

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Скрипкин Антон Денисович**

**О движении гиростата с неподвижной точкой  
в случае Гесса**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Александр Сергеевич Кулешов

Москва – 2026

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1.</b> О движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса . . . . .	17
1.1 Общая постановка задачи. Уравнения движения гиростата и их первые интегралы . . . . .	17
1.2 Случай Гесса–Сретенского . . . . .	21
1.3 Уравнения движения в специальной системе координат . . . . .	22
1.4 Обезразмеривание уравнений. Приведение системы к одному уравнению второго порядка . . . . .	25
1.5 Описание алгоритма Ковачича . . . . .	31
1.6 Применение алгоритма Ковачича . . . . .	40
1.7 Особые случаи . . . . .	48
1.7.1 Случай кратного корня у многочлена третьей степени . . . . .	48
1.7.2 Случай кратного корня у многочлена шестой степени . . . . .	56
1.7.3 Критический случай совпадающих корней . . . . .	60
1.7.4 Особенный случай совпадающих корней . . . . .	63
<b>Глава 2.</b> Качественный анализ движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой . . . . .	68
2.1 Общее решение уравнения второго порядка . . . . .	68
2.2 Описание метода годографов . . . . .	70
2.3 Подвижный годограф угловой скорости . . . . .	71
2.3.1 Случай I. . . . .	73
2.3.2 Случай II. . . . .	74
2.3.3 Случай III. . . . .	76
2.4 Неподвижный годограф . . . . .	77
2.4.1 Случай I. . . . .	78
2.4.2 Случай II. . . . .	81

2.4.3	Случай III. . . . .	84
<b>Глава 3.</b>	<b>О движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае</b>	
	Гесса под действием гироскопических сил . . . . .	86
3.1	Постановка задачи. Уравнения движения гиростата и их первые интегралы . . . . .	86
3.2	Уравнения движения гиростата в специальной системе координат П.В. Харламова . . . . .	89
3.3	Обезразмеривание уравнений движения. Редукция уравнений движения к одному дифференциальному уравнению второго порядка . . . . .	90
3.4	Применение алгоритма Ковачича . . . . .	96
3.5	Движение гиростата под действием только гироскопических сил . . . . .	103
<b>Глава 4.</b>	<b>О движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае</b>	
	Гесса под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил . . . . .	114
4.1	Постановка задачи. Уравнения движения гиростата и их первые интегралы . . . . .	114
4.2	Уравнения движения гиростата в осях Харламова . . . . .	117
4.3	Обезразмеривание уравнений. Сведение уравнений движения к одному уравнению второго порядка . . . . .	121
4.4	Применение алгоритма Ковачича . . . . .	129
4.5	Движение гиростата под действием только гироскопических и циркулярно-гироскопических сил . . . . .	135
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>150</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>152</b>
	<b>Список иллюстративного материала . . . . .</b>	<b>160</b>

## Введение

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию задачи о движении гиростата в следующей постановке, а именно: рассматривается движение гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского под действием различных силовых полей. Данная задача является обобщением классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

**Актуальность проблемы.** Задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой является одной из классических задач теоретической механики. В этой задаче известны три случая полной интегрируемости: случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Кроме того, есть случаи частной интегрируемости, одним из которых является случай Гесса, привлечший внимание многих ученых. Наиболее полный анализ движения твердого тела в случае Гесса был проведен П.А. Некрасовым в конце XIX века: он свел задачу к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими коэффициентами и изучил аналитические свойства этого решения. В середине XX века качественный анализ движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса при нулевой постоянной интеграла площадей был проведен А.М. Ковалевым при помощи метода годографов, впервые предложенным П.В. Харламовым. Вопрос интегрируемости данной задачи в квадратурах был полностью изучен в работе А.С. Кулешова и Б.С. Бардина при помощи алгоритма Ковачича.

Задача о движении гиростата (тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку и несущего другие тела, совершающие относительно тела-носителя циклические движения так, что распределение масс всей системы не изменяется) является обобщением классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Л.Н. Сретенский в своей работе указал для гиростата частный случай интегрируемости, являющийся аналогичным случаю Гесса для тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Однако полное иссле-

дование данного случая для гиростата в случае Гесса–Сретенского на предмет существования решения, выражающегося в квадратурах, проведено не было.

Целью работы является:

1. исследование вопроса о существовании лиувиллевых решений в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского и проведение качественного анализа движения гиростата при условии существования таких решений;
2. обобщение данной задачи на случаи действия дополнительных гироскопических и циркулярно-гироскопических сил с целью нахождения условий существования решений, выражающихся в лиувиллевых функциях.

Для достижения поставленных целей были поставлены следующие следующие задачи:

1. Свести задачу о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотреть вопрос о возможности интегрирования данной задачи в квадратурах.
2. Провести качественный анализ движения гиростата в случае Гесса, описать, как именно движется гиростат в случае Гесса.
3. Исследовать возможность приведения задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических сил к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка. Получить условия на параметры задачи, при которых она интегрируется в квадратурах.
4. Привести задачу о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Изучить вопрос о существовании лиувиллевых решений.

Методология и методы исследования. Диссертационное исследование выполнено с использованием известных аналитических методов теоретиче-

ской механики, математического анализа, качественной теории дифференциальных уравнений. Для получения условий существования лиувиллевых решений у линейных дифференциальных уравнений второго порядка используется алгоритм Ковачича, основные идеи и положения которого изложены в шестом параграфе Главы 1 диссертации. Для проведения качественного анализа движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой применяется метод годографов, предложенный П.В. Харламовым.

**Достоверность и обоснованность результатов.** Теоретические результаты диссертации получены аналитически на основании строгих математических методов. Корректность аналитических вычислений подтверждена с помощью пакета символьных вычислений MAPLE 2018. Часть аналитических результатов подтверждена и проиллюстрирована с помощью численного анализа. Достоверность графических результатов обеспечена при помощи системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 14.3.

#### **Научная новизна:**

1. В задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского доказано, что решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Получены условия, при которых решение выражается в квадратурах, и указан явный вид этого решения.
2. Проведен полный качественный анализ движения гиростата в случае, когда решение выражается в квадратурах, с использованием метода годографов Харламова. Построены подвижный и неподвижный годографы угловой скорости тела и указаны особенности движения в зависимости от параметров.
3. Доказано, что решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского под действием дополнительных гироскопических сил сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Найдены условия на начальные параметры, при которых уравнение интегрируется в лиувиллевых функциях, а также указан явный вид решения.
4. Для задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в

случае Гесса–Сретенского под действием дополнительных гироскопических сил доказано, что задача может быть проинтегрирована в квадратурах, если распределение масс в теле соответствует случаю Лагранжа.

