алгоритм решения системы уравнений динамики несжимаемой однослойной жидкости со свободной поверхностью и неровным дном с переменной плотностью, обладающий свойством сбалансированности, и результаты расчетов приливных течений в Белом море с учетом реальной батиметрии по этому методу.
- (2) Балансно-характеристический алгоритм решения системы уравнений «двухслойной мелкой воды» с аналитическим нахождением собственных чисел характеристической матрицы системы и его сравнение с известными алгоритмами на тестовых задачах, в том числе с потерей гиперболичности системы.
- (3) Математическая модель динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении и балансно-характеристический метод её решения. Алгоритм регуляризации численного решения, учитывающий обмен массой и импульсом между слоями. Результаты валидации алгоритма на серии лабораторных экспериментов как с двумерными, так и с трехмерными течениями стратифицированных жидкостей, подтверждающие хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными данными.

- (4) Комплекс программ для прямого численного моделирования течений жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении.

Научная новизна:

- (1) Впервые построена балансно-характеристическая схема класса КА-БАРЕ для системы уравнений динамики несжимаемой однослойной жидкости со свободной поверхностью и неровным дном с переменной плотностью.
- (2) Впервые построена балансно-характеристическая схема класса КА-БАРЕ для системы уравнений динамики несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в приближении «двухслойной мелкой воды» с аналитическим нахождением собственных чисел характеристической матрицы.
- (3) Впервые построена балансно-характеристическая схема класса КА-БАРЕ для системы уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью и неровным дном, включающая процедуру неполной факторизации исходной системы и алгоритмов регуляризации численного решения.

Научная и практическая значимость диссертации заключается в возможности дальнейшего использования разработанных балансно-характеристических алгоритмов в качестве вычислительного ядра систем моделирования динамики течения жидкости со свободной поверхностью. Программная реализация алгоритмов имеет потенциал стать «ядром» для вычислительного комплекса, применяемого как в инженерной практике, так и в научно-исследовательской деятельности.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается достаточным количеством проведенных тестовых и модельных расчетов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах.

- (1) Научная конференция «Мировой океан: модели, данные и оперативная океанология» (Севастополь, 26-30 сентября 2016г.),
- (2) Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (Москва, 28-30 июня 2016г.),

- (3) Научная конференция «Тихоновские Чтения 2017» (Москва, 23-27 октября 2017г.),
- (4) IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'19) (Москва, 19-21 июня 2019),
- (5) Научная конференция «Тихоновские чтения 2019» (Москва, 28 октября – 1 ноября 2019г.),
- (6) Международная конференция «Многомасштабные Методы и Высокопроизводительные Научные Вычисления» (Сочи, 8-13 сентября 2020г.),
- (7) Научная конференция «Тихоновские чтения 2020» (Москва, 26-31 октября 2020г.),
- (8) Научная конференция «Ломоносовские чтения 2021» (Москва, 20-29 апреля 2021 г.),
- (9) XIX Всероссийская научная конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» (Пос. Дюрсо, Краснодарский край, 13-18 сентября 2021 г.),
- (10) Всероссийская научная конференция «Моря России: Год науки и технологий в РФ – Десятилетие наук об океане ООН» (Севастополь, 21-24 сентября 2021 г.),
- (11) Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2021» (МНЧ-2021) (Новосибирск, Академгородок, 4-8 октября 2021 г.),
- (12) V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'22) (Москва, 27-30 июня 2022 г.),
- (13) VI Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'25), (Москва, 15-19 июля 2025 г.),
- (14) Научно-исследовательский семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством к.ф.-м.н. А. В. Соловьева при обсуждениях с д.ф.-м.н. профессором В.М. Головизнином. В работах, написанных в соавторстве, вклад

автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов, разработки комплекса программ и проведении расчетов является определяющим.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, изданных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список опубликованных работ приведён в конце диссертационной работы.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 129 страниц с 47 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 106 наименований.

В **первой главе** представлено расширение уравнений мелкой воды на случай переменной плотности, с выводом соответствующей системы. Для численного решения полученных уравнений предложен алгоритм на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ, хорошо зарекомендовавший себя в применении к уравнениям мелкой воды. Разработанный алгоритм не только представляет самостоятельный интерес с точки зрения численного моделирования, но и служит основой для послойного решения многослойной гидростатической модели. Показано свойство сбалансированности схемы, как для случая постоянной, так и переменной плотности. Рассмотрен существенно двумерный модельный тест, исследующий динамику потока жидкости различной плотности в квадратном резервуаре, оснащённом системой для поступления и отвода жидкости. Такие условия часто встречаются на границе рек и морей, где разница в плотности воды может вызывать сложные гидродинамические явления. Для проверки работоспособности и точности предложенной численной модели было проведено моделирование приливной динамики в Белом море.

Вторая глава посвящена математической модели двухслойной мелкой воды и разработке численного алгоритма на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ для её решения. Модель описывает движение двух несмешивающихся слоёв жидкости, разделённых непроницаемой подвижной границей. Важной составляющей этой главы является рассмотрение проблемы потери гиперболичности многослойных систем на примере двух слоев. Приведено подробное описание численного алгоритма и его апробация на ряде модельных

задач, в том числе задаче Курганова [30] о динамике двухслойной жидкости при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями.

Третья глава включает в себя описание нового численного алгоритма для многослойной гидростатической модели в случае двух пространственных переменных. Рассматривается подход к решению проблем, связанных как с характеристической формой дифференциальной системы, так и устойчивостью численного алгоритма для не безусловно гиперболической системы. Предлагаемая вычислительная модель также основана на подходе, сочетающем методы характеристик и конечного объема. Показано сохранение свойства сбалансированности численной схемы. Проведена апробация модели на ряде лабораторных экспериментов по гравитационным течениям, демонстрирующая высокую точность и устойчивость предложенного алгоритма.

В **четвертой главе** рассматривается обобщение многослойной гидростатической модели CABARET-MFSH на случай трех пространственных переменных. Особое внимание уделяется характеристической форме решаемых уравнений, которая используется в схеме КАБАРЕ для нахождения локальных инвариантов Римана. Полученные локальные инварианты для каждого из направлений позволяют говорить о сохранении свойства сбалансированности численного алгоритма в случае трех пространственных переменных. Для валидации модели проводится моделирование существенно трёхмерного лабораторного эксперимента [3], результаты которого демонстрируют хорошее совпадение с экспериментальными данными.

В **приложении А** приведено описание разработанного программного комплекса: рассмотрены принципы реализации численных моделей, структура вычислительных модулей, а также особенности подготовки входных данных и интеграции с инструментами визуализации и анализа результатов.

Глава 1. Балансно-характеристический метод КАБАРЕ для модели мелкой воды с переменной плотностью

Модель мелкой воды широко используется для описания течений в неглубоких водоёмах: реках, озерах и водохранилищах, в прибрежной зоне морей и океанов. Многообразие задач включает в себя моделирование природных явлений, таких как цунами, ветровые нагоны и множество других задач, связанных с проблемами океанологии [70; 71]. Другим важным классом задач является моделирование распространения волн, возникающих при полном или частичном разрушении плотин и гидросооружений [72].

Приближение мелкой воды описывает течение несжимаемой жидкости постоянной плотности, ограниченной снизу рельефом дна и сверху свободной поверхностью, в поле силы тяжести. Основным допущением приближения мелкой воды является условие малости вертикального масштаба по отношению к горизонтальным размерам задачи. В этом случае вертикальной компонентой скорости можно пренебречь по сравнению с горизонтальными и считать последние практически неизменными по толщине слоя. Такое допущение позволяет существенно упростить математическую формулировку, заменив уравнение сохранения импульса для вертикальной компоненты скорости на использование гидростатического давления. Классический подход основан на предположении о постоянной плотности жидкости. В данной главе рассматривается расширение уравнений мелкой воды на среду с переменной плотностью, приводится вывод соответствующих уравнений с учетом переменной плотности. Исходя из нелинейного характера уравнений мелкой воды, аналитические методы решения применимы лишь в очень ограниченных и специфических условиях. Поэтому для большинства задач предпочтительным становится применение численных методов.

Для численного решения полученной системы уравнений предложен алгоритм на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ, хорошо зарекомендовавший себя в применении к уравнениям мелкой воды [51; 52]. Показаны свойства сбалансированности схемы, как при постоянной, так и в случае переменной плотности. Рассмотрен существенно двумерный модельный тест, исследующий динамику потока жидкости различной плотности в квадратном

резервуаре, оснащённом системой для поступления и отвода жидкости. Такие условия часто встречаются на границе рек и морей, где разница в плотности воды может вызывать сложные гидродинамические явления. Для проверки работоспособности и точности предложенной численной модели было проведено моделирование приливной динамики в Белом море.

1.1 Уравнения мелкой воды с переменной плотностью, учетом внешнего давления и донного рельефа

Аналогично теории классической мелкой воды, основными предположениями при выводе уравнений мелкой воды с переменной плотностью являются условия малости вертикального масштаба по отношению к горизонтальному, вертикальной компоненты скорости и градиента давления. Такой подход позволяет отказаться от уравнения на вертикальную компоненту импульса и использовать гидростатическое приближение для давления. С учетом описанных предположений, рассмотрим вывод дифференциальных уравнений мелкой воды с переменной плотностью. Выпишем интегральные законы сохранения (баланса) площади, массы и импульса в случае одного пространственного измерения для произвольной подобласти $x \in [x_1, x_2]$ (Рис.1.1).

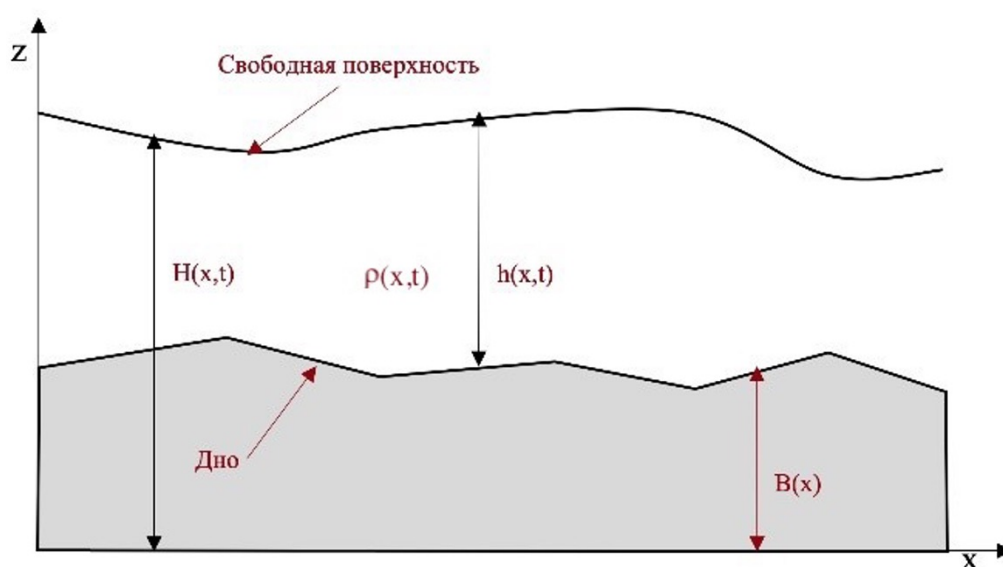


Рисунок 1.1 — Модель мелкой воды с переменной плотностью

Для рассматриваемой подобласти естественным образом определяются ее площадь V , масса M и импульс Π :

$$V = \int_{x_1}^{x_2} h dx, \quad M = \int_{x_1}^{x_2} \rho h dx, \quad \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \rho u h dx,$$

где $H(x, t)$ - свободная поверхность, $B(x)$ - рельеф дна, $h(x, t) = H(x, t) - B(x)$ - толщина, $\rho(x, t)$ - плотность, $u(x, t)$ - горизонтальная составляющая скорости жидкости.

Изменение площади, занимаемой жидкостью, вызвано потоками на вертикальных границах подобласти:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} h dx = -uh|_{x_2} + uh|_{x_1} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial hu}{\partial x} dx.$$

Аналогично рассуждая, получим уравнения, описывающие изменение массы и импульса выбранной подобласти:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho h dx = -\rho uh|_{x_2} + \rho uh|_{x_1} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho hu}{\partial x} dx, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho u h dx = -(\rho u^2 h + \rho g h^2 / 2 + P_T h)|_{x_2} + (\rho u^2 h + \rho g h^2 / 2 + P_T h)|_{x_1} - \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} P_B \frac{\partial B}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} P_T \frac{\partial H}{\partial x} dx, \end{aligned}$$

здесь g - ускорение свободного радения, P_T - давление на свободной поверхности, $P_B = P_T + \rho g h$ - давление на дне.

В силу произвольности выбора подобласти, из приведенных интегральных уравнений следуют соответствующие законы сохранения в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho uh}{\partial t} + \frac{\partial \rho hu^2}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial \rho h^2}{\partial x} + \frac{\partial P_T h}{\partial x} &= P_T \frac{\partial H}{\partial x} - P_B \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Замечание. При постоянной плотности $\rho = const$ третье уравнение системы (1.1) совпадает с первым уравнением, а вся система (1.1) переходит в уравнения мелкой воды.

Полученные уравнения (1.1) являются системой гиперболического типа и для ее численного решения будем применять алгоритм на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ [45], хорошо зарекомендовавший себя в применении к классическим уравнениям мелкой воды с постоянной плотностью.

Для построения численной схемы класса КАБАРЕ необходимо привести систему дифференциальных уравнений (1.1) к характеристическому виду. Это преобразование позволяет представить исходные уравнения в виде системы уравнений переноса некоторых величин с правой частью. Далее будет показана последовательность действий, необходимых для решения этой задачи. Сначала применим правило производной произведения к каждому члену уравнений системы (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial hu}{\partial x} + hu \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \rho h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho hu}{\partial x} + \rho hu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{gh^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ &+ \rho gh \frac{\partial h}{\partial x} + P_T \frac{\partial h}{\partial x} = P_T \frac{\partial H}{\partial x} - P_B \frac{\partial B}{\partial x} - h \frac{\partial P_T}{\partial x} \end{aligned}$$

Затем, сокращая подобные члены, получим, так называемую, простую форму уравнений (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{gh}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{P_B}{\rho h} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{\rho h} \left(P_T \frac{\partial H}{\partial x} - P_B \frac{\partial B}{\partial x} - h \frac{\partial P_T}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований удобно записать эту систему в векторном виде:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + A \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} = \vec{d}, \quad \vec{\varphi} = (h, \rho, u)^T, \quad \vec{d} = (0, 0, F/\rho h), \quad (1.2)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} u & 0 & h \\ 0 & u & 0 \\ P_B/(\rho h) & gh/(2\rho) & u \end{pmatrix}, \quad F = P_T \frac{\partial H}{\partial x} - P_B \frac{\partial B}{\partial x} - h \frac{\partial P_T}{\partial x}.$$

Для поиска характеристической формы исходных уравнений вычисляются собственные числа λ матрицы A и соответствующие им левые собственные векторы \vec{l} . Все три собственные числа матрицы A действительны:

$$\lambda_1 = u + c, \quad \lambda_2 = u - c, \quad \lambda_3 = u, \quad c = \sqrt{P_B/\rho}.$$

Вычислим левые собственные векторы матрицы A . Для собственного значения λ_1 имеем следующие выкладки:

$$(a_1, a_2, 1) \begin{pmatrix} -c & 0 & h \\ 0 & -c & 0 \\ P_B/(\rho h) & gh/(2\rho) & -c \end{pmatrix} = 0$$

$$-a_1 \cdot c + \frac{P_B}{\rho h} = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{c}{h}$$

$$-a_2 \cdot c + \frac{gh}{2\rho} = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{gh}{2\rho c}$$

Таким образом, левый собственный вектор, соответствующий λ_1 имеет вид $\vec{l}_1 = \left(\frac{c}{h}, \frac{gh}{2\rho c}, 1\right)$. Аналогичным образом находится левый собственный вектор $\vec{l}_2 = \left(-\frac{c}{h}, -\frac{gh}{2\rho c}, 1\right)$ для λ_2 . Для собственного значения λ_3 левый собственный вектор $\vec{l}_3 = (0, 1, 0)$.

Далее формируется матрица Ω из полученных левых собственных векторов матрицы A и система (1.2) умножается слева на неё.

$$\Omega \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \Omega A \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} = \Omega \vec{d},$$

Будем предполагать постоянной матрицу $\Omega = \Omega_C$ в пределах некоторой пространственно-временной области C . Тогда, учитывая определение левых собственных векторов, получаем характеристическую форму исходных уравнений (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Omega_C \vec{\varphi}) + (\vec{\lambda} E) \frac{\partial}{\partial x} (\Omega_C \vec{\varphi}) = \Omega_C \vec{d},$$

где E - единичная диагональная матрица.

Обозначив, $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)^T = \Omega_C \vec{\varphi}$, $I_{1,2} = u \pm \left(\frac{c}{h}\right)_c h \pm \left(\frac{gh}{2\rho c}\right)_c \rho$, $I_3 = \rho$, локально-характеристическая форма принимает вид системы уравнений переноса для некоторых величин I_1, I_2, I_3 . Эти величины являются локальными инвариантами Римана, определенными только в пределах области C .

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial I_1}{\partial x} &= Q_1 = (F/\rho h), \\ \frac{\partial I_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial I_2}{\partial x} &= Q_2 = (F/\rho h), \\ \frac{\partial I_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial I_3}{\partial x} &= Q_3 = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Характеристическое представление систем уравнений в частных производных гиперболического типа служит основой для “характеристических” [73] и “сеточно-характеристических” [74] методов численного решения этих уравнений.

Аналогичные рассуждения в случае двух пространственных переменных приводят к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho hu}{\partial t} + \frac{\partial \rho hu^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho huv}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial \rho h^2}{\partial x} + \frac{\partial P_T h}{\partial x} &= F = P_T \frac{\partial H}{\partial x} - P_B \frac{\partial B}{\partial x} \\
 \frac{\partial \rho hv}{\partial t} + \frac{\partial \rho huv}{\partial x} + \frac{\partial \rho hv^2}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial \rho h^2}{\partial y} + \frac{\partial P_T h}{\partial y} &= F = P_T \frac{\partial H}{\partial y} - P_B \frac{\partial B}{\partial y} \\
 \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho hu}{\partial x} + \frac{\partial \rho hv}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2 Схема КАБАРЕ для системы уравнений мелкой воды с переменной плотностью

Основное внимание в данной работе уделяется подробному и систематическому описанию одного из современных направлений развития численных методов для решения систем уравнений гиперболического типа. Начало данному направлению, известному как балансно-характеристические схемы класса КАБАРЕ [75], было положено в работах А. А. Самарского и В. М. Головизнина [76; 77].

Идеей балансно-характеристических схем класса КАБАРЕ является использование конечно-объёмного подхода, при этом используется удвоенный набор сеточных переменных – один набор относится к ячейкам, другой к граням между ячейками. Переменные, относящиеся к ячейкам, называются консервативными, переменные, относящиеся к граням, – потоковыми.

Разделение переменных на «консервативные» и «потоковые» не является чем-то принципиально новым — в многих консервативных схемах работают с консервативными переменными и потоками, которые вычисляются по тому или иному правилу по уже известным консервативным переменным [50; 78–80]. В методике КАБАРЕ для вычисления новых потоковых переменных используются не только консервативные, но и потоковые переменные с предыдущего

временного шага. Это обстоятельство принципиально меняет роль потоковых переменных, делая их равноправными участниками процесса вычислений.

Для вычисления эволюции переменных в ячейках используются балансные соотношения, в которые входят переменные на гранях (потоковые переменные). Для вычисления новых по времени значений переменных на гранях применяется характеристический принцип, аппроксимирующий перенос локальных инвариантов Римана в пределах пространственно-временной ячейки.

Опишем численный алгоритм решения системы уравнений мелкой воды с переменной плотностью (1.4). Введем в области $G = \{x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, y_{\min} \leq y \leq y_{\max}, 0 \leq t \leq T\}$ равномерную по пространству сетку Ω :

$$\Omega = \begin{cases} x_i : x_{i+1} - x_i = h_x > 0; x_1 = x_{\min}; x_{N_x} = x_{\max}; i = \overline{1, N_x - 1} \\ y_j : y_{j+1} - y_j = h_y > 0; y_1 = y_{\min}; y_{N_y} = y_{\max}; j = \overline{1, N_y - 1} \\ t^n : t^{n+1} - t^n = \tau^n > 0; t^0 = 0; t^K = T; n = \overline{0, K - 1} \end{cases}$$

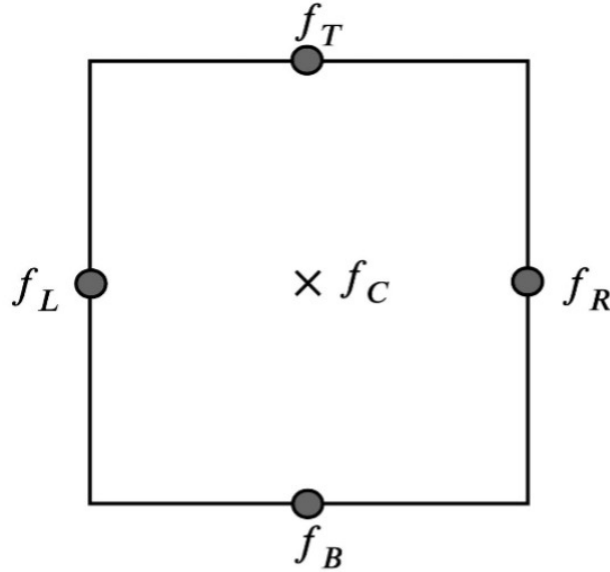


Рисунок 1.2 — Расположение сеточных функций, используемых в схеме КАБАРЕ

На заданной сетке определим два типа сеточных переменных: потоковые и консервативные [75]. Потоковые переменные относятся к серединам граней расчетных ячеек, консервативные – к их центрам (Рис.1.2):

$$\begin{aligned}
f_C^n &= f_{i+1/2,j+1/2}^n = f(x_i + 0.5 \cdot h_x, y_j + 0.5 \cdot h_y, t^n) \\
f_R^n &= f_{i+1,j+1/2}^n = f(x_i + h_x, y_j + 0.5 \cdot h_y, t^n) \\
f_L^n &= f_{i,j+1/2}^n = f(x_i, y_j + 0.5 \cdot h_y, t^n) \\
f_T^n &= f_{i+1/2,j+1}^n = f(x_i + 0.5 \cdot h_x, y_j + h_y, t^n) \\
f_B^n &= f_{i+1/2,j}^n = f(x_i + 0.5 \cdot h_x, y_j, t^n)
\end{aligned}$$

Начальные данные задаются для консервативных переменных, потоковые переменные вычисляются как среднее арифметическое значение ближайших консервативных.

В схемах класса КАБАРЕ в алгоритме поиска значений переменных на новом временном слое естественно выделить два этапа: вычисление потоковых переменных и на основании полученных значений расчет консервативных переменных.

В первом этапе удобно выделить вспомогательную процедуру вычисления консервативных переменных на промежуточном временном слое $t_{n+1/2}$, используя консервативную аппроксимацию законов сохранения (1.4) по методу конечного объема для каждой ячейки сетки. Далее будем называть эту процедуру первой фазой. На основе полученных значений экстраполяцией локальных инвариантов Римана вычисляются потоковые переменные на новом временном слое t_{n+1} (далее – фаза 2). Аналогично фазе 1 на втором этапе используется конечно-объёмный подход для вычисления консервативных переменных на новом слое (далее – фаза 3).

Первая фаза.

Согласно методу конечных объемов [39—41] для каждой расчетной ячейки записывается балансное соотношение. Так как дифференциальные уравнения (1.4) были получены из законов сохранения (баланса), то достаточно проинтегрировать по ячейке эти уравнения. При помощи формулы Остроградского-Гаусса интегралы по объему ячейки можно заменить на контурные интегралы по её границе. Каждый контурный интеграл, в свою очередь, можно переписать как сумму интегралов по граням ячейки. Аппроксимация интегралов по граням выполняется по формуле прямоугольников.

$$\begin{aligned}
& \frac{h_c^{n+1/2} - h_c^n}{\tau/2} + \frac{(hu)_R^n - (hu)_L^n}{h_x} + \frac{(hv)_T^n - (hv)_B^n}{h_y} = 0 \\
& \frac{(\rho hu)_c^{n+1/2} - (\rho hu)_c^n}{\tau/2} + \frac{(\rho hu^2)_R^n - (\rho hu^2)_L^n}{h_x} + \frac{(\rho huv)_T^n - (\rho huv)_B^n}{h_y} + \\
& \quad + g \frac{h_R^n + h_L^n}{2} \frac{\rho_R^n + \rho_L^n}{2} \frac{H_R^n - H_L^n}{h_x} + \frac{g}{2} \frac{(h_R^n)^2 + (h_L^n)^2}{2} \frac{\rho_R^n - \rho_L^n}{h_x} = 0 \\
& \frac{(\rho hv)_c^{n+1/2} - (\rho hv)_c^n}{\tau/2} + \frac{(\rho hv^2)_T^n - (\rho hv^2)_B^n}{h_y} + \frac{(\rho hvu)_R^n - (\rho hvu)_L^n}{h_x} + \\
& \quad + g \frac{h_T^n + h_B^n}{2} \frac{\rho_T^n + \rho_B^n}{2} \frac{H_T^n - H_B^n}{h_y} + \frac{g}{2} \frac{(h_T^n)^2 + (h_B^n)^2}{2} \frac{\rho_T^n - \rho_B^n}{h_y} = 0 \\
& \frac{(\rho h)_c^{n+1/2} - (\rho h)_c^n}{\tau/2} + \frac{(\rho hu)_R^n - (\rho hu)_L^n}{h_x} + \frac{(\rho hv)_T^n - (\rho hv)_B^n}{h_y} = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Вторая фаза.

На данном этапе необходимо задать алгоритм вычисления значений потоковых переменных на новом временном слое $(n+1)$. Для этого используем процедуру экстраполяции локально-одномерных инвариантов по каждому направлению в пределах пространственно-временных расчетных ячеек. Рассмотрим направление вдоль оси X. Локально-линейные инварианты и собственные значения на старом и промежуточном временном слое находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
I_{1x} &= u + \left(\frac{g}{c}\right)_c H + \left(\frac{c}{2\rho}\right)_c \rho, \quad \lambda_{1x} = u + \sqrt{P_B/\rho} \\
I_{2x} &= u + \left(\frac{g}{c}\right)_c H + \left(\frac{c}{2\rho}\right)_c \rho, \quad \lambda_{2x} = u + \sqrt{P_B/\rho} \\
I_{3x} &= v, \quad \lambda_{3x} = u \\
I_{4x} &= \rho, \quad \lambda_{4x} = u
\end{aligned}$$

Характеристические скорости, определяющие направление экстраполяции, для грани j задаются как среднее арифметическое характеристических скоростей в центрах смежных с этой гранью ячеек:

$$(\lambda_{kx})_{i,j}^{n+1/2} = \frac{(\lambda_k)_{i,j+1/2}^{n+1/2} + (\lambda_k)_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{2}, k = \overline{1,4}$$

Локально-одномерные инварианты в каждой ячейке связаны соотношениями (экстраполянтами):

$$\left(\hat{I}_{kx}\right)_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} 2(I_{kx})_{i-1/2,j}^{n+1/2} - (I_{kx})_{i-1,j}^n, & 5A; 8 \quad (\lambda_{kx})_{i,j}^{n+1/2} > 0 \\ 2(I_{kx})_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (I_{kx})_{i+1,j}^n, & 5A; 8 \quad (\lambda_{kx})_{i,j}^{n+1/2} \leq 0 \end{cases}$$

Для обеспечения монотонности значений инвариантов на новом временном слое, необходимо провести процедуру коррекции, основанную на принципе максимума [45]. Поскольку в уравнениях локальных инвариантов (1.3) присутствует ненулевая правая часть, оказывающая влияние на соблюдение принципа максимума, алгоритм монотонизации формируется следующим образом:

$$(I_{kx})_{i,j}^{n+1} = \begin{cases} (I_{kx}^{\min})_{i,j}, & \text{если } (I_{kx}^{\min})_{i,j} > (\hat{I}_{kx})_{i,j}^{n+1} \\ (I_{kx}^{\max})_{i,j}, & \text{если } (\hat{I}_{kx})_{i,j}^{n+1} > (I_{kx}^{\max})_{i,j} \\ (\hat{I}_{kx})_{i,j}^{n+1}, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $(I_{kx}^{\min})_{i,j}, (I_{kx}^{\max})_{i,j}$ - минимальное и максимальное значения инварианта с предыдущего временного слоя той пространственной ячейке, из которой производилась экстраполяция

$$\begin{aligned} (I_{kx}^{\min})_{i,j} &= \begin{cases} \min \left\{ (I_{kx})_{i,j}^n, (I_{kx})_{i-\frac{1}{2},j}^n, (I_{kx})_{i-1,j}^n \right\} + \tau (Q_{kx})_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}, & \text{если } (\lambda_{kx})_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} > 0 \\ \min \left\{ (I_{kx})_{i,j}^n, (I_{kx})_{i+\frac{1}{2},j}^n, (I_{kx})_{i+1,j}^n \right\} + \tau (Q_{kx})_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}, & \text{если } (\lambda_{kx})_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases} \\ (I_{kx}^{\max})_{i,j} &= \begin{cases} \max \left\{ (I_{kx})_{i,j}^n, (I_{kx})_{i-\frac{1}{2},j}^n, (I_{kx})_{i-1,j}^n \right\} + \tau (Q_{kx})_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}, & \text{если } (\lambda_{kx})_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} > 0 \\ \max \left\{ (I_{kx})_{i,j}^n, (I_{kx})_{i+\frac{1}{2},j}^n, (I_{kx})_{i+1,j}^n \right\} + \tau (Q_{kx})_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}, & \text{если } (\lambda_{kx})_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

и правые части Q_{kx} уравнений на инварианты (1.3) аппроксимируются через соответствующие им левые части:

$$(\tilde{Q}_m)_{i+1/2}^{k+1/2} = \frac{(\tilde{I}_m)_{i+1/2}^{k+1/2} - (I_m)_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + (\tilde{\lambda}_m)_{i+1/2}^{k+1/2} \frac{(I_m)_{i+1}^{k+1/2} - (I_m)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}}$$

Таким образом, после процедуры монотонизации на новом слое по времени на каждой грани определены 4 инварианта, из которых можно найти четыре физические переменные H, u, v, ρ .

По направлению Оу экстраполяция инвариантов производится аналогично.

Третья фаза.

На завершающем этапе вновь применяется метод конечных объемов для вычисления консервативных переменных на новом временном слое, с учетом результатов предыдущих фаз. Для каждой расчетной ячейки выполняется интегрирование по объему с последующим переходом к контурным интегралам по её границам.

$$\begin{aligned}
& \frac{h_c^{n+1} - h_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(hu)_R^{n+1} - (hu)_L^{n+1}}{h_x} + \frac{(hv)_T^{n+1} - (hv)_B^{n+1}}{h_y} = 0 \\
& \frac{(\rho hu)_c^{n+1} - (\rho hu)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\rho hu^2)_R^{n+1} - (\rho hu^2)_L^{n+1}}{h_x} + \frac{(\rho huv)_T^{n+1} - (\rho huv)_B^{n+1}}{h_y} + \\
& \quad + g \frac{h_R^{n+1} + h_L^{n+1}}{2} \frac{\rho_R^{n+1} + \rho_L^{n+1}}{2} \frac{H_R^{n+1} - H_L^{n+1}}{h_x} + \frac{g}{2} \frac{(h_R^{n+1})^2 + (h_L^{n+1})^2}{2} \frac{\rho_R^{n+1} - \rho_L^{n+1}}{h_x} = 0 \\
& \frac{(\rho hv)_c^{n+1} - (\rho hv)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\rho hv^2)_T^{n+1} - (\rho hv^2)_B^{n+1}}{h_y} + \frac{(\rho hvu)_R^{n+1} - (\rho hvu)_L^{n+1}}{h_x} + \\
& \quad + g \frac{h_T^{n+1} + h_B^{n+1}}{2} \frac{\rho_T^{n+1} + \rho_B^{n+1}}{2} \frac{H_T^{n+1} - H_B^{n+1}}{h_y} + \frac{g}{2} \frac{(h_T^{n+1})^2 + (h_B^{n+1})^2}{2} \frac{\rho_T^{n+1} - \rho_B^{n+1}}{h_y} = 0 \\
& \frac{(\rho h)_c^{n+1} - (\rho h)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\rho hu)_R^{n+1} - (\rho hu)_L^{n+1}}{h_x} + \frac{(\rho hv)_T^{n+1} - (\rho hv)_B^{n+1}}{h_y} = 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Начальные данные.

Для запуска расчета необходимо задать начальные значения для всех потоковых и консервативных переменных. При этом независимое задание начальных значений обоих типов переменных может привести к возникновению артефактов в численном решении. В литературе можно найти различные варианты согласования между собой начальных потоковых и консервативных переменных [45; 81–83]. Если не сказано иное, начальные данные будем задавать для консервативных переменных, а потоковые переменные вычисляются как среднее арифметическое значений ближайших консервативных.

Выбор величины шага по времени.

Условия устойчивости схемы КАБАРЕ имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{[c_{i+1/2,j+1/2}^n + |u|_{i+1/2,j+1/2}^n] \tau}{\Delta x_{i+1/2}} \leq CFL \leq 1, \\
& \frac{[c_{i+1/2,j+1/2}^n + |v|_{i+1/2,j+1/2}^n] \tau}{\Delta y_{j+1/2}} \leq CFL \leq 1,
\end{aligned}$$

Эти условия позволяют выбрать шаг по времени следующим образом $\tau^n = CFL \times \min_{i,j} \left\{ \frac{\Delta x_{i+1/2}}{[c_{i+1/2,j+1/2}^n + |u|_{i+1/2,j+1/2}^n]}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{[c_{i+1/2,j+1/2}^n + |v|_{i+1/2,j+1/2}^n]} \right\}$, где CFL - число Куранта-Фридрихса-Леви.

1.3 Свойство сбалансированности

Понятие сбалансированной схемы вводится для описания схем, точно сохраняющих на дискретном уровне определенные равновесные состояния. Для численных алгоритмов решения уравнений мелкой воды проверкой на сбалансированность является стационарный тест на сохранение ровной поверхности $H = \text{const}$, при произвольной форме рельефа дна. В данном тесте плотность постоянная.

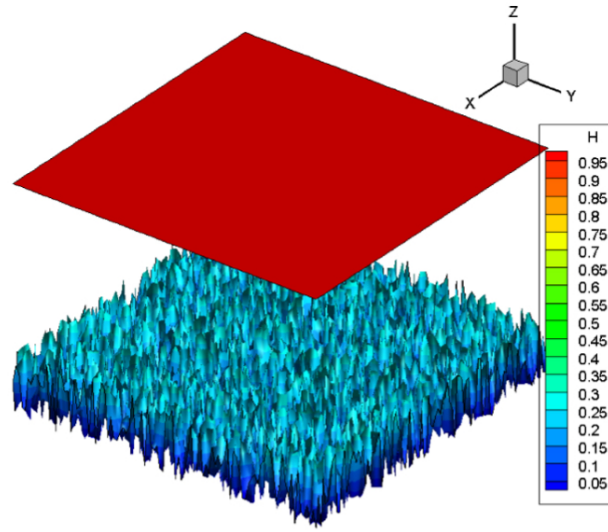


Рисунок 1.3 — Начальные данные теста сбалансированности

Начальные данные (Рис.1.3) стационарного теста можно описать системой:

$$\begin{aligned}
 H_0(x,y) &= 1 \\
 u_0(x,y) &= 0 \\
 v_0(x,y) &= 0 \\
 \rho_0(x,y) &= 1 \\
 B(x,y) &= (0.3 \cdot (\text{rand}() \cdot \text{mod } 1000)) / 1000
 \end{aligned}$$

Для проверки алгоритма проводился и численный расчет. Задавался случайным образом сгенерированный рельеф дна на области $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$. На границе ставилось условие непротекания – нормальная компонента скорости равна 0. Расчет производился на сетке $N_y = 100, N_x = 100$ при CFL=0.2. Результат показал, что схема КАБАРЕ обладает свойством сбалансированности,

то есть скорости на каждый момент времени остаются нулевыми. Доказательство свойства сбалансированности для численного решения уравнений мелкой воды (однослойная модель) не приводится в явном виде, поскольку оно является частным случаем доказательства, представленного в разделе 3.4 для уравнений многослойной мелкой воды.

1.4 Тест на сохранение стационарного состояния жидкости с переменной плотностью

Рассматривается стационарный одномерный тест с переменной плотностью.

В качестве начального выберем следующее распределение параметров:

$$\begin{aligned} H_0(x,y) &= 1 + \frac{y+l_y}{4}, \\ u_0(x,y) &= 0, \\ v_0(x,y) &= 0, \\ \rho_0(x,y) &= \frac{1}{(H_0(x,y))^2}, \\ B(x,y) &= 0, \end{aligned}$$

где $x \in [-l_x, l_x], y \in [-l_y, l_y], l_x = l_y = 0.5, g = 1$. На границах ставится условие непротекания – нормальная компонента скорости равна 0. Расчет производится на сетке $N_y = 64, N_x = 64$ при $CFL = 0.25$. Такие начальные данные позволяют говорить о стационарности этого теста. Действительно, задание плотности таким образом выравнивает давление в каждой точке области и скорости в начальный момент времени нулевые.

На рис. 1.4 приведены результаты расчета по схеме КАБАРЕ для однослойной мелкой воды с переменной плотностью. Можно отметить, что в процессе расчета появляется ненулевая скорость v , но ее модуль не превышает значений $3 \cdot 10^{-6}$ и при дальнейшем расчете не возрастает. Данный эффект связан с некоторой рассогласованностью начальных консервативных и потоковых данных.