5. Установлено, что задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского под действием гироскопических сил интегрируется в квадратурах при любых параметрах задачи.
6. Установлено, что задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой под действием дополнительных гироскопических и циркулярно-гироскопических сил в обобщенном случае Гесса–Сретенского приводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Получены условия на параметры задачи, при которых общее решение этого уравнения выражается в лиувиллевых функциях.
7. Доказано, что задача о движении гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил в случае Гесса–Сретенского сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами, и найдены условия существования у этого уравнения лиувиллевых решений.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость работы заключается в:

- получении условий, при выполнении которых некоторые обобщения задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса могут быть проинтегрированы в лиувиллевых функциях;
- получении условий интегрируемости в квадратурах в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса и их физическая интерпретация;
- описании движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса при помощи метода годографов Харламова.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях, связанных с интегрированием и качественным

анализом в задачах о движении твердого тела с неподвижной точкой и ее обобщениях, проводимых в университетах и других научно-исследовательских центрах – в этом практическая значимость исследования.

**Личный вклад автора.** Все научные результаты, выносимые на защиту, принадлежат лично автору. В работах [1-3] научный руководитель участвовал в постановке задачи, обсуждении методов исследования и интерпретации полученных результатов.

В работе [1] личный вклад автора состоит в приведении систем уравнений Эйлера–Пуассона задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с рациональными коэффициентами. Автором проведено исследование полученного уравнения на предмет существования лиувиллевых решений при помощи алгоритма Ковачича, а также выполнена интерпретация полученных условий. В работе [2] автор свел решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, а также получил условия интегрируемости этой задачи в квадратурах и объяснил их физический смысл. Личный вклад автора в работе [3] состоит в проведении аналогичного исследования для обобщения этой задачи на случай движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических сил.

Автор лично провел качественный анализ движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса. Вклад автора состоит в получении уравнений для построения годографов угловой скорости, построении визуального представления и интерпретации движения гиростата с неподвижной точкой в зависимости от параметров задачи.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. В задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса получены условия на параметры задачи, при выполнении которых уравнения движения гиростата интегрируются в лиувиллевых функциях.
2. Когда значение постоянной обезразмеренного интеграла энергии  $h$  больше единицы, движение тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гес-

са возможно только при определенных конечных диапазонах значений угла  $\theta$  между радиус-вектором из неподвижной точки в центр масс гиростата и вектором восходящей вертикали. В процессе движения гиростат непрерывно переходит от одной пространственной конфигурации к другой, соответствующих минимальному и максимальному значению угла. Если  $0 \leq h \leq 1$ , то движение гиростата является периодическим, причем в моменты, когда угол  $\theta$  принимает критическое значение, происходит остановка движения и занятие центром масс наивысшего положения. Если  $-1 \leq h < 0$ , то движение также является периодическим, но в моменты остановки центр масс занимает наименьшее положение.

3. В задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических сил выведены условия на параметры задачи, при выполнении которых решение задачи выражается в квадратурах. Задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических сил интегрируется в лиувиллевых функциях, если распределение масс в теле соответствует случаю Лагранжа. Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса может быть проинтегрирована в квадратурах при любых значениях параметров задачи.
4. В задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием дополнительных гироскопических и циркулярно-гироскопических сил существуют соотношения на параметры задачи, при выполнении которых общее решение задачи выражается через лиувиллевы функции.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах:

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2024», Москва, Россия, 20 марта - 2 апреля 2024 года;
2. XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-24), Москва, Россия, 17 - 20 июня 2024 года;

3. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, г. Суздаль, Россия, 28 июня - 4 июля 2024 года;
4. Международная научная конференция по механике «Десятые Поляховские чтения», Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 23 - 26 сентября 2024 года;
5. Научный семинар «Современные геометрические методы» кафедры дифференциальной геометрии и приложений (под руководством академика РАН А.Т. Фоменко, профессора А.С. Мищенко, профессора А.В. Болсинова, профессора А.А. Ошемкова, профессора РАН Е.А. Кудрявцевой, профессора В.В. Ведюшкиной, доцента И.М. Никонова, доцента А.Ю. Коняева, ассистента В.А. Кибкало), МГУ, 12 февраля 2025 года;
6. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2025», Москва, Россия, 24 марта - 2 апреля 2025 года;
7. 6-я Международная конференция «Компьютерная алгебра», Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Россия, 23 - 25 июня 2025 года;
8. V Международная конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 95-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В.И. Зубова, Санкт-Петербург, Россия, Россия, 6 - 10 октября 2025 года.

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в 8 научных работах, три из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

**История вопроса.** Задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой является одной из классических задач механики. Уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой могут быть записаны в форме уравнений Эйлера–Пуассона — системы шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех компонент вектора угловой скорости тела и трех компонент единичного вектора, направленного противоположно вектору силы тяжести. Исследованию этой задачи посвящены труды и работы

многих известных математиков и механиков: Л. Эйлера [54], Ж.-Л. Лагранжа [34], С.В. Ковалевской [61, 62], В. Гесса [56], С.А. Чаплыгина [50], Л. Пуансо [64] и многих других. При произвольных значениях параметров задачи известны три общих первых интеграла уравнений движения. Кроме того, доказано (теорема Якоби [52]), что достаточным условием сведения данной задачи к интегрированию в квадратурах является нахождение нового независящего от времени первого интеграла. Дополнительный первый интеграл существует при некоторых условиях на распределение масс в твердом теле только в трех классических случаях: случаях Эйлера [54], Лагранжа [34] и Ковалевской [61, 62]. Кроме того, известен ряд так называемых частных случаев интегрируемости, когда дополнительный интеграл системы уравнений Эйлера–Пуассона существует при некоторых условиях на распределение масс в твердом теле и при специально выбранных начальных условиях (см. [2, 7, 15]). Особое место среди таких случаев занимает случай Гесса, открытый в работе немецкого математика и механика В. Гесса в 1890 году [56].

Этот случай интегрируемости был сразу замечен и исследован в работах отечественных ученых [1, 38, 39]. В 1892 году П.А. Некрасов показал [39], что решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой при условиях Гесса сводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Некоторые результаты работ [38, 56] были повторены Р. Лиувиллем. Подробное описание результатов, полученных при исследовании случая Гесса, представлено в монографиях [7, 12, 13, 15], в которых случаю Гесса посвящены целые главы.

Значительное число работ по исследованию случая частной интегрируемости Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой было посвящено качественному анализу решений и геометрической интерпретации. В 1896 году в работе П.А. Некрасова [38] был проведен полный анализ движения твердого тела в случае Гесса: он свел задачу к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими коэффициентами и изучил аналитические свойства этого решения. В совместной работе Б.К. Млодзеевского и П.А. Некрасова [37] были сформулированы достаточные условия существования периодических и асимптотических движений.

Некоторые качественные свойства движения были также отмечены в работе Н.Е. Жуковского [16]. Во второй половине XX века вопросом геометрической интерпретации движения занимались представители так называемой «донецкой школы механики». В работах А.М. Ковалева [22–24] было дано качественное описание движения тяжелого тела в случае Гесса при нулевой постоянной интеграла площадей при помощи метода годографов, разработанного П.В. Харламовым [44, 45, 47]. В основе метода годографов Харламова лежит теорема Пуансо [64]: «движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, может быть представлено качением без скольжения подвижного аксоида угловой скорости тела по неподвижному аксоиду». Уравнения неподвижного годографа называются кинематическими уравнениями Харламова [12, 44]. Следует отметить, что исследования, посвященные качественному анализу движения в случае Гесса, продолжают активно развиваться и по сей день, о чем свидетельствуют современные работы [11, 25].

Помимо исследований классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, появились и другие задачи, в которых уравнения движения были аналогичны уравнениям Эйлера–Пуассона. В работах Н.Е. Жуковского [17] и В. Вольтерры [65] исследовалась задача о движении гиростата – тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку и несущего другие тела, совершающие относительно тела-носителя циклические движения так, что распределение масс всей системы не изменяется. Такие движения наблюдаются, например, в случае, когда с твердым телом неизменно связаны оси роторов, обладающих динамической симметрией [65], либо в случае, когда тело-носитель имеет многосвязные полости, заполненные идеальной жидкостью, совершающей циркуляционные течения [17]. В работах Н.Е. Жуковского [17] и В. Вольтерры [65] был найден интегрируемый случай уравнений движения гиростата, обобщающий случай Эйлера движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Обобщение случая интегрируемости Лагранжа на движение гиростата было получено П.В. Харламовым [46, 47], а обобщение интегрируемого случая С.В. Ковалевской на движение гиростата было сделано в работах И.В. Комарова [59] и Х. Яхьи [67]. В 1992 году в работе Л. Гаврилова [55] было доказано, что случаями Жуковского–Вольтерры, Харламова и Яхьи–Комарова исчерпываются все общие случаи интегрируемости задачи о движении тяжелого гиростата

с неподвижной точкой. Однако, как и в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в задаче о движении гиростата существуют частные случаи интегрируемости уравнений движения. В 1963 году Л. Н. Сретенский [42, 43] указал частный случай интегрируемости уравнений движения гиростата, обобщающий случай интегрируемости Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В тех же работах [42, 43] Сретенский показал, что задача исследования движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой сводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В дальнейшем в работах [5–9, 14, 26, 27, 35, 36, 41, 58] были предложены многочисленные обобщения случая Гесса, имеющие место при движении твердого тела и гиростата в различных силовых полях. Наиболее общие условия, при которых в задаче о движении гиростата под действием потенциальных, гироскопических и циркулярно-гироскопических сил существует частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, были указаны в работе А.А. Косова [27].

Поскольку задача о движении гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского приводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, то для нахождения его общего решения можно воспользоваться так называемым алгоритмом Ковачича.

В 1986 году Дж. Ковачич в работе [60] представил конструктивный алгоритм, позволяющий получить в явном виде общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда это решение выражается через так называемые лиувиллевы функции [3, 21, 60]. Применение алгоритма Ковачича позволяет либо установить условия существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка, либо доказать, что такие решения отсутствуют. Необходимое условие для применения алгоритма к некоторому дифференциальному уравнению второго порядка заключается в том, что коэффициенты этого уравнения должны быть рациональными функциями независимой переменной.

Алгоритм Ковачича уже не раз успешно применялся при изучении различных задач механики и математической физики [3, 4, 29–33, 51, 53, 63]. В работах А.С. Кулешова и Г.А. Чернякова [31, 32, 51, 63] при помощи алгоритма Ковачича была исследована задача о качении тяжелого тела вращения по неподвижной

абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. В работах А.С. Кулешова и Д.В. Соломиной [29, 30] алгоритм Ковачича использовался для исследования задачи о качении без проскальзывания тяжелого однородного шара по неподвижной поверхности вращения. В работах Б.С. Бардина и А.С. Кулешова [3, 4, 28, 53] была исследована классическая задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса. Было показано, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к интегрированию которого сводится решение данной задачи, допускает общее решение, выраженное через лиувиллевы функции, всего в двух случаях. В первом случае распределение масс в твердом теле соответствует случаю Лагранжа интегрируемости уравнений движения твердого тела, а во втором случае кинетический момент тела должен быть ортогонален вектору вертикали. В обоих указанных случаях уравнения движения тела могут быть приведены к квадратурам.

В настоящей диссертации алгоритм Ковачича применяется к задаче о движении гиростата с неподвижной точкой, движущегося под действием силы тяжести, а также гироскопических и циркулярно-гироскопических сил определенного вида. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и списка иллюстраций.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, представляется научная новизна проводимых исследований и апробация полученных результатов. Приводится краткое описание основных результатов, полученные в разные годы в задаче о движении твердого тела и гиростата с неподвижной точкой, находящихся под действием различных силовых полей. Все упомянутые результаты подкреплены ссылками на соответствующие работы, в которых они были получены.

В первой главе диссертации приводится постановка задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой. Уравнения движения гиростата записаны в форме уравнений Эйлера–Пуассона. Показано, что при выполнении условий Гесса–Сретенского уравнения Эйлера–Пуассона движения тяжелого гиростата допускают четвертый частный интеграл. При помощи перехода к специальным осям П.В. Харламова [2, 45, 48] показано, что решение задачи описания движения гиростата приводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными

коэффициентами. Путем применения к соответствующему линейному дифференциальному уравнению алгоритма Ковачича найдены условия существования у данного уравнения лиувиллевых решений и указан его явный вид. Проведен анализ полученных условий.

Во второй главе производится качественный анализ движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского. При помощи явного вида общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, найденного в первой главе, получены уравнения подвижных и неподвижных годографов для данной задачи, а также построены наглядные представления подвижного и неподвижного аксоидов угловой скорости гиростата в зависимости от значений параметров задачи. При помощи метода годографов Харламова [44, 45] дано качественное описание движения гиростата и отмечены его особенности.