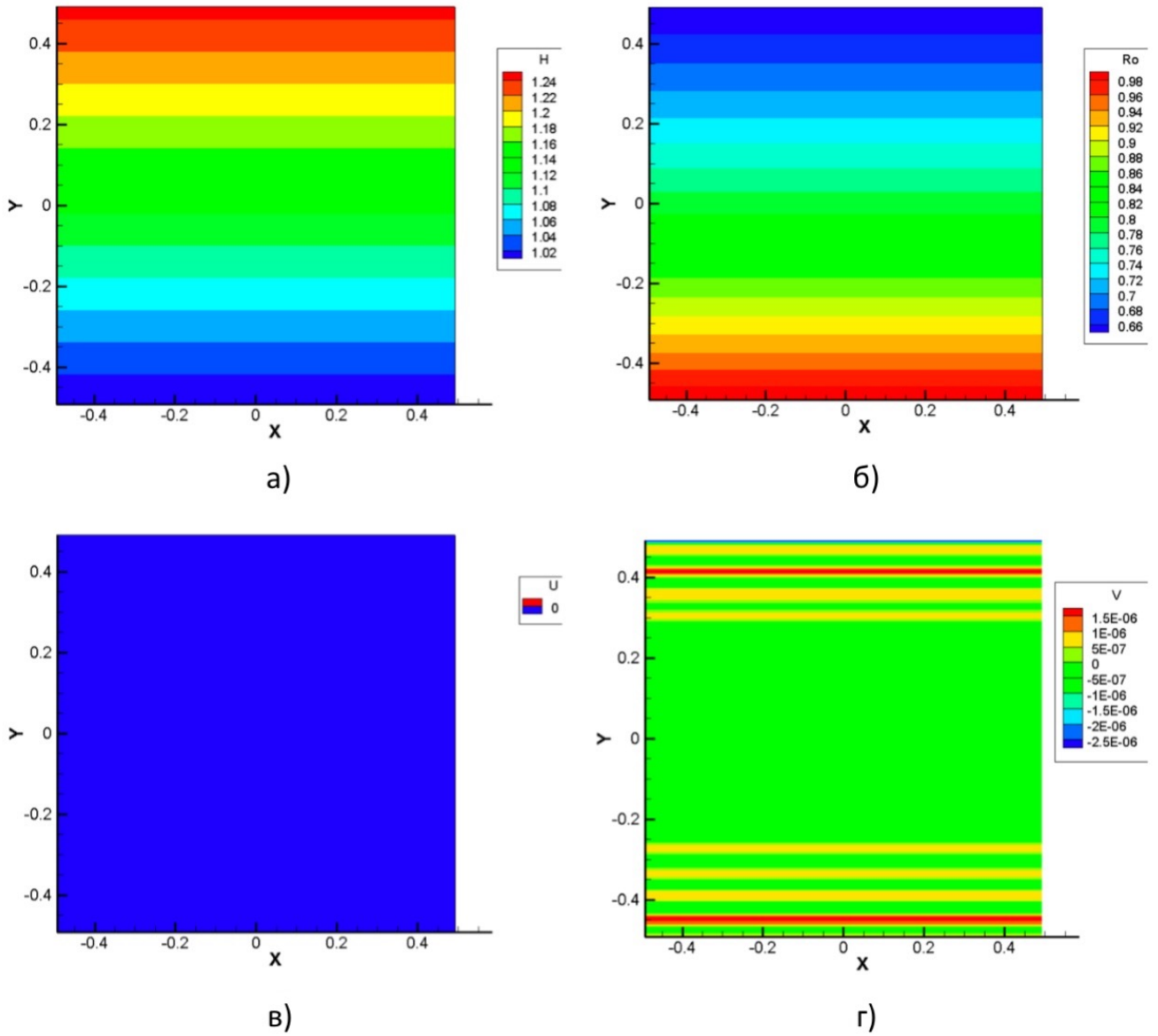


Рисунок 1.4 — Результаты расчета после $5 \cdot 10^4$ временных шагов а) H , б) ρ , в) u , г) v

1.5 Задача о динамике жидкости со свободной поверхностью и переменной плотностью на неровном дне

Рассматривается квадратный резервуар с водой, в который с одной стороны втекает вода из резервуара с большей высотой H_{in} , а на противоположной стороне размещен сток воды в резервуар с меньшей высотой H_{out} . Рельеф дна основного резервуара задан формулой

$$B(x,y) = \begin{cases} 0.3, & \text{если } |x| < \frac{l_x}{4} \text{ и } |y| < \frac{l_y}{4} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

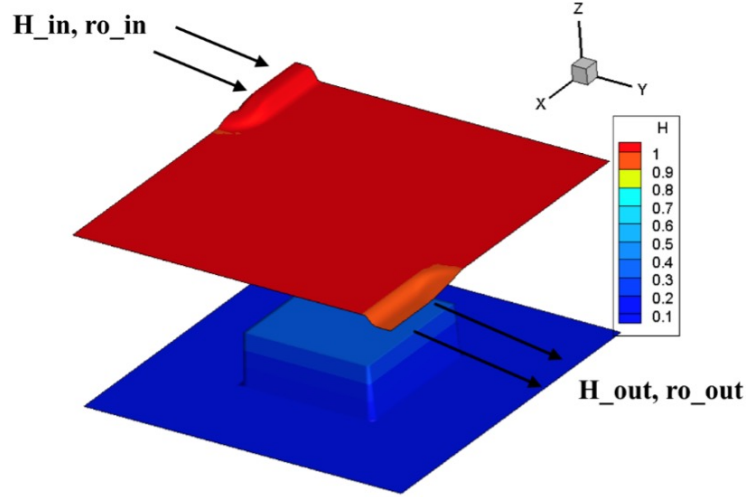


Рисунок 1.5 — Схема эксперимента с переменной плотностью на неровном дне

В начальный момент (рис. 1.5) основной резервуар и жидкость в нем описывается следующими параметрами:

$$\begin{aligned} H_0(x,y) &= 1, \\ u_0(x,y) &= 0, \\ v_0(x,y) &= 0, \\ \rho_0(x,y) &= 1, \end{aligned}$$

где $x \in [-l_x, l_x]$, $y \in [-l_y, l_y]$, $l_x = l_y = 0.5$. На всех границах, кроме мест втекания и стока воды, используются граничные условия непротекания. Параметры жидкостей в примыкающих резервуарах описываются следующей системой:

$$\begin{aligned} H_{in}(t) &= 1.1, \\ \rho_{in}(t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } t < t_{stable} \\ 1.1, & \text{иначе} \end{cases}, \\ H_{out}(t) &= 0.9, \\ \rho_{out}(t) &= 1, \end{aligned}$$

где t_{stable} - время, после которого система приходит в относительное равновесие.

На рис. 1.6 видны ярко выраженные вихревые структуры как по плотности, так и по высоте. Эта модельная задача использовалась в качестве показательного случая для задачи об усвоении данных [84].

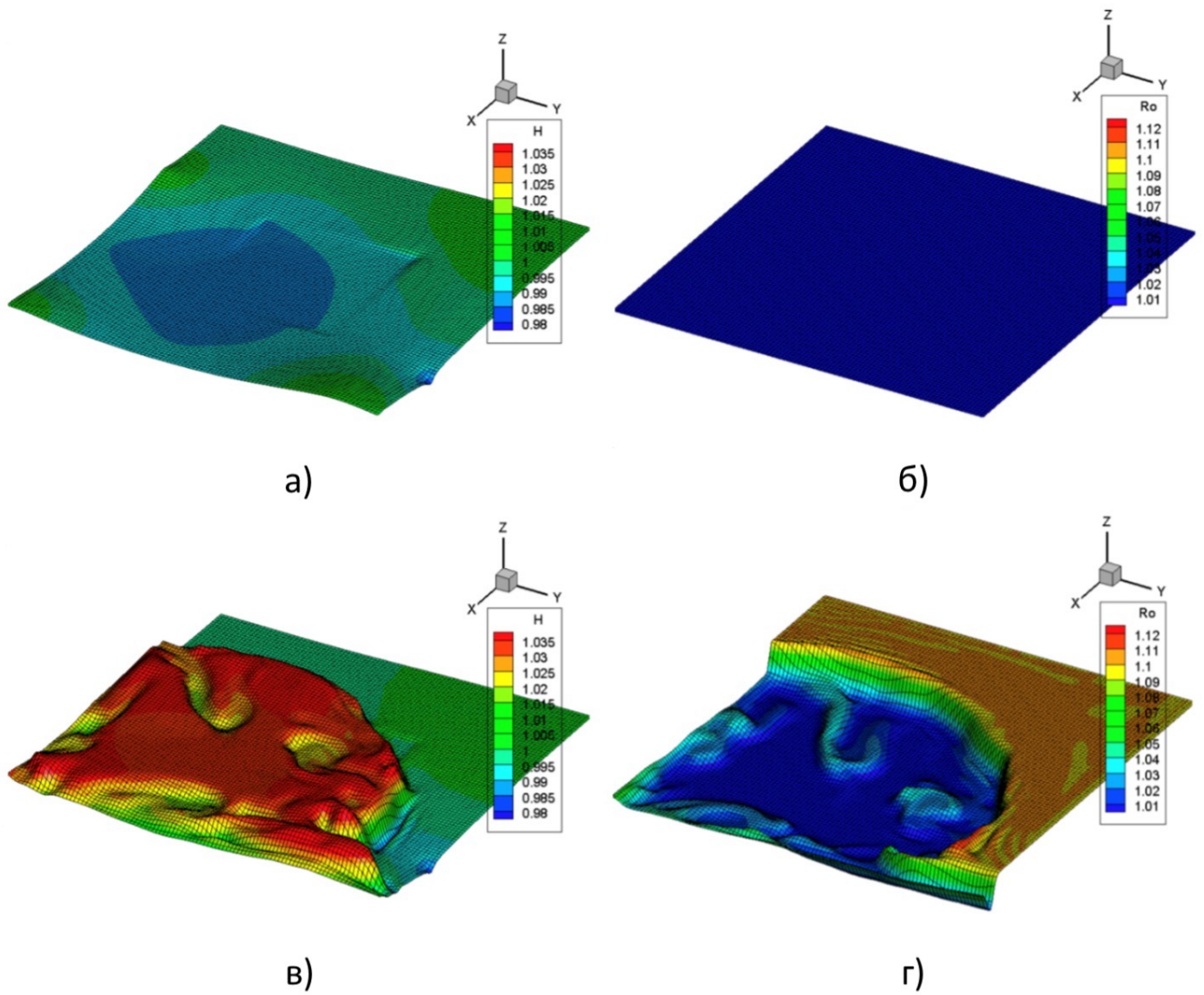


Рисунок 1.6 — Результаты расчета а) H при $t = t_{stable}$ после $4 \cdot 10^5$ временных шагов, б) Ro при $t = t_{stable}$ после $4 \cdot 10^5$ шагов, в) H при $t = t_{stable}$ после $5 \cdot 10^5$ шагов, г) Ro при $t = t_{stable}$ после $5 \cdot 10^5$ шагов

1.6 Задача о приливной динамике в Белом море.

Для проверки работоспособности и точности предложенной модели было проведено численное моделирование приливной динамики в Белом море. В качестве расчетной области была выбрана акватория Белого моря с характерной сложной береговой линией и переменной глубиной. В проливе (Горло), соединяющем Белое и Баренцево моря, были заданы периодические граничные условия, основанные на модели приливов [85]. На остальных границах области задаются

условия “прилипания” $u = 0$. Глубины (рис. 1.7) были взяты из данных базы ТОРО1 [86], которая обладает высоким разрешением $1/12$ градуса.

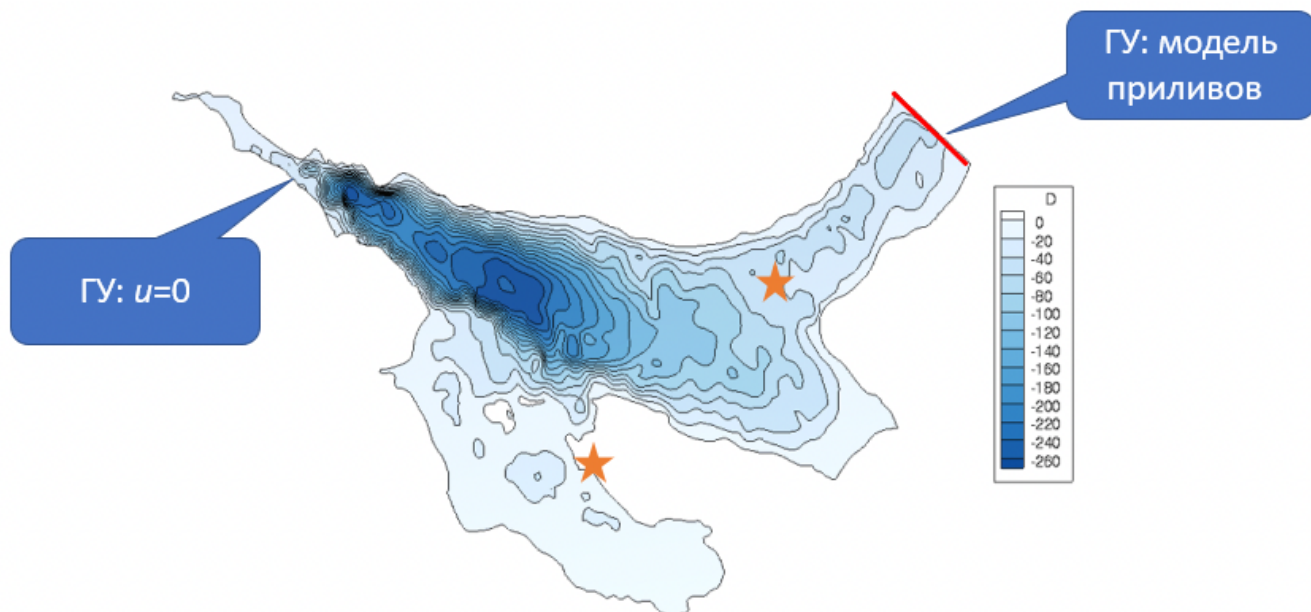


Рисунок 1.7 — Расчетная область – границы, глубины. Оранжевые звезды – положение точек амфидромии

Для моделирования использовалась неструктурированная четырехугольная расчетная сетка. На рис. 1.8 приведена часть расчетной сетки вблизи Соловецких островов, демонстрирующая хорошую детализацию границ самих островов и неравномерность сетки. В качестве начальных данных брались нулевые скорости и невозмущенная свободная поверхность. Рассчитывалось 8 суток.

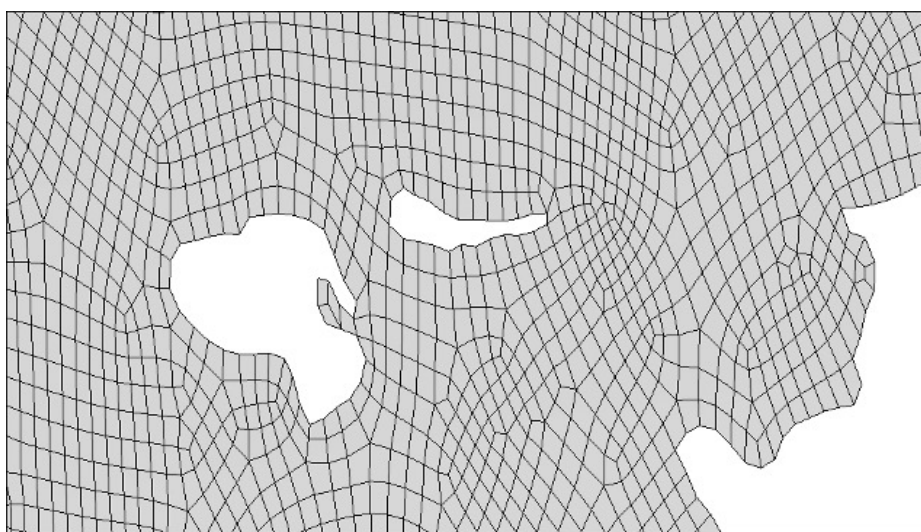


Рисунок 1.8 — Расчетная сетка вблизи Соловецких островов

На рис. 1.9 приведены численные результаты расчета уровней свободной поверхности в различные моменты времени. Благодаря учету приливной ди-

намики в Горле, на 5-6 сутки решение выходит на периодический режим и сравнимо с другими численными расчетами [87; 88]. Одной из характеристик приливного движения Белого моря является наличие точек амфидромии, уровень поверхности в которых остается постоянным. Анализ динамики свободной поверхности за восьмые сутки показал хорошее совпадение положения точек амфидромии с данными наблюдений. Таким образом, тестирование на примере Белого моря подтвердило способность модели воспроизводить приливные процессы в условиях сложной геометрии и переменной глубины, что свидетельствует о ее надежности и адекватности для моделирования динамики свободной поверхности в прибрежных зонах.

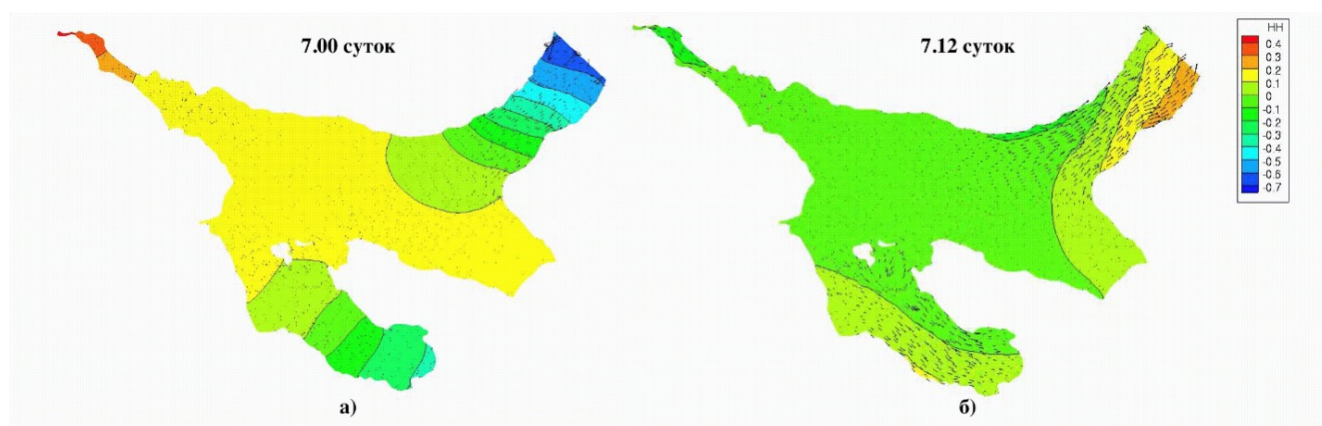


Рисунок 1.9 — Уровень свободной поверхности из расчетов по модели КАБАРЕ на моменты времени а) 7 суток, б) 7.12 суток

Глава 2. Балансно-характеристический метод КАБАРЕ для модели двухслойной мелкой воды

Во многих практических случаях, например, при сбросе в водоемы теплых вод, охлаждающих конденсаторы атомных электростанций, при вторжении соленой морской воды в низовья рек, возникают стратифицированные по плотности течения, которые с большой степенью точности могут рассматриваться как двухслойные, т.е. состоящие из двух слоев жидкости, имеющих различие в плотности и движущиеся с различными скоростями. С помощью модели двухслойной мелкой воды можно рассматривать и некоторые задачи взаимодействия атмосферы и океана (случай с большим перепадом плотности).

В последние годы изучение двухслойных уравнений мелкой воды дало множество интересных подходов, отраженных в различных публикациях. Так, например, в статьях Castro [61; 89] реализована и исследована схема Рое, основанная на методе конечных объемов. В работе Bouchut [90] использовалось расщепление временного шага для решения системы уравнений двухслойной мелкой воды. Основная идея состояла в том, чтобы рассматривать два закона баланса отдельно, в два этапа, сохраняя переменные для одного слоя постоянными при вычислении новых значений для другого. В серии статей Abgrall и Karni [91; 92] была предложена схема релаксации системы двухслойной мелкой воды. Для оценки собственных значений, точный расчет которых является сложной задачей, они проанализировали структуру собственных значений отдельно двух соответствующих однослойных уравнений. В результате этого анализа они дают верхние и нижние границы для абсолютных значений собственных значений полной двухслойной системы. В работе Курганова [93] исследуется трехслойная аппроксимация двухслойной мелкой воды путем введения промежуточного слоя малой толщины, которая улучшает устойчивость системы двухслойной мелкой воды, а также расширяет область строгой гиперболичности этой системы.

В данной главе рассматривается как сама система уравнений двухслойной мелкой воды, так и алгоритм на основе балансно-характеристического метода КАБАРЕ для ее решения. Важной составляющей этой главы является рассмотрение проблемы потери гиперболичности многослойных гидростатических моделей на самом простом – двухслойном варианте. В отличие от однослойной

мелкой воды, система уравнений двухслойной мелкой воды в зависимости от области значений h_1, u_1, h_2, u_2 может быть не гиперболической. В физическом смысле потеря гиперболичности соответствует неустойчивости Кельвина – Гельмгольца [94], т.е. неустойчивости из-за сильного разрыва скоростей между соседними слоями жидкости. Далее приводится подробное описание численного алгоритма и его апробация на ряде модельных задач, в том числе задаче Курганова о динамике двухслойной жидкости при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями.

2.1 Математическая модель динамики двухслойной мелкой воды

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости над неровным дном под действием силы тяжести. Жидкость состоит из двух несмешивающихся слоев с разной плотностью (рис. 2.1). Давление на свободной границе считается равным нулю. Данное движение описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1 u_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial h_2 u_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial h_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1 u_1^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h_1^2}{\partial x} &= -g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - g h_1 \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial h_2 u_2}{\partial t} + \frac{\partial h_2 u_2^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h_2^2}{\partial x} &= r g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - r g \frac{\partial h_1 h_2}{\partial x} - g h_2 \frac{\partial B}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где h_1, u_1 - толщина и скорость верхнего слоя, h_2, u_2 - нижнего слоя, $B(x)$ - функция, описывающая рельеф дна, g - гравитационная постоянная, r - отношение плотностей слоев ($r = \rho_1/\rho_2 \leq 1$).

Также система (2.1) может быть представлена в векторной форме:

$$\frac{\partial \vec{q}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{q})}{\partial x} = \vec{S}(\vec{q}), \quad (2.2)$$

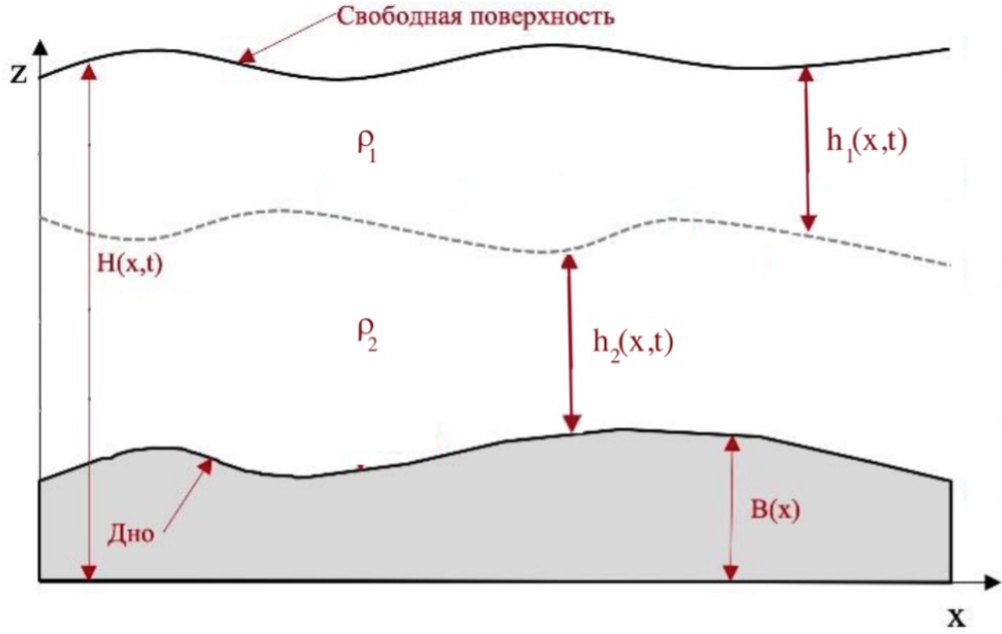


Рисунок 2.1 — Модель двухслойной мелкой воды

$$\text{где } \vec{q}(t,x) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_1 u_1 \\ h_2 u_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(q) = \begin{bmatrix} h_1 u_1 \\ h_2 u_2 \\ h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \\ h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{S}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g h_1 \partial_x (h_2) - g h_1 \partial_x (b) \\ -r g h_2 \partial_x (h_1) - g h_2 \partial_x (b) \end{bmatrix}.$$

2.1.1 Потеря гиперболичности

В отличие от однослойной мелкой воды, система уравнений двухслойной мелкой воды в зависимости от области значений h_1, u_1, h_2, u_2 может быть не гиперболической. В физическом смысле потеря гиперболичности соответствует неустойчивости Кельвина - Гельмгольца, т.е. неустойчивости из-за сильного разрыва скоростей между слоями жидкости.

Квазилинейная форма системы уравнений двухслойной мелкой воды (2.2) получается путем раздифференцирования обеих частей уравнений относительно компонент вектора $\vec{q}(t, x)$:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + A(q) \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} = \vec{\psi}(q), \quad (2.3)$$

$$\text{где } \vec{\psi}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -gh_1 \partial_x(b) \\ -gh_2 \partial_x(b) \end{bmatrix}, \quad A(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ gh_1 - u_1^2 & gh_1 & 2u_1 & 0 \\ rgh_2 & gh_2 - u_2^2 & 0 & 2u_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы $A(q)$ имеет вид:

$$((\lambda - u_1)^2 - gh_1)((\lambda - u_2)^2 - gh_2) = rg^2 h_1 h_2 \quad (2.4)$$

Система (2.3) будет являться гиперболической, если его характеристический многочлен 4-ой степени имеет 4 действительных корня. Явный вид собственных значений громоздок, что затрудняет их анализ. Существует геометрическая интерпретация, предложенная в работе Овсянникова Л.В [58].

Введем новые переменные p и q , такие что

$$\lambda - u_1 = p\sqrt{gh_1}, \lambda - u_2 = q\sqrt{gh_2} \quad (2.5)$$

Тогда уравнение (2.4) в новых переменных запишется следующим образом:

$$(p^2 - 1)(q^2 - 1) = r \quad (2.6)$$

Множество значений переменных p и q , удовлетворяющих уравнению (2.6) при заданном r образуют на плоскости (p, q) кривые четвертого порядка с четырьмя осями симметрии (см. рис. 2.2 синие линии).

Из уравнений (2.5) можно выразить зависимость $q(p)$:

$$q = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} p + \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{gh_2}} \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) описывает прямую, проходящую через точку $(0, (u_1 - u_2) / \sqrt{gh_2})$, с положительным коэффициентом наклона h_1/h_2 (см. рис. 2.2 красные пунктирные прямые). Анализируя взаимное расположение

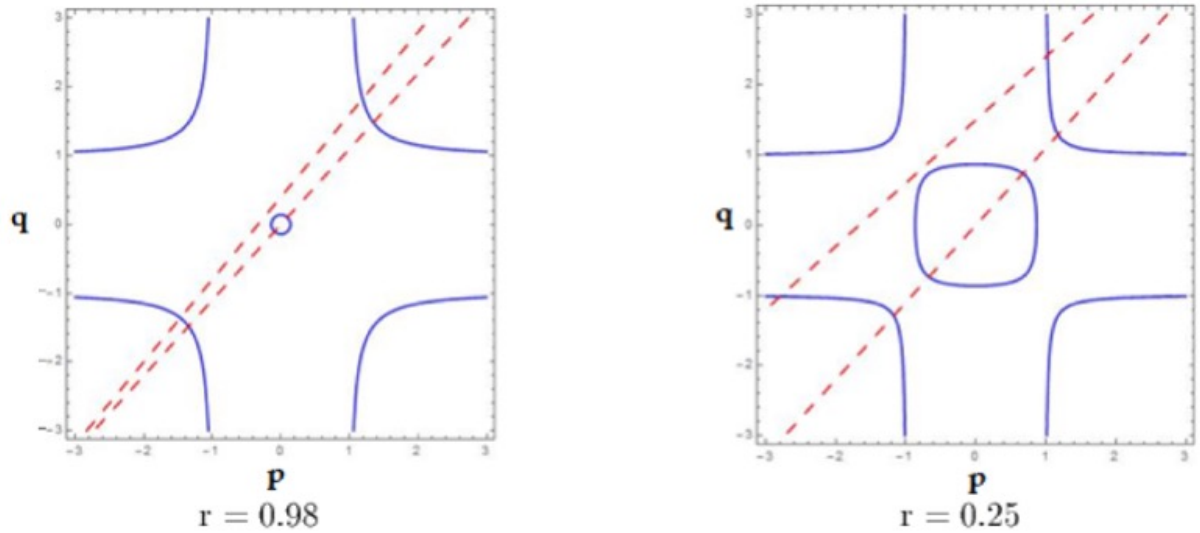


Рисунок 2.2 — Характеристический многочлен в координатах (p, q) для двух вариантов отношений плотностей

кривой (2.6) и прямой (2.7), можно сделать вывод, что при ненулевых h_1, h_2 прямая пересекает кривую минимум в двух и максимум в четырех точках. Каждое такое пересечение дает действительное собственное значение $\lambda = u_1 + p\sqrt{gh_1}$. Исходя из данного геометрического представления собственных значений можно заметить, что строгая гиперболичность сохраняется при достаточно малых и достаточно больших числах Фруда $Fr = |u_1 - u_2|/h_2$.

2.2 Характеристическая форма системы уравнений двухслойной мелкой воды

В разделе 1.1 приведено преобразование системы консервативных уравнений сохранения площади, массы и импульса к характеристической форме записи. Однако для системы уравнений двухслойной мелкой воды (2.1) получить явные выражения для собственных векторов и инвариантов оказывается невозможным. В связи с этим ниже представлены преобразования, адаптированные под данную систему уравнений. Применим правило производной произведения к членам уравнений системы (2.1).

Первые два уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Третье уравнение преобразуется следующим образом:

$$u_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2h_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = -g h_1 \frac{\partial B}{\partial x}$$

Вычтем из него помноженное на u_1 преобразованное первое уравнение системы. Поделим получившееся уравнение на $h_1 \neq 0$ и получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} = -g \frac{\partial B}{\partial x}$$

С четвертым уравнением системы (2.1) делаются аналогичные действия:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + r g \frac{\partial h_1}{\partial x} = -g \frac{\partial B}{\partial x}$$

Найденные уравнения являются простой формой системы (2.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} &= -g \frac{\partial B}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + r g \frac{\partial h_1}{\partial x} &= -g \frac{\partial B}{\partial x}\end{aligned}$$

или в векторном виде:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + A(q) \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} = \vec{\psi}, \quad (2.8)$$

$$\text{где } \vec{q} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \vec{\psi}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \partial_x(b) \\ -g \partial_x(b) \end{bmatrix}, A(q) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & h_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & h_2 \\ g & g & u_1 & 0 \\ r g & g & 0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что характеристическое уравнение для матрицы $A(q)$ системы (2.8) имеет вид:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a &= -2u_1 - 2u_1, \\ b &= u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2 - gh_1 - gh_2, \\ c &= -2u_1^2u_2 - 2u_1u_2^2 + 2gu_1h_2 + 2gu_2h_1, \\ d &= u_1^2u_2^2 - gu_1^2h_2 + g^2h_1h_2 - rg^2h_1h_2. \end{aligned}$$

Получить явный вид корней данного характеристического уравнения не представляется возможным и, как следствие, невозможно найти выражения для собственных векторов и инвариантов. В таких случаях, в схемах класса КАБАРЕ используются локальные инварианты и можно записать локально-характеристическую форму уравнений.

Введем обозначения. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ - корни характеристического уравнения, $\vec{l}_i = (l_i^1, l_i^2, l_i^3, l_i^4)$ - левый собственный вектор для $\lambda_i, i = \overline{1,4}$, $L = (l_1, l_2, l_3, l_4)^T$ - матрица, составленная из левых собственных векторов, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. В данных обозначениях локально-характеристическая форма системы (2.1) выглядит следующим образом:

$$L \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \Lambda L \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} = L \vec{\psi} \quad (2.9)$$

Для поиска корней характеристического уравнения (2.9) находятся численные выражения для его коэффициентов. Затем решается уравнение четвертой степени методом Декарта — Эйлера. Предполагая сохранение гиперболичности системы, данное характеристическое уравнение будет иметь четыре действительных корня - искомые собственные числа.

Далее необходимо найти левые собственные векторы для полученных собственных значений. Воспользуемся методом Фадеева [95]. Последовательно вычислим вспомогательные матрицы A_k, B_k и числа $q_k, k = 1 \dots 4$ по формулам:

$$\begin{aligned} A_1 &= A^T, \quad q_1 = \text{Sp} A_1, \quad B_1 = A_1 - q_1 E \\ A_k &= A^T B_k - 1, \quad q_k = \frac{\text{Sp} A_k}{k}, \quad B_k = A_k - q_k E, k = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где E - единичная матрица того же порядка, что и матрица A .

С помощью матриц B_1, B_2, B_3 найдем векторы $\vec{y}_k, k = 0, \dots, 3$ по рекуррентной формуле:

$$\vec{y}_0 = \vec{e}, \quad \vec{y}_k = \lambda \vec{y}_k - 1 + \vec{b}_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\vec{e} = (1, 0, 0, 0)^T$ и b_k - первый столбец матрицы B_k .

Полученный таким образом вектор \vec{y}_3 является правым собственным вектором матрицы A^T , соответствующий собственному значению λ . А значит, и левым собственным вектором матрицы A для собственного значения λ . Этот шаг завершает поиск локально-характеристической формы системы уравнений двухслойной мелкой воды (2.9).

2.3 Схема КАБАРЕ для системы уравнений двухслойной мелкой воды

Подробное описание принципов балансно-характеристических схем класса КАБАРЕ было приведено в разделе 1.2. Опишем численный алгоритм решения системы уравнений двухслойной мелкой воды (2.1). Введем в области $G = \{x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, 0 \leq t \leq T\}$ равномерную по пространству сетку $\Omega = \Omega_t \times \Omega_x$, где $\Omega_x = \{x_i : x_{i+1} - x_i = h_x > 0; x_1 = x_{\min}; x_{N_x} = x_{\max}; i = \overline{1, N-1}\}$, $\Omega_t = \{t^n : t^{n+1} - t^n = \tau^n > 0; t^0 = 0; t^K = T; n = \overline{0, K-1}\}$.

Первая фаза.

На первой фазе вычисляются значения консервативных переменных $(h_1)_c^{n+1/2}, (h_2)_c^{n+1/2}, (u_1)_c^{n+1/2}, (u_2)_c^{n+1/2}$ из аппроксимации системы уравнений двухслойной мелкой воды (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{(h_1)_c^{n+1/2} - (h_1)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1)_R^n - (h_1 u_1)_L^n}{h} &= 0 \\ \frac{(h_2)_c^{n+1/2} - (h_2)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2)_R^n - (h_2 u_2)_L^n}{h} &= 0 \\ \frac{(h_1 u_1)_c^{n+1/2} - (h_1 u_1)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_R^n - (h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_L^n}{h} = \\ &= -g(h_1)_c^{n+1/2} \frac{(h_2)_R^n - (h_2)_L^n}{h} - g(h_1)_c^{n+1/2} \frac{b_R^n - b_L^n}{h} \\ \frac{(h_2 u_2)_c^{n+1/2} - (h_2 u_2)_c^n}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_R^n - (h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_L^n}{h} = \\ &= -g(h_2)_c^{n+1/2} \frac{(h_1)_R^n - (h_1)_L^n}{h} - g(h_2)_c^{n+1/2} \frac{b_R^n - b_L^n}{h} \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений системы находятся $(h_1)_c^{n+1/2}$ и $(h_2)_c^{n+1/2}$, затем из третьего и четвертого уравнений выражаются $(u_1)_c^{n+1/2}, (u_2)_c^{n+1/2}$.

Вторая фаза.

Во второй фазе вычисляются потоковые переменные на новом временном слое. Для этого используется линейная экстраполяция локальных инвариантов, направление которой определяется знаком соответствующего собственного значения. Для нахождения потоковых переменных в узле j будем считать, что собственные значения в пределах двух смежных пространственно-временных ячеек (далее просто ячейки), постоянны и равны корням характеристического уравнения матрицы, равной полусумме матриц A уравнения (2.8) в центрах смежных ячеек. Подробнее о локальных инвариантах можно ознакомиться в книге Головизнина В.М. [45]. В сделанных предположениях собственные векторы постоянны в пределах этих двух ячеек и, следовательно, можно записать для каждого узла локально-характеристическую систему уравнений (2.9):

$$\frac{\partial L_j^{n+1/2} \vec{q}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial L_j^{n+1/2} \vec{q}}{\partial x} = L_j^{n+1/2} \vec{\psi}, \quad j = \overline{1, N-1}$$

Локальные инварианты описываются формулами $I^i = (\vec{l}_i, \vec{q})$, где \vec{l}_i , $i = \overline{1, 4}$ - левые собственные векторы, поиск которых описан ранее, \vec{q} - вектор исходных физических переменных h_1, h_2, u_1, u_2 . Будем считать, что локальные инварианты в каждом узле $j = \overline{1, N-1}$ нового временного слоя связаны следующими соотношениями (линейными экстраполяциями):

$$\begin{aligned} (I^k)_j^{n+1} &= 2 \cdot (I^k)_{j-1/2}^{n+1/2} - (I^k)_{j-1}^n, \text{ если } \lambda_j^k > 0 \\ (I^k)_j^{n+1} &= 2 \cdot (I^k)_{j+1/2}^{n+1/2} - (I^k)_{j+1}^n, \text{ если } \lambda_j^k \leq 0 \end{aligned}, \quad k = \overline{1, 4}$$

Поскольку схема КАБАРЕ обладает вторым порядком точности, она, в силу теоремы Годунова, является немонотонной и при переносе с большими градиентами порождает нефизические осцилляции решения. Для борьбы с этим будем использовать процедуру нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума, справедливого для локальных инвариантов Римана. Согласно данному принципу для каждого инварианта, который пришел из левой ячейки, должна выполняться процедура коррекции:

$$\begin{aligned} (I^i)_R^{n+1} &= \begin{cases} \max(I), & (I^i)_R^{n+1} \geq \max(I) \\ \min(I), & (I^i)_R^{n+1} \leq \min(I) \\ (I^i)_R^{n+1}, & \min(I) \leq (I^i)_R^{n+1} \leq \max(I) \end{cases}, \\ \max(I) &= \max\{(I^i)_L^n, (I^i)_C^n, (I^i)_R^n\} + \tau \cdot L_j^{n+1/2} \vec{\psi}, \\ \min(I) &= \min\{(I^i)_L^n, (I^i)_C^n, (I^i)_R^n\} + \tau \cdot L_j^{n+1/2} \vec{\psi}. \end{aligned}$$

В результате выполнения описанных выше действий, в каждом узле будут известны величины всех инвариантов I^i , $i = \overline{1,4}$. В заключении второй фазы схемы КАБАРЕ необходимо по известным значениям инвариантов на новом временном слое в каждом узле вычислить значения потоковых переменных h_1, h_2, u_1, u_2 . Для этого разрешаем методом Гаусса систему четырех линейных алгебраических уравнений вида $I^i = (\vec{l}_i, \vec{q})$.