В третьей главе работы рассматривается задача о движении гиростата с неподвижной точкой при одновременном действии силы тяжести и гироскопических сил. Уравнения движения гиростата записаны с помощью специальных осей П.В. Харламова [2, 45, 48]. Показано, что при выполнении условий, сформулированных в работе А.А. Косова [27], уравнения движения гиростата допускают дополнительный частный интеграл Гесса–Сретенского. Показано, что задача описания движения гиростата под действием силы тяжести и гироскопических сил приводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых общее решение соответствующего линейного дифференциального уравнения выражается через лиувиллевы функции.

Последняя, четвертая глава работы посвящена задаче о движении гиростата с неподвижной точкой при одновременном действии силы тяжести, гироскопических сил и циркулярно-гироскопических сил. Уравнения движения гиростата записаны в форме уравнений Эйлера–Пуассона. Показано, что при выполнении условий на положение центра масс системы, а также на гироскопические и циркулярно-гироскопические силы, которые ранее были сформулированы в работе А.А. Косова [27], уравнения движения гиростата допускают четвертый дополнительный частный интеграл, обобщающий интеграл Гесса–Сретенского. Показано, что задача описания движения гиростата под действием силы тяже-

сти, а также гироскопических и циркулярно-гироскопических сил приводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. С помощью алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает общее решение, выражающееся через лиувиллевы функции.

В заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в работе.

Результаты диссертации опубликованы в статьях [68–75].

# Глава 1. О движении тяжелого гиристора с неподвижной точкой в случае Гесса

## 1.1. Общая постановка задачи. Уравнения движения гиристора и их первые интегралы

Рассмотрим движение в однородном поле тяжести механической системы  $S$ , состоящей из двух твердых тел, соединенных между собой. Первое тело  $S_0$  (носитель) представляет собой тяжелое твердое тело с неподвижной точкой  $O$ . Допустим, что с этим телом связана некоторая ось, вокруг которой может вращаться ротор  $S_1$  – геометрически и динамически симметричное твердое тело, осью симметрии которого является указанная ось. Центр масс  $O_1$  ротора также расположен на оси динамической симметрии. Обозначим через  $\mathbf{e}$  единичный вектор, определяющий положение оси вращения ротора относительно тела-носителя  $S_0$ . В силу динамической симметрии ротора  $S_1$ , положение центра масс  $G$  механической системы  $S$  не изменяется при вращении ротора. Также вращение ротора не изменяет распределения масс в системе  $S$ . Такую систему (тело-носитель с ротором) принято называть гиристором. Схематичный вид гиристора изображен на рисунке 1.1.

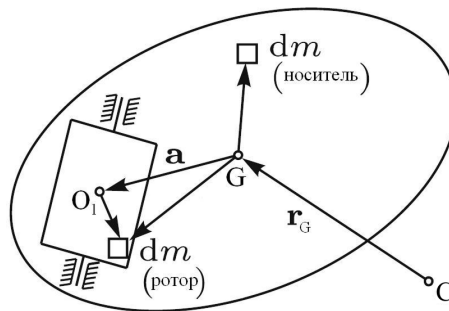


Рисунок 1.1 Гиристор. Точкой  $C$  обозначена неподвижная точка пространства,  $r_G$  — радиус-вектор к центру масс системы

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [73].

Введем подвижную систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , оси которой совпадают с главными осями инерции гиростата для точки  $O$ . Единичные базисные векторы этой системы координат обозначим через  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Пусть  $\mathbb{J}_O$  — матрица тензора инерции гиростата относительно неподвижной точки. В системе координат  $Ox_1x_2x_3$  она имеет диагональный вид:  $\mathbb{J}_O = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ . Обозначим через  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$  угловую скорость твердого тела,  $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$  — единичный вектор восходящей вертикали и  $\mathbf{r}_0 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  радиус-вектор центра масс  $G$  системы  $S$  относительно системы координат  $Ox_1x_2x_3$ . Пусть  $\mathbb{I}$  — матрица тензора инерции ротора относительно системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , жестко связанной с ротором. Ось  $O_1z_1$  данной системы направлена вдоль оси динамической симметрии ротора. Предположим, что вращение ротора происходит с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Тогда кинетический момент рассматриваемой системы может быть записан следующим образом (см. [10,67]):

$$\mathbf{K} = \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \Omega\mathbb{I}\mathbf{e}. \quad (1.1.1)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (1.1.1) называется гиростатическим моментом. Обозначим его через  $\mathbf{s}$ . Гиростатический момент  $\mathbf{s}$  — это кинетический момент ротора  $S_1$  относительно тела-носителя  $S_0$ . Следовательно, мы можем переписать выражение (1.1.1) в виде

$$\mathbf{K} = \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}.$$

Выведем теперь уравнения движения рассматриваемой системы. Предположим, что кроме силы тяжести никаких других внешних сил, оказывающих действие на гиростат, нет. Пусть  $M$  — масса системы,  $g$  — величина ускорения свободного падения. Тогда  $\mathbf{P} = -Mg\boldsymbol{\gamma}$  — сила тяжести, направленная вертикально вниз и приложенная к центру масс системы. Будем считать, что гиростатический момент  $\mathbf{s}$  является постоянной величиной. Тогда закон изменения кинетического момента системы  $S$ , записанный в подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , дает векторное уравнение:

$$\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}] = Mg[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0].$$

Так как гиростатический момент является постоянным в процессе движе-

ния, то  $\dot{\mathbf{s}} = 0$ , и данное уравнение может быть представлено в виде:

$$\mathbb{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s})] = Mg [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0]. \quad (1.1.2)$$

Векторное уравнение (1.1.2), рассматриваемое вместе с уравнением Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (1.1.3)$$

образует замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение системы. Совокупность уравнений (1.1.2), (1.1.3) называется уравнениями Эйлера–Пуассона. В проекции на систему координат  $Ox_1x_2x_3$  они записываются в виде

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 + s_3 \omega_2 - s_2 \omega_3 &= Mg (x_3 \gamma_2 - x_2 \gamma_3), \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 + s_1 \omega_3 - s_3 \omega_1 &= Mg (x_1 \gamma_3 - x_3 \gamma_1), \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 + s_2 \omega_1 - s_1 \omega_2 &= Mg (x_2 \gamma_1 - x_1 \gamma_2); \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2. \quad (1.1.5)$$

Известно, что для решения уравнений Эйлера–Пуассона достаточно найти четыре независимых первых интеграла системы (1.1.2), (1.1.3), не содержащих время [2, 7]. При произвольных значениях параметров задачи система уравнений (1.1.2), (1.1.3) имеет три независимых первых интеграла:

1. Интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega}) + Mg (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}_0) = E = \text{const.}$$

2. Интеграл площадей

$$K = ((\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\gamma}) = k = \text{const.}$$

3. Геометрический интеграл

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 1.$$

Наличие еще одного первого интеграла, не зависящего от времени, обеспечивает интегрируемость уравнений Эйлера–Пуассона. В общем случае допол-

нительного первого интеграла не существует. Тем не менее, при определенных соотношениях на параметры  $A_i, x_i, s_i, i = 1, 2, 3$ , оказывается, что дополнительный интеграл существует, причем обнаруживается он только в трех случаях [55]. Отметим, что эти случаи интегрируемости аналогичным трем классическим случаям интегрируемости, возникающим в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой – случаям Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

1. Случай Эйлера–Вольтерры (см. [65],  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ). Четвертый интеграл имеет вид:

$$L^2 = (A_1\omega_1 + s_1)^2 + (A_2\omega_2 + s_2)^2 + (A_3\omega_3 + s_3)^2 = l^2 = \text{const.}$$

2. Случай Лагранжа–Харламова (см. [49],  $A_1 = A_2, x_1 = x_2 = 0, s_1 = s_2 = 0$ ). В этом случае четвертый интеграл будет иметь вид:

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const.}$$

3. Случай Яхьи–Комарова (см. [59, 66],  $A_1 = A_2 = 2A_3, x_2 = x_3 = 0, s_1 = s_2 = 0$ ). Дополнительный интеграл записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \left( \omega_1^2 - \omega_2^2 - \frac{Mgx_1}{A_3} \gamma_1 \right)^2 + \left( 2\omega_1\omega_2 - \frac{Mgx_1}{A_3} \gamma_2 \right)^2 + \\ & + \frac{2s_3}{A_3} \left( \omega_3 - \frac{s_3}{A_3} \right) (\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{4Mgx_1s_3}{A_3^2} \gamma_3 \omega_1 = j = \text{const.} \end{aligned}$$

Как было доказано в работе Л. Гаврилова [55], этими тремя случаями исчерпываются все общие случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой. Вместе с тем при специальных дополнительных ограничениях на начальные данные существует ряд так называемых частных случаев интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона, когда удается найти дополнительный четвертый интеграл. К таким случаям относится случай Гесса–Сретенского, который был открыт Сретенским в работе [43].

## 1.2. Случай Гесса–Сретенского

В 1963 году Л. Н. Сретенский показал [43], что при выполнении условий

$$\begin{aligned} x_3 = 0, \quad A_2(A_3 - A_1)x_2^2 &= A_1(A_2 - A_3)x_1^2, \\ s_3 = 0, \quad A_2 > A_3 > A_1 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

у системы (1.1.2), (1.1.3) существует частный четвертый интеграл следующего вида:

$$A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} = 0. \quad (1.2.2)$$

С учетом условий (1.2.1), уравнения Эйлера–Пуассона (1.1.4), (1.1.5) принимают следующий вид

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 - s_2\omega_3 &= -Mgx_2\gamma_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 + s_1\omega_3 &= Mgx_1\gamma_3, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + s_2\omega_1 - s_1\omega_2 = Mg(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2);$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \quad (1.2.4)$$

Первые интегралы системы (1.2.3), (1.2.4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + Mg(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2) = E, \\ K &= (A_1\omega_1 + s_1)\gamma_1 + (A_2\omega_2 + s_2)\gamma_2 + A_3\omega_3 = k, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Покажем, что система уравнений (1.2.3), (1.2.4) действительно обладает частным интегралом (1.2.2). Умножая первые два уравнения системы (1.2.3) на  $x_1$  и  $x_2$  соответственно и складывая их, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2) &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 + \\ &+ \omega_3(s_2x_1 - s_1x_2). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Правая часть выражения (1.2.6) с учетом условий (1.2.1) может быть записана

в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 + \omega_3(s_2x_1 - s_1x_2) = \\ & = \frac{(A_2 - A_3)\omega_3x_1}{A_2x_2} \left( A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} \right). \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Из уравнения (1.2.7) видно, что если в начальный момент времени уравнение (1.2.2) выполняется, то оно будет выполняться и в течение всего времени движения гиростата. Таким образом, при соблюдении условий (1.2.1) уравнения Эйлера–Пуассона (1.1.4), (1.1.5) действительно обладают частным интегралом (1.2.2).

Отметим, что этот частный случай интегрируемости, найденный Сретенским для движения тяжелого гиростата, аналогичен классическому интегрируемому случаю Гесса, который существует в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Интеграл (1.2.2) при отсутствии ротора (то есть, когда  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ) сводится к классическому интегралу Гесса.

Также, в той же работе [43], Сретенский показал, что уравнения движения гиростата сводятся к интегрированию одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Следовательно, можно поставить задачу о существовании у данного уравнения лиувиллевых решений. Для ее решения можно применить алгоритм Ковачича [60], который позволяет либо находить условия существования у линейных дифференциальных уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами решений, выражающихся в лиувиллевых функциях, либо устанавливать отсутствие таких решений.

В последующих разделах показано, каким образом задача о движении гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского редуцируется к интегрированию одного дифференциального уравнения порядка. В следующих разделах мы покажем, как получить линейное дифференциальное уравнение второго порядка в случае Гесса–Сретенского.

### 1.3. Уравнения движения в специальной системе координат

Запишем уравнения Эйлера–Пуассона в скалярной форме в проекции на специальные оси П. В. Харламова [44, 45]. Пусть  $\mathbf{e}_I$ ,  $\mathbf{e}_{II}$ ,  $\mathbf{e}_{III}$  – единичные векторы

осей Харламова  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Тогда переход от главных осей инерции  $Ox_1x_2x_3$  к осям  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  определяется формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I &= \mathbf{e}_1 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \mathbf{e}_2 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \mathbf{e}_{II} &= -\mathbf{e}_1 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \mathbf{e}_2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \mathbf{e}_{III} &= \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Таким образом, оси Харламова вводятся так: ось  $O\xi_1$  направлена вдоль радиус-вектора из неподвижной точки гири в его центр масс, а ось  $O\xi_3$  совпадает с осью  $Ox_3$ . Ось  $O\xi_2$  дополняет их до правой ортогональной тройки.