Третья фаза.

На третьей фазе вычисляются значения консервативных переменных $(h_1)_c^{n+1}, (h_2)_c^{n+1}, (u_1)_c^{n+1}, (u_2)_c^{n+1}$ из аппроксимации двухслойной мелкой воды (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{(h_1)_c^{n+1} - (h_1)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1)_R^{n+1} - (h_1 u_1)_L^{n+1}}{h} &= 0 \\ \frac{(h_2)_c^{n+1} - (h_2)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2)_R^{n+1} - (h_2 u_2)_L^{n+1}}{h} &= 0 \\ \frac{(h_1 u_1)_c^{n+1} - (h_1 u_1)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_R^{n+1} - (h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2)_L^{n+1}}{h} = \\ &= -g(h_1)_c^{n+1} \frac{(h_2)_R^{n+1} - (h_2)_L^{n+1}}{h} - g(h_1)_c^{n+1} \frac{b_R^{n+1} - b_L^{n+1}}{h} \\ \frac{(h_2 u_2)_c^{n+1} - (h_2 u_2)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_R^{n+1} - (h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2)_L^{n+1}}{h} = \\ &= -g(h_2)_c^{n+1} \frac{(h_1)_R^{n+1} - (h_1)_L^{n+1}}{h} - g(h_2)_c^{n+1} \frac{b_R^{n+1} - b_L^{n+1}}{h} \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений системы находятся $(h_1)_c^{n+1}, (h_2)_c^{n+1}$, затем из третьего и четвертого уравнений выражаются $(u_1)_c^{n+1}, (u_2)_c^{n+1}$.

Выбор временного шага.

Для расчета по схеме КАБАРЕ нового временного слоя шаг по времени определяется по следующей формуле:

$$\tau = CFL \cdot \min_{i=\overline{0, N_x-1}, k=\overline{1,4}} \left(\frac{h}{|\lambda_i^k|} \right),$$

где $CFL < 1$ - число Куранта, а собственные числа λ_i^k находятся как во второй фазе, при условии вычисления коэффициентов характеристического уравнения через значения $(h_1)_c^n, (h_2)_c^n, (u_1)_c^n, (u_2)_c^n$.

2.4 Модельная задача о перепаде высоты

Рассмотрим задачу о распаде перепада высоты первоначально покоящейся двухслойной жидкости, находящейся в бассейне с плоским дном, со следующими начальными толщинами слоев:

$$h_1(x,0) = \begin{cases} 5, & x \in [0,280) \\ 2.5, & x \in [280,560] \end{cases} \quad h_2(x,0) = \begin{cases} 5, & x \in [0,280) \\ 2.5, & x \in [280,560] \end{cases}$$

Проводилось два расчета на 280 расчетных ячейках при числе Куранта $CFL = 0.2, g = 981$. Расчеты отличаются плотностями слоев: в первом $\rho_1 = 0.9, \rho_2 = 1$, а во втором $\rho_1 = 0.0001, \rho_2 = 1$. На рис. 2.3 представлены результаты расчетов на момент времени ($T = 2.44$).

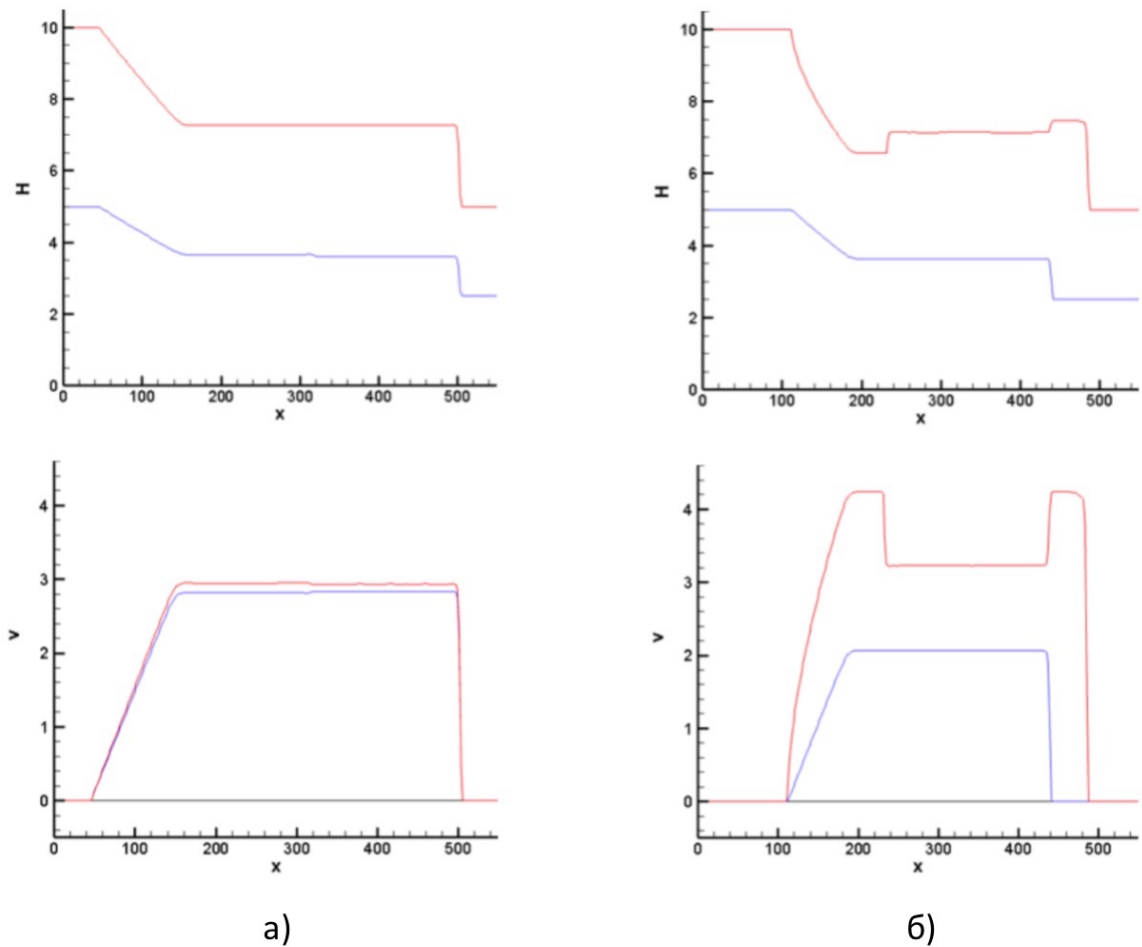


Рисунок 2.3 — Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ на момент $t=2.44$: столбец а) границы и скорости слоев в первом расчете ($\rho_1 = 0.9$), столбец б) границы и скорости слоев во втором расчете ($\rho_1 = 0.0001$)

Скорости распространения разрывов, свободная поверхность и граница между слоями схожи с результатами, показанными в других работах, например, в статье Холодова [56]. Также результаты согласуются с аналитическими решениями по однослойной мелкой воде. Имеется ввиду, что при отношении плотностей, близких к единице, характер движения похож на движение однослойной жидкости со средней плотностью. А при большой разнице плотностей на свободной границе наблюдаются дополнительные перепады высот, и профиль глубины нижнего слоя практически не отличается от решения задачи о распаде только для одного нижнего слоя.

2.5 Модельная задача о внутренней волне

В качестве второго примера рассматривается задача, которая по своей сути близка к предыдущей: задача о разрыве границы между слоями двухслойной жидкости при плоской свободной поверхности. В начальный момент жидкость находится в состоянии покоя и толщины слоев задаются формулами:

$$h_1(x,0) = \begin{cases} 5, & x \in [0,280) \\ 7.5, & x \in [280,560] \end{cases} \quad h_2(x,0) = \begin{cases} 5, & x \in [0,280) \\ 2.5, & x \in [280,560] \end{cases}$$

Проводилось два расчета при числе Куранта $CFL = 0.2, g = 981, N = 280$ - количество расчетных ячеек. Расчеты отличаются плотностями слоев: в первом $\rho_1 = 0.9, \rho_2 = 1$, а во втором $\rho_1 = 0.0001, \rho_2 = 1$. На рис. 2.4 представлены результаты расчетов на момент времени ($T = 2.44$).

Скорости распространения возникающих волн, свободная поверхность и поверхность между слоями схожи с результатами работы Холодова [56] для обоих соотношений плотностей. Отметим, что при достаточно большой разности плотностей между слоями на верхней границе появляется дополнительный гидравлический прыжок, движущийся впереди области разрыва на границе раздела слоев. Это, например, вполне соответствует известному факту об опережающем движении воздушной волны сжатия перед снежной лавиной.

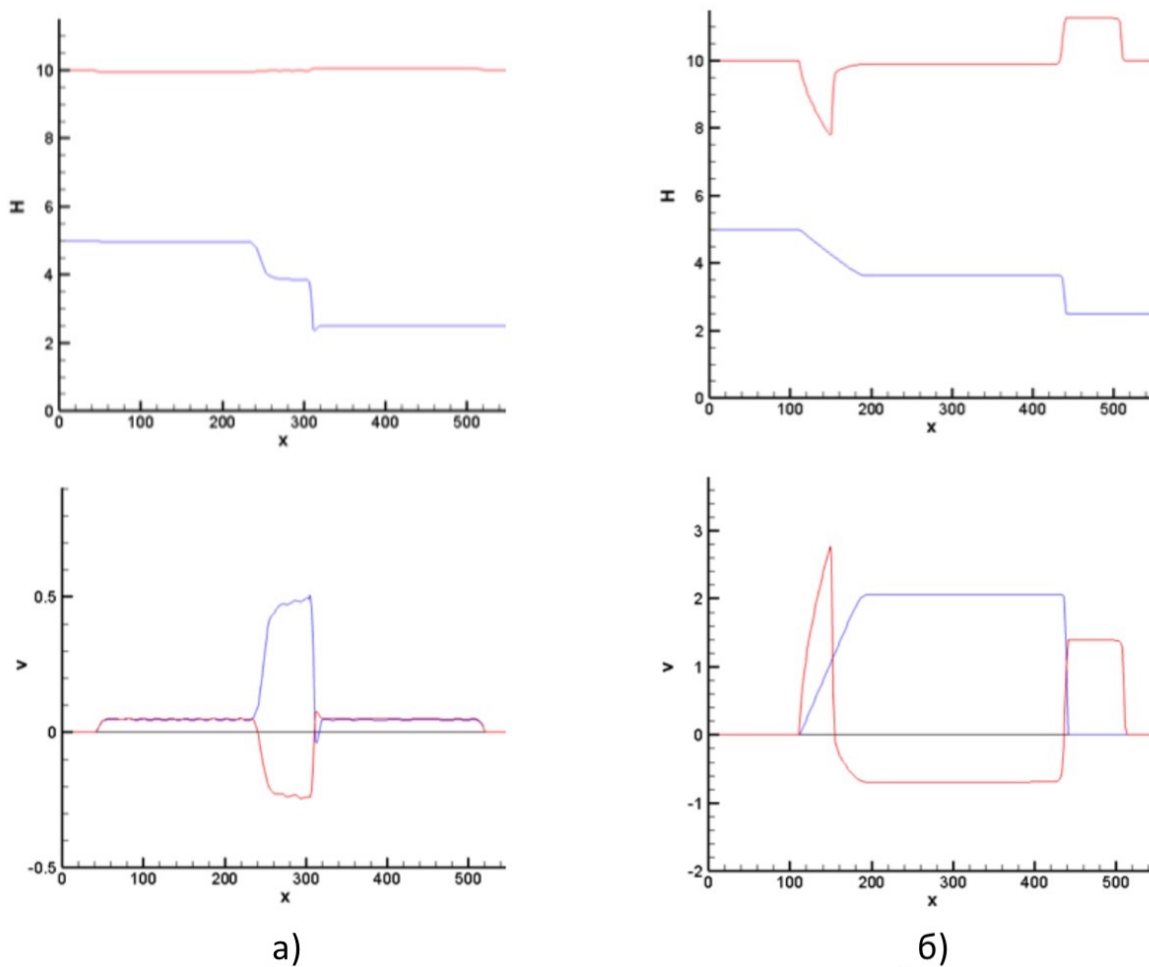


Рисунок 2.4 — Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ на момент $t=2.44$: столбец а) границы и скорости слоев в первом расчете ($r_1 = 0.9$), столбец б) границы и скорости слоев во втором расчете ($r_1 = 0.0001$)

2.6 Модельная задача о динамике двухслойной жидкости при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями

Во многих работах, изучающих модель двухслойной мелкой воды [30; 56; 57], приведены примеры расчетов модельных задач, на которых была протестирована и описанная в этой главе методика. Следует отметить, что в указанных статьях приводятся результаты решения на определенный момент времени на фиксированных расчетных сетках и не изучается поведение численного решения на БОльших временных интервалах и эффекты сгущения сетки.

Проблемы с устойчивостью численного решения уравнений двухслойной мелкой воды при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями проил-

люстрируем на задаче динамики двухслойной жидкости из статьи А. Курганова [30].

Начальные данные описывают встречное движение двух слоев жидкости, граница раздела которых имеет локальное синусоидальное возмущение (рис. 2.5):

$$u_1(x,0) = 0,4, \rho_1 = 0,98, h_1(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{при } 2 \geq |x| \geq 1, \\ 1 - 0,25 \sin(2\pi x) & \text{при } |x| < 1, \end{cases}$$

$$u_2(x,0) = -0,4, \rho_2 = 1, \quad h_2(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{при } 2 \geq |x| \geq 1, \\ 1 + 0,25 \sin(2\pi x) & \text{при } |x| < 1. \end{cases}$$

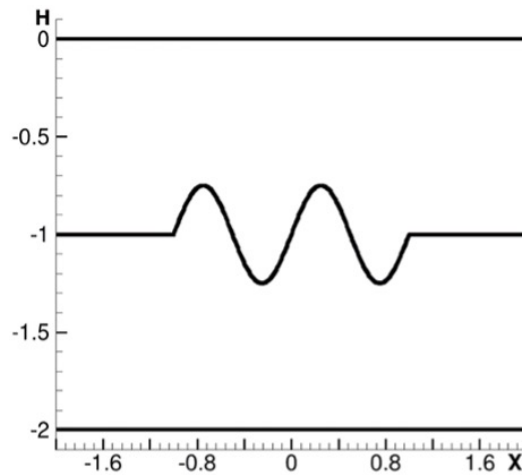


Рисунок 2.5 — Начальные данные задачи о динамике двухслойной жидкости при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями

Рельеф дна постоянен. Расчетная сетка содержит 800 ячеек по оси x .

Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ представлены на рис. 2.6. Расчеты проводились при $CFL = 0.3$. Графики границ раздела слоев и их скоростей на момент времени $t = 0,5$ представлены на рис. 2.6 а, б. Они практически совпадают с приведенными в работе А. Курганова [30]. В указанной статье отсутствует информация о поведении расчета свыше времени $t=0.5$. В данной работе исследовано дальнейшее развитие: при $t=0.65$ наблюдается вырождение толщин слоёв (рис. 2.6 в, г), что приводит к остановке расчёта.

При расчете на более густой сетке с 1600 ячейками нарушение устойчивости проявляется на ранних этапах. И наоборот, когда используется менее детализированная сетка с 200 ячейками, неустойчивые процессы развиваются

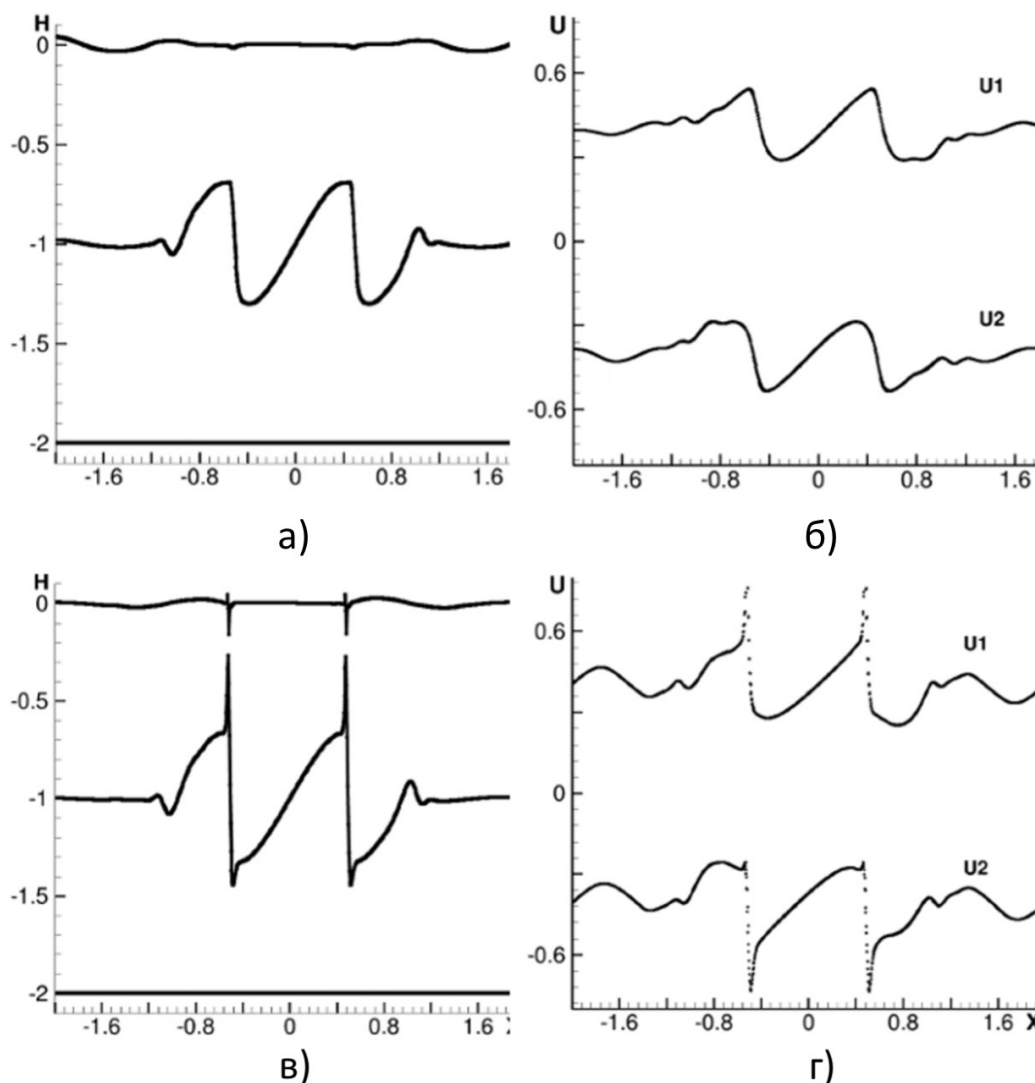


Рисунок 2.6 — Результаты расчета по схеме КАБАРЕ на сетке в 800 ячеек: а), б) границы и скорости слоев на момент $t=0,5$; в), г) границы и скорости слоев на момент $t=0,65$

значительно медленнее (рис. 2.7). Тем не менее, плохая обусловленность задачи неизбежно приводит к аварийному прекращению расчета.

Один из распространённых способов компенсировать этот недостаток — ввести в уравнения турбулентную (вихревую) вязкость. Этот параметр часто коррелирует с конкретным типом рассматриваемого течения и основывается на использовании эмпирических данных, которые адаптируются под разные условия течения [96; 97]. Подобная регуляризация повышает устойчивость и подавляет нефизические осцилляции. Однако стоит учитывать, что при таком подходе точность результата может в значительной степени зависеть от выбора величины вносимой вязкости. В следующей главе предлагается альтернативный подход к устранению возникающей неустойчивости.

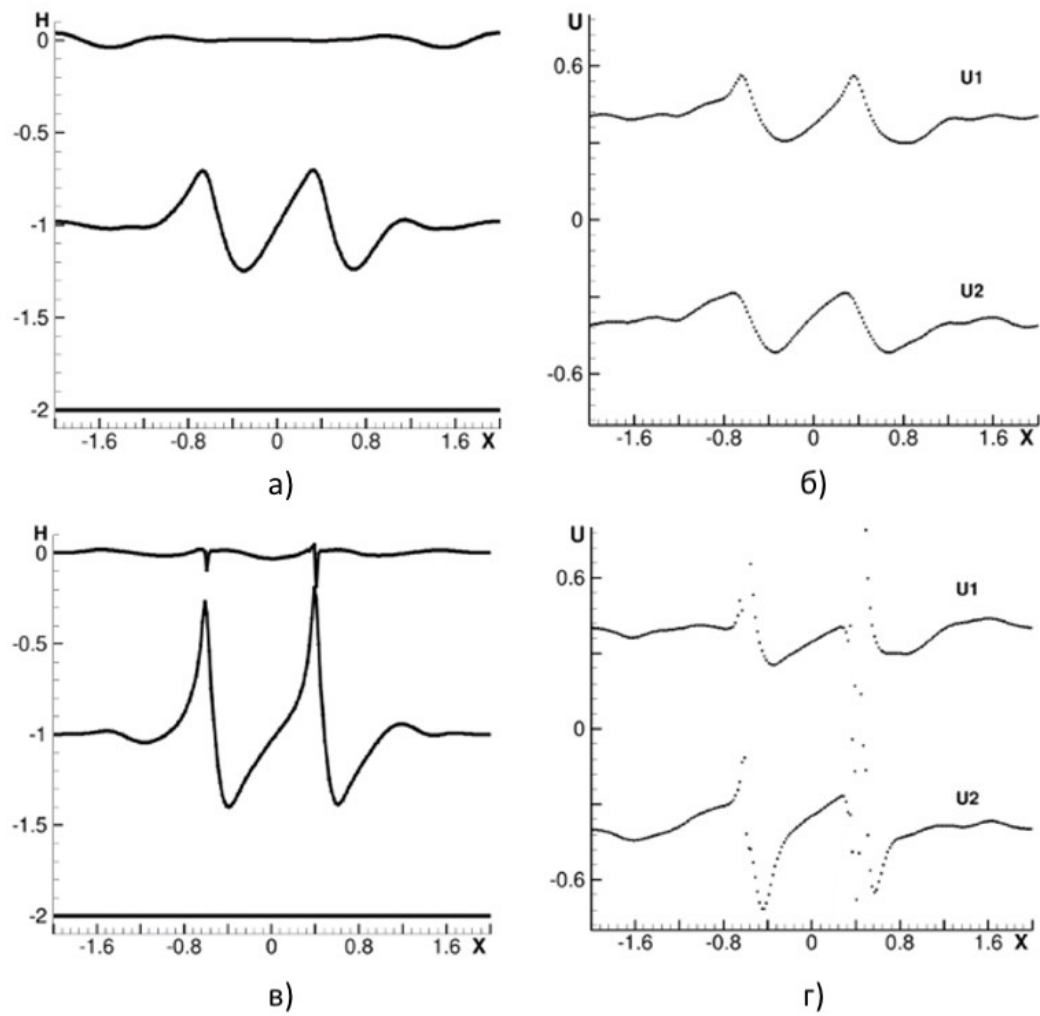


Рисунок 2.7 — Результаты расчета по схеме КАБАРЕ на сетке в 200 ячеек: а), б) границы и скорости слоев на момент $t=0,5$; в), г) границы и скорости слоев на момент $t=1$

Глава 3. Многослойная гидростатическая модель CABARET-MFSH на основе гиперболической декомпозиции в двумерной постановке

Описанный в предыдущей главе подход численного решения системы уравнений двухслойной мелкой воды связан с решением уравнений четвертой степени. Расширение методики на случай трех и более слоев возможно, но добавляет сложности алгоритму, как минимум в поиске корней характеристического уравнения степени $2n \geq 6$. В данной главе рассматривается другой подход к решению указанных проблем, связанных как с характеристической формой дифференциальной системы, так и устойчивостью численного алгоритма для не безусловно гиперболической системы.

Предлагаемая модель также основана на подходе, сочетающем методы характеристик и конечного объема. Процедура разработки включает два этапа, на каждом из которых осуществляется контроль диссипации.

На первом этапе с использованием первых принципов - законов сохранения массы и импульса будет выведена система дифференциальных уравнений для многослойной жидкости в предположении непроницаемости слоев. В каждом слое горизонтальные составляющие скорости и плотности постоянны, а давление в вертикальном направлении изменяется линейно. Полученная система аппроксимирует уравнения Эйлера и не включает никаких диссипативных процессов.

Затем полученная система уравнений аппроксимируется консервативно-характеристической явной схемой КАБАРЕ [45; 75], имеющей второй порядок аппроксимации и являющейся обратимой по времени, т.е. бездиссипативной. Для приближенного вычисления собственных значений и левых собственных векторов многослойной модели используется алгоритм гиперболического разложения. В алгоритм включен механизм коррекции потоков на основе принципа максимума для локальных инвариантов Римана.

Второй этап начинается с переназначения расчетной сетки по вертикали. Это приводит к перераспределению массы и импульса между слоями. Для сохранения устойчивости схемы добавлен механизм фильтрации потоковых переменных. Такая коррекция не нарушает консервативности схемы, однако гасит высокочастотные пульсации, внося управляемую численную диссипацию. Па-

параметры фильтрации были найдены эмпирически на ряде модельных задач из условия устойчивости алгоритма и минимума вязкости схемы. Проведено моделирование лабораторных экспериментов [1] с этими параметрами на серии сеток с возрастающим разрешением.

3.1 Уравнения многослойной мелкой воды с переменной плотностью, учетом внешнего давления и донного рельефа на основе гиперболической декомпозиции

Уравнения многослойной мелкой воды с переменной плотностью при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями можно представить как сумму однослойных уравнений (1.1), связанных между собой силами давления и реакции, действующими на границы раздела, можно записать в следующем виде (рис. 3.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial(hu)_{k+1/2}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho h)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho hu)_{k+1/2}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho hu)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho hu^2)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial(\rho h^2)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial(hP)_{k+1/2}}{\partial x} &= \\ &= -P_{k+1} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x} + P_k \frac{\partial Z_k}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

здесь $k = 0, \dots, N - 1$ - номер слоя, отсчитываемый от свободной поверхности, $h_{k+1/2} = Z_k - Z_{k+1}$, $u_{k+1/2}$, $\rho_{k+1/2}$ - толщина, горизонтальная скорость и плотность k -го слоя, Z_0, Z_N - координаты свободной поверхности и дна, Z_k - координата раздела двух слоев k и $k+1$ (рис. 3.1), $P_0 = P_T$ - внешнее давление на свободную поверхность Z_0 , $P_{k+1} = P_k + g(\rho h)_{k+1/2}$ - гидростатическое давление на уровне Z_{k+1} и $P_{k+1/2} = (P_k + P_{k+1})/2$.

Отметим, что в системе уравнений (3.1) плотность не предполагается постоянной в каждом слое.

Формы системы уравнений, необходимые для построения схем класса КАБАРЕ, были подробно описаны в предыдущих главах. Для полноты изложения они будут приведены и для рассматриваемой системы без дополнительных пояснений.

Так называемая простая форма системы уравнений (3.1) будет иметь вид:

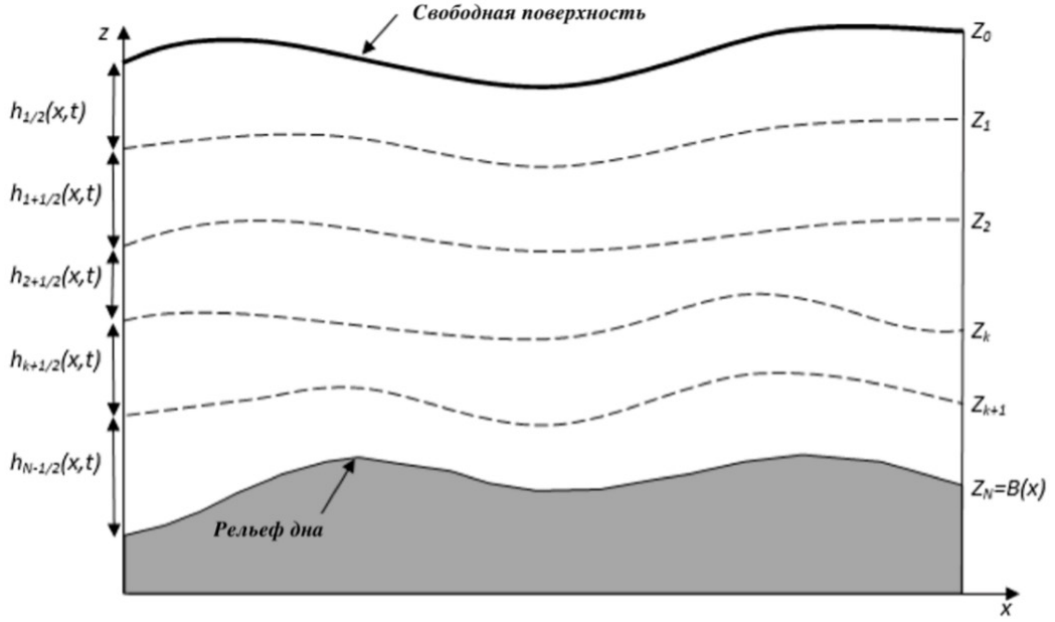


Рисунок 3.1 — Многослойная модель

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + G \times \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} = \vec{D}, \quad \vec{\psi} = (h_{1/2}, \dots, h_{N-1/2}, \rho_{1/2}, \dots, \rho_{N-1/2}, u_{1/2}, \dots, u_{N-1/2})^T,$$

где G - матрица размерности $N \times N$ и \vec{D} - некоторая правая часть. Как было показано в третьей главе, уже при $N = 2$ матрица G может иметь комплексные корни, и система не будет безусловно гиперболической [58], что порождает известные вычислительные трудности. Для большего числа слоев ситуация усугубляется. Уже в случае двух слоев вычисление собственных значений матрицы (4×4) является достаточно сложной задачей. При большом числе слоев она становится практически неразрешимой и непосредственное использование балансно-характеристических методов оказывается невозможным. Обойти эту проблему позволяет прием, который будем называть гиперболической декомпозицией задачи. Его суть заключается в предоставлении многослойной структуры в виде отдельных слоев, взаимодействующих через границы раздела. Тогда простая форма уравнений относящихся к k -му слою выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_{k+1/2}}{\partial t} + h_{k+1/2} \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x} + u_{k+1/2} \frac{\partial h_{k+1/2}}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \rho_{k+1/2}}{\partial t} + u_{k+1/2} \frac{\partial \rho_{k+1/2}}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial t} + u_{k+1/2} \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{P_{k+1}}{(\rho h)_{k+1/2}} \frac{\partial h_{k+1/2}}{\partial x} + \left(\frac{gh}{2\rho} \right)_{k+1/2} \frac{\partial \rho_{k+1/2}}{\partial x} &= G_{k+1/2},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $G_{k+1/2} = -\frac{1}{(\rho h)_{k+1/2}} \left(h_{k+1/2} \frac{P_k}{\partial x} - P_{k+1} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x} + P_k \frac{\partial Z_k}{\partial x} \right)$.

Векторная форма этой системы уравнений (3.2) может быть представлена как:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\varphi}_{k+1/2}}{\partial t} + A_{k+1/2} \frac{\partial \vec{\varphi}_{k+1/2}}{\partial x} &= \vec{F}_{k+\frac{1}{2}}, \\
\text{где } A_{k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} u_{k+\frac{1}{2}} & 0 & h_{k+\frac{1}{2}} \\ 0 & u_{k+\frac{1}{2}} & 0 \\ P_{k+1}/(\rho h)_{k+\frac{1}{2}} & (gh/2\rho)_{k+\frac{1}{2}} & u_{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{k+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} h_{k+\frac{1}{2}} \\ \rho_{k+\frac{1}{2}} \\ u_{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \\
\vec{F}_{k+\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Все собственные значения матрицы A действительны:

$$\lambda_{1,k+\frac{1}{2}} = (u + c)_{k+\frac{1}{2}}, \lambda_{2,k+\frac{1}{2}} = (u - c)_{k+\frac{1}{2}}, \lambda_{3,k+\frac{1}{2}} = u_{k+\frac{1}{2}}, c_{k+\frac{1}{2}} = \sqrt{P_{k+1}/\rho_{k+\frac{1}{2}}}$$

Это приводит к системе независимых характеристических уравнений:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u + c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} &= D_{1,k+\frac{1}{2}} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u - c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} &= D_{2,k+\frac{1}{2}} \\
\frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} &= D_{3,k+\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Для построения алгоритма, обладающего свойством сбалансированности, система уравнений (3.3) преобразуется:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{h} \frac{\partial Z_T}{\partial t} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u+c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{h} \frac{\partial Z_T}{\partial x} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} &= Q_{1,k+\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{h} \frac{\partial Z_T}{\partial t} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u-c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{h} \frac{\partial Z_T}{\partial x} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} &= Q_{2,k+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} &= Q_{3,k+\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{1,k+\frac{1}{2}} &= D_{1,k+\frac{1}{2}} + \left(\frac{c}{h} \right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial t} + \left[(u+c) \frac{c}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x}, \\ Q_{2,k+\frac{1}{2}} &= D_{2,k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{c}{h} \right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial t} - \left[(u-c) \frac{c}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x}. \end{aligned}$$

В предположении о постоянстве коэффициентов перед производными система (3.4) приобретает вид уравнений переноса для некоторых величин, которые называются локальными инвариантами Римана:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial I_1}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u+c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial I_1}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} &= Q_{1,k+\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{\partial I_2}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u-c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial I_2}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} &= Q_{2,k+\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} &= Q_{3,k+\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{где } I_1 = \left(u + \left\langle \frac{c}{h} \right\rangle Z_T + \left\langle \frac{gh}{2\rho c} \right\rangle \rho \right), \quad I_2 = \left(u - \left\langle \frac{c}{h} \right\rangle Z_T - \left\langle \frac{gh}{2\rho c} \right\rangle \rho \right).$$

Правые части системы уравнений (3.5) содержат первые производные от координат границы раздела слоев, что нетипично для характеристических уравнений. Расчет потоковых переменных не задействует явные формулы правых частей. Об этом подробно будет изложено далее при описании второй фазы численного алгоритма.

3.2 Схема КАБАРЕ для послойного решения уравнений многослойной мелкой воды

Введем неравномерную расчетную сетку $\omega : x_{left} = x_1 < x_2 \dots < x_i < x_{i+1} \dots < x_N = x_{right}$ вдоль оси X и проведем из узлов этой сетки вертикальные отрезки, пронизывающие все слои жидкости. Пересечение этих отрезков с границами слоев дает двумерную расчетную сетку в плоскости (x, z) .

Для решения уравнений в каждом слое жидкости используется балансно-характеристическая схема КАБАРЕ [45].

В схеме КАБАРЕ используются два типа переменных: потоковые и консервативные [75]. Потоковые переменные относятся к серединам вертикальных граней расчетных ячеек, консервативные - к их центрам. Потоковые переменные, относящиеся к слою с номером $k + 1/2$ будем обозначать как $\rho_i^{k+1/2}, u_i^{k+1/2}, h_i^{k+1/2} = Z_i^k - Z_i^{k+1}$ и консервативные переменные - как $\rho_{i+1/2}^{k+1/2}, u_{i+1/2}^{k+1/2}, h_{i+1/2}^{k+1/2}$. На каждом вычислительном шаге используются три временных слоя: текущий t_n , новый $t_{n+1} = t_n + \tau$ и промежуточный $t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. Переменные, относящиеся к слою t_{n+1} ниже по тексту, будут снабжены верхней крышкой (например, $\hat{\rho}_i^{k+1/2}$), промежуточному слою $t_{n+1/2}$ - тильда (например, $\tilde{\rho}_i^{k+1/2}$).

Фаза 1 – предиктор

Консервативные переменные на промежуточном временном слое $t_{n+1/2}$ рассчитываются по консервативным разностным схемам:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{h}_{i+1/2}^{k+1/2} - h_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + \frac{(hu)_{i+1}^{k+1/2} - (hu)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0, \\ & \frac{(\tilde{\rho}\tilde{h})_{i+1/2}^{k+1/2} - (\rho h)_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\rho hu)_{i+1}^{k+1/2} - (\rho hu)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0, \\ & \frac{(\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u})_{i+1/2}^{k+1/2} - (\rho hu)_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\rho hu^2)_{i+1}^{k+1/2} - (\rho hu^2)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ & + \frac{(hP)_{i+1}^{k+1/2} - (hP)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{P_{i+1}^{k+1} + P_i^{k+1}}{2} \frac{Z_{i+1}^{k+1} - Z_i^{k+1}}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{P_{i+1}^k + P_i^k}{2} \frac{Z_{i+1}^k - Z_i^k}{\Delta x_{i+1/2}} = 0, \end{aligned}$$

где $P_i^{k+1} = P_i^k + g(\rho h)_i^{k+1/2}$, $P_i^{k+1/2} = (P_i^k + P_i^{k+1})/2$.