Обозначим за  $L_1, L_2, L_3$  проекции кинетического момента тела — носителя  $S_0$  на специальные оси Харламова,  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  — проекции вектора восходящей вертикали  $\boldsymbol{\gamma}$  на специальные оси,  $k_1, k_2$  — проекции гиристатического момента  $\mathbf{s}$ . Согласно уравнениям (1.3.1), имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_2 &= \frac{A_2\omega_2x_1 - A_1\omega_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_3 &= A_3\omega_3, \\ \nu_1 &= \frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_2 &= \frac{\gamma_2x_1 - \gamma_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_3 &= \gamma_3, \\ k_1 &= \frac{s_1x_1 + s_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & k_2 &= \frac{s_2x_1 - s_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \end{aligned}$$

Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma &= Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & c &= \frac{1}{A_3}, \\ a &= \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & b &= \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}. \end{aligned}$$

Отметим, что с учетом условий (1.2.1), мы имеем следующее соотношение:

$$c = \frac{1}{A_3} = \frac{A_1x_1^2 + A_2x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}.$$

В переменных  $L_1, L_2, L_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$  уравнения Эйлера–Пуассона (1.2.3), (1.2.4)

записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_1 &= -bL_3 \left( L_1 - \frac{ck_2}{b} \right), \\
\dot{L}_2 &= (a - c) L_1 L_3 + bL_2 L_3 - ck_1 L_3 + \nu_3 \Gamma, \\
\dot{L}_3 &= (c - a) L_1 L_2 + b (L_1^2 - L_2^2) + (k_1 b - k_2 a) L_1 + \\
&\quad + (k_1 c - k_2 b) L_2 - \nu_2 \Gamma, \\
\dot{\nu}_1 &= cL_3 \nu_2 - (cL_2 + bL_1) \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= (aL_1 + bL_2) \nu_3 - cL_3 \nu_1, \\
\dot{\nu}_3 &= -(aL_1 + bL_2) \nu_2 + (cL_2 + bL_1) \nu_1.
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Из первого уравнения системы (1.3.2) следует частный интеграл Гесса–Сретенского (1.2.2), который имеет вид

$$L_1 \equiv \frac{ck_2}{b}. \tag{1.3.3}$$

Инвариантное многообразие (1.3.3) (или, в других обозначениях, (1.2.2)) вместе с условиями (1.2.1) определяет интегрируемый случай Гесса–Сретенского в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой. На уровне частного интеграла Гесса–Сретенского (1.3.3) уравнения (1.3.2) упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{L}}_2 &= b\tilde{L}_2 L_3 + (F - Gc) L_3 + \nu_3 \Gamma, \\
\dot{\tilde{L}}_3 &= -b\tilde{L}_2^2 - (F - Gc) \tilde{L}_2 - \nu_2 \Gamma, \\
\dot{\nu}_1 &= cL_3 \nu_2 - c\tilde{L}_2 \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= -cL_3 \nu_1 + b\tilde{L}_2 \nu_3 + F \nu_3, \\
\dot{\nu}_3 &= c\tilde{L}_2 \nu_1 - b\tilde{L}_2 \nu_2 - F \nu_2.
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\tilde{L}_2 = L_2 + k_2, \quad F = \frac{(ac - b^2) k_2}{b}, \quad G = \frac{ck_2}{b} + k_1.$$

Система уравнений (1.3.4) обладает тремя первыми интегралами:

$$\frac{c}{2} \left( \tilde{L}_2^2 + L_3^2 \right) + \Gamma \nu_1 = E; \quad G \nu_1 + \tilde{L}_2 \nu_2 + L_3 \nu_3 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{1.3.5}$$

#### 1.4. Обезразмеривание уравнений. Приведение системы к одному уравнению второго порядка

Произведем обезразмеривание системы уравнений (1.3.4) и первых интегралов (1.3.5). Для этого введем безразмерные компоненты кинетического момента  $y$  и  $z$  по формулам:

$$\tilde{L}_2 = y\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}, \quad L_3 = z\sqrt{\frac{\Gamma}{c}},$$

а также безразмерное время  $\tau = t\sqrt{\Gamma c}$  и безразмерные параметры

$$d_1 = \frac{b}{c}, \quad A = \frac{F}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad B = G\sqrt{\frac{\Gamma}{c}}.$$

Введем также безразмерные константы первых интегралов по формулам

$$h = \frac{E}{\Gamma}, \quad p = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

Таким образом, уравнения движения гиростата (1.3.4) в безразмерной форме записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z + (A - B) z + \nu_3, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 - (A - B) y - \nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z\nu_2 - y\nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= -z\nu_1 + d_1 y\nu_3 + A\nu_3, \\ \frac{d\nu_3}{d\tau} &= y\nu_1 - d_1 y\nu_2 - A\nu_2. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

В свою очередь, первые интегралы (1.3.5) переписываются в следующей форме

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2) + \nu_1 = h; \quad B\nu_1 + y\nu_2 + z\nu_3 = p; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (1.4.2)$$

Отметим, что для безразмерных параметров  $A, B, h, p, d_1$  справедливы следующие ограничения (см. [3]):

$$h \in [-1, +\infty), \quad A, B, p \in (-\infty, +\infty), \quad d_1 \in (-1, 0].$$

Получим из системы обезразмеренных уравнений (1.3.4) с использовани-

ем первых интегралов (1.3.5) линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к нахождению общего решения которого и сводится решение поставленной задачи. Для этого сначала умножим первое уравнение системы (1.3.4) на  $y$ , второе — на  $z$  и сложим их, получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{y^2 + z^2}{2} \right) = y\nu_3 - z\nu_2. \quad (1.4.3)$$

Из первого из интегралов (1.4.2) находим, что

$$\nu_1 = h - \frac{y^2 + z^2}{2},$$

откуда вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1 - \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2, \\ y\nu_2 + z\nu_3 &= p - B \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Из очевидного тождества

$$(y^2 + z^2) (\nu_2^2 + \nu_3^2) = (y\nu_2 + z\nu_3)^2 + (y\nu_3 - z\nu_2)^2, \quad (1.4.4)$$

получаем

$$\begin{aligned} (y\nu_3 - z\nu_2)^2 &= \left( 1 - \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2 \right) - \left( p - B \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right) \right)^2 \times \\ &\times (y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Будем считать, что

$$\begin{aligned} y\nu_3 - z\nu_2 &= -\sqrt{\left( 1 - \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2 \right) - \left( p - B \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right) \right)^2} \times \\ &\times \sqrt{y^2 + z^2} \end{aligned}$$

(выбор знака перед корнем, стоящим в правой части этого выражения, не влияет на дальнейшие рассуждения и результаты). С учетом полученного равенства,

выражение (1.4.3) записывается следующим образом:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{y^2 + z^2}{2} \right) = \sqrt{\left( 1 - \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2 \right) - \left( p - B \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right) \right)^2} \times \\ \times \left( -\sqrt{y^2 + z^2} \right).$$

Умножая первое и второе уравнения системы (1.4.1) на  $-z$  и  $y$  соответственно и складывая их, получаем:

$$y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} = -d_1 y (y^2 + z^2) - (A - B) (y^2 + z^2) - \left( p - B \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right) \right).$$