Фаза 2 – генератор потоков

Для нахождения потоковых переменных на новом временном слое используется система характеристических уравнений (3.5), которую можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial [I_m(x, t)]_{i+1/2}^{k+1/2}}{\partial t} + \left(\tilde{\lambda}_m \right)_{i+1/2}^{k+1/2} \frac{\partial [I_m(x, t)]_{i+1/2}^{k+1/2}}{\partial x} = \left(\tilde{Q}_m \right)_{i+1/2}^{k+1/2} \quad (3.6)$$

где $m = 1, 2, 3$, $\left(\tilde{\lambda}_1 \right)_{i+1/2}^{k+1/2} = (\tilde{u} + \tilde{c})_{i+1/2}^{k+1/2}$, $\left(\tilde{\lambda}_2 \right)_{i+1/2}^{k+1/2} = (\tilde{u} - \tilde{c})_{i+1/2}^{k+1/2}$, $\left(\tilde{\lambda}_3 \right)_{i+1/2}^{k+1/2} = \tilde{u}_{i+1/2}^{k+1/2}$.

Функции $[I_m(x, t)]_{i+1/2}^{k+1/2}, m = 1, 2, 3$ являются локальными римановыми инвариантами k -го слоя в ячейке $i + 1/2$ на интервале времени $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} [I_1(x, t)]_{i+1/2}^{k+1/2} &= u^{k+1/2}(x, t) + \tilde{G}_{i+1/2}^{k+1/2} Z^k(x, t) + \tilde{D}_{i+1/2}^{k+1/2} \rho^{k+1/2}(x, t), \\ [I_2(x, t)]_{i+1/2}^{k+1/2} &= u^{k+1/2}(x, t) - \tilde{G}_{i+1/2}^{k+1/2} Z^k(x, t) - \tilde{D}_{i+1/2}^{k+1/2} \rho^{k+1/2}(x, t), \\ [I_3(x, t)]_{i+1/2}^{k+1/2} &= \rho^{k+1/2}(x, t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{где } \tilde{G}_{i+1/2}^{k+1/2} = \left(\frac{\tilde{c}}{\tilde{h}}\right)_{i+1/2}^{k+1/2} \tilde{D}_{i+1/2}^{k+1/2} = \frac{g}{2} \left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{\rho}\tilde{c}}\right)_{i+1/2}^{k+1/2}.$$

Значения локальных инвариантов Римана на новом временном слое в узлах сетки $(\hat{I}_m)_i^{k+1/2}, m = 1, 2, 3$ находятся линейной экстраполяцией с учетом знака характеристической скорости $(\tilde{\lambda}_m)_i^{k+1/2} = \left((\tilde{\lambda}_m)_{i-1/2}^{k+1/2} + (\tilde{\lambda}_m)_{i+1/2}^{k+1/2}\right)/2$:

$$(\hat{I}_m)_i^{k+1/2} = \begin{cases} 2(\tilde{I}_m)_{i-1/2}^{k+1/2} - (I_m)_{i-1}^{k+1/2}, & \text{if } (\tilde{\lambda}_m)_i^{k+1/2} > 0 \\ 2(\tilde{I}_m)_{i+1/2}^{k+1/2} - (I_m)_{i+1}^{k+1/2}, & \text{if } (\tilde{\lambda}_m)_i^{k+1/2} \leq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Затем применяется нелинейная коррекция найденных инвариантов согласно принципа максимума:

$$(\hat{I}_m)_i^{k+1/2} = \begin{cases} (I_m^{\min})_i^{k+1/2}, & \text{если } (I_m^{\min})_i^{k+1/2} > (I_m)_{k,i}^{n+1} \\ (I_m^{\max})_i^{k+1/2}, & \text{если } (I_m)_{k,i}^{n+1} > (I_m^{\max})_i^{k+1/2} \\ (\hat{I}_m)_i^{k+1/2}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} (I_m^{\min})_i^{k+\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \min \left\{ (I_m)_i^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i-1}^{k+\frac{1}{2}} \right\} + \tau (\tilde{Q}_m)_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, & \text{if } (\tilde{\lambda}_m)_i^{k+\frac{1}{2}} > 0 \\ \min \left\{ (I_m)_i^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} \right\} + \tau (\tilde{Q}_m)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, & \text{if } (\tilde{\lambda}_m)_i^{k+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases} \\ (I_m^{\max})_i^{k+\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \max \left\{ (I_m)_i^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i-1}^{k+\frac{1}{2}} \right\} + \tau (\tilde{Q}_m)_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, & \text{if } (\tilde{\lambda}_m)_i^{k+\frac{1}{2}} > 0 \\ \max \left\{ (I_m)_i^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, (I_m)_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} \right\} + \tau (\tilde{Q}_m)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, & \text{if } (\tilde{\lambda}_m)_i^{k+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

и правые части уравнений на инварианты (3.6) аппроксимируются через соответствующие им левые части:

$$\left(\tilde{Q}_m\right)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\tilde{I}_m\right)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \left(I_m\right)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + \left(\tilde{\lambda}_m\right)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{\left(I_m\right)_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} - \left(I_m\right)_i^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (3.10)$$

Скорректированные значения инвариантов $(I_m)_{k,i}^{n+1}$ используются для вычисления потоковых переменных на новом временном слое. Соотношения (3.7), записанные для узла сетки, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\hat{I}_1\right)_i^{k+1/2} &= \hat{u}_i^{k+1/2} + \tilde{G}_1 \hat{Z}_i^k + \tilde{D}_1 \hat{\rho}_i^{k+1/2}, \\ \left(\hat{I}_2\right)_i^{k+1/2} &= \hat{u}_i^{k+1/2} - \tilde{G}_2 \hat{Z}_i^k - \tilde{D}_2 \hat{\rho}_i^{k+1/2}, \\ \left(\hat{I}_3\right)_i^{k+1/2} &= \hat{\rho}_i^{k+1/2} \end{aligned}$$

Отсюда вытекают соотношения для переменных потока на новом временном слое:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^{k+1/2} &= \frac{\left[\left(\hat{I}_1\right)_i^{k+1/2} - \tilde{D}_1 \hat{\rho}_i^{k+1/2}\right] \tilde{G}_2 + \left[\left(\hat{I}_2\right)_i^{k+1/2} + \tilde{D}_2 \hat{\rho}_i^{k+1/2}\right] \tilde{G}_1}{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}, \\ \hat{Z}_i^k &= \frac{\left[\left(\hat{I}_1\right)_i^{k+1/2} - \tilde{D}_1 \hat{\rho}_i^{k+1/2}\right] - \left[\left(\hat{I}_2\right)_i^{k+1/2} + \tilde{D}_2 \hat{\rho}_i^{k+1/2}\right]}{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}, \\ \hat{\rho}_i^{k+1/2} &= \left(\hat{I}_3\right)_i^{k+1/2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

И вычисляются толщины слоев $\hat{h}_i^{k+1/2} = \hat{Z}_i^k - \hat{Z}_i^{k+1}$.

Фаза 3 – корректор

Найденные значения потоковых переменных на новом слое используются для вычисления новых консервативных переменных:

$$\begin{aligned} &\frac{\hat{h}_{i+1/2}^{k+1/2} - \tilde{h}_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\hat{h}\hat{u})_{i+1}^{k+1/2} - (\hat{h}\hat{u})_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0, \\ &\frac{(\hat{\rho}\hat{h})_{i+1/2}^{k+1/2} - (\tilde{\rho}\tilde{h})_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})_{i+1}^{k+1/2} - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = 0, \\ &\frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})_{i+1/2}^{k+1/2} - (\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u})_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}^2)_{i+1}^{k+1/2} - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}^2)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ &+ \frac{(\hat{h}\hat{P})_{i+1}^{k+1/2} - (\hat{h}\hat{P})_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\hat{P}_{i+1}^{k+1} + \hat{P}_i^{k+1}}{2} \frac{\hat{Z}_{i+1}^{k+1} - \hat{Z}_i^{k+1}}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{\hat{P}_{i+1}^k + \hat{P}_i^k}{2} \frac{\hat{Z}_{i+1}^k - \hat{Z}_i^k}{\Delta x_{i+1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Фаза 1 и фаза 3 аппроксимируют исходную систему дифференциальных уравнений со вторым порядком по пространству и с первым по времени. Однако, если сложить (3.2) и (3.12), то результирующая система будет иметь второй порядок аппроксимации и по времени. При отключенном блоке нелинейной коррекции потоков (3.9) алгоритм (3.2) - (3.12) обладает свойством обратимости по времени. Обратимые по времени разностные схемы не имеют аппроксимационной вязкости. Таким образом, все диссипативные свойства схемы КАБАРЕ определяются исключительно содержащейся в фазе 2 нелинейной коррекцией потоков.

Зоны нелинейной коррекции возникают в окрестностях гидродинамических скачков. В этом случае порядок аппроксимации по времени падает до первого, а численное решение в случае хорошей обусловленности задачи, остается монотонным. Численная диссипация, возникающая в результате описанной нелинейной коррекции, основанной на принципе максимума, является минимально возможной платой за сохранение монотонности решения.

3.3 Нарушение гиперболичности, перестройка сетки и фильтрация

Свойство гиперболичности системы дифференциальных уравнений (3.1) может быть утрачено, что приводит к плохой обусловленности задачи и, как следствие, к неустойчивости вычислительного алгоритма (3.2) - (3.12). Такое явление возникает при заметной разнице скоростей между соседними слоями: возникает неустойчивость Гельмгольца, приводящая к турбулентному перемешиванию и интенсивному обмену массы и импульса между слоями.

Для решения проблемы возникновения неустойчивости предложено применять следующий подход. После выполнения фаз 1 и 3, на которых вычисляются новые координаты раздела между слоями, производится пересчет вертикальных координат узлов сетки, возвращающих их в заданное положение. При этом часть объема ячеек переходит в соседнюю ячейку, что учитывается введением соответствующим перераспределением массы и импульса между слоями.

На фазе 1 вычисляются промежуточные консервативные скорости $u_{i+1/2,k}^{n+1/2}$ и толщины слоев $h_{i+1/2,k}^{n+1/2}$, по которым находятся новые высоты границ разде-

ла $Z_{i+1/2,k}^{n+1/2} = Z_{i+1/2,k+1}^n + h_{i+1/2,k}^{n+1/2} Z_{i+1/2,N+1}^{n+1/2} = Z_{i+1/2,N+1}^n = B_{i+1/2}$, $Z_{i+1/2,1}^{n+1/2} = H_{i+1/2}^{n+1/2}$, $k = 1, \dots, N$. В общем случае эти координаты не являются окончательными и подлежат коррекции. Рассмотрим три способа задания $\hat{Z}_{i+1/2,k}^{n+1/2}$, что не исчерпывает всех возможностей:

1. Высоты не перестраиваются и $\hat{Z}_{i+1/2,k}^{n+1/2} = Z_{i+1/2,k}^{n+1/2}$. В этом случае обмен массой и импульсом между слоями отсутствует, и задача остается некорректной.

2. Новые границы раздела слоев задаются таким образом, чтобы отношения толщин слоев в каждом вертикальном столбце оставались одинаковыми (σ -сетка):

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{i+1/2,k}^{n+1/2} &= \hat{Z}_{i+1/2,k+1}^n + \sigma_k \hat{h}_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ \sigma_k &> 0, \quad \sum_{k=1}^N \sigma_k = N, \quad k = 1, \dots, N, \\ \hat{h}_{i+1/2,N}^{n+1/2} &= \left(H_{i+1/2}^{n+1/2} - B_{i+1/2} \right) / N.\end{aligned}$$

3. Нижняя граница слоя $k = s$, $N \geq s > 1$ остается неподвижной (эйлеровой), все границы слоев при $k > s$ также неподвижны, а толщины слоев при $k < s$ имеют заданные пропорции («сигма» - сетка):

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{i+1/2,k+1}^{n+1/2} &= Z_{i+1/2,k+1}^0, \quad k \geq s, \\ \hat{Z}_{i+1/2,k}^{n+1/2} &= \hat{Z}_{i+1/2,k+1}^{n+1/2} + \sigma_k \tilde{h}_{i+1/2,k}^{n+1/2}, \quad k = 1, \dots, s, \\ \tilde{h}_{i+1/2,k}^{n+1/2} &= \left(H_{i+1/2}^{n+1/2} - Z_{i+1/2,k+1}^0 \right) / s, \quad k = 1, \dots, s, \quad \sigma_k > 0, \quad \sum_{k=1}^s \sigma_k = s.\end{aligned}$$

Во втором и третьем случаях законы сохранения приводят к обмену массой и импульсом между слоями. Потоки между слоями можно аппроксимировать как с первым, так и со вторым порядком точности.

Потоки первого порядка точности вычисляются методом донорной ячейки, который заключается в следующем. Рассмотрим самый нижний слой ($k = N$). Если $\hat{h}_{i+1/2,N}^{n+1/2} \leq h_{i+1/2,N}^{n+1/2}$, то толщина нижнего слоя уменьшится на величину $\Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2} = h_{i+1/2,N}^{n+1/2} - \hat{h}_{i+1/2,N}^{n+1/2} \geq 0$ и часть ее массы $\Delta m_{i+1/2} = \rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2} \Delta x_{i+1/2}$ и импульса $\Delta (mu)_{i+1/2} =$

$\rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} u_{i+1/2,N}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2} \Delta x_{i+1/2}$ перейдет в ячейку лежащего выше слоя. В результате получим:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{i+1/2,N}^{n+1/2} &= \rho_{i+1/2,N}^{n+1/2}, \quad \hat{u}_{i+1/2,N}^{n+1/2} = u_{i+1/2,N}^{n+1/2}, \quad \hat{Z}_{i+1/2,N}^{n+1/2} = B_{i+1/2} + \hat{h}_{i+1/2,N}^{n+1/2}, \\ \hat{\rho}_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} &= \frac{\rho_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} h_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} + \rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}{h_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} + \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}, \\ \hat{u}_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} &= \frac{\rho_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} u_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} h_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} + \rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} u_{i+1/2,N}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}{\rho_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} h_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} + \rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}.\end{aligned}$$

В противоположном случае, когда $\hat{h}_{i+1/2,N}^{n+1/2} \geq h_{i+1/2,N}^{n+1/2}$, верхняя ячейка отдает часть своей массы и импульса нижней:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} &= \rho_{i+1/2,N-1}^{n+1/2}, \quad \hat{u}_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} = u_{i+1/2,N-1}^{n+1/2}, \quad Z_{i+1/2,N}^{n+1/2} = B_{i+1/2} + \hat{h}_{i+1/2,N}^{n+1/2}, \\ \hat{\rho}_{i+1/2,N}^{n+1/2} &= \frac{\rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} h_{i+1/2,N}^{n+1/2} - \rho_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}{h_{i+1/2,N}^{n+1/2} - \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}, \\ \hat{u}_{i+1/2,N}^{n+1/2} &= \frac{\rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} u_{i+1/2,N}^{n+1/2} h_{i+1/2,N}^{n+1/2} - \rho_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} u_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}{\rho_{i+1/2,N}^{n+1/2} h_{i+1/2,N}^{n+1/2} - \rho_{i+1/2,N-1}^{n+1/2} \Delta h_{i+1/2,N}^{n+1/2}}.\end{aligned}$$

Отметим, что в методе донорных ячеек плотности и скорости считаются постоянными в пределах слоя по вертикали.

Более точное вычисление потоков можно произвести, если предположить, что в пределах слоя вертикальное распределение массы и импульса является не постоянным, а изменяется линейно и непрерывно на границе слоев. Рассмотрим ячейки двух смежных слоев (с индексами В- нижний слой, Т-верхний слой). Обозначим через $\Delta z = h_B - h_{B,required}$ изменение границы между слоями, Δx - ширину этих ячеек, Δm , Δp - изменение массы и импульса слоев. Тогда получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Delta m &= \rho_B \Delta z \Delta x + \frac{1}{2} (h_B + \Delta z) \frac{\rho_T - \rho_B}{(h_T + h_B)/2} \Delta z \Delta x, \\ \Delta p &= \rho_B u_B \Delta z \Delta x + \frac{1}{2} (h_B + \Delta z) \frac{\rho_T u_T - \rho_B u_B}{(h_T + h_B)/2} \Delta z \Delta x.\end{aligned}$$

Новые значения плотностей и скоростей слоев вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_T &= \frac{\rho_T h_T \Delta x + \Delta m}{h_{T,required} \Delta x}, \quad \hat{\rho}_B = \frac{\rho_B h_B \Delta x - \Delta m}{h_{B,required} \Delta x}, \\ \hat{u}_T &= \frac{\rho_T h_T u_T \Delta x + \Delta p}{\hat{\rho}_T h_{T,required} \Delta x}, \quad \hat{u}_B = \frac{\rho_B h_B u_B \Delta x - \Delta p}{\hat{\rho}_B h_{B,required} \Delta x}.\end{aligned}$$

Пересчет консервативных переменных для других слоев осуществляется аналогично, процесс перестройки сетки производится от нижних слоев к верхним. Затем, откорректированные консервативные переменные и толщины слоев, помеченные символом $\hat{f}^{n+1/2}$, принимаются за окончательные значения $f^{n+1/2}$ и используются в последующей фазе 2. Аналогичная коррекция консервативных переменных осуществляется и после фазы 3.

Однако для регуляризации расчетов по-прежнему необходима эффективная сила трения между слоями. Чтобы минимизировать вязкость сетки, после фазы 2 она заменяется фильтрацией переменных потока:

$$\begin{aligned}\hat{u}_i^{k+1/2} &\Leftarrow \sigma_u \hat{u}_i^{k+1/2} + (1 - \sigma_u) \frac{\hat{u}_{i-1}^{k+1/2} + \hat{u}_{i+1}^{k+1/2}}{2} \\ \hat{\rho}_i^{k+1/2} &\Leftarrow \sigma_\rho \hat{\rho}_i^{k+1/2} + (1 - \sigma_\rho) \frac{\hat{\rho}_{i-1}^{k+1/2} + \hat{\rho}_{i+1}^{k+1/2}}{2} \\ (\delta h)_i^{k+1/2} &\Leftarrow \sigma_h (\delta h)_i^{k+1/2} + (1 - \sigma_h) \frac{(\delta h)_{i-1}^{k+1/2} + (\delta h)_{i+1}^{k+1/2}}{2},\end{aligned}\tag{3.13}$$

где $(\delta h) = \hat{h} - h, \sigma_u, \sigma_\rho, \sigma_h \in [0, 1]$.

Кроме того, в фазе 1 (3.2) и фазе 3 (3.12) применяется фильтрация составляющей потока, связанной с давлением $(hP)_{i,k+1/2}^{n+1}$. Используются выражения, аналогичные формулам (3.13), но коэффициент берется из диапазона $[1, 2]$:

$$\left(\hat{h}\hat{P}\right)_i^{k+1/2} \Leftarrow \sigma_P \left(\hat{h}\hat{P}\right)_i^{k+1/2} + (1 - \sigma_P) \frac{\left(\hat{h}\hat{P}\right)_{i-1}^{k+1/2} + \left(\hat{h}\hat{P}\right)_{i+1}^{k+1/2}}{2}, \sigma_P \in [1, 2]\tag{3.14}$$

Стоит отметить, что фильтрация переменных потока не нарушает законов сохранения.

Выбор временного шага.

Условие устойчивости схемы КАБАРЕ для каждого слоя имеет вид:

$$\tau \frac{c_{i+1/2}^{k+1/2} + |u|_{i+1/2}^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} \leq 1.$$

Откуда следует, что $\tau = CFL \cdot \min_{i,k} \left\{ \frac{\Delta x_{i+1/2}}{c_{i+1/2}^{k+1/2} + |u|_{i+1/2}^{k+1/2}} \right\}$, $CFL \leq 1$ - число Куранта-Фридрихса-Леви.

3.4 Свойство сбалансированности

Приведенный алгоритм (3.2) - (3.12) обладает свойством сбалансированности, под которым понимается сохранение состояния покоя однородно стратифицированной жидкости над произвольным рельефом дна. Приведем доказательство этого факта.

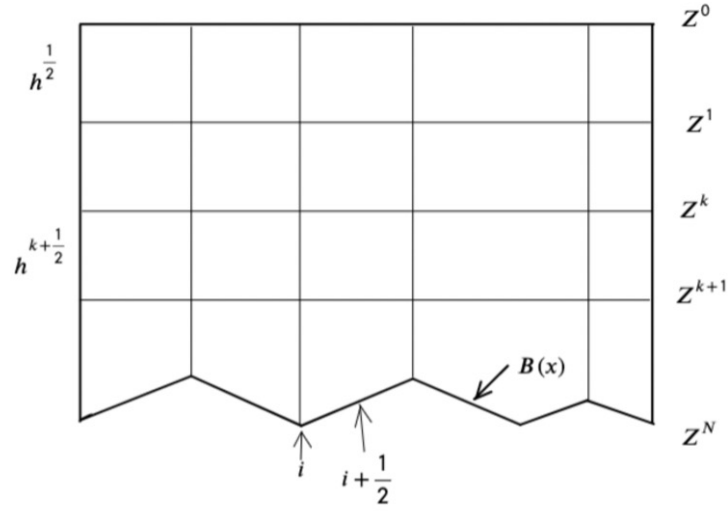


Рисунок 3.2 — Начальные данные теста на хорошую сбалансированность

Рассмотрим двумерную задачу $x \in [0; L], z \in [B(x); Z(x)]$:

$$Z(x) = Z_0 = \text{const}, u(x, z) = 0, \rho(x, z) = \rho_0(z)$$

где $Z(x)$ - z координата свободной поверхности, $B(x)$ - рельеф дна.

Начальные данные (рис. 3.2) теста на сбалансированность для численных алгоритмов многослойных моделей задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_*^k &= (Z_0)^k, \\ u_*^{k+1/2} &= 0, \\ \rho_*^{k+1/2} &= (\rho_0)^{k+1/2}, \quad k = \overline{1, N-1} \\ h_*^{k+1/2} &= Z_*^k - Z_*^{k+1}, \\ Z_N &= B(x). \end{aligned}$$

Другими словами, все вертикальные слои, кроме самого нижнего, имеют постоянную толщину. Плотности всех слоев постоянны и не уменьшаются с

увеличением индекса слоя. Рельеф дна со временем не меняется. Покажем сохранение этого стационарного состояния на всех этапах численного алгоритма.

Фаза 1. Покажем, что стационарное состояние сохраняется после расчета первой фазы. Подставляем исходные данные в систему (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{h}_{i+1/2}^{k+1/2} - h_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} &= 0, \\ \frac{(\tilde{\rho}\tilde{h})_{i+1/2}^{k+1/2} - (\rho h)_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} &= 0, \\ \frac{(\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u})_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} + \frac{(hP)_{i+1}^{k+1/2} - (hP)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ + \frac{P_{i+1}^{k+1} + P_i^{k+1}}{2} \frac{Z_{i+1}^{k+1} - Z_i^{k+1}}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{P_{i+1}^k + P_i^k}{2} \frac{Z_{i+1}^k - Z_i^k}{\Delta x_{i+1/2}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из первого и второго уравнений (3.15) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{i+1/2}^{k+1/2} &= h_{i+1/2}^{k+1/2} = (h_0)^{k+1/2} \\ \tilde{\rho}_{i+1/2}^{k+1} &= \rho_{i+1/2}^{k+1} = (\rho_0)^{k+1/2} \end{aligned}$$

Далее рассмотрим уравнение для импульса:

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u})_{i+1/2}^{k+1/2} - (\rho h u)_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} &= - \frac{(\rho h u^2)_{i+1}^{k+1/2} - (\rho h u^2)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} - \\ - \frac{(hP)_{i+1}^{k+1/2} - (hP)_i^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{P_{i+1}^{k+1} + P_i^{k+1}}{2} \frac{Z_{i+1}^{k+1} - Z_i^{k+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{P_{i+1}^k + P_i^k}{2} \frac{Z_{i+1}^k - Z_i^k}{\Delta x_{i+1/2}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Принимая во внимание, что $P_i^{k+1/2} = (P_i^k + P_i^{k+1})/2$ и в силу исходных данных $Z_{i+1}^k - Z_i^k = 0, k = \overline{0, N_z - 1}, Z_{i+1}^{k+1} - Z_i^{k+1} = Z_{i+1}^k - h_{i+1}^{k+1/2} - Z_i^k + h_i^{k+1/2} = h_i^{k+1/2} - h_{i+1}^{k+1/2}$ правая часть выражения (3.16) может быть преобразована:

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u})_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} &= - \frac{h_{i+1}^{k+1/2}(P_{i+1}^k + P_{i+1}^{k+1}) - h_i^{k+1/2}(P_i^k + P_i^{k+1})}{2\Delta x_{i+1/2}} - \frac{P_{i+1}^{k+1} + P_i^{k+1}}{2} \frac{h_i^{k+1/2} - h_{i+1}^{k+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = \\ &= - \frac{h_{i+1}^{k+1/2}(P_{i+1}^k + P_{i+1}^{k+1} - P_{i+1}^{k+1} - P_i^{k+1}) + h_i^{k+1/2}(P_{i+1}^{k+1} + P_i^{k+1} - P_i^k - P_i^{k+1})}{2\Delta x_{i+1/2}} = \\ &= - \frac{h_{i+1}^{k+1/2}(P_{i+1}^k - P_i^{k+1}) + h_i^{k+1/2}(P_{i+1}^{k+1} - P_i^k)}{2\Delta x_{i+1/2}} = \\ &= - \frac{h_{i+1}^{k+1/2}(P_{i+1}^k - P_i^k - g\rho_i^{k+1/2}h_i^{k+1/2}) + h_i^{k+1/2}(P_{i+1}^k + g\rho_{i+1}^{k+1/2}h_{i+1}^{k+1/2} - P_i^k)}{2\Delta x_{i+1/2}} \end{aligned}$$

Из постоянства плотностей всех слоев и толщин всех слоев, кроме нижнего, следуют равенства давлений $P_{i+1}^k = P_i^k, k = \overline{1, N_z - 1}$. Учитывая их, приходим к формуле

$$\frac{\left(\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u}\right)_{i+1/2}^{k+1/2}}{\tau/2} = - \frac{\left(h_{i+1}^{k+1/2} \left(-g\rho_i^{k+1/2}h_i^{k+1/2}\right) + h_i^{k+1/2} \left(g\rho_{i+1}^{k+1/2}h_{i+1}^{k+1/2}\right)\right)}{2\Delta x_{i+1/2}}$$

Отсюда, $\tilde{u}_{i+1/2}^{k+1/2} = 0 = (u_0)^{k+1/2}$ и все консервативные переменные на промежуточном временном слое такие же, как исходные данные.

Фаза 2. Из выражений для инвариантов (3.7) и сохранения стационарного состояния после **фазы 1** находим:

$$\left(\tilde{I}_m\right)_{i+1/2}^{k+1/2} = (I_m)_{i+1/2}^{k+1/2}, m = 1, 2, 3$$

С учетом этих равенств, исходных данных теста и определения (3.10) $\left(\tilde{Q}_m\right)_{i+1/2}^{k+1/2} = 0, m = 1, 2, 3$. Следовательно, если $\left(\hat{I}_m\right)_i^{k+1/2} = (I_m)_i^{k+1/2}, m = 1, 2, 3$, то нелинейная коррекция инвариантов (3.9) не меняет инвариантов, полученных после экстраполяции.

$$\begin{aligned} \left(\hat{I}_3\right)_i^{k+1/2} &= 2 \cdot \left(\tilde{I}_3\right)_{i+1/2}^{k+1/2} - (I_3)_{i+1}^{k+1/2} = 2 \cdot \tilde{\rho}_{i+1/2}^{k+1/2} - \rho_{i+1}^{k+1/2} = \\ &= 2 \cdot (\rho_0)^{k+1/2} - (\rho_0)^{k+1/2} = (I_3)_i^{k+1/2} \end{aligned}$$

Так как $\left(\tilde{\lambda}_1\right)_{i+1/2}^{k+1/2} = (\tilde{u} + \tilde{c})_{i+1/2}^{k+1/2} > 0$, то первый инвариант вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \left(\hat{I}_1\right)_i^{k+\frac{1}{2}} &= 2 \cdot \left(\tilde{I}_1\right)_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - (I_1)_{i-1}^{k+\frac{1}{2}} = 2 \cdot (I_1)_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - (I_1)_{i-1}^{k+\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \cdot \left(u_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \left[\tilde{G}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot Z_{i-\frac{1}{2}}^k + \left[\tilde{D}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot \rho_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right) - \\ &- \left(u_{i-1}^{k+\frac{1}{2}} + \left[\tilde{G}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot Z_{i-1}^k + \left[\tilde{D}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot \rho_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}\right) = \\ &= 2 \cdot \left(\left[\tilde{G}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (Z_0)^k + \left[\tilde{D}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (\rho_0)^{k+\frac{1}{2}}\right) - \\ &- \left(\left[\tilde{G}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (Z_0)^k + \left[\tilde{D}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (\rho_0)^{k+\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \left[\tilde{G}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (Z_0)^k + \left[\tilde{D}_1\right]_{i-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (\rho_0)^{k+\frac{1}{2}} = (I_1)_i^{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично, $\left(\hat{I}_2\right)_i^{k+\frac{1}{2}} = -\left[\tilde{G}_2\right]_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (Z_0)^k - \left[\tilde{D}_2\right]_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \cdot (\rho_0)^{k+\frac{1}{2}} = (I_2)_i^{k+\frac{1}{2}}$ и $\left(\tilde{\lambda}_2\right)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} < 0$.

Таким образом, нелинейная коррекция (3.9) не меняет инвариантов, полученных после экстраполяции.

Рассмотрим потоковые величины на новом слое по времени. Плотность является третьим инвариантом, а следовательно,

$$\hat{\rho}_i^{k+1/2} = (\rho_0)^{k+1/2} \quad (3.17)$$

Из уравнений (3.11) и (3.17) получаем:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_i^k &= \frac{\left[G_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k + \left[\tilde{D}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} \cdot (\rho_0)^{k+1/2} - \left[\tilde{D}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} (\rho_0)^{k+1/2}}{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} + \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2}} - \\ &- \frac{\left[-G_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k - \left[\tilde{D}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (\rho_0)^{k+1/2} + \left[\tilde{D}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (\rho_0)^{k+1/2}}{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} + \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2}} = \\ &= \frac{\left[G_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k + \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k}{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} + \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2}} = (Z_0)^k \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^{k+1/2} &= \frac{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k + \left[\tilde{D}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} \cdot (\rho_0)^{k+1/2} - \left[\tilde{D}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} (\rho_0)^{k+1/2}}{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} + \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2}} \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} + \\ &+ \frac{\left[-\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k - \left[\tilde{D}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (\rho_0)^{k+1/2} + \left[\tilde{D}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (\rho_0)^{k+1/2}}{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} + \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2}} \left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} = \\ &= \frac{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} - \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2} \cdot (Z_0)^k \left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2}}{\left[\tilde{G}_1\right]_{i-1/2}^{k+1/2} + \left[\tilde{G}_2\right]_{i+1/2}^{k+1/2}} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, все переменные потока из нового временного слоя равны соответствующим переменным из предыдущего временного слоя. Третья фаза строится аналогично первой и также сохраняет стационарное решение. Вместе это сохраняет стационарное решение и доказывает свойство сбалансированности алгоритма.

3.5 Верификационная задача расчета баротропного течения по многослойной модели с учетом обмена массой и импульсом между слоями

Рассматриваются одномерные колебания несжимаемой жидкости в прямоугольном бассейне с плоским дном: $x \in [-5, 5]$, $B(x) \equiv -2$. Параметры полагаются постоянными: плотность $\rho = 1$, ускорение свободного падения $g = 10$. На твёрдых стенках отсутствует поток: $u(-5, t) = u(5, t) = 0$ для $t \geq t_0$.

Начальные данные выбираются в момент $t = t_0$ следующими:

$$u(x, t_0) = 0, \quad H(x, t_0) = H_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{5} \right), & |x| < \frac{5}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расчет проводился по схеме КАБАРЕ по однослойной модели и многослойной при числе слоев $N = 10$ на сигма-сетке с одинаковыми толщинами слоев до момента времени $t = 6$, соответствующему более, чем одному периоду колебания поверхности. На рис. 3.3 а) приведена форма свободной поверхности в начальный момент, на рис. 3.3 б) – свободная поверхность при $t = 6$ и числе расчетных ячеек $N_x = 128$.

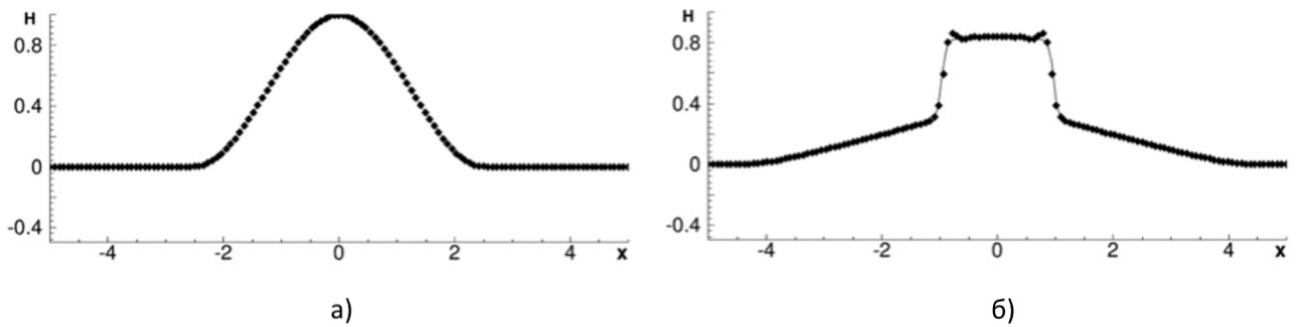


Рисунок 3.3 — Форма поверхности жидкости: а) начальные данные, б) на время $t=6$. Сплошная линия – однослойная вода, маркеры – многослойная вода с числом слоев $N=10$

Сплошная линия соответствует однослойной модели, маркерами отмечен результат на десяти слоях. Расчеты проводились при параметрах $\sigma_h = \sigma_u =$

$0.9, \sigma_P = 1.2, CFL = 0.3$. При увеличении времени расчета и сгущении сетки алгоритм не теряет устойчивости и демонстрирует сходимость по сетке.

3.6 Валидация модели CABARET-MFSH на лабораторных тестах по исследованию гравитационных течений в стратифицированной жидкости

Описанный выше алгоритм построен на базе схемы КАБАРЕ с целью минимизации аппроксимационной вязкости, избыток которой может негативно сказываться на качестве расчетов. Однако для регуляризации этого алгоритма было необходимо внедрить процесс фильтрации потоковых переменных. В качестве базовых параметров этой фильтрации были взяты параметры хорошо зарекомендовавшие себя в процессе верификации алгоритма. Важно отметить, что внедрение фильтрации приводит к добавлению численной диссипации в алгоритм, что может оказывать влияние на решение задач. Для оценки этого влияния были проведены численные расчеты лабораторных экспериментов, которые изучали динамику стратифицированных жидкостей [1]. Эти расчеты позволили оценить степень влияния численной диссипации, вызванной фильтрацией, а также определить применимость и эффективность разработанного алгоритма для решения подобных задач.

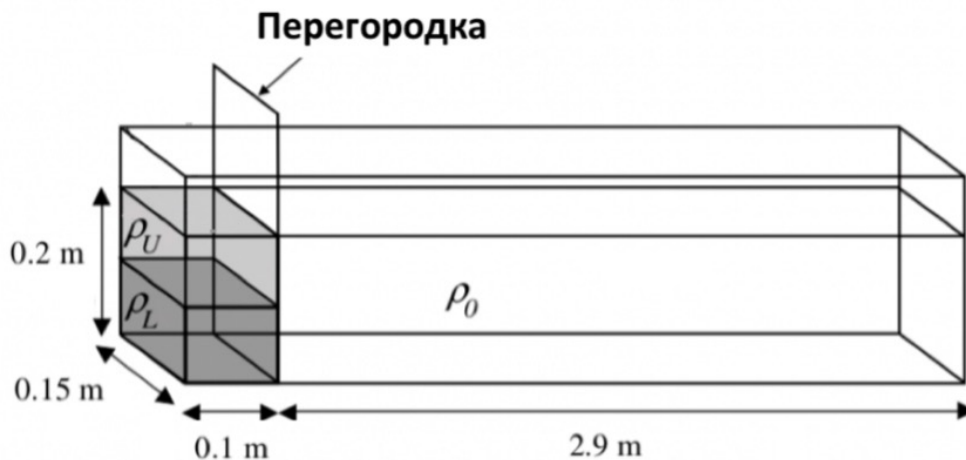


Рисунок 3.4 — Параметры экспериментальной установки из лабораторных экспериментов

Эксперименты, описанные в данной статье, проводились в акриловом резервуаре (рис. 3.4) длиной 3 м и шириной 0,15 м, заполненном водопроводной водой на глубину $H = 0.2$ м. Водонепроницаемый шлюз располагался в 0.1 м от одного из концов резервуара. В отделенной перегородкой области формировали слои солевых растворов различной плотности, подкрашенные разными красителями. Затем перегородка быстро извлекалась, и более плотный соляной раствор создавал внутреннюю волну в основной части резервуара.

Статья [1] представляет четыре серии экспериментов. Исследование стремится проследить и определить особенности и динамику потока при различных условиях. Серия А рассматривает влияние толщины нижнего соленого слоя на динамику потока, в то время как серии В и С анализируют движение двухслойных жидкостей с разными градиентами плотности. Серия D исследует динамику трехслойных жидкостей с различными толщинами и соленостями слоев, сохраняя среднюю плотность постоянной. Совокупность этих серий экспериментов обеспечивает обширный обзор того, как различные параметры, такие как толщина слоя и концентрация соли, могут влиять на динамику придонных потоков и взаимодействие между слоями в различных условиях.