Произведем переход к переменным  $x$ ,  $\varphi$  («полярным координатам»), задав их соотношениями:

$$y = x \cos \varphi, \quad z = x \sin \varphi. \quad (1.4.5)$$

Зависимость новых переменных  $x$ ,  $\varphi$  от безразмерного времени  $\tau$  определяется системой из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x \frac{dx}{d\tau} = -\sqrt{x^2 \left( 1 - \left( h - \frac{x^2}{2} \right)^2 \right) - \left( p - B \left( h - \frac{x^2}{2} \right) \right)^2}, \quad (1.4.6) \\ x^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = -d_1 x^3 \cos \varphi - (A - B) x^2 - \left( p - B \left( h - \frac{x^2}{2} \right) \right).$$

Разделив одно уравнение системы (1.4.6) на другое, мы получаем дифференциальное уравнение, которое определяет зависимость  $\varphi = \varphi(x)$ :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d_1 x^3 \cos \varphi + \left( A - \frac{B}{2} \right) x^2 + (p - Bh)}{x \sqrt{x^2 \left( 1 - \left( h - \frac{x^2}{2} \right)^2 \right) - \left( p - B \left( h - \frac{x^2}{2} \right) \right)^2}}. \quad (1.4.7)$$

Получение уравнения (1.4.7) из системы (1.4.6) осуществимо только в предположении, что  $x \neq \text{const}$ . Тем самым исключается из рассмотрения случай  $\nu_1 = \text{const}$  или, в других обозначениях,  $y^2 + z^2 = \text{const}$ .

Рассмотрим преобразование

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

В результате его применения уравнение (1.4.7) переписывается в форме уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = & - \frac{d_1 x^3 - \left(A - \frac{B}{2}\right) x^2 - (p - Bh)}{2x \sqrt{x^2 \left(1 - \left(h - \frac{x^2}{2}\right)^2\right) - \left(p - B \left(h - \frac{x^2}{2}\right)\right)^2}} w^2 + \\ & + \frac{d_1 x^3 + \left(A - \frac{B}{2}\right) x^2 + (p - Bh)}{2x \sqrt{x^2 \left(1 - \left(h - \frac{x^2}{2}\right)^2\right) - \left(p - B \left(h - \frac{x^2}{2}\right)\right)^2}}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Согласно общей теории дифференциальных уравнений (см. [18]), уравнение Риккати вида

$$\frac{dw}{dx} = f_2(x) w^2 + f_0(x),$$

может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению второго порядка при помощи замены

$$u(x) = \exp \left( - \int f_2(x) w(x) dx \right).$$

В результате замены переменной получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u = 0, \quad a(x) = -\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx}, \quad b(x) = f_0 f_2. \quad (1.4.9)$$

В нашем случае

$$f_2 = -\frac{d_1 x^3 - \left(A - \frac{B}{2}\right) x^2 - (p - Bh)}{2x \sqrt{x^2 \left(1 - \left(h - \frac{x^2}{2}\right)^2\right) - \left(p - B \left(h - \frac{x^2}{2}\right)\right)^2}},$$

$$f_0 = \frac{d_1 x^3 + \left(A - \frac{B}{2}\right) x^2 + (p - Bh)}{2x \sqrt{x^2 \left(1 - \left(h - \frac{x^2}{2}\right)^2\right) - \left(p - B \left(h - \frac{x^2}{2}\right)\right)^2}}.$$

Получение уравнения (1.4.9) из уравнения (1.4.8) требует выполнения условия  $f_2 \neq 0$ . Так как при переходе к уравнению (1.4.7) мы указали, что случай  $x = \text{const}$  нами не рассматривается, то условие  $f_2 = 0$  эквивалентно одновременному выполнению трех соотношений

$$A = \frac{B}{2}, \quad p = Bh, \quad d_1 = 0.$$

Отметим, что в задаче о движении гиростата с неподвижной точкой  $d_1 \neq 0$ . Действительно, так как частный интеграл Гесса (1.3.3) имеет вид

$$L_1 \equiv \frac{ck_2}{b} = \frac{k_2}{d_1},$$

то при  $d_1 \neq 0$  частный интеграл Гесса не существует. Таким образом, здесь и далее считаем, что  $d_1 \in (-1, 0)$ . Отсюда следует, что  $f_2 \neq 0$ . Окончательно, дифференциальное уравнение второго порядка, к нахождению общего решения которого сводится решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в интегрируемом случае Гесса–Сретенского, выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u = 0, \quad (1.4.10)$$

$$\begin{aligned}
a(x) &= \frac{P_9(x)}{x^6 + (B^2 - 4h)x^4 + 4(-B^2h + Bp + h^2 - 1)x^2 + (p - Bh)^2} \times \\
&\quad \times \frac{1}{x(2d_1x^3 - (2A - B)x^2 - 2p + 2Bh)}, \\
b(x) &= \frac{2d_1x^3 - (2A - B)x^2 - 2p + 2Bh}{x^6 + (B^2 - 4h)x^4 + 4(-B^2h + Bp + h^2 - 1)x^2 + (p - Bh)^2} \times \\
&\quad \times \frac{2d_1x^3 + (2A - B)x^2 + 2p - 2Bh}{4x^2}, \\
P_9(x) &= 2d_1x^9 + 2(B - 2A)x^8 + (B^3 - 8p - 2AB^2 + 8Ah + 4Bh)x^6 + \\
&\quad + 8d_1(4B^2h - 4Bp - 4h^2 + 4)x^5 + 6(B^2 - 4h)(Bh - p)x^4 - \\
&\quad - 16d_1(Bh - p)^2x^3 + 8(Bh - p)^3 + 4(Bh - p) \times \\
&\quad \times (2ABh - 5B^2h - 2Ap + 5B + 4h^2 - 4)x^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.4.1** *Решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.4.10) с рациональными коэффициентами.*

Действительно, если нам удалось найти в явном виде общее решение дифференциального уравнения второго порядка (1.4.10)

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x),$$

то, используя это решение, при помощи обратных замен переменной, мы можем получить зависимость  $\varphi = \varphi(x)$ . Из нее, по формулам (1.4.5), мы находим явные соотношения для  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ . Далее, система уравнений

$$y(x)\nu_2 + z(x)\nu_3 = p - B \left( h - \frac{x^2}{2} \right),$$

$$y(x)\nu_3 - z(x)\nu_2 = -\sqrt{x^2 \left( 1 - \left( h - \frac{x^2}{2} \right)^2 \right) - \left( p - B \left( h - \frac{x^2}{2} \right) \right)^2}$$

позволяет нам получить выражения для переменных  $\nu_3$  и  $\nu_2$  как функций незави-

симой переменной  $x$ . Зависимость  $\nu_1 = \nu_1(x)$  определяется из первого интеграла

$$\nu_1 = h - \frac{x^2}{2},$$

а зависимость  $x = x(\tau)$  определяется из первого уравнения системы (1.4.6) при помощи квадратур.