Каждый эксперимент начинался с быстрого удаления затвора, что приводило к формированию относительно узкого слоя более плотной жидкости. Этот слой начинал распространяться по дну экспериментальной установки. Для визуализации процесса и его дальнейшего анализа использовались окрашенные растворы, и их движение регистрировалось с помощью камеры. Это позволяло отслеживать изменение положения окрашенной жидкости, что в свою очередь давало возможность строить зависимость длины окрашенного слоя от времени. Эти данные, собранные в ходе экспериментов, обеспечивали необходимую основу для проведения дальнейшего анализа и выявления присущих системе закономерностей и динамических характеристик.

В целях более точного качественного и количественного сравнения результатов расчетов и экспериментов, в используемую расчетную модель были интегрированы уравнения переноса пассивных примесей (3.18). Каждому слою различной плотности ставился в соответствие цветовой маркер ($\varphi_i, i = 1, 2, 3$). Этот шаг был предпринят для того, чтобы модель могла более полно описывать реальные условия экспериментов, включая динамику и взаимодействие различных примесей, присутствующих в системе.

Пассивные примеси в этом контексте представляют собой компоненты системы, которые не влияют на движение жидкости своими активными свойствами, но их перемещение и распределение являются следствием движения жидкости. Уравнения переноса пассивных примесей позволяют моделировать распределение этих примесей в резервуаре. Это предоставляет дополнительные возможности для сравнения и анализа совпадений и различий между модельными и экспериментальными данными.

$$\frac{\partial (\varphi_i \cdot h)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_i \cdot hu)_{k+1/2}}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

Аппроксимация этих уравнений на сетке осуществлялась также по схеме КАБАРЕ [45]. Маркеры наравне с физическими величинами участвуют в процедуре перераспределения между слоями при перестройке сетки. Для визуализации расчетов цвет каждой ячейки определялся по соотношению маркероцветов в ней с использованием цветовой модели RYB.

На рис. 3.5 и последующих с результатами расчетов красные маркеры на графиках служат для иллюстрации положения фронта потока, которое определено на основе экспериментальных данных. Это важный элемент визуализации, который помогает в сравнении расчетных и экспериментальных результатов. В статье Gladstone фотографии приведенных экспериментов сопровождалась масштабной линейкой вдоль длины бака. Это позволило вычислить реальное положение фронта придонного потока в лабораторных экспериментах.

При изучении стратификации и динамики жидкостей часто обращают внимание на динамику распространения однородной соленой жидкости в пресной воде. Такое течение имеет ряд особенностей и зависимостей, которые были изучены в серии исследований. В частности, Middleton [98] основательно рассмотрел этот процесс как функцию времени. Дополнительно, Huppert и Simpson [99] проанализировали данный процесс как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения, представив подробное обсуждение динамики такого движения.

В рамках этих исследований были выведены определенные формулы, которые применяются для оценки характеристик данного типа движения. Эти формулы основываются на наблюдении, что после открытия заглушки из шлюза, движение солевого потока вызывается балансом между силами инерции и плавучести. При этом считается, что сопротивление трения имеет незначитель-

ное влияние на процесс. Следовательно, скорость потока u является функцией двумерной приведённой плавучести жидкости B и длины распространения фронта L соленого раствора в баке. Это предположение позволяет формализовать описанный процесс в виде математических соотношений, что значительно упрощает его анализ и прогнозирование.

Для оценки рассматриваемого движения используются следующие соотношения. Предполагается оценка скорости:

$$u \sim \left(\frac{B}{L} \right)^{1/2},$$

где плавучесть $B = \frac{H L g (\rho_c - \rho_0)}{\rho_0} = B_0$, а ρ_c и ρ_0 обозначают соответственно среднюю плотность солёной жидкости и плотность пресной воды (принимается $\rho_0 = 998.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$).

Одновременно выполняется кинематическое соотношение $u = \frac{dL}{dt}$, откуда следует

$$\frac{dL}{dt} = Fr \left(\frac{B_0}{L} \right)^{1/2},$$

где Fr – число Фруда.

Проинтегрировав это выражение, получаем:

$$\int L^{1/2} dL = Fr B_0^{1/2} \int dt, \quad \frac{2}{3} L^{3/2} = Fr B_0^{1/2} t + C.$$

Полагая $C = \frac{2}{3} L_0^{3/2}$, приходим к виду

$$L^{3/2} = L_0^{3/2} + \frac{3}{2} Fr \cdot B_0^{1/2} t$$

В безразмерных переменных $L^* = \frac{L}{L_0}$, $t^* = \frac{\frac{3}{2} Fr B_0^{1/2} t}{L_0^{3/2}}$, соотношение принимает форму

$$(L^*)^{3/2} = 1 + t^*. \quad (3.19)$$

В стратифицированной жидкости каждый слой имеет свою собственную плотность, что может существенно изменить динамику распространения по сравнению с однородной солёной жидкостью. Это означает, что непосредствен-

ное применение выведенной зависимости (3.19) может быть недостаточно для точного предсказания поведения стратифицированной жидкости. Тем не менее, выведенные теоретические представления можно использовать как отправную точку для понимания динамики стратифицированных жидкостей.

Расчеты велись на сигма-сетке размером 300x50, где первое число указывает количество расчетных ячеек вдоль бака (горизонтальное разбиение), а второе число обозначает количество слоев жидкости (вертикальное разбиение). Это позволяло моделировать жидкость внутри бака с достаточной степенью детализации и точности.

Серия А.

В первой серии экспериментов анализировалось влияние начальной толщины нижнего, более солёного слоя в двухслойном коктейле (за перегородкой) на последующую динамику течения. Для сопоставимости опытов было введено дополнительное ограничение: плотности нижних слоёв подбирались так, чтобы обеспечивалось сохранение массы в замкнутой части бака при варьировании толщины. В визуализации использовался краситель (синий), вводимый в солёный слой, что позволяло отслеживать фронт придонного течения и степень межслоевого перемешивания. Аналогично, в расчётах в начальный момент времени соленая жидкость помечалась маркером синего цвета. Такой дизайн эксперимента и вычислительной постановки позволяет одинаково отслеживать перемещение солёной жидкости в опыте (по красителю) и в модели (по маркеру), обеспечивая корректное сравнение положения фронта, формы струи и степени перемешивания между слоями.

Эксперимент А1.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 998.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (как и в основной части бака), плотность нижнего слоя $\rho_L = 1061.8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, высота нижнего слоя $h_L = 0.25 \cdot H = 0.05$ м (рис. 3.5).

До момента времени, равного 12 секундам, положение фронта придонного потока в численном расчете отстает от эксперимента, хотя и не значительно. Однако на момент времени 16 секунд, положения фронтов в модели и в эксперименте совпадают. Тем самым, при наличии небольших отклонений на начальном этапе, модель корректно воспроизводит последующую динамику и в целом надёжно согласуется с экспериментом, что позволяет рассматривать её

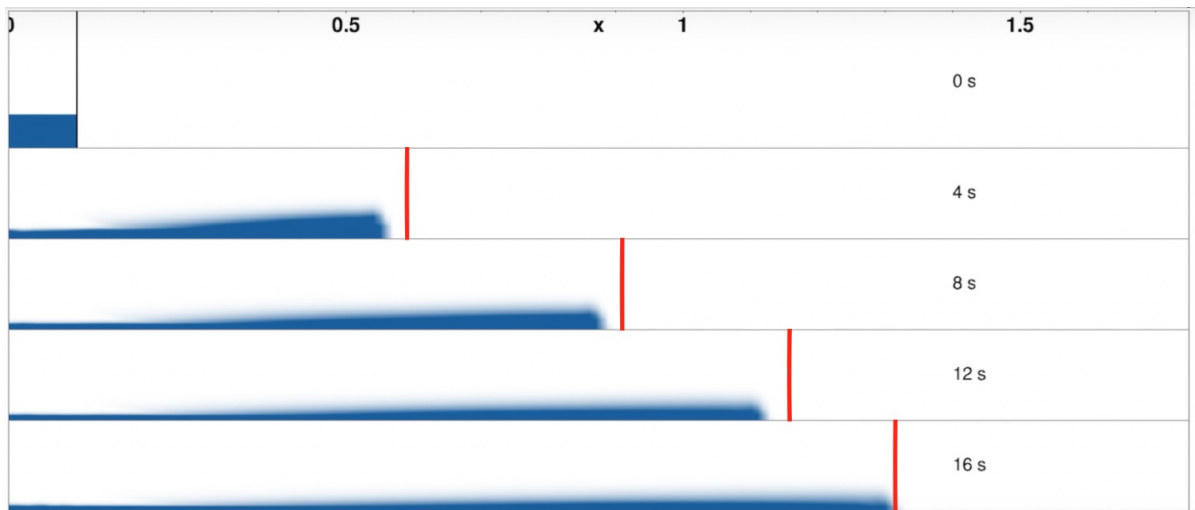


Рисунок 3.5 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А1 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета

как практичный инструмент для прогноза и моделирования подобных процессов.

Эксперимент А2.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 998.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1029.7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, высота нижнего слоя $h_L = 0.5 \cdot H = 0.1$ м (рис. 3.6).

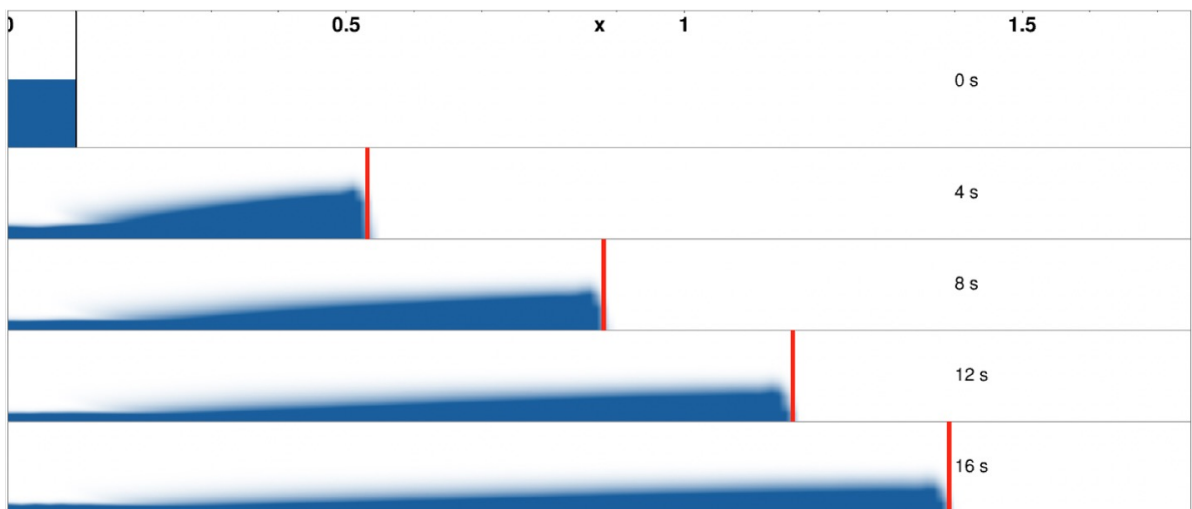


Рисунок 3.6 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А2 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета

Сопоставление показывает хорошее согласие между расчётным и экспериментальным положением фронта придонного потока.

Эксперимент А3.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 998.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1018.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, высота нижнего слоя $h_L = 0.75 \cdot H = 0.15 \text{ м}$ (рис. 3.7).

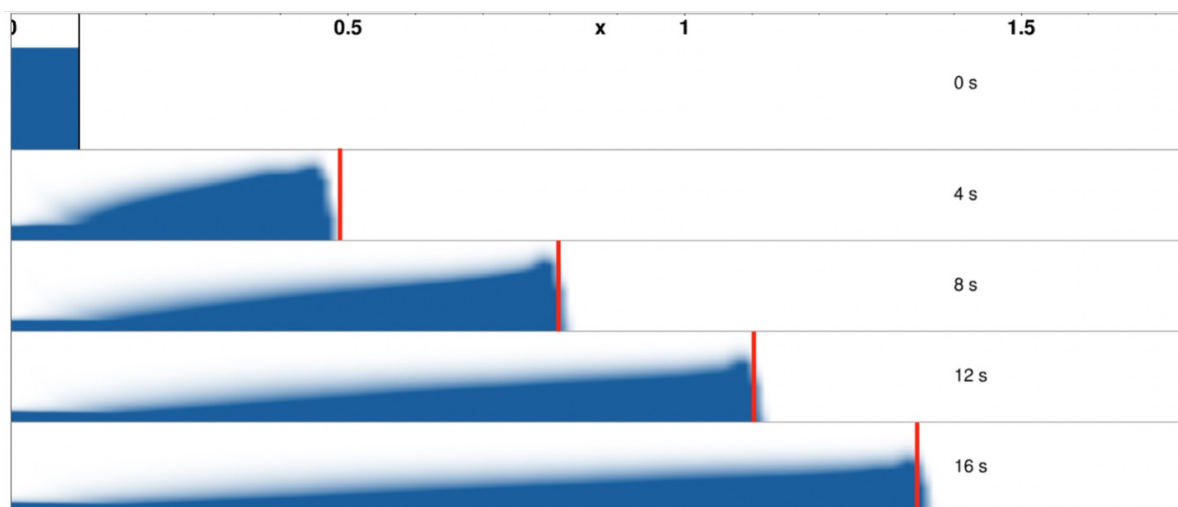


Рисунок 3.7 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А3 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета

В расчете достаточно успешно воспроизводится движение фронта потока соленой жидкости, что подтверждается сравнением с экспериментальными данными. Однако необходимо учесть, что используемая вычислительная модель имеет свои естественные ограничения, вызванные предположением о гидростатическом равновесии. Добавленный в нее алгоритм для перераспределения физических параметров между слоями при перестройке сетки способствует улучшению общего характера потока за фронтом, делая его более реалистичным. Стоит отметить, что визуализация потока, полученная в результате расчета, все еще не в полной мере совпадает с типичной вихревой структурой, которая обычно формируется за фронтом потока в реальных условиях. Это ограничение связано с природой модели и ее основными предположениями.

Эксперимент А4.

В этом эксперименте в меньшей части бака была только соленая жидкость с плотностью $\rho_L = 1013.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, и высотой столба $h_L = H = 0.2 \text{ м}$ (рис. 3.8).

Численное моделирование достаточно надежно воспроизводит динамику движения фронта распространения жидкости на протяжении первых трех временных интервалов четвертого эксперимента этой серии. Тем не менее, на четвертой временной отсечке (при 16 секундах) наблюдается значительное откло-

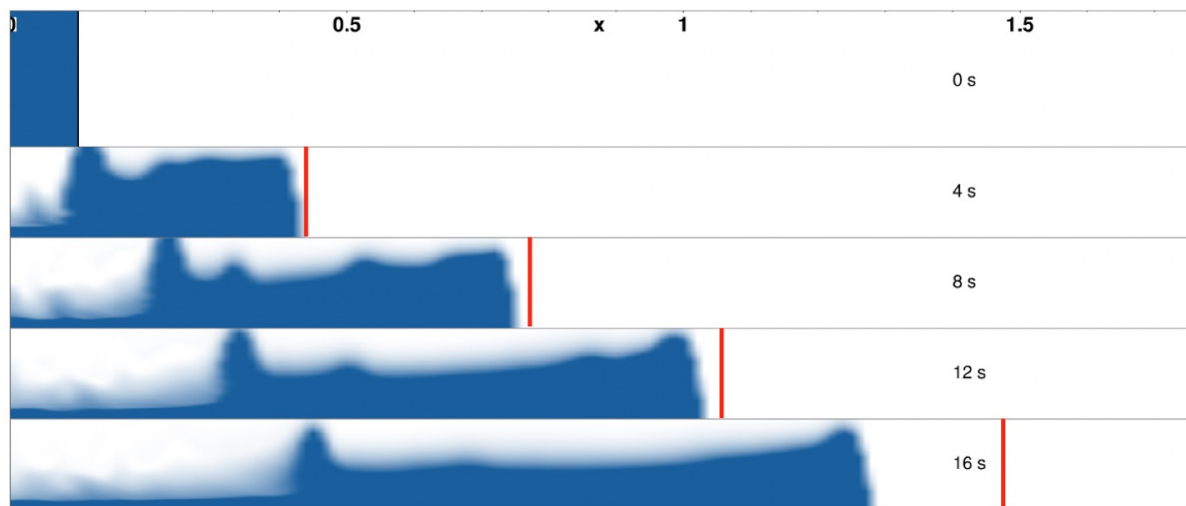


Рисунок 3.8 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А4 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета

нение в положении фронтов потока по сравнению с экспериментальными данными. Такое резкое различие в поведении фронтов потока можно объяснить ошибкой, допущенной в статье [1]. Предположительно, фотография, представленная в этой работе, фактически соответствует временному моменту 20 секунд, а не 16. Это утверждение подтверждается и теоретической зависимостью величины однородного солевого течения от времени, которая будет подробно обсуждена ниже при описании количественного сравнения.

В расчетах виден ярко выраженный холм, возникший в начальный период на границе скачка концентраций и распространяющийся далее со скоростью потока. В эксперименте такое явление отсутствует. По всей видимости, это связано с тем, что в текущей версии модели отсутствуют механизмы, которые могли бы адекватно воспроизвести эффекты, связанные с удалением перегородки, препятствующей движению потока [100]. То есть, в расчетах не учитывается скорость извлечения перегородки и вовлечение части жидкости перегородкой в движение в вертикальном направлении с последующей деформацией свободной границы и ее дальнейшей релаксацией.

Для четырех описанных выше расчетов серии А был построен график масштабированной длины растекания соленой жидкости от времени $L^{*3/2}(t^*)$ (рис. 3.9). Для этого в программу добавлялась выдача положения фронта потока каждые 3 секунды расчета. А затем, эти данные обезразмеривались согласно выкладкам приведенным в выводе формулы распространения однородной соле-

ной жидкости в пресной воде (3.19). Начальная скорость движения придонного потока с меньшими высотами (A1, A2) из-за большей разности плотностей с окружающей пресной водой оказывается быстрее, по сравнению с потоками с большими высотами (A3, A4).

С течением времени эта динамика меняется. На больших временах потоки в A3 и A4 сохраняют достаточную толщину и поэтому меньше подвержены трению. В то же время, у потоков с меньшими высотами (A1, A2) происходит быстрое истончение, что увеличивает роль силы трения и замедляет эти потоки на больших временных интервалах.

Полученные данные согласуются с экспериментальными данными и с приведенной теорией движения однородного потока, что еще раз свидетельствует о хорошем воспроизведении процесса математической моделью.

Таким образом, данные, полученные в результате численного моделирования, хорошо согласуются с приведенной теорией движения однородного потока (3.19), и с экспериментальными данными, что подтверждает эффективность модели в воспроизведении рассматриваемого процесса.

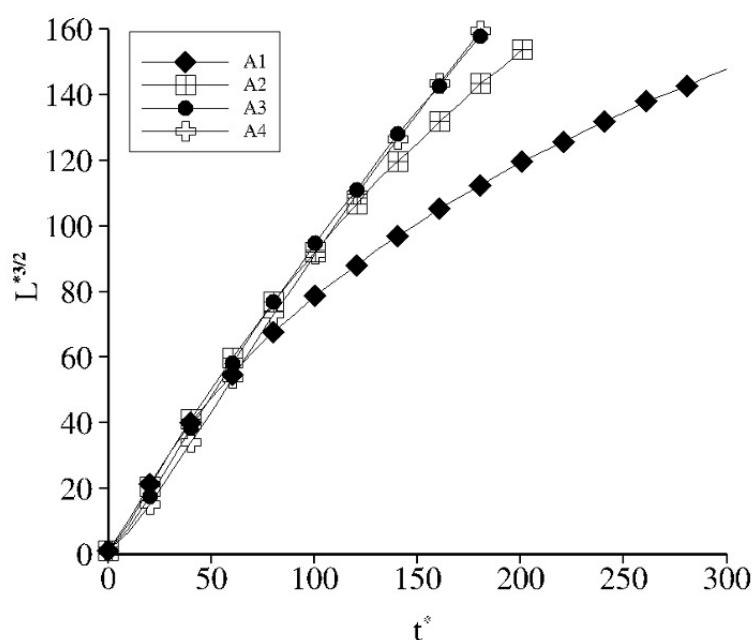


Рисунок 3.9 — Обезразмеренное расстояние $L^{*3/2}(t^*)$, пройденное придонным потоком соленой жидкости, для расчетов по схеме КАБАРЕ экспериментов серии А (метки A1, A2, A3, A4)

Серия В.

В этой серии внимание уделялось исследованию движения двухслойных жидкостей, где нижний слой содержал больше соли и, следовательно, имел боль-

шую движущую плавучесть, чем верхний слой. Это создавало условия, при которых можно было подробно рассмотреть влияние градиента концентрации на характеристики движения слоев и взаимодействия между ними. Начальная глубина каждого слоя составляла 0.1 м, при этом плотности слоев варьировались с сохранением общей массы соли. В каждом из экспериментов соленые жидкости окрашивались разными цветами для удобства визуализации. В верхний слой добавлялся желтый краситель, а в нижний – синего цвета. В расчётах в начальный момент времени соленые жидкости в закрытой части бака получали маркеры соответствующих цветов.

Эксперимент В25.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1026.1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (рис. 3.10).

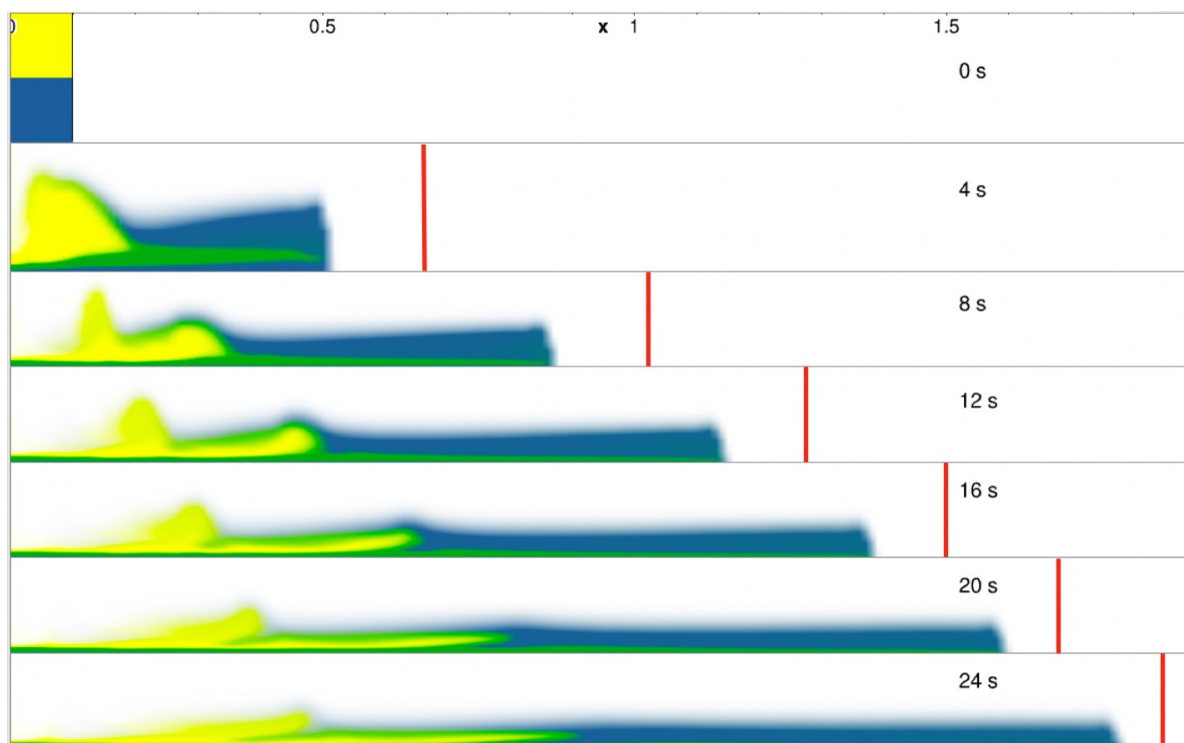


Рисунок 3.10 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте В25 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев

Вычислительная модель хорошо воспроизводит общую структуру и характер движения потока при существенной разнице в плотностях слоев жидкости. Как и в эксперименте, нижний, более плотный слой формирует устойчивый фронт, практически без перемешивания с верхним.

В то же время расчётные данные демонстрируют количественные расхождения с экспериментальными результатами. Наиболее вероятная причина заключается в различии начальных условий, а именно — в способе открытия перегородки, разделяющей жидкости. В эксперименте удаление перегородки вызывает короткий, но интенсивный вертикальный импульс, способствующий отделению нижнего слоя от верхнего. В численной модели такое взаимодействие не учитывается явно, и небольшая часть верхнего слоя успевает смешаться с нижним. Это проявляется в присутствии красителя верхнего слоя (зелёного) вблизи фронта распространения на расчётных графиках (рис. 3.10).

Эксперимент В26.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 1009.6 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1018.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (рис. 3.11).

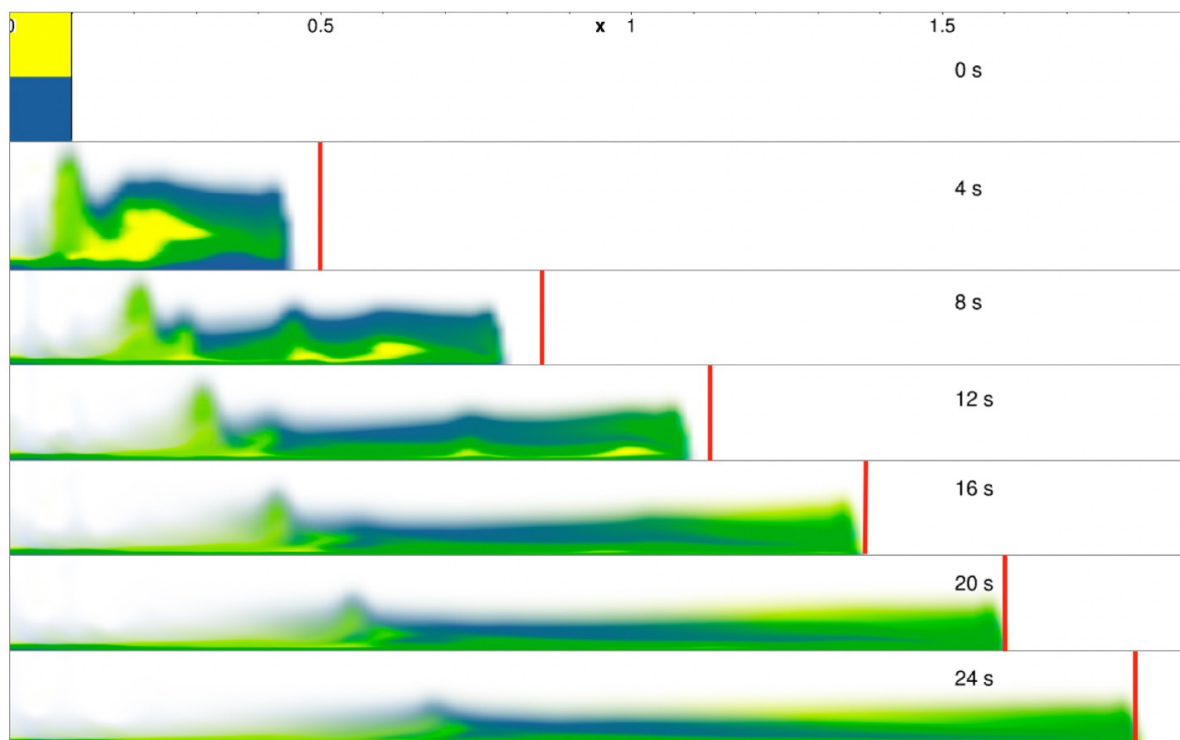


Рисунок 3.11 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте В26 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев

Вычислительная модель демонстрирует способность успешно воспроизводить характер движений в условиях незначительной разницы в плотностях слоев жидкости. При таком сценарии происходит быстрое смешение слоев, и они продолжают движение как однородная жидкость.

Таблица 1 — Начальные данные экспериментов серии В, задействованных в построении графиков

№	ρ_C	ρ_L	ρ_U	h_L/H
B1	1070.7	1078.1	1063.3	0.5
B2	1070.7	1085.7	1055.9	0.5
B5	1070.7	1108.8	1034.0	0.5
B8	1070.7	1131.9	1012.5	0.5
B9	1070.7	1139.8	1005.3	0.5
B10	1070.7	1070.7	1070.7	0.5

На основе расчетов серии В было построено несколько графиков, связанных с распространением фронта жидкости. Таблица 1 содержит начальные данные используемых экспериментов данной серии.

Графики, представленные на рис. 3.12, отражают зависимость от времени скорости фронта U , масштабированной длины придонного потока $L^{*3/2}$, и величины L/X , где $X(t)$ - длина растекания однородной жидкости (B10).

На первых двух графиках (рис. 3.12) выполнено сравнение характера движения жидкостей с разной степенью стратификации: B10 – однородная жидкость, B2 – слабо стратифицированная жидкость, B8 – сильно стратифицированная жидкость.

Не взирая на степень стратификации жидкости, численная модель достаточно точно повторяет характер движения, показанный в эксперименте [1], и не противоречит теории для однородного потока (3.19). Так, например, отклонение от линейной зависимости $L^{*3/2}(t^*)$ для сильно стратифицированной жидкости (эксперимент B8), объясняется тем, что нижний слой в начальный момент времени вырывается вперед за счет большей разницы плотностей с пресной водой. И, следовательно, самостоятельно формирует фронт распространения, поток быстро истончается и трение играет большую роль в процессе.

На графике 3.12в прослеживается аналогичная зависимость характера движения для различных степеней стратификации. Сильно стратифицированные жидкости (конфигурации B5, B9) на начальном этапе распространяются быстрее, чем однородная солёная жидкость, однако по мере истончения слоя начинают замедляться из-за возрастающего влияния силы трения. В то же время слабо стратифицированная жидкость демонстрирует динамику, практически совпадающую с движением однородной жидкости. Таким образом, полученные

данные служат дополнительным подтверждением корректности численной модели при моделировании течений с различной степенью стратификации.

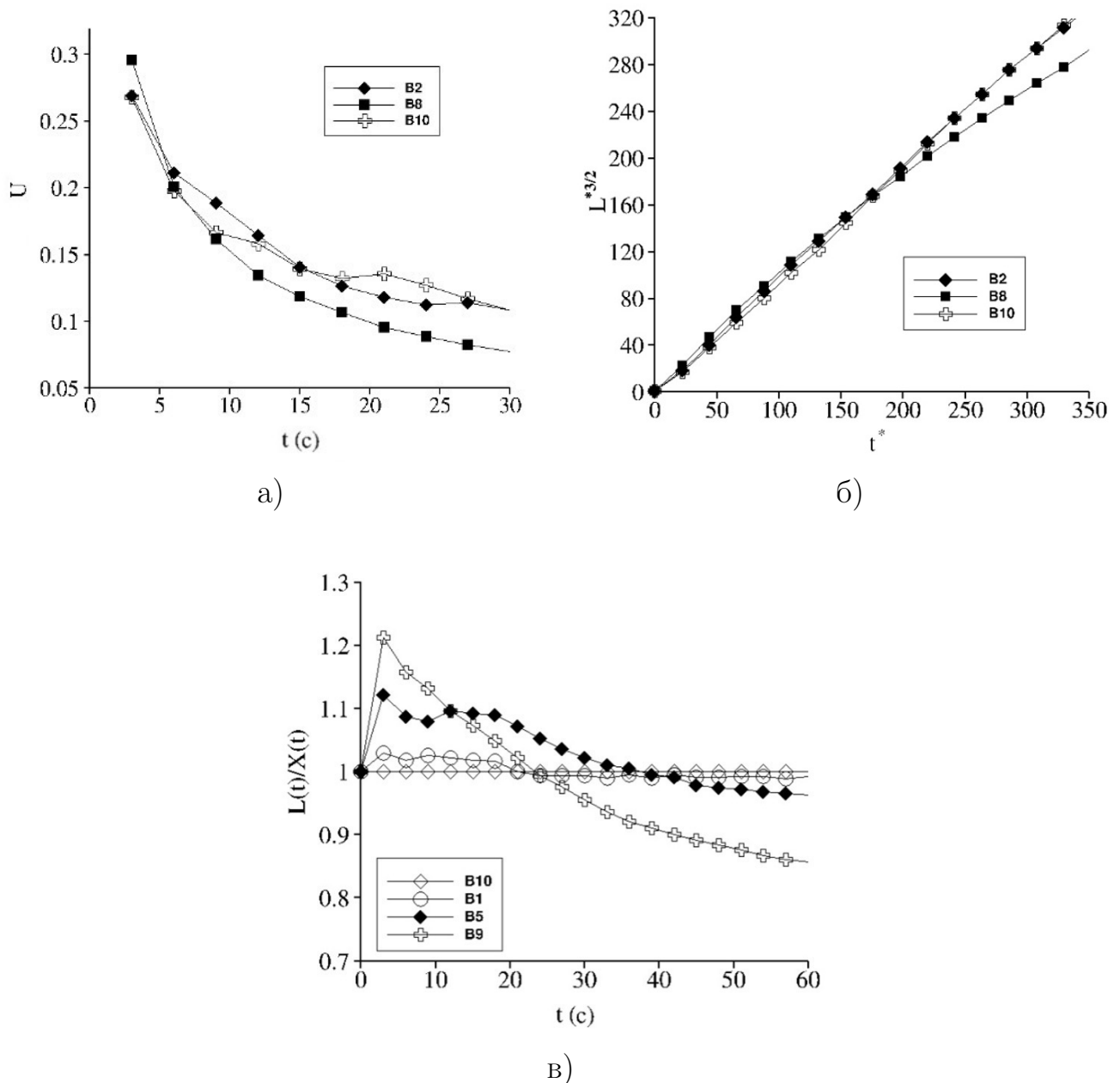


Рисунок 3.12 — а) Скорость фронта, б) безразмерное расстояние $L^{3/2}(t^*)$ и в) положение фронта нормированное на расстояние, пройденное его однородным аналогом, стратифицированного потока расчетов по схеме КАБАРЕ экспериментов серии В

Серия С.

Эта часть исследования была проведена для изучения динамики распространения стратифицированных течений, где верхний слой содержит большую массу соли, и соответственно, имеет более высокую плавучесть, чем нижний

слой. То есть серия С является противоположной конфигурацией по сравнению с серией В, и имело целью понять, как меняется взаимодействие между слоями и общая динамика потока при обратном соотношении плавающих.

Все эксперименты в рамках этой серии были организованы так, чтобы общая масса соли в закрытой части бака оставалась постоянной. Кроме того, для удобства визуализации и расчетов, соленые жидкости разной плотности окрашивались разными цветами: желтым красителем верхний слой и синим - нижний. Эти цветовые маркеры также использовались в численных моделях, чтобы точно отследить динамику жидкости.

Эксперимент С1.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 1013.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1017.5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, высота нижнего слоя $h_L = 0.2 \cdot H = 0.04$ м (рис. 3.13).

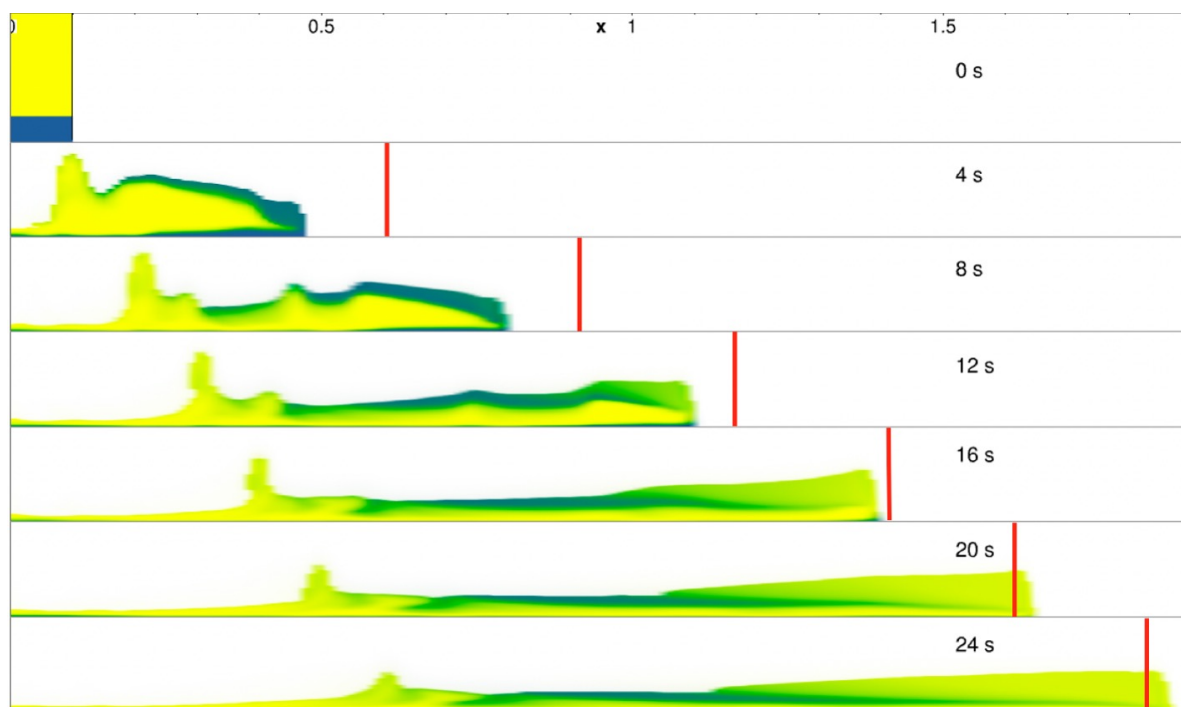


Рисунок 3.13 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте С1 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев

Эксперимент С4.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 1008.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1034.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, высота нижнего слоя $h_L = 0.2 \cdot H = 0.04$ м (рис. 3.14).

Приведенные численные расчёты по двум экспериментам с двухслойной жидкостью воспроизводят характерные особенности наблюдаемой динамики. В

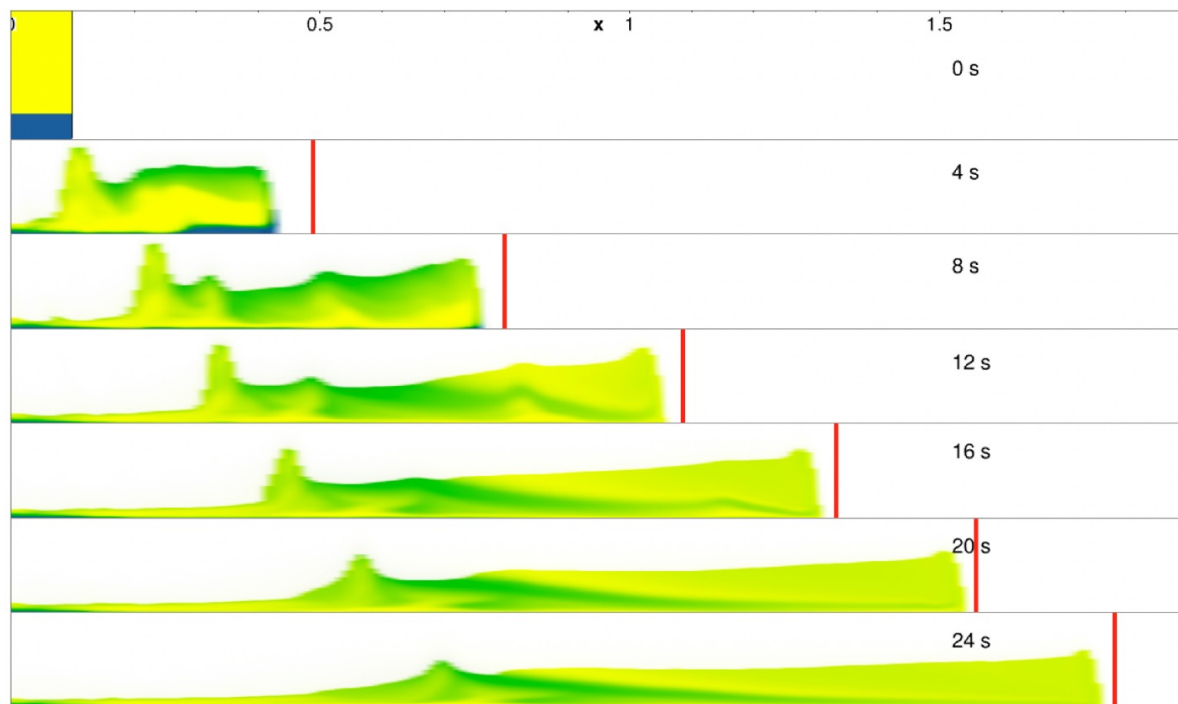


Рисунок 3.14 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте С4 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев

начале процесса нижний слой, обладающий большей плотностью, инициирует движение, формируя фронт потока. Однако из-за его относительной тонкости верхний слой достаточно быстро догоняет нижний, после чего происходит перемешивание, и поток начинает вести себя как однородный. Степень плотностного контраста между слоями оказывает решающее влияние как на механизм сближения верхнего слоя с фронтом, так и на уровень межслоевого смешивания.

Численная модель адекватно отражает основные динамические особенности, зафиксированные в экспериментах. Тем не менее, на начальной стадии фронт, формируемый в расчётах, отстаёт от экспериментального. Это расхождение, вероятно, связано с отсутствием учета специфического механизма удаления перегородки.

Рис. 3.15 сравнивает траектории безразмерной величины $L^*(t^*)$ - положение фронта придонного потока для приведенных выше экспериментов С1 и С4. Данные численного моделирования согласуются с экспериментальными, что свидетельствует о хорошем воспроизведении моделью особенностей исследуемых в этой серии тестов. А именно, что хотя в эксперименте С4 сильная начальная стратификация, но нижний слой изначально тонкий. Таким образом,

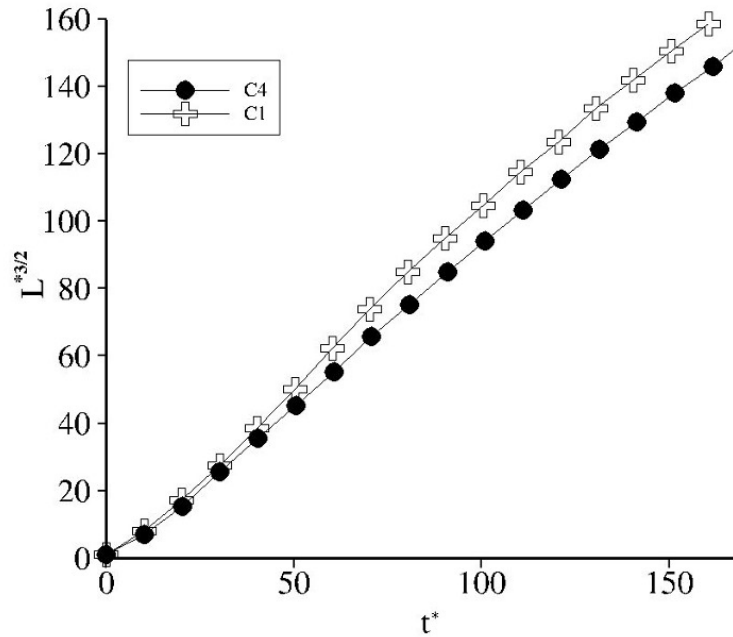


Рисунок 3.15 — Обезразмеренное расстояние, пройденное придонным потоком соленой жидкости, для расчетов по схеме КАБАРЕ экспериментов серии С

момент перемешивания наступает быстро. Следовательно, трение не вызывает замедления потока.

Серия D.

Предыдущие серии экспериментов определили, что двухслойные потоки могут разъединяться или смешиваться в зависимости от распределения плотности, то есть массы соли между слоями. Этот подход был распространен на трехслойные стратифицированные по плотности жидкости. Во всех тестах этой серии толщины каждого слоя составляли $\frac{2}{30}$ м, т.е. общая толщина 0.2 м делится на 3 равные части. Плотность жидкостей варьировалась при сохранении постоянной массы жидкости в меньшей части бака. В опытах в верхний, средний и нижний соленые слои добавляли красители красного, желтого и синего цветов соответственно. Аналогично, в расчетах в начальный момент времени верхний слой содержал только красный маркер, средний — желтый, а нижний — синий.

Эксперимент D1.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность среднего слоя $\rho_M = 1005.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1044.9 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (рис. 3.16).

В первом эксперименте серии D (рис. 3.16) наблюдается выраженный контраст плотности между нижним и двумя верхними слоями. В момент начала движения эта разница плотности приводит к тому, что именно нижний, более

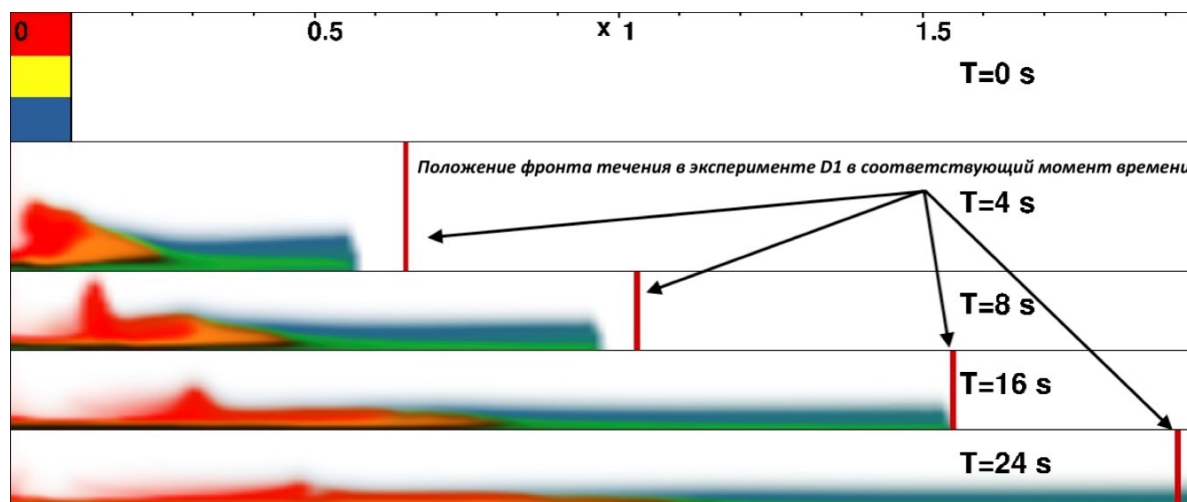


Рисунок 3.16 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте D1 в разное время (4с, 8с, 16с, 24с). Слои были окрашены в красный, желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев

плотный слой инициирует распространение, формируя фронт потока практически без участия верхних слоёв.

Два верхних слоя, которые имели близкие плотности, быстро перемешиваются между собой, создавая тонкий клин, который внедряется в течение нижнего слоя. Это наблюдение подтверждает, что в жидкостях с близкими плотностями процесс смешивания происходит значительно быстрее.

Все описанные этапы взаимодействия слоев повторяются в численном расчете. Например, к моменту времени $T = 4\text{с}$ (рис. 3.16) желтого цвета уже нет. Вместо этого можно увидеть оранжевый цвет (смесь желтого и красного цветов). Это демонстрирует, как два верхних слоя, представленных различными цветами, смешались в процессе эксперимента.

Однако стоит отметить, что в начале численного расчета нижний слой смешивается с небольшой частью среднего слоя. Также смесь двух верхних слоев менее активно внедряется в нижний слой. Данное отличие может быть связано с различиями механизмов открывания шлюза. В эксперименте выдергивание перегородки было более плавным и приводило к возникновению вертикальных скоростей на граничных участках жидкости. В численном расчете, наоборот, перегородка снималась мгновенно. Очевидно, что это различие в методах может влиять на динамику перемешивания слоев и на их взаимодействие во время течения.

Эксперимент D2.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 1001.8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность среднего слоя $\rho_M = 1023.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1026.8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (рис. 3.17).

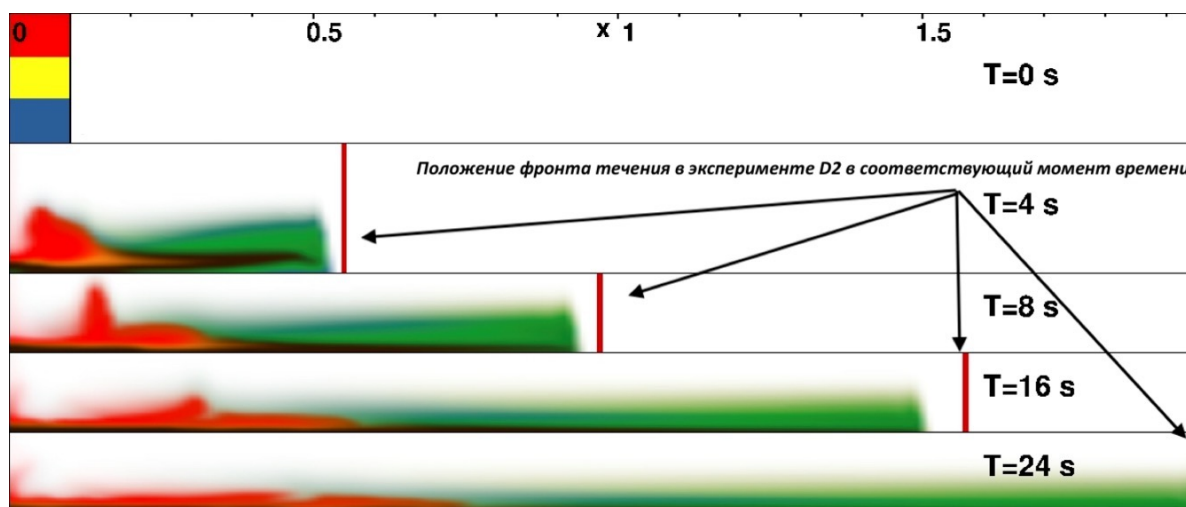


Рисунок 3.17 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте D2 в разное время (4с, 8с, 16с, 24с). Слои были окрашены в красный, желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев

Во втором эксперименте используется конфигурация, где плотности двух нижних слоев были близки и значительно отличались от плотности верхнего слоя. Это отличает его от первого эксперимента (D1), где нижний слой имел самую высокую плотность, что вызывало его быстрое движение вперед и формирование фронта единолично.

К моменту времени $T = 4$ секунды два нижних слоя почти полностью перемешиваются, а верхний слой отстает, образуя тонкий клин. В численном расчете (рис. 3.17), начиная с 4 секунд, фронт формируется жидкостью зеленого цвета, что является результатом смешения желтого и синего цветов, представляющих два нижних слоя. Это подтверждает быстрое и полное смешивание этих слоев. В моменты времени $T = 16$ секунды и $T = 24$ секунды длина клина верхнего слоя в расчете меньше, чем в эксперименте. Опять же, это может быть объяснено различиями в механизмах открывания шлюза.

Эксперимент D3.

Плотность верхнего слоя $\rho_U = 1012.5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность среднего слоя $\rho_M = 1016.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность нижнего слоя $\rho_L = 1023.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (рис. 3.18).

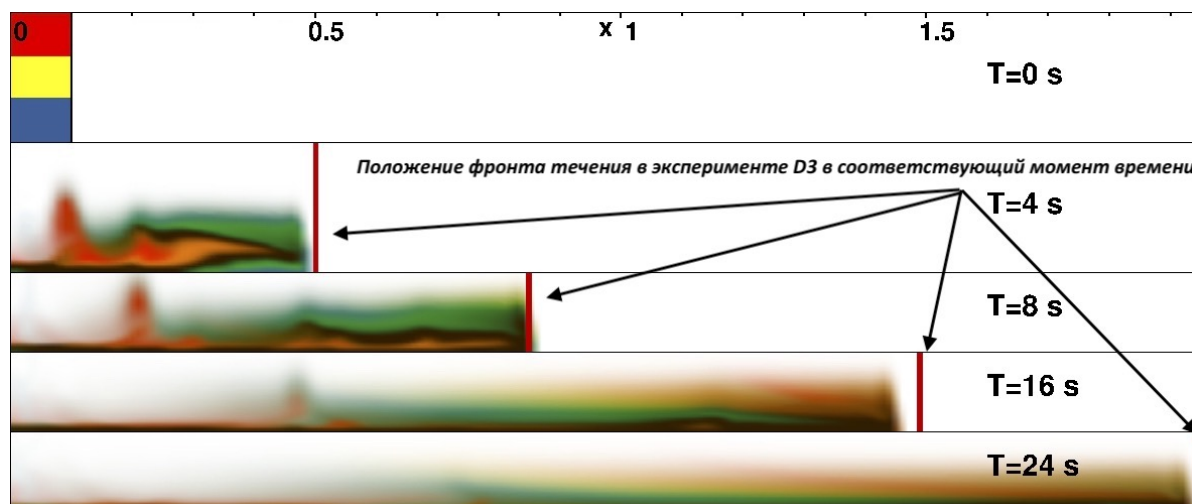


Рисунок 3.18 — Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте D3 в разное время (4с, 8с, 16с, 24с). Слои были окрашены в красный, желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев

В третьем и заключительном эксперименте серии D реализован сценарий, в котором плотности всех трех слоев были схожими. Это отличает его по сравнению с предыдущими экспериментами D1 и D2, где были более выраженные различия в плотности между слоями.

В момент времени $T = 4$ секунды средний слой клином рассекает нижний слой. В этом можно заметить сходство с предыдущим экспериментом D2, где нижние слои были близки по плотности и быстро перемешивались. Затем, к моменту времени $T = 8$ секунд, верхний слой вклинивается в смесь нижних слоев зеленого цвета. Затем весь поток тщательно перемешивается.

В проведенном численном расчёте (рис. 3.18) наблюдается похожая динамика: все три слоя быстро перемешиваются, как и в эксперименте. Важно отметить, что в моменты времени $T = 4$ с и $T = 8$ с клинья, которые образуются при взаимодействии слоев, схожи с наблюдаемыми в эксперименте. Это говорит о точности численного моделирования при условиях взаимодействия слоев со схожими плотностями.

Анализ результатов показывает, что в течение первых 8 секунд каждого из тестов, разработанная вычислительная модель достаточно точно повторяет положение фронта придонного потока. Сравнение с фотографиями, приведенными в те же моменты времени в статье [1], также свидетельствует об адекватности структуры течения.

Однако на результаты расчета для моментов времени 16 и 24 секунды, изображенных на двух нижних строках рис. 3.16 - рис. 3.18, заметно существенное расхождение с экспериментальными данными. Согласно статье [1], красные сегменты соответствуют 12 и 16 секундам.

Такое резкое несоответствие может быть объяснено ошибкой, которую, по-видимому, допустили в статье. Исходя из расчетных данных, есть все основания полагать, что представленные в статье фотографии на самом деле соответствуют моментам времени 16 и 24 секунды, а не 12 и 16, как указано в исходном источнике. Последующие расчеты на сгущающихся сетках (3.23) подтверждают это предположение.

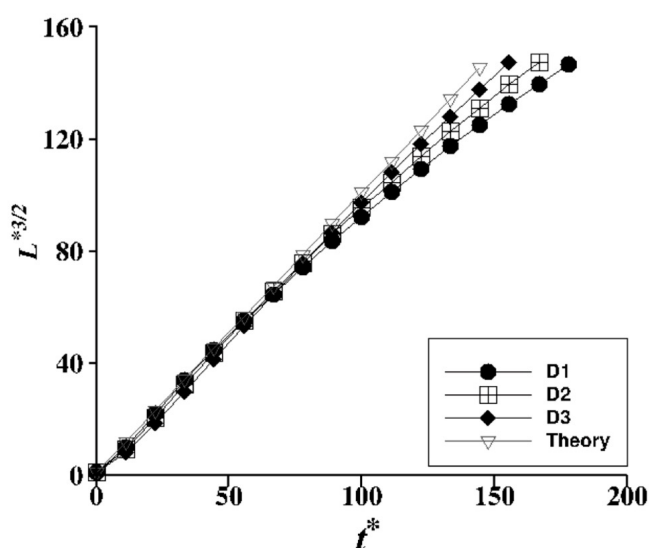


Рисунок 3.19 — Сравнение безразмерного расстояния $L^{*3/2}(t^*)$, пройденного фронтом потока, в расчетах по схеме КАБАРЕ экспериментов серии D (метки D1, D2, D3) и теоретической зависимостью величины однородного солевого течения от времени (метка "теория")

На основе расчетов серии D и теоретической зависимости (3.19), построен график $L^{*3/2}(t^*)$. Безразмерные графики расстояние-время (рис. 3.19) согласуются с теоретическими выводами статьи [1]. Согласно этим выводам, сопротивление играет большую роль в замедлении потока там, где велик контраст плотности между нижним и верхним слоями.

На рис. 3.20 показан график изменения во времени кинетической, свободной потенциальной и полной энергий при расчете эксперимента D1. За нулевую точку отсчета принимается минимально возможная потенциальная энергия од-

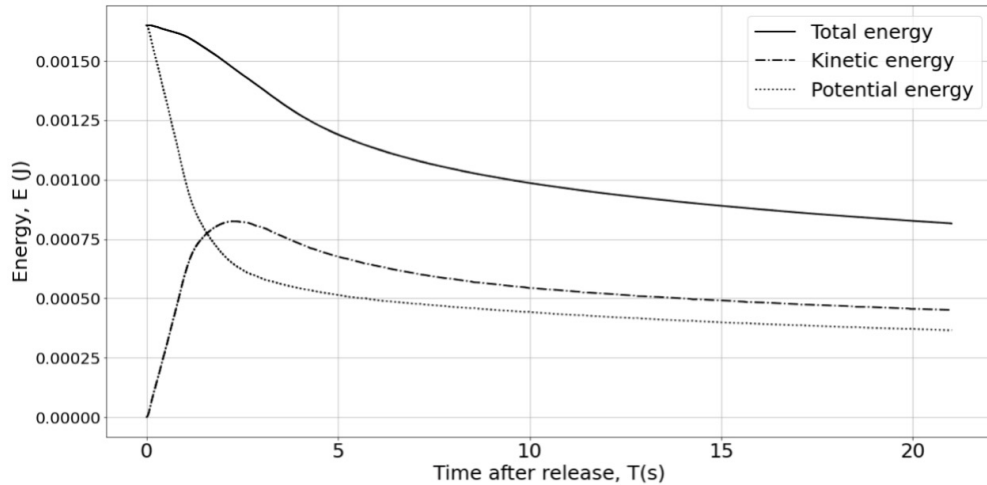


Рисунок 3.20 — Полная, кинетическая и потенциальная энергии расчета опыта D1 по схеме КАБАРЕ на сетке 300x50

нородной стратифицированной по длине бака жидкости. Полная энергия рассчитывается как сумма потенциальной и кинетической энергий.

В ходе расчета кинетическая энергия сначала увеличивается от нуля до половины начальной полной (потенциальной) энергии, а затем постепенно уменьшается до одной трети. К концу расчета остается только половина полной энергии.

Поскольку в математической модели отсутствуют сила придонного трения и турбулентная вязкость, полная энергия теряется за счет численной диссипации. Она имеет три источника. Первый источник формируется в процессе монотонизации схемы КАБАРЕ за счет нелинейной коррекции потока по принципу максимума.

Второй источник связан с интерполяцией консервативных переменных в процессе перестройки расчетной сетки. Величина числовой диссипации в этом случае зависит от порядка аппроксимации алгоритма, частоты и «глубины» перестройки сетки.

Третий источник численной диссипации — фильтрация потоковых переменных, которую необходимо дополнительно вводить для обеспечения корректности гидростатического приближения. Его значение зависит от параметров фильтрации.

На рис. 3.21 представлены зависимости потери полной энергии от времени для различных фильтрационных параметров скорости потока и толщины слоя $\sigma_h = \sigma_u$, при фиксированном значении параметра фильтрации составляющей

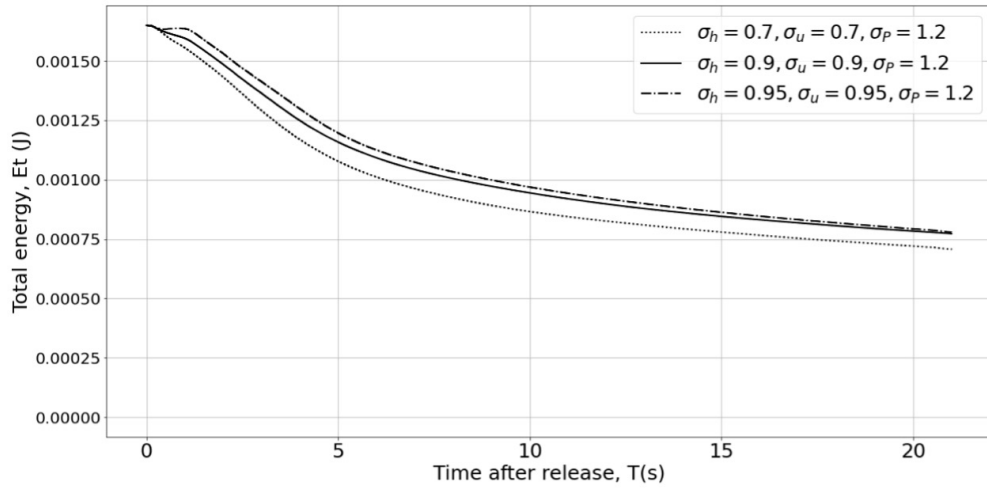


Рисунок 3.21 — Изменение полной энергии расчета эксперимента D1 по схеме КАБАРЕ при различных параметрах фильтра переменных потока на сетке 300x50

потока, связанной с давлением, $\sigma_p = 1.2$. Чем ближе параметр фильтрации (3.13) к единице, тем меньшему сглаживанию подвергается соответствующая величина. Если $\sigma_h = \sigma_u = 1$, то фильтрации нет, сглаживания не происходит и расчет становится невозможным из-за появления неустойчивости.

Из рис. 3.21 видно, что чем ближе параметры фильтрации $\sigma_h = \sigma_u$ к единице, тем выше лежит соответствующий график и сеточная диссипация оказывается меньше.

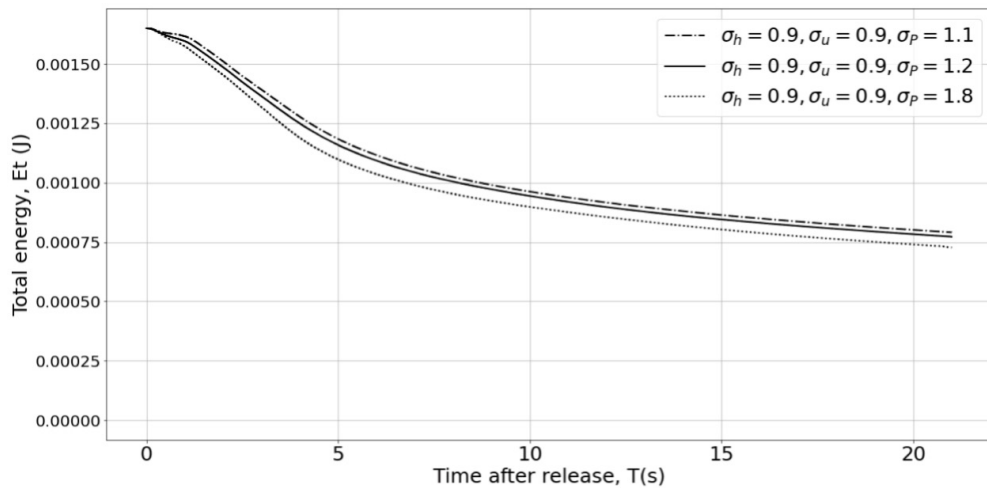


Рисунок 3.22 — Изменение полной энергии расчета эксперимента D1 по схеме КАБАРЕ при различных параметрах фильтрации части потока, связанного с давлением, на сетке 300x50

Расчеты показывают, что при использовании $\sigma_p < 1$ развивается неустойчивость свободной границы. Верификационные расчеты показали, что много-

слойная гидростатическая модель CABARET-MFSH устойчива при коэффициентах фильтрации давления больше единицы. На рис. 3.22 показана зависимость полной энергии от значения σ_p при фиксированных параметрах $\sigma_h = \sigma_u = 0.9$: по мере приближения σ_p к единице величина сеточной диссипации снижается.

Таким образом фильтрация потоковых переменных и части потока, связанного с давлением, важна для обеспечения корректности гидростатического приближения, но ее вклад в диссипацию незначителен.

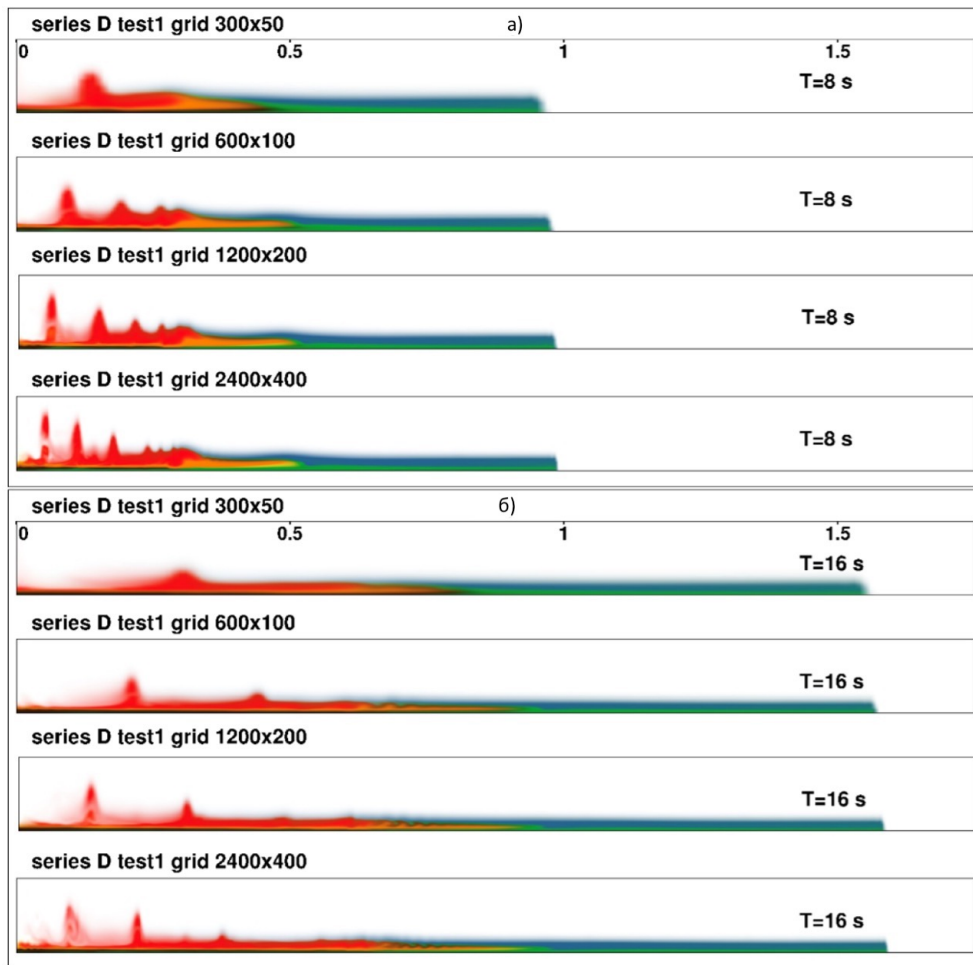


Рисунок 3.23 — Расчет по схеме КАБАРЕ эксперимента D1 на разных сетках (300x50, 600x100, 1200x200, 2400x400) в моменты времени: а) $T=8$ с, б) $T=16$ с

Поскольку различия в поведении полной энергии при $\sigma_u, \sigma_h = 0.9, 0.95$ и при $\sigma_p = 1.1, 1.2$ не существенны, то для большей робастности алгоритма были выбраны оптимальными параметры $\sigma_h = \sigma_u = 0.9, \sigma_p = 1.2$. При данных параметрах фильтрации расчеты эксперимента D1 проводились на серии сеток с возрастающим разрешением (300x50, 600x100, 1200x200, 2400x400) (рис. 3.23).

Результаты расчета приводятся на два момента времени. Видно, что имеет место сходимость по сетке. Это подтверждается и графиком полной энергии (рис. 3.24) на той же серии сеток.

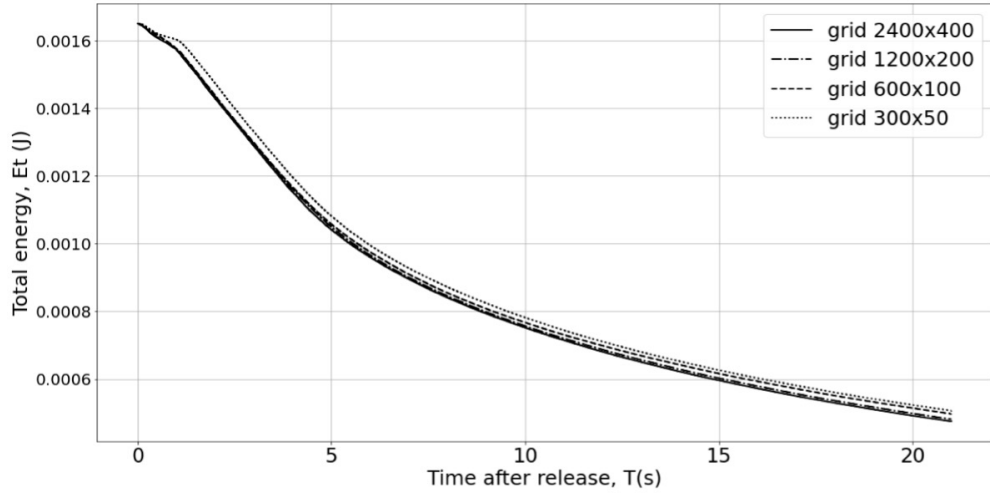


Рисунок 3.24 — Изменение полной энергии расчета эксперимента D1 по схеме КАБАРЕ на сетках с возрастающим разрешением(300x50, 600x100, 1200x200, 2400x400)

3.7 Валидация модели CABARET-MFSH на задаче интрузивного течения

Интрузивные течения представляют собой распространение струи жидкости промежуточной плотности вдоль границы раздела в стратифицированной среде. В рамках настоящей работы эта задача использовалась как один из валидационных тестов для модели CABARET-MFSH. Целью численного расчёта является воспроизведение основных характеристик лабораторного эксперимента Sutherland [2].

Экспериментальная установка представляет собой резервуар(рис. 3.25), разделённый перегородкой на две части: одна содержит двухслойную жидкость с плотностями ρ_0 и ρ_1 , другая — жидкость промежуточной плотности ρ_l , удовлетворяющей неравенству $\rho_0 < \rho_l < \rho_1$. После снятия перегородки жидкость плотности ρ_l начинает распространяться вдоль границы между слоями. В рам-

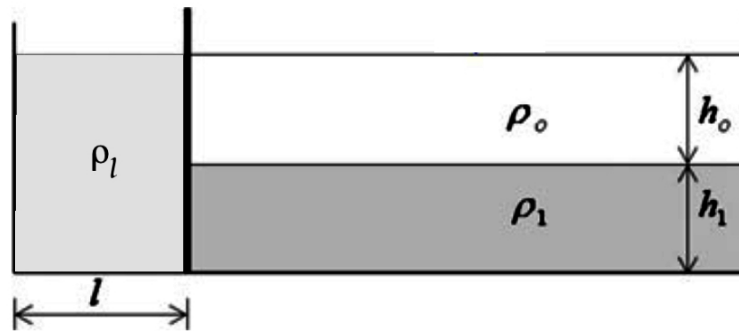


Рисунок 3.25 — Параметры экспериментальной установки лабораторных экспериментов

ках эксперимента выполнен цифровой анализ изображений, позволяющий количественно оценить характеристики возникающих волн.

Были произведены численные расчёты данного эксперимента с использованием моделей CABARET-MFSH и явной негидростатической модели динамики жидкости CABARET-NH [101], а также выполнено сравнение полученных результатов на различных моментах времени (рис. 3.26) при $\rho_l = (\rho_o + \rho_1)/2$.

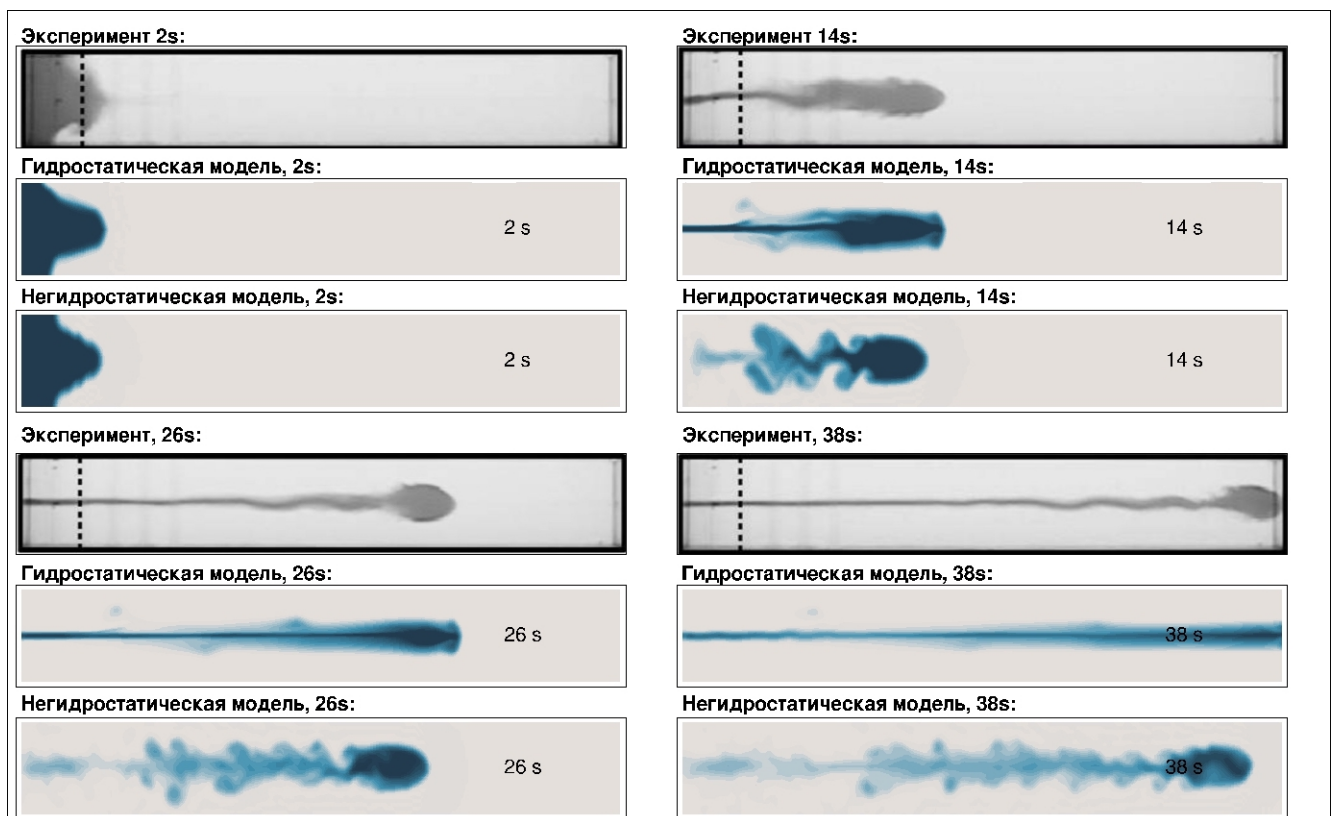


Рисунок 3.26 — Сравнение результатов численных моделей CABARET-MFSH и CABARET-NH с экспериментальными данными на разные моменты времени (2с, 14с, 26с, 38с)

Анализ показывает, что гидростатическая модель CABARET-MFSH воспроизводит положение и форму фронта струи ближе к экспериментальным данным. Уже на раннем этапе (2с) и особенно на более поздних стадиях (14- 38с) видно, что фронт распространения струи в расчётах по CABARET-MFSH совпадает с экспериментом как по скорости продвижения, так и по длине струи. В то же время негидростатическая модель CABARET-NH демонстрирует преждевременное торможение фронта и его недостаточное продвижение вперёд.

С другой стороны, в расчётах по негидростатической модели CABARET-NH заметно развитие вихревой структуры в области за фронтом струи, особенно на промежуточных этапах (14–26с). Это связано с тем, что негидростатическая модель учитывает вертикальные ускорения, позволяя описывать локальные неустойчивости и колебания внутри потока. В то время как гидростатическая модель таких деталей не воспроизводит, её решение оказывается более сглаженным. Хотя такие особенности могут быть важны при изучении турбулентности или начального смешивания, для воспроизведения основных характеристик струи — положения и формы фронта — гидростатическое приближение демонстрирует более стабильные и близкие к эксперименту результаты.

Глава 4. Многослойная гидростатическая модель CABARET-MFSH в трехмерной постановке

Данная глава посвящена обобщению многослойной гидростатической модели CABARET-MFSH на случай трех пространственных переменных. Особое внимание уделяется характеристической форме решаемых уравнений. Она используется в схеме КАБАРЕ для нахождения локальных инвариантов Римана. Полученные локальные инварианты для каждого из направлений позволяют говорить о сохранении свойства сбалансированности численного алгоритма в случае трех пространственных переменных.

Двумерные гравитационные течения подробно изучены в ряде экспериментальных и теоретических работ [1; 2; 4; 102—104]. Существенно меньше внимания в литературе уделено трёхмерным течениям, включая осесимметричные случаи [105; 106], которые, тем не менее, могут быть адекватно описаны с использованием модели CABARET-MFSH в двумерной постановке. В данной главе представлена валидация модели на основе лабораторного эксперимента, обладающего выраженной трёхмерной структурой [3]. Сопоставление результатов моделирования с экспериментальными наблюдениями продемонстрировало достаточно точное совпадение, подтверждающее применимость модели CABARET-MFSH для воспроизведения трёхмерной динамики стратифицированных течений.

4.1 Уравнения многослойной мелкой воды в случае трех пространственных координат

Систему уравнений многослойной мелкой воды с переменной плотностью без обмена массой и импульсом между слоями можно представить в виде суммы однослойных уравнений, связанных друг с другом силами давления и реакции, действующими на их границах раздела. Три пространственные переменные означают, что есть два горизонтальных направления (ось x и ось y) и вертикальное направление (ось z), по которым происходит разделение на слои:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial(hu)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial(hv)_{k+1/2}}{\partial y} = 0, \\
& \frac{\partial(\rho h)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho hu)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial(\rho hv)_{k+1/2}}{\partial y} = 0, \\
& \frac{\partial(\rho hu)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho hu^2)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial(\rho huv)_{k+1/2}}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial(\rho h^2)_{k+1/2}}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial(hP)_{k+1/2}}{\partial x} = P_k \frac{\partial Z_k}{\partial x} - P_{k+1} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x}, \\
& \frac{\partial(\rho hv)_{k+1/2}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho hv^2)_{k+1/2}}{\partial y} + \frac{\partial(\rho huv)_{k+1/2}}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial(\rho h^2)_{k+1/2}}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial(hP)_{k+1/2}}{\partial y} = P_k \frac{\partial Z_k}{\partial y} - P_{k+1} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial y},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $k = 0, \dots, N-1$ - номер слоя, отсчитываемый от свободной поверхности, $h_{k+1/2} = Z_k - Z_{k+1}$, $u_{k+1/2}$, $v_{k+1/2}$, $\rho_{k+1/2}$ - толщина, горизонтальные скорости и плотность k -го слоя, Z_0, Z_N - координаты свободной поверхности и дна, Z_k - координата раздела двух слоев k и $k+1$, $P_0 = P_T$ - внешнее давление на свободную поверхность Z_0 , $P_{k+1} = P_k + g(\rho h)_{k+1/2}$ - гидростатическое давление на уровне Z_{k+1} и $P_{k+1/2} = (P_k + P_{k+1})/2$.

Балансно-характеристические методы требуют знания характеристической формы системы уравнений. Характеристическая форма уравнений записывается относительно некоторого направления. В данном случае их два по осям x и y . Рассмотрим направление x и применим алгоритм гиперболического разложения. Простая форма системы (4.1) получается путем применения правила производной произведения к членам левых частей уравнений и приведения подобных слагаемых между получившимися уравнениями:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + h_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial u_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial h_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} = G_{k+\frac{1}{2}}^1, \\
& \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} = G_{k+\frac{1}{2}}^2, \\
& \frac{\partial u_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial u_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{P_{k+1}}{(\rho h)_{k+\frac{1}{2}}} \frac{\partial h_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} + \left(\frac{gh}{2\rho} \right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} = G_{k+\frac{1}{2}}^3, \\
& \frac{\partial v_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial v_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} = G_{k+\frac{1}{2}}^4,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{k+\frac{1}{2}}^1 &= -\frac{\partial(hv)_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y}, \\
G_{k+\frac{1}{2}}^2 &= -\frac{1}{\rho_{k+\frac{1}{2}}} \frac{\partial(\rho hv)_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y}, \\
G_{k+\frac{1}{2}}^3 &= -\frac{1}{(\rho h)_{k+\frac{1}{2}}} \left[h_{k+\frac{1}{2}} \frac{P_k}{\partial x} + P_k \frac{\partial Z_k}{\partial x} - P_{k+1} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h v)_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right], \\
G_{k+\frac{1}{2}}^4 &= -\frac{1}{(\rho h)_{k+\frac{1}{2}}} \left[(\rho h v)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial v_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y} + \frac{g}{2} \frac{\partial(\rho h^2)_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y} + \frac{\partial(hP)_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y} + P_k \frac{\partial Z_k}{\partial y} - P_{k+1} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial y} \right].
\end{aligned}$$

Или в векторной записи:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{\varphi}_{k+1/2}}{\partial t} + A_{k+1/2} \frac{\partial \vec{\varphi}_{k+1/2}}{\partial x} = \vec{G}_{k+1/2}, \\
\text{где } A_{k+1/2} &= \begin{pmatrix} u_{k+1/2} & 0 & h_{k+1/2} & 0 \\ 0 & u_{k+1/2} & 0 & 0 \\ P_{k+1}/(\rho h)_{k+1/2} & (gh/2\rho)_{k+1/2} & u_{k+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{k+1/2} \end{pmatrix}, \\
\vec{\varphi} &= \begin{pmatrix} h \\ \rho \\ u \\ v \end{pmatrix}, \vec{G} = \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \\ G^3 \\ G^4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для полученной матрицы k -го слоя $A_{k+1/2}$ собственные значения действительны:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,k+1/2} &= (u+c)_{k+1/2}, \lambda_{2,k+1/2} = (u-c)_{k+1/2}, c_{k+1/2} = \sqrt{P_{k+1}/\rho_{k+1/2}}, \\
\lambda_{3,k+1/2} &= \lambda_{4,k+1/2} = u_{k+1/2}
\end{aligned}$$

Это приводит к системе независимых характеристических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+1/2} + (u+c)_{k+1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+1/2} = D_{k+1/2}^1, \\
& \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+1/2} + (u-c)_{k+1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+1/2} = D_{k+1/2}^2, \\
& \frac{\partial \rho_{k+1/2}}{\partial t} + u_{k+1/2} \frac{\partial \rho_{k+1/2}}{\partial x} = D_{k+1/2}^3, \\
& \frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial t} + u_{k+1/2} \frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial x} = D_{k+1/2}^4.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Характеристический вид уравнений используется в схеме КАБАРЕ для нахождения локальных инвариантов Римана. Аналогично двумерному случаю, описанному в предыдущей главе, для построения численного алгоритма со свойством сбалансированности система уравнений (4.2) преобразуется с помощью выражений $h_{k+1/2} = Z_k - Z_{k+1}, Z_k = Z_{U,k+1/2}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial t} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u+c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial x} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} = Q_{x,k+\frac{1}{2}}^1, \\
& \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial t} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (u-c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial x} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{k+\frac{1}{2}} = Q_{x,k+\frac{1}{2}}^2, \\
& \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} = Q_{x,k+\frac{1}{2}}^3, \\
& \frac{\partial v_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial v_{k+\frac{1}{2}}}{\partial x} = Q_{x,k+\frac{1}{2}}^4,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{x,k+\frac{1}{2}}^1 &= D_{k+\frac{1}{2}}^1 + \left(\frac{c}{h} \right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial t} + \left[(u+c) \frac{c}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x}, \\
Q_{x,k+\frac{1}{2}}^2 &= D_{k+\frac{1}{2}}^2 - \left(\frac{c}{h} \right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial t} - \left[(u-c) \frac{c}{h} \right]_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial x}, \\
Q_{x,k+\frac{1}{2}}^3 &= D_{k+\frac{1}{2}}^3, \quad Q_{x,k+\frac{1}{2}}^4 = D_{k+\frac{1}{2}}^4.
\end{aligned}$$

Точно так же может быть получена характеристическая форма для второго направления:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial t} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (v+c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial y} + \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_{k+\frac{1}{2}} = Q_{y,k+\frac{1}{2}}^1, \\
& \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial t} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{k+\frac{1}{2}} + (v-c)_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{c}{h} \frac{\partial Z_U}{\partial y} - \frac{gh}{2\rho c} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_{k+\frac{1}{2}} = Q_{y,k+\frac{1}{2}}^2, \\
& \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + v_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y} = Q_{y,k+\frac{1}{2}}^3, \\
& \frac{\partial u_{k+\frac{1}{2}}}{\partial t} + v_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial u_{k+\frac{1}{2}}}{\partial y} = Q_{y,k+\frac{1}{2}}^4.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где правые части выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{y,k+\frac{1}{2}}^1 &= D_{k+\frac{1}{2}}^1 + \left(\frac{c}{h}\right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial t} + \left[(u+c)\frac{c}{h}\right]_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial y}, \\ Q_{y,k+\frac{1}{2}}^2 &= D_{k+\frac{1}{2}}^2 - \left(\frac{c}{h}\right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial t} - \left[(u-c)\frac{c}{h}\right]_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial y}, \\ Q_{y,k+\frac{1}{2}}^3 &= D_{k+\frac{1}{2}}^3, \quad Q_{y,k+\frac{1}{2}}^4 = D_{k+\frac{1}{2}}^4. \end{aligned}$$

4.2 Численный алгоритм в случае трех пространственных переменных

Введем в области $G = \{l_{1x} \leq x \leq l_{2x}, l_{1y} \leq y \leq l_{2y}, 0 \leq t \leq T\}$ равномерную сетку Ω :

$$\Omega = \begin{cases} x_i : x_{i+1} - x_i = h_x > 0; x_0 = l_{1x}; x_{N_x} = l_{2x}; i = \overline{0, N_x - 1} \\ y_j : y_{j+1} - y_j = h_y > 0; y_0 = l_{1y}; y_{N_y} = l_{2y}; j = \overline{0, N_y - 1} \\ t^n : t^{n+1} - t^n = \tau > 0; t^0 = 0; t^K = T; n = \overline{0, K - 1} \end{cases}$$

В схеме КАБАРЕ используется два типа переменных: потоковые и консервативные [37]. Потоковые переменные относятся к серединам вертикальных граней расчетных ячеек, консервативные – к их центрам. Потоковые переменные, относящиеся к слою с номером $k + \frac{1}{2}$, будем обозначать как $f_{i,j+1/2}^{k+1/2}, f_{i+1/2,j}^{k+1/2}$, и консервативные переменные как $f_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2}$. На каждом вычислительном шаге используются три временных слоя: текущий t_n , следующий $t_{n+1} = t_n + \tau$ и промежуточный $t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. Переменные, относящиеся к слою t_{n+1} ниже по тексту, будут снабжены верхней крышкой (например, $\hat{\rho}_i^{k+1/2}$), чтобы обозначить промежуточный слой $t_{n+1/2}$ - тильда (например, $\tilde{\rho}_i^{k+1/2}$).

Первая фаза

На первой фазе вычисляются значения консервативных переменных на промежуточном временном слое из аппроксимации системы уравнений (4.1). Рассмотрение случая трех пространственных переменных приводит к громоздкости формул. Введем дополнительные обозначения $f_{i+1/2,j+1/2} = f_c, f_{i+1/2,j} = f_B, f_{i+1/2,j+1} = f_F, f_{i,j+1/2} = f_L, f_{i+1,j+1/2} = f_R, f^k = f^U, f^{k+1} = f^D, f^{k+1/2} = f$, которые улучшают восприятие формул.

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{h}_c - h_c}{\tau/2} + \frac{(hu)_R - (hu)_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(hv)_F - (hv)_B}{\Delta y_{j+1/2}} = 0, \\
& \frac{\tilde{\rho} \tilde{h}_c - \rho h_c}{\tau/2} + \frac{(\rho hu)_R - (\rho hu)_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\rho hv)_F - (\rho hv)_B}{\Delta y_{j+1/2}} = 0, \\
& \frac{(\tilde{\rho} \tilde{h} \tilde{u})_c - (\rho hu)_c}{\tau/2} + \frac{(\rho hu^2)_R - (\rho hu^2)_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\rho huv)_F - (\rho huv)_B}{\Delta y_{j+1/2}} + \\
& + \frac{(hP)_R - (hP)_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{P_R^D + P_L^D}{2} \frac{Z_R^D - Z_L^D}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{P_R^U + P_L^U}{2} \frac{Z_R^U - Z_L^U}{\Delta x_{i+1/2}} = 0 \\
& \frac{(\tilde{\rho} \tilde{h} \tilde{v})_c - (\rho hv)_c}{\tau/2} + \frac{(\rho hv^2)_F - (\rho hv^2)_B}{\Delta y_{j+1/2}} + \frac{(\rho huv)_R - (\rho huv)_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \\
& + \frac{(hP)_F - (hP)_B}{\Delta y_{j+1/2}} + \frac{P_F^D + P_B^D}{2} \frac{Z_F^D - Z_B^D}{\Delta y_{j+1/2}} - \frac{P_F^U + P_B^U}{2} \frac{Z_F^U - Z_B^U}{\Delta y_{j+1/2}} = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где $P_Q^D = P_Q^U + g(\rho h)_Q$, $P_Q = (P_Q^U + P_Q^D)/2$, $Q = \{L, R, B, F\}$.

Вторая фаза

На второй фазе схемы КАБАРЕ вычисляются значения потоковых переменных на новом временном слое. Для этого используем процедуру экстраполяции локальных инвариантов по каждому направлению в пределах пространственно-временных расчетных ячеек. Согласно уравнениям (4.3) и (4.4), инварианты переносимые по двум направлениям имеют вид:

$$\begin{aligned}
I_1^x &= u + \tilde{G}_c Z^U + \tilde{D}_c \rho, & I_1^y &= v + \tilde{G}_c Z^U + \tilde{D}_c \rho, \\
I_2^x &= u - \tilde{G}_c Z^U - \tilde{D}_c \rho, & I_2^y &= v - \tilde{G}_c Z^U - \tilde{D}_c \rho, \\
I_3^x &= \rho, & I_3^y &= \rho, \\
I_4^x &= v, & I_4^y &= u,
\end{aligned}$$

где $\tilde{G}_c = \left(\frac{\tilde{c}}{\tilde{h}}\right)_c$, $\tilde{D}_c = \frac{g}{2} \left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{\rho} \tilde{c}}\right)_c$, $c = \sqrt{P^D/\rho_c}$.

Заметим, что первые три инварианта каждого направления эквивалентны инвариантам 2D-версии схемы CABARET-MFSH, а четвертый — перенос составляющей скорости перпендикулярно направлению. Подробное описание второго этапа можно найти в предыдущих главах. Приведем только формулы для получения переменных потока из инвариантов на новом временном слое. Направление вдоль оси X:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{i,j+1/2}^{k+1/2} &= \frac{[(\hat{I}_1^x)_{i,j+1/2}^{k+1/2} - \tilde{D}_1 \hat{\rho}_{i,j+1/2}^{k+1/2}] \tilde{G}_2 + [(\hat{I}_2^x)_{i,j+1/2}^{k+1/2} + \tilde{D}_2 \hat{\rho}_{i,j+1/2}^{k+1/2}] \tilde{G}_1}{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2} \\
\hat{Z}_{i,j+1/2}^k &= \frac{[(\hat{I}_1^x)_{i,j+1/2}^{k+1/2} - \tilde{D}_1 \hat{\rho}_{i,j+1/2}^{k+1/2}] - [(\hat{I}_2^x)_{i,j+1/2}^{k+1/2} + \tilde{D}_2 \hat{\rho}_{i,j+1/2}^{k+1/2}]}{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2} \\
\hat{\rho}_{i,j+1/2}^{k+1/2} &= \left(\hat{I}_3^x\right)_{i,j+1/2}^{k+1/2} \\
\hat{v}_{i,j+1/2}^{k+1/2} &= \left(\hat{I}_4^x\right)_{i,j+1/2}^{k+1/2}
\end{aligned}$$

Направление вдоль оси Y:

$$\begin{aligned}\hat{v}_{i+1/2,j}^{k+1/2} &= \frac{\left[(\hat{I}_1^y)_{i+1/2,j}^{k+1/2} - \tilde{D}_1 \hat{\rho}_{i+1/2,j}^{k+1/2}\right] \tilde{G}_2 + \left[(\hat{I}_2^y)_{i+1/2,j}^{k+1/2} + \tilde{D}_2 \hat{\rho}_{i+1/2,j}^{k+1/2}\right] \tilde{G}_1}{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2} \\ \hat{Z}_{i+1/2,j}^k &= \frac{\left[(\hat{I}_1^y)_{i+1/2,j}^{k+1/2} - \tilde{D}_1 \hat{\rho}_{i+1/2,j}^{k+1/2}\right] - \left[(\hat{I}_2^y)_{i+1/2,j}^{k+1/2} + \tilde{D}_2 \hat{\rho}_{i+1/2,j}^{k+1/2}\right]}{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2} \\ \hat{\rho}_{i+1/2,j}^{k+1/2} &= \left(\hat{I}_3^y\right)_{i+1/2,j}^{k+1/2} \\ \hat{u}_{i+1/2,j}^{k+1/2} &= \left(\hat{I}_4^y\right)_{i+1/2,j}^{k+1/2}\end{aligned}$$

Затем вычисляем $\hat{h}_{i,j+1/2}^{k+1/2} = \hat{Z}_{i,j+1/2}^k - \hat{Z}_{i,j+1/2}^{k+1}$ и $\hat{h}_{i+1/2,j}^{k+1/2} = \hat{Z}_{i+1/2,j}^k - \hat{Z}_{i+1/2,j}^{k+1}$.

Третья фаза

На третьей фазе вычисляются значения консервативных переменных на новом временном слое из аппроксимации системы уравнений (4.1).

$$\begin{aligned}& \frac{\hat{h}_c - \tilde{h}_c}{\tau/2} + \frac{(\hat{h}\hat{u})_R - (\hat{h}\hat{u})_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\hat{h}\hat{v})_F - (\hat{h}\hat{v})_B}{\Delta y_{j+1/2}} = 0, \\& \frac{\hat{\rho}\hat{h}_c - \tilde{\rho}\tilde{h}_c}{\tau/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})_R - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{v})_F - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{v})_B}{\Delta y_{j+1/2}} = 0, \\& \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})_c - (\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{u})_c}{\tau/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}^2)_R - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}^2)_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}\hat{v})_F - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}\hat{v})_B}{\Delta y_{j+1/2}} + \\& + \frac{(\hat{h}\hat{P})_R - (\hat{h}\hat{P})_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\hat{P}_R^D + \hat{P}_L^D}{2} \frac{\hat{Z}_R^D - \hat{Z}_L^D}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{\hat{P}_R^U + \hat{P}_L^U}{2} \frac{\hat{Z}_R^U - \hat{Z}_L^U}{\Delta x_{i+1/2}} = 0, \\& \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{v})_c - (\tilde{\rho}\tilde{h}\tilde{v})_c}{\tau/2} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{v}^2)_F - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{v}^2)_B}{\Delta y_{j+1/2}} + \frac{(\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}\hat{v})_R - (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u}\hat{v})_L}{\Delta x_{i+1/2}} + \\& + \frac{(\hat{h}\hat{P})_F - (\hat{h}\hat{P})_B}{\Delta y_{j+1/2}} + \frac{\hat{P}_F^D + \hat{P}_B^D}{2} \frac{\hat{Z}_F^D - \hat{Z}_B^D}{\Delta y_{j+1/2}} - \frac{\hat{P}_F^U + \hat{P}_B^U}{2} \frac{\hat{Z}_F^U - \hat{Z}_B^U}{\Delta y_{j+1/2}} = 0\end{aligned} \tag{4.6}$$

Методы регуляризации задачи

Алгоритм гиперболической декомпозиции, как было показано выше, позволил получить представление исходной матрицы в виде произведения матриц 4x4, собственные значения каждой из которых легко вычисляются и всегда оказываются действительными числами. Некорректность полной системы при этом не исчезнет и будет проявляться в высокочастотном искажении границ. Для регуляризации задачи применяются хорошо зарекомендовавшие себя в двумерной постановке методы: процедура сглаживания границ разделов слоев и процедура фильтрации.

Процедура сглаживания границы раздела запускает механизм обмена массой и импульсом между слоями. Перестройка сетки проводится после вычисления консервативных переменных на промежуточном временном слое в фазе 1, и второй раз – после фазы 3.

Потоки находятся из условия, что плотность и горизонтальные скорости являются линейными функциями на отрезке, соединяющем середины соседних слоев. Рассмотрим ячейки двух смежных слоев (с индексами D- нижний слой, U-верхний слой). Обозначим через $\Delta z = h_D - h_{D,required}$ изменение границы между слоями, $\Delta x, \Delta y$ - горизонтальные размеры этих ячеек, $\Delta m, \Delta p_x, \Delta p_y$ - изменение массы и двух компонент импульса слоев. Получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Delta m &= \rho_D \Delta z \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} (h_D + \Delta z) \frac{\rho_U - \rho_D}{(h_U + h_D)/2} \Delta z \Delta x \Delta y, \\ \Delta p_x &= \rho_D u_D \Delta z \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} (h_D + \Delta z) \frac{\rho_U u_U - \rho_D u_D}{(h_U + h_D)/2} \Delta z \Delta x \Delta y, \\ \Delta p_y &= \rho_D v_D \Delta z \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} (h_D + \Delta z) \frac{\rho_U v_U - \rho_D v_D}{(h_U + h_D)/2} \Delta z \Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

Новые значения плотностей и скоростей слоев вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\rho_U^{new} &= \frac{\rho_U h_U \Delta x \Delta y + \Delta m}{h_{U,required} \Delta x \Delta y}, & \rho_D^{new} &= \frac{\rho_D h_D \Delta x \Delta y - \Delta m}{h_{D,required} \Delta x \Delta y}, \\ u_U^{new} &= \frac{\rho_U h_U u_U \Delta x \Delta y + \Delta p_x}{\rho_U^{new} h_{U,required} \Delta x \Delta y}, & u_D^{new} &= \frac{\rho_D h_D u_D \Delta x \Delta y - \Delta p_x}{\rho_D^{new} h_{D,required} \Delta x \Delta y}, \\ v_U^{new} &= \frac{\rho_U h_U v_U \Delta x \Delta y + \Delta p_y}{\rho_U^{new} h_{U,required} \Delta x \Delta y}, & v_D^{new} &= \frac{\rho_D h_D v_D \Delta x \Delta y - \Delta p_y}{\rho_D^{new} h_{D,required} \Delta x \Delta y},\end{aligned}$$

Пересчет консервативных переменных на других слоях осуществляется аналогично, от нижних слоев к верхним.

После фазы 2 применяется фильтрация потоковых переменных, гасящая высокочастотную составляющую решения (представлены формулы для направления вдоль оси X):

$$\begin{aligned}\hat{u}_i^{k+1/2} &\Leftarrow \sigma_u \hat{u}_i^{k+1/2} + (1 - \sigma_u) \frac{\hat{u}_{i-1}^{k+1/2} + \hat{u}_{i+1}^{k+1/2}}{2}, \\ \hat{\rho}_i^{k+1/2} &\Leftarrow \sigma_\rho \hat{\rho}_i^{k+1/2} + (1 - \sigma_\rho) \frac{\hat{\rho}_{i-1}^{k+1/2} + \hat{\rho}_{i+1}^{k+1/2}}{2}, \\ (\delta h)_i^{k+1/2} &\Leftarrow \sigma_h (\delta h)_i^{k+1/2} + (1 - \sigma_h) \frac{(\delta h)_{i-1}^{k+1/2} + (\delta h)_{i+1}^{k+1/2}}{2},\end{aligned}$$

где $(\delta h) = \hat{h} - h$ и $\sigma_u, \sigma_\rho, \sigma_h \in [0, 1]$.

Кроме того, в фазе 1 (4.5) и фазе 3 (4.6) применяется фильтрация составляющей потока, связанной с давлением $(hP)_{i,j+1/2}$ и $(hP)_{i+1/2,j}$ с параметром $\sigma_P \in [1, 2]$.

$$\begin{aligned}(hP)_{i,j+1/2}^{new} &\Leftarrow \sigma_P (hP)_{i,j+1/2} + (1 - \sigma_P) \frac{(hP)_{i-1,j+1/2} + (hP)_{i+1,j+1/2}}{2}, \\ (hP)_{i+1/2,j}^{new} &\Leftarrow \sigma_P (hP)_{i+1/2,j} + (1 - \sigma_P) \frac{(hP)_{i+1/2,j-1} + (hP)_{i+1/2,j+1}}{2}.\end{aligned}$$

Шаг интегрирования по времени

Из условия устойчивости [45] схемы КАБАРЕ для каждого слоя, получаем формулу шага по времени:

$$\tau = CFL \cdot \min_{i,j,k} \left\{ \frac{\Delta x_{i+1/2}}{c_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} + |u|_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2}}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{c_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} + |v|_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2}} \right\},$$

где $CFL \leq 1$ - число Куранта-Фридрихса-Леви.

4.3 Численное моделирование трехмерных течений жидкости с переменной плотностью

Для валидации 3D-версии модели CABARET-MFSH была выбрана серия экспериментов, описанных в статье La Rossa M. b et al. [3]. Лабораторная установка (рис. 4.1) состоит из прямоугольного резервуара, разделенного перегородкой на две части квадратного сечения со стороной $L = 1$ м. Два резервуара заполнены на одинаковую высоту $h = 0.15$ м, один пресной водой ($\rho_2 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$), а другой соленой водой ($\rho_1 > \rho_2$). Перегородка содержит откатные ворота шириной $b = 0.2$ м.

Рассматривались два эксперимента с гладкой поверхностью дна, отличающиеся плотностью солевого раствора. В первом эксперименте плотность соленой воды $\rho_1 = 1015 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, во втором $\rho_1 = 1025 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Расчеты лабораторных тестов проводились на сетке 200×100 с 30 вертикальными слоями. Параметры фильтрации были взяты те же, что и при моделировании лабораторных экспериментов, описывающих двумерные гравитационные течения ($\sigma_u = \sigma_h = 0.9, \sigma_P = 1.2$).

После удаления скользящей перегородки начинает происходить взаимодействие жидкостей с различной плотностью, инициируя развитие гравитационного потока. Этот процесс представляет собой важный этап динамики двух жидкостей разной плотности и имеет существенное значение для понимания физических процессов их взаимодействия.

На рис. 4.2 представлена трехмерная визуализация, отражающая результаты работы модели CABARET-MFSH для каждого из экспериментов в момент

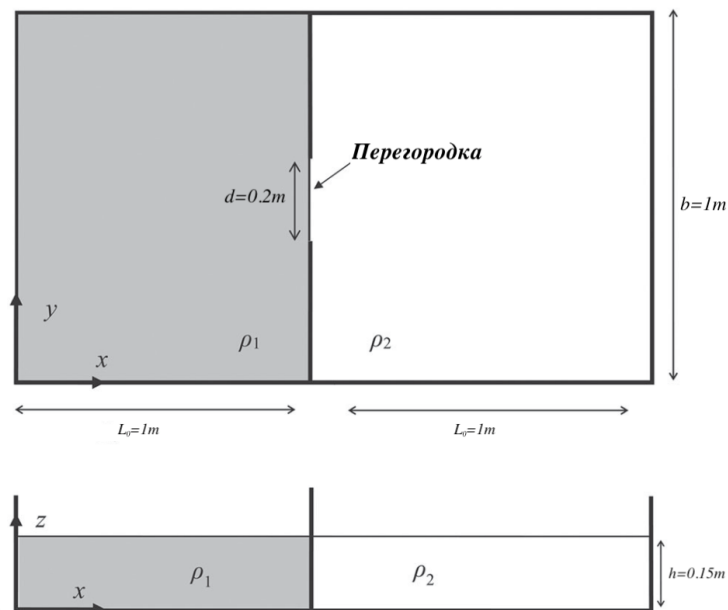


Рисунок 4.1 — Лабораторная установка для исследования трехмерных течений жидкости с переменной плотностью, вид сверху и сбоку

времени $t = 8$ секунд. Эта визуализация демонстрирует детальное представление о взаимодействии жидкостей внутри исследуемой области.

Для наглядной демонстрации распределения плотности в процессе течения были выбраны три характерные изоповерхности, соответствующие различным уровням плотности. Первая из них близка к плотности пресной воды и

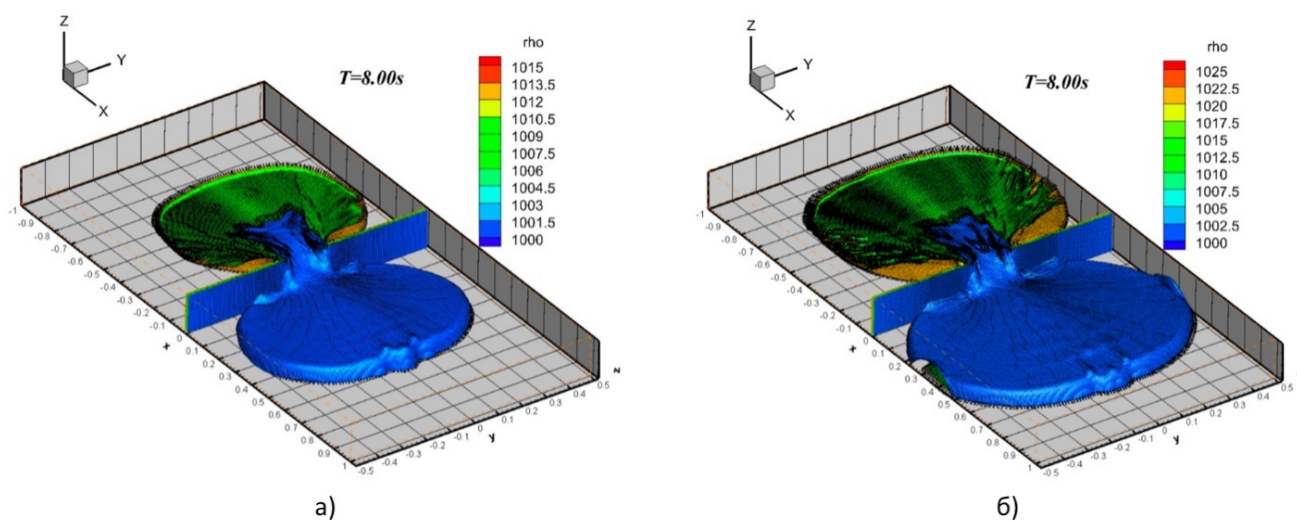


Рисунок 4.2 — Результаты расчетов по модели CABARET-MFSH а) первого и б) второго экспериментов на момент времени $t=8$ с

позволяет проследить границу между пресной и солёной компонентами потока. Вторая соответствует промежуточному значению плотности, отражая поведение слоя смешения. Третья изоповерхность соответствует начальному значению плотности в левом резервуаре ρ_1 и позволяет отследить распространение исходной массы жидкости в стратифицированной среде.

Векторы скорости, отмеченные стрелками на этих изоповерхностях, позволяют визуальнo оценить направление и скорость движения жидкостей в каждой из трех зон. Это позволяет не только наглядно отслеживать процесс, но и сравнивать динамику изменения скорости в разных слоях.

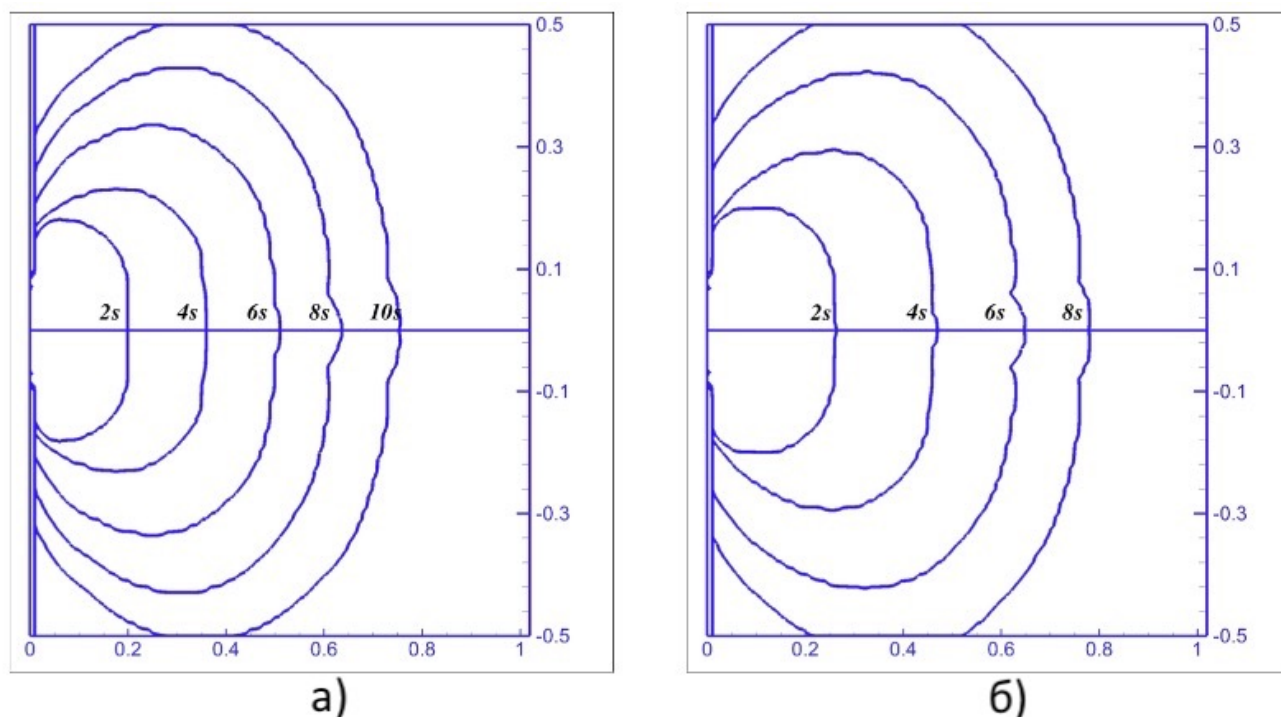


Рисунок 4.3 — Положение фронта потока из расчетов по модели CABARET-MFSH а) первого и б) второго экспериментов в разные моменты времени (2с, 4с, 6с, 8с, 10с)

На рис. 4.3 показано положение фронта потока в разное время. В качестве инструмента для визуализации данного процесса была построена изоповерхность с плотностью, слегка превосходящей плотность пресной воды ($\rho = 1000.18 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$). Это позволяет четко проследить границу распространения соленой жидкости. Для более ясного отображения положения фронта потока, точки изоповерхности были проецированы на плоскость $z = 0$, после чего был выделен контур получившейся проекции. Это позволило наглядно изобразить положение фронта потока в разные моменты времени.

С целью детального анализа процесса распространения соленой жидкости в правом резервуаре для каждого из проведенных тестов были составлены графики максимального распространения фронта в двух направлениях - по оси x и оси y (рис. 4.4). Эти графики характеризуют ширину растекания соленой жидкости и помогают оценить скорость и направление этого процесса. Для первого эксперимента данные о положении фронта потока были предоставлены только до момента времени $t = 8$ секунд [3]. Это объясняет отсутствие на графиках точки, соответствующей 10 секундам.

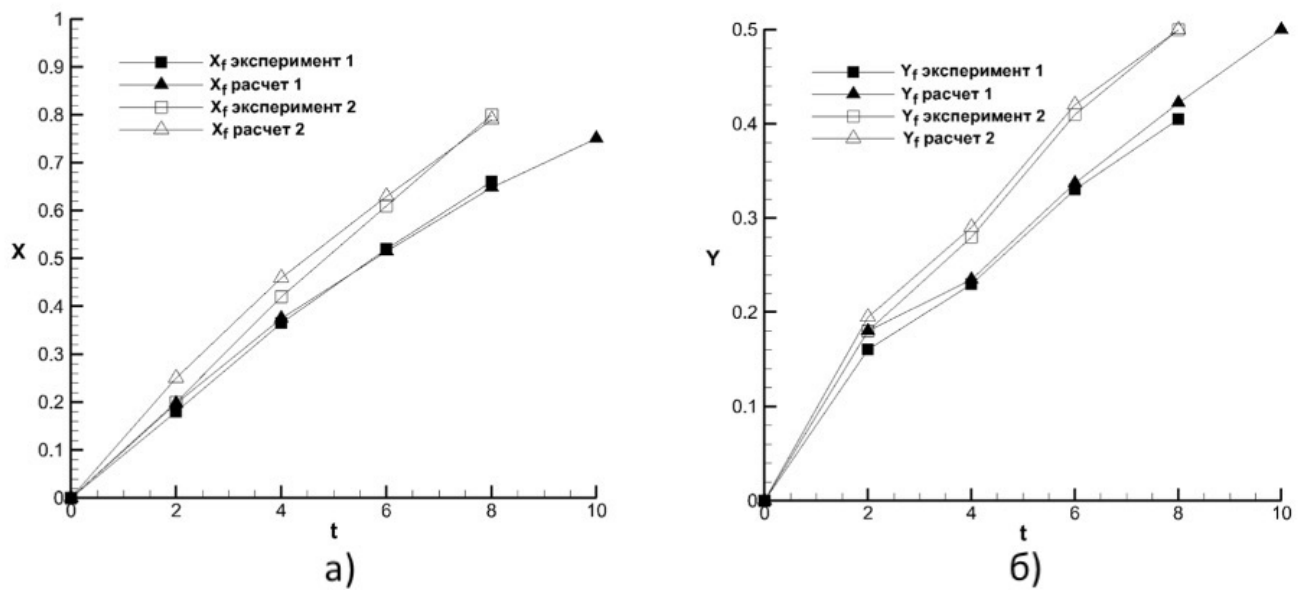


Рисунок 4.4 — Максимальное распространение фронта а) по оси x и б) по оси y в расчетах по CABARET-MFSH (треугольные метки) и экспериментах (квадратные метки)

По результатам проведенного анализа можно отметить хорошее соответствие данных, полученных с помощью численной модели, и в эксперименте. Небольшие расхождения на начальном этапе, скорее всего, связаны с тем, что в численной модели не было учтено плавное изъятие перегородки, которое имеет место в реальных экспериментах.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- (1) Построен численный алгоритм на основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ для решения системы уравнений мелкой воды с переменной плотностью, описывающей движение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью над неровным дном. Алгоритм обладает свойством сбалансированности. Проведено моделирование приливных течений в Белом море с использованием реальной батиметрии.
- (2) Разработан балансно-характеристический алгоритм для системы уравнений двухслойной мелкой воды, включающий аналитическое нахождение собственных чисел характеристической матрицы. Проведено сравнение с существующими алгоритмами на ряде тестовых задач, включая случаи потери гиперболичности, соответствующей физическим условиям возникновения неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.
- (3) Предложена математическая модель динамики стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении. Разработан балансно-характеристический метод решения данной модели и алгоритм регуляризации численного решения, учитывающий обмен массой и импульсом между слоями. Проведена валидация модели на серии лабораторных экспериментов по двумерным и трёхмерным гравитационным течениям. Полученные численные данные демонстрируют хорошую качественную и количественную согласованность с экспериментальными результатами.
- (4) Создан программный комплекс для прямого численного моделирования течений жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении, включающий модули построения расчетной сетки, подготовки и загрузки начальных данных, численного решения задач и формирования выходных данных.

Разработанный численный алгоритм CABARET-MFSH реализует многослойную гидростатическую модель с обменом массой и импульсом между сло-

ями. Одной из основных идей при построении алгоритма было добавление как можно меньшей численной вязкости при сохранении корректности расчёта и устойчивости схемы. В основе метода лежит гиперболическая декомпозиция, обеспечивающая аппроксимацию многослойной системы с помощью бездиссипативной схемы КАБАРЕ. Регуляризация достигается за счёт перестройки сетки и фильтрации потоковых переменных. Метод естественно обобщается на трёхмерный случай, что продемонстрировано в главе 4. Расширение модели, предусматривающее учёт сил Кориолиса, ветрового воздействия, донного трения и переноса примесей, является перспективным направлением дальнейших исследований.

Список сокращений и условных обозначений

TVD - Total Variation Diminishing

WENO - Weighted Essentially Non-Oscillary

MUSCL - Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws

CFL - число Куранта-Фридрихса-Леви

Список литературы

1. An experimental investigation of density-stratified inertial gravity currents / C. Gladstone [et al.] // *Sedimentology*. — 2004. — Vol. 51, no. 4. — P. 767–789.
2. *Sutherland B. R., Kyba P. J., Flynn M. R.* Intrusive gravity currents in two-layer fluids // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2004. — Vol. 514. — P. 327–353.
3. Experimental and numerical simulation of three-dimensional gravity currents on smooth and rough bottom / M. La Rocca [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2008. — Vol. 20, no. 10.
4. *Simpson J. E.* Gravity currents: In the environment and the laboratory. — Cambridge university press, 1999.
5. *Mulder T., Alexander J.* The physical character of subaqueous sedimentary density flows and their deposits // *Sedimentology*. — 2001. — Vol. 48, no. 2. — P. 269–299.
6. *Hopfinger E.* Snow avalanche motion and related phenomena // *Annual review of fluid mechanics*. — 1983. — Vol. 15, no. 1. — P. 47–76.
7. *Druitt T.* Pyroclastic density currents // *Geological Society, London, Special Publications*. — 1998. — Vol. 145, no. 1. — P. 145–182.
8. *Olsen N. R. B., Haun S.* Free surface algorithms for 3D numerical modelling of reservoir flushing // *River flow*. Vol. 2010. — 2010. — P. 1105–1110.
9. Numerical computation of three-dimensional circulation in Lake Erie: A comparison of a free-surface model and a rigid-lid model / Y. P. Sheng [et al.] // *Journal of Physical Oceanography*. — 1978. — Vol. 8, no. 4. — P. 713–727.
10. Controls on river delta formation; insights from numerical modelling / N. Geleynse [et al.] // *Earth and Planetary Science Letters*. — 2011. — Vol. 302, no. 1/2. — P. 217–226.

11. *Issakhov A., Alimbek A., Abylkassymova A.* Numerical modeling of water pollution by products of chemical reactions from the activities of industrial facilities at variable and constant temperatures of the environment // *Journal of Contaminant Hydrology*. — 2023. — Vol. 252. — P. 104116.
12. Simulation of the present-day climate with the climate model INMCM5 / E. Volodin [et al.] // *Climate dynamics*. — 2017. — Vol. 49, no. 11. — P. 3715–3734.
13. *Зеленько А., Реснянский Ю., Струков Б.* Оперативная океанология в Гидрометцентре России: состояние и перспективы // *Труды Государственного океанографического института*. — 2015. — № 216. — С. 157–171.
14. *Толстых М. А.* Глобальные модели атмосферы: современное состояние и перспективы развития // *Труды Гидрометцентра России*. — 2016. — Т. 359. — С. 5–33.
15. *Meacham J., Berloff P.* On clustering of floating tracers in random velocity fields // *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. — 2023. — Vol. 15, no. 5. — e2022MS003484.
16. *Lebreton L.-M., Greer S., Borrero J. C.* Numerical modelling of floating debris in the world's oceans // *Marine pollution bulletin*. — 2012. — Vol. 64, no. 3. — P. 653–661.
17. Оперативный анализ аварии на АЭС «Фукусима-1»(Япония) и прогнозирование ее последствий / Р. Арутюнян [и др.] // *Атомная энергия*. — 2012. — Т. 112, № 3. — С. 151–159.
18. *Gusev A., Diansky N.* Numerical simulation of the world ocean circulation and its climatic variability for 1948–2007 using the INMOM // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2014. — Vol. 50. — P. 1–12.
19. The model of oceanic and marine circulation INMOM: From origins to the present day / A. Gusev [и др.] // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2025. — Т. 61, № 3. — С. 311–324.
20. NEMO Ocean Engine Reference Manual / G. Madec [et al.]. — Version v4.2.1. — 07/2023.

21. Forecasting the ocean state using NEMO: The new FOAM system / D. Storkey [и др.] // Journal of operational oceanography. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 3–15.
22. MITgcm documentation / A. Adcroft [et al.] // Release checkpoint67a-12-gbf23121. — 2018. — Vol. 19.
23. Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. — Гидрометеиздат, 1987.
24. Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. — New York [etc.]: Springer, 1987.
25. Müller P. The equations of oceanic motions. — Cambridge University Press, 2006.
26. A splitting method for free surface flows over partially submerged obstacles / K. D. Nikitin [et al.] // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2018. — Vol. 33, no. 2. — P. 95–110.
27. Chorin A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // Mathematics of computation. — 1968. — Vol. 22, no. 104. — P. 745–762.
28. Abdolmaleki K., Thiagarajan K., Morris-Thomas M. Simulation of the dam break problem and impact flows using a Navier-Stokes solver // Simulation. — 2004. — Vol. 13. — P. 17.
29. An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data. / V. Agoshkov [et al.] // Russian Journal of Numerical Analysis & Mathematical Modelling. — 2007. — Vol. 22, no. 2.
30. Kurganov A., Petrova G. Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — P. 1742–1773.
31. Guerrero Fernandez E., Castro-Diaz M. J., Morales de Luna T. A second-order well-balanced finite volume scheme for the multilayer shallow water model with variable density // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 5. — P. 848.

32. *Olshanskii M. A., Terekhov K. M., Vassilevski Y. V.* An octree-based solver for the incompressible Navier–Stokes equations with enhanced stability and low dissipation // *Computers & Fluids*. — 2013. — Vol. 84. — P. 231–246.
33. *Matsumura Y., Hasumi H.* Brine-driven eddies under sea ice leads and their impact on the Arctic Ocean mixed layer // *Journal of Physical Oceanography*. — 2008. — Vol. 38, no. 1. — P. 146–163.
34. Океанологические модели негидростатической динамики: обзор / Н. Вольцингер [и др.] // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. — 2022. — Т. 11, № 1. — С. 3–20.
35. *Bourchtein A., Kadychnikov V.* Well posedness of the initial value problem for vertically discretized hydrostatic equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2003. — Vol. 41, no. 1. — P. 195–207.
36. *Zeytounian R. K.* Meteorological fluid dynamics: asymptotic modelling, stability and chaotic atmospheric motion. — Springer, 1991.
37. *Duchêne V.* A note on the well-posedness of the one-dimensional multilayer shallow water model. — 2013.
38. *Monjarret R.* Local well-posedness of the multi-layer shallow-water model with free surface // *arXiv preprint arXiv:1411.2342*. — 2014.
39. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — 1971.
40. *Смирнов Е., Зайцев Д.* Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // *Научно-технические ведомости СПбГТУ*. — 2004. — Т. 2, № 36. — С. 70–81.
41. *Ковеня В. М., Чирков Д. В.* Методы конечных разностей и конечных объёмов для решения задач математической физики. — Изд-во Новосибирского государственного университета, 2013. — С. 86.
42. *Бараннин В. Б., Бородкин Н. В.* TVD схема второго порядка аппроксимации на подвижной адаптивной сетке для гиперболических систем // *Сибирский журнал вычислительной математики*. — 2000. — Т. 3, № 2. — С. 109–121.

43. *Titarev V. A., Toro E. F.* Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws // Journal of Computational Physics. — 2004. — Vol. 201, no. 1. — P. 238–260.
44. A novel multislope MUSCL scheme for solving 2D shallow water equations on unstructured grids / H. Xu [et al.] // Water. — 2018. — Vol. 10, no. 4. — P. 524.
45. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. Головизнин [и др.]. — 2013.
46. *Соловьев А. В., Данилин А. В.* Использование схемы Диез повышенного порядка точности для решения некоторых нелинейных гиперболических систем уравнений // Вычислительные методы и программирование. — 2019. — Т. 20, № 1. — С. 45–53.
47. *Головизнин В. М., Карабасов С. А.* Балансно-характеристические схемы на кусочно-постоянных начальных данных. Прыжковый перенос // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 10. — С. 71–83.
48. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of computational physics. — 1997. — Vol. 135, no. 2. — P. 260–278.
49. *Асфандияров Д. Г.* Математическое моделирование турбулентного течения в плоском канале на основе схемы Кабаре // вычислительные методы и программирование. — 2019. — Т. 20, № 4. — С. 356–362.
50. *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. — Springer Science & Business Media, 2013.
51. *Goloviznin V., Solovjov A., Zalesny V.* A new algorithm for solving the shallow water equations on the sphere based on the cabaret scheme // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1128. — IOP Publishing. 2018. — P. 012091.
52. *Afanasiev N., Goloviznin V.* A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations // Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 434. — P. 110220.
53. *Kurganov A., Tadmor E.* New high-resolution semi-discrete central schemes for Hamilton–Jacobi equations // Journal of Computational Physics. — 2000. — Vol. 160, no. 2. — P. 720–742.

54. *Bermudez A., Vazquez M. E.* Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms // *Computers & Fluids*. — 1994. — Vol. 23, no. 8. — P. 1049–1071.
55. Comparison of solvers for the generalized Riemann problem for hyperbolic systems with source terms / G. Montecinos [et al.] // *Journal of Computational Physics*. — 2012. — Vol. 231, no. 19. — P. 6472–6494.
56. *Ведерников А. Б., Холодов А. С.* Численное моделирование течений двух-и трехслойной жидкости в рамках модели мелкой воды // *Математическое моделирование*. — 1990. — Т. 2, № 6. — С. 9–18.
57. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды // *Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН*. — 2016. — № 0. — С. 69–27.
58. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной “мелкой воды” // *Прикладная механика и техническая физика*. — 1979. — Т. 20, № 2. — С. 3–14.
59. *Kabanikhin S. I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. — 2008.
60. *Ferreira C. R., Mandli K. T., Bader M.* Vectorization of Riemann solvers for the single-and multi-layer shallow water equations // *2018 International Conference on High Performance Computing & Simulation (HPCS)*. — IEEE. 2018. — P. 415–422.
61. Numerical treatment of the loss of hyperbolicity of the two-layer shallow-water system / M. J. Castro-Díaz [et al.] // *Journal of Scientific Computing*. — 2011. — Vol. 48. — P. 16–40.
62. Discussion on different numerical treatments on the loss of hyperbolicity for the two-layer shallow water system / M. C. Díaz [et al.] // *Advances in Water Resources*. — 2023. — Vol. 182. — P. 104587.
63. *Lawrence G. A.* On the hydraulics of Boussinesq and non-Boussinesq two-layer flows // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1990. — Vol. 215. — P. 457–480.

64. *Bouchut F., Zeitlin V.* A robust well-balanced scheme for multi-layer shallow water equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B. — 2010. — Vol. 13, no. 4. — P. 739–758.
65. Approximation of the hydrostatic Navier–Stokes system for density stratified flows by a multilayer model: kinetic interpretation and numerical solution / E. Audusse [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2011. — Vol. 230, no. 9. — P. 3453–3478.
66. *Couderc F., Duran A., Vila J.-P.* An explicit asymptotic preserving low Froude scheme for the multilayer shallow water model with density stratification // Journal of Computational Physics. — 2017. — Vol. 343. — P. 235–270.
67. A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for shallow water flows. Derivation and numerical validation / E. Audusse [et al.] // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 2011. — Vol. 45, no. 1. — P. 169–200.
68. A fast finite volume solver for multi-layered shallow water flows with mass exchange / E. Audusse [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2014. — Vol. 272. — P. 23–45.
69. *Audusse E.* A multilayer Saint-Venant model: derivation and numerical validation // Discrete and Continuous Dynamical Systems-B. — 2005. — Vol. 5, no. 2. — P. 189–214.
70. The GeoClaw software for depth-averaged flows with adaptive refinement / M. J. Berger [et al.] // Advances in Water Resources. — 2011. — Vol. 34, no. 9. — P. 1195–1206.
71. Modeling hurricane waves and storm surge using integrally-coupled, scalable computations / J. Dietrich [et al.] // Coastal Engineering. — 2011. — Vol. 58, no. 1. — P. 45–65.
72. *Асфандияров Д. Г., Сороковикова О. С.* Численный метод решения уравнений мелкой воды повышенной точности на основе модифицированной схемы КАБАРЕ // Математические заметки СВФУ. — 2023. — Т. 30, № 3. — С. 91–112.

73. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Физматлит, 2012.
74. Холодов А. С., Магомедов К. М. Сеточно-характеристические численные методы. — 2019.
75. Karabasov S. A., Goloviznin V. M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // Journal of Computational Physics. — 2009. — Vol. 228, no. 19. — P. 7426–7451.
76. Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 86–100.
77. Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре» // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 101–116.
78. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness / I. Aavatsmark [et al.] // Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal. — 2008. — Vol. 24, no. 5. — P. 1329–1360.
79. Liou M.-S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds // Journal of computational physics. — 2006. — Vol. 214, no. 1. — P. 137–170.
80. A conservative fully discrete numerical method for the regularized shallow water wave equations / D. Mitsotakis [et al.] // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2021. — Vol. 43, no. 2. — B508–B537.
81. Остапенко В. В. О сильной монотонности схемы «Кабаре» // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 3. — С. 447–460.
82. Ковыркина О. А., Остапенко В. В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 5. — С. 796–815.

83. *Родионов А. В.* Сопоставление схемы КАБАРЕ со схемами типа MUSCL // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 9. — С. 109–136.
84. *Evtushenko Y., Gorchakov A., Goloviznin V.* Fast automatic differentiation in problems variations four-dimensional data assimilation (4Dvar) // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1128. — IOP Publishing. 2018. — P. 012001.
85. *Egbert G. D., Erofeeva S. Y.* Efficient inverse modeling of barotropic ocean tides // Journal of Atmospheric and Oceanic technology. — 2002. — Vol. 19, no. 2. — P. 183–204.
86. *Smith W. H., Sandwell D. T.* Global sea floor topography from satellite altimetry and ship depth soundings // Science. — 1997. — Vol. 277, no. 5334. — P. 1956–1962.
87. Белое море и его водосбор под влиянием климатических и антропогенных факторов / И. А. Барышев [и др.]. — 2007.
88. *Семенов Е., Лунева М.* О совместном эффекте прилива, стратификации и вертикального турбулентного перемешивания на формирование гидрофизических полей в Белом море // Известия АН, ФАО. — 1999. — Т. 35, № 5. — С. 660–678.
89. *Fernández-Nieto E. D., Castro Díaz M. J., Parés C.* On an intermediate field capturing Riemann solver based on a parabolic viscosity matrix for the two-layer shallow water system // Journal of Scientific Computing. — 2011. — Vol. 48, no. 1. — P. 117–140.
90. *Bouchut F., Luna T. M. de.* An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 2008. — Vol. 42, no. 4. — P. 683–698.
91. *Abgrall R., Karni S.* A relaxation scheme for the two-layer shallow water system // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. — Springer, 2008. — P. 135–144.

92. *Abgrall R., Karni S.* Two-layer shallow water system: a relaxation approach // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — P. 1603–1627.
93. Three-layer approximation of two-layer shallow water equations / A. Cherock [et al.] // Mathematical Modelling and Analysis. — 2013. — Vol. 18, no. 5. — P. 675–693.
94. *Lannes D., Ming M.* The Kelvin-Helmholtz instabilities in two-fluids shallow water models // Hamiltonian partial differential equations and applications. — Springer, 2015. — P. 185–234.
95. *Долгополов Д.* Методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц // СПб.: СПбГТИ (ТУ). — 2005. — Т. 39.
96. *Chukharev A., Runovsky K., Kulsha O.* Modeling of turbulent patches statistical distribution in the stratified ocean layers // Physical Oceanography. — 2017. — No. 5. — P. 31–41.
97. Prediction methods for turbulent flows / W. Kollmann [et al.]. — Hemisphere Publishing Corporation Washington, 1980.
98. *Middleton G. V.* Experiments on density and turbidity currents: III. Deposition of sediment // Canadian Journal of Earth Sciences. — 1967. — Vol. 4, no. 3. — P. 475–505.
99. *Huppert H. E., Simpson J. E.* The slumping of gravity currents // Journal of Fluid Mechanics. — 1980. — Vol. 99, no. 4. — P. 785–799.
100. A numerical study of the triggering mechanism of a lock-release density current / F. G. Serchi [et al.] // European Journal of Mechanics-B/Fluids. — 2012. — Vol. 33. — P. 25–39.
101. Явный численный алгоритм для уравнений негидростатической динамики жидкости на основе схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин [и др.] // Математическое моделирование. — 2023. — Т. 35, № 5. — С. 62–86.
102. *Huppert H. E.* Gravity currents: a personal perspective // Journal of Fluid Mechanics. — 2006. — Vol. 554. — P. 299–322.
103. *Marleau L. J., Flynn M. R., Sutherland B. R.* Gravity currents propagating up a slope in a two-layer fluid // Physics of Fluids. — 2015. — Vol. 27, no. 3.

- 104. Direct numerical simulations of intrusive density-and particle-driven gravity currents / E. Francisco [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2022. — Vol. 34, no. 4.
- 105. Axisymmetric three-dimensional gravity currents generated by lock exchange / R. Inghilesi [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2018. — Vol. 851. — P. 507–544.
- 106. *Hallworth M. A., Huppert H. E., Ungarish M.* Axisymmetric gravity currents in a rotating system: experimental and numerical investigations // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2001. — Vol. 447. — P. 1–29.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук

- 1 Новый численный алгоритм для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // Морской гидрофизический журнал. – 2019. – Т. 35, № 6(210). – С. 600-620. EDN: XDAFQF. Импакт-фактор 1,011 (РИНЦ) [1.5 / 1.35]
Перевод: New Numerical Algorithm for the Multi-Layer Shallow Water Equations Based on the Hyperbolic Decomposition and the CABARET Scheme / V. M. Goloviznin, Pavel A. Maiorov, Petr A. Maiorov, A. V. Solovjev // Physical Oceanography. – 2019. – Vol. 26, No. 6. – P. 528-546. EDN: BRCEVQ. Импакт-фактор 0,960 (РИНЦ) [1.5 / 1.35]
- 2 Hyperbolic decomposition for hydrostatic approximation of free surface flow problems / V. M. Goloviznin, P. A. Mayorov, P. A. Mayorov // Journal of Physics: Conference Series – 2019. – Vol. 1392. - P. 012035. EDN: KNSKUP. Импакт-фактор 0,18 (SJР) [0.5 / 0.45]
- 3 Validation of the low dissipation computational algorithm CABARET-MFSH for multilayer hydrostatic flows with a free surface on the lock-release experiments / V.M. Goloviznin, Pavel A. Maiorov, Petr A. Maiorov, A. V. Solovjev // Journal of Computational Physics. – 2022. – Vol. 463. – P. 111239. EDN: HBMDYD. Импакт-фактор 3,8 (JIF) [0.9 / 0.8]
- 4 Моделирование трехмерных течений неоднородной жидкости по многослойной гидростатической модели на основе схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 3. – С. 79-92. EDN: HBLIJG. Импакт-фактор 0,678 (РИНЦ) [1.0 / 0.9]

Перевод: Numerical Modeling of Three-Dimensional Variable-Density Flows by the Multilayer Hydrostatic Model Based on the CABARET Scheme / V. M. Goloviznin, Pavel A. Mayorov, Petr A. Mayorov, A. V. Solovjev // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2023. – Vol. 15, No. 5. – P. 832-841. EDN:BLTOOG. Импакт-фактор 0,724 (РИНЦ) [1.0 / 0.9]

Иные публикации

- (1) Головизнин В. М., Майоров П. А. Схема КАБАРЕ для двухслойной мелкой воды // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов (23 октября - 27 октября 2017 г.). — МАКС Пресс Москва: 2017. — С. 40–40.
- (2) Майоров П. А., Головизнин В. М. Валидация численного алгоритма для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. — МаксПресс Москва: 2019. — С. 55–55.
- (3) Сравнение гидростатической и негидростатической моделей на лотковых экспериментах / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова: 26 – 31 октября 2020 г. — Т. 1 из ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ. — Москва: ООО МАКС Пресс, 2020. — С. 71–71.
- (4) Валидация модели cabaret-mfsh на эксперименте по исследованию гравитационного течения вдоль границы раздела двухслойной жидкости / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // Ломоносовские чтения-2021: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. — Т. 2021 из Секция Вычислительной математики и кибернетики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2021. — С. 62–63.

- (5) Моделирование лабораторных экспериментов по исследованию динамики внутренних волн в стратифицированной жидкости гидростатической модели cabaret-mfsh / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // Моря России: Год науки и технологий в РФ – Десятилетие наук об океане ООН: тезисы докладов Всероссийской научной конференции, г. Севастополь, 20–24 сентября 2021 г. — ФГБУН ФИЦ МГИ Севастополь: 2021. — С. 92–94.
- (6) Validation of the cabaret-mfsh hydrostatic model for modeling the flows of stratified fluids with a free surface in laboratory experiments / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // Marchuk Scientific Readings-2021: Abstracts of the International conference. — Institute of comput. mathematics and mat. geophysics SB RAS: 2021. — P. 99–99.
- (7) Численное моделирование трехмерных течений неоднородной жидкости в лабораторных экспериментах по гидростатической модели cabaret-mfsh / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: тезисы докладов V международной конференции. — Издательский дом СВФУ Якутск, Россия: 2022. — С. 38–38.
- (8) Валидация модели cabaret-mfsh на задаче интрузивного течения / В. М. Головизнин, Павел А. Майоров, Петр А. Майоров, А. В. Соловьев // VI Международная конференция Суперкомпьютерные технологии математического моделирования (СКТеММ'25), 15 - 19 июля 2025 года, МИАН, г. Москва, 2025. — 2025. — С. 46–46

Список рисунков

1.1	Модель мелкой воды с переменной плотностью	16
1.2	Расположение сеточных функций, используемых в схеме КАБАРЕ	21
1.3	Начальные данные теста сбалансированности	26
1.4	Результаты расчета после $5 \cdot 10^4$ временных шагов а) H , б) ρ , в) u , г) v	28
1.5	Схема эксперимента с переменной плотностью на неровном дне .	29
1.6	Результаты расчета а) H при $t = t_{stable}$ после $4 \cdot 10^5$ временных шагов, б) ρ при $t = t_{stable}$ после $4 \cdot 10^5$ шагов, в) H при $t = t_{stable}$ после $5 \cdot 10^5$ шагов, г) ρ при $t = t_{stable}$ после $5 \cdot 10^5$ шагов	30
1.7	Расчетная область – границы, глубины. Оранжевые звезды – положение точек амфидромии	31
1.8	Расчетная сетка вблизи Соловецких островов	31
1.9	Уровень свободной поверхности из расчетов по модели КАБАРЕ на моменты времени а) 7 суток, б) 7.12 суток	32
2.1	Модель двухслойной мелкой воды	35
2.2	Характеристический многочлен в координатах (p, q) для двух вариантов отношений плотностей	37
2.3	Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ на момент $t=2.44$: столбец а) границы и скорости слоев в первом расчете ($r_1 = 0.9$), столбец б) границы и скорости слоев во втором расчете ($r_1 = 0.0001$)	43
2.4	Результаты расчетов по схеме КАБАРЕ на момент $t=2.44$: столбец а) границы и скорости слоев в первом расчете ($r_1 = 0.9$), столбец б) границы и скорости слоев во втором расчете ($r_1 = 0.0001$)	45
2.5	Начальные данные задачи о динамике двухслойной жидкости при отсутствии обмена массой и импульсом между слоями	46
2.6	Результаты расчета по схеме КАБАРЕ на сетке в 800 ячеек: а), б) границы и скорости слоев на момент $t=0,5$; с), д) границы и скорости слоев на момент $t=0,65$	47

2.7	Результаты расчета по схеме КАБАРЕ на сетке в 200 ячеек: а), б) границы и скорости слоев на момент $t=0,5$; в), г) границы и скорости слоев на момент $t=1$	48
3.1	Многослойная модель	51
3.2	Начальные данные теста на хорошую сбалансированность	61
3.3	Форма поверхности жидкости: а) начальные данные, б) на время $t=6$. Сплошная линия – однослойная вода, маркеры – многослойная вода с числом слоев $N=10$	65
3.4	Параметры экспериментальной установки из лабораторных экспериментов	66
3.5	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А1 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета . .	71
3.6	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А2 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета . .	71
3.7	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А3 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета . .	72
3.8	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте А4 в разное время (4с, 8с, 12с, 16с). Слой соленой воды был обозначен с помощью маркера синего цвета . .	73
3.9	Обезразмеренное расстояние $L^{*3/2}(t^*)$, пройденное придонным потоком соленой жидкости, для расчетов по схеме КАБАРЕ экспериментов серии А (метки А1, А2, А3, А4)	74
3.10	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте В25 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев	75

3.11	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте В26 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев	76
3.12	а) Скорость фронта, б) обезразмеренное расстояние $L^{*3/2}(t^*)$ и в) положение фронта нормированное на расстояние, пройденное его однородным аналогом, стратифицированного потока расчетов по схеме КАБАРЕ экспериментов серии В	78
3.13	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте С1 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев	79
3.14	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте С4 в разное время (4, 8, 12, 16, 20, 24 секунды). Слои были окрашены в желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев	80
3.15	Обезразмеренное расстояние, пройденное придонным потоком соленой жидкости, для расчетов по схеме КАБАРЕ экспериментов серии С	81
3.16	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте D1 в разное время (4с, 8с, 16с, 24с). Слои были окрашены в красный, желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев	82
3.17	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте D2 в разное время (4с, 8с, 16с, 24с). Слои были окрашены в красный, желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев	83
3.18	Сравнение расчета по схеме КАБАРЕ и положения фронта потока в эксперименте D3 в разное время (4с, 8с, 16с, 24с). Слои были окрашены в красный, желтый и синий цвета с помощью красителей, чтобы визуализировать моменты смешивания слоев	84

3.19	Сравнение безразмерного расстояния $L^{*3/2}(t^*)$, пройденного фронтом потока, в расчетах по схеме КАБАРЕ экспериментов серии D (метки D1, D2, D3) и теоретической зависимостью величины однородного солевого течения от времени (метка "теория")	85
3.20	Полная, кинетическая и потенциальная энергии расчета опыта D1 по схеме КАБАРЕ на сетке 300x50	86
3.21	Изменение полной энергии расчета эксперимента D1 по схеме КАБАРЕ при различных параметрах фильтра переменных потока на сетке 300x50	87
3.22	Изменение полной энергии расчета эксперимента D1 по схеме КАБАРЕ при различных параметрах фильтрации части потока, связанного с давлением, на сетке 300x50	87
3.23	Расчет по схеме КАБАРЕ эксперимента D1 на разных сетках (300x50, 600x100, 1200x200, 2400x400) в моменты времени: а) $T=8c$, б) $T=16c$	88
3.24	Изменение полной энергии расчета эксперимента D1 по схеме КАБАРЕ на сетках с возрастающим разрешением(300x50, 600x100, 1200x200, 2400x400)	89
3.25	Параметры экспериментальной установки лабораторных экспериментов	90
3.26	Сравнение результатов численных моделей CABARET-MFSH и CABARET-NH с экспериментальными данными на разные моменты времени (2c, 14c, 26c, 38c)	90
4.1	Лабораторная установка для исследования трехмерных течений жидкости с переменной плотностью, вид сверху и сбоку	101
4.2	Результаты расчетов по модели CABARET-MFSH а) первого и б) второго экспериментов на момент времени $t=8c$	101
4.3	Положение фронта потока из расчетов по модели CABARET-MFSH а) первого и б) второго экспериментов в разные моменты времени (2c, 4c, 6c, 8c, 10c)	102
4.4	Максимальное распространение фронта а) по оси x и б) по оси y в расчетах по CABARET-MFSH (треугольные метки) и экспериментах (квадратные метки)	103

A.1	Блок-схема программного комплекса	127
-----	---	-----

Список таблиц

1	Начальные данные экспериментов серии В, задействованных в построении графиков	77
---	--	----

Глава А. Описание программного комплекса

Разработанный программный комплекс предназначен для численного моделирования течений жидкости со свободной поверхностью. Он представляет собой совокупность реализаций трех гидростатических моделей на основе балансно-характеристической схемы КАБАРЕ.

В состав комплекса входят три основные численные модели: модель мелкой воды с переменной плотностью (далее CABARET-SW), модель двухслойной мелкой воды (CABARET-2L), и многослойная гидростатическая модель (CABARET-MFSH). Все модули построены на единой численной основе — балансно-характеристической методологии, что обеспечивает не только согласованность подходов, но и удобную интеграцию моделей в общем программном окружении, а также плавный переход от простых к более сложным постановкам.

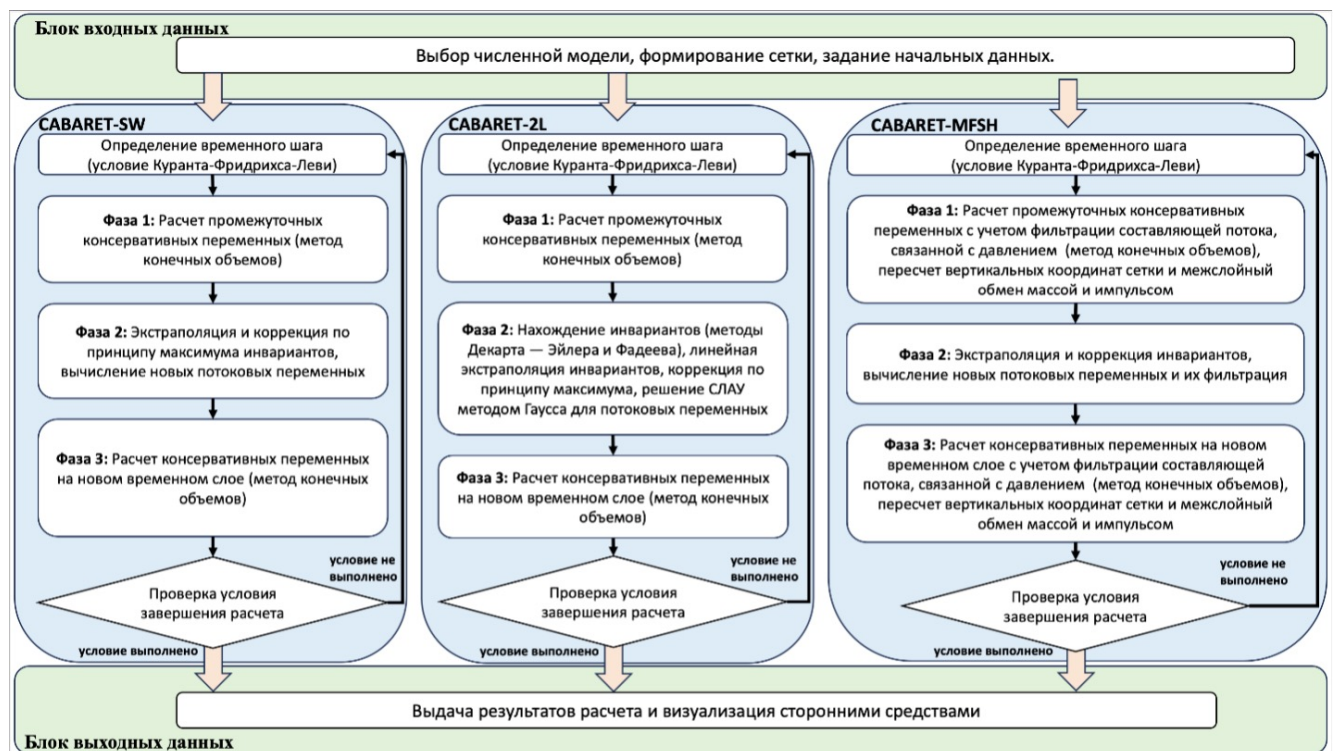


Рисунок А.1 — Блок-схема программного комплекса

Архитектура комплекса включает блоки подготовки входных данных, расчетных моделей и формирование выходных данных для дальнейшей визуализации (Рисунок А.1). На этапе подготовки данных формируется расчетная сетка с учетом геометрии области и характеристик модели. Задаются начальные поля

высот, скоростей, рельеф дна, учитывается стратификация по плотности при необходимости. Была добавлена опция загрузки начальных данных из формата NetCDF, что обеспечивает совместимость с различными источниками гидрологических и экспериментальных данных. Предусмотрены утилиты интерполяции, фильтрации и конвертации данных. Для каждой модели подготовлен набор верификационных тестов, реализованных в виде predetermined конфигураций начальных данных, предназначенных для проверки корректности и устойчивости численного решения.

Вычислительные модули комплекса охватывают различные уровни описания гидродинамики, от простых моделей до более сложных многослойных постановок.

Модель CABARET-SW (глава 1) решает уравнения мелкой воды с переменной плотностью с учётом рельефа дна. Её верификация проведена на задачах сохранения стационарного состояния и моделирования приливных течений.

Модель CABARET-2L (глава 2) описывает движение двух несмешивающихся слоёв жидкости, разделённых интерфейсом. Отдельное внимание уделено проблеме потери гиперболичности и методам её корректной обработки. В качестве тестов использованы задачи внутренней волны и резкого перепада высот.

Многослойная модель CABARET-MFSH (главы 3, 4) расширяет возможности моделирования, позволяя учитывать обмен массой и импульсом между слоями. Она построена на основе гиперболической декомпозиции и реализована как в двумерной, так и в трёхмерной постановках. Её проверка проведена на ряде лабораторных экспериментов по динамике стратифицированных течений, где модель продемонстрировала хорошее согласие с наблюдаемыми данными.

Результаты расчетов сохраняются в двух форматах: в бинарном формате *.plt, совместимом с системой визуализации Tecplot, и в условно текстовом формате, предназначенном для удобного экспорта и последующей обработки в сторонних программных средах, таких как ParaView, Python и MATLAB. Реализованные форматы выходных данных обеспечивают построение карт полей высоты, плотности и скорости, формирование временных рядов и анимаций, что делает комплекс удобным инструментом как для научного анализа, так и для представления результатов.

Таким образом, данный программный комплекс представляет собой платформу для прямого численного моделирования течений жидкости со свободной поверхностью в гидростатическом приближении, обеспечивая высокую точность расчетов, гибкость настройки и интеграцию с современными средствами анализа данных и визуализации.