Таким образом, решение задачи о движении тяжелого гиристора с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.4.10), коэффициенты которого являются рациональными функциями независимой переменной  $x$ . Следовательно, можно поставить задачу о существовании лиувиллевых решений (решений, которые выражаются через лиувиллевы функции) у данного дифференциального уравнения. Необходимые и достаточные условия существования лиувиллевых решений можно получить при помощи применения к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с рациональными коэффициентами так называемого алгоритма Ковачича [60].

### 1.5. Описание алгоритма Ковачича

В данном разделе дается краткое описание алгоритма Ковачича, аналогично тому, как это было сделано в работах А.С. Кулешова [3, 28], Г.А. Чернякова [31, 51] и М.О. Ицковича [19, 20].

Рассмотрим дифференциальное поле  $\mathbb{C}(x)$  рациональных функций одного (в общем случае комплексного) переменного  $x$ . Здесь и далее используем общепринятые обозначения  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$  для множеств целых и рациональных чисел соответственно. Наша цель — найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a(x) \frac{dz}{dx} + b(x) z = 0, \quad (1.5.1)$$

где  $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$ . В работе [60] был предложен алгоритм, который позволяет явно находить лиувиллевы решения дифференциального уравнения (1.5.1), то есть решения, которые выражаются в терминах так называемых лиувиллевых функций. Основное преимущество алгоритма Ковачича заключается в том, что он не только позволяет установить существование или отсутствие лиувиллевых

решений уравнения (1.5.1), но и получить явный вид этого решения, если оно существует. Функция называется лиувиллевой, если она является элементом лиувиллева поля, которое определяется следующим образом.

**Определение 1.5.1** Пусть  $F$  – дифференциальное поле функций одного комплексного переменного  $x$ , которое содержит  $\mathbb{C}(x)$ , то есть  $F$  – поле характеристики ноль с операцией дифференцирования  $(\ )'$ , действующей на элементы этого поля по правилу  $(a + b)' = a' + b'$ ,  $(ab)' = a'b + ab'$  для любых  $a$  и  $b$  из  $F$ . Поле  $F$  называется лиувиллевым, если существует последовательность (башня) конечных расширений полей

$$\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n = F,$$

получающаяся присоединением одного элемента, такая, что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$$

(то есть  $F_i$  образуется присоединением экспоненты неопределенного интеграла над  $F_{i-1}$ ) или

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \alpha' \in F_{i-1}$$

(то есть  $F_i$  образуется присоединением интеграла над  $F_{i-1}$ ) или  $F_i$  является конечным алгебраическим расширением над  $F_{i-1}$  (то есть  $F_i = F_{i-1}(\alpha)$  и  $\alpha$  удовлетворяет полиномиальному уравнению конечной степени вида

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0,$$

где  $a_j \in F_{i-1}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  и не все равны нулю).

Таким образом, лиувиллевы решения строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения. Можно сказать, что лиувиллевы решения наиболее точно соответствуют понятию «решение в квадратурах».

При помощи замены переменной, выполняемой по следующей формуле

$$y(x) = z(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int a(x) dx\right), \quad (1.5.2)$$

уравнение (1.4.10) принимает форму

$$y'' = r(x)y, \quad r(x) = \frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2 - b. \quad (1.5.3)$$

Здесь и далее мы предполагаем, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому применяется алгоритм Ковачича, имеет вид (1.5.3). Следующая теорема, доказанная Дж. Ковачичем в [60], определяет структуру решений данного дифференциально уравнения.

**Теорема 1.5.1** *Для дифференциального уравнения (1.5.3) возможны только следующие четыре случая*

1. Дифференциальное уравнение (1.5.3) имеет решение вида

$$\eta = \exp \left( \int \omega(x) dx \right),$$

где  $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$  (лиувиллево решение типа 1).

2. Дифференциальное уравнение (1.5.3) имеет решение вида

$$\eta = \exp \left( \int \omega(x) dx \right),$$

где  $\omega(x)$  – алгебраическая функция степени 2 над  $\mathbb{C}(x)$ , и Случай 1 не имеет места (лиувиллево решение типа 2).

3. Все решения дифференциального уравнения (1.5.3) являются алгебраическими над  $\mathbb{C}(x)$  и Случаи 1 и 2 не имеют места. Решение уравнения (1.5.3) имеет в данном случае вид

$$\eta = \exp \left( \int \omega(x) dx \right),$$

где  $\omega(x)$  – алгебраическая функция степени 4, 6 или 12 над  $\mathbb{C}(x)$  (лиувиллево решение типа 3).

4. Дифференциальное уравнение (1.5.3) не имеет лиувиллевых решений.

Для того, чтобы один из первых трех случаев, которые были описаны в 1.5.1 имел место, функция  $r(x)$  из правой части уравнения (1.5.3) должна

удовлетворять некоторым условиям. Отметим, что эти условия являются необходимыми, но не достаточными. Например, если условия существования для Случая 1 из 1.5.1 нарушены, то следует переходить к проверке условий, соответствующих Случаям 2 и 3. Если же условия выполняются, то мы должны искать решение уравнения (1.5.3) именно в той форме, которая описана для соответствующего случая; однако, стоит отметить, что существование такого решения не гарантируется. Для того, чтобы разъяснить смысл необходимых условий, налагаемых на функцию  $r$ , вспомним некоторые утверждения из комплексного анализа.

Напомним, что любая однозначная аналитическая функция  $f$  комплексного переменного  $z$  может быть разложена в ряд Лорана в окрестности любой точки  $a$  следующим образом

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \frac{a_{-2}}{(z - a)^2} + \dots$$

Часть ряда Лорана, содержащая отрицательные степени аргумента  $z - a$  называется главной частью ряда Лорана. Точка  $a$  называется полюсом порядка  $n$  функции  $f(z)$ , если главная часть ряда Лорана функции  $f$  в окрестности точки  $a$  содержит конечное число членов, последний из которых имеет вид

$$\frac{a_{-n}}{(z - a)^n}.$$

Пусть  $f(z)$  — рациональная функция аргумента  $z$ . Тогда  $a$  — полюс порядка  $n$  функции  $f(z)$ , если  $a$  — корень кратности  $n$  многочлена, который стоит в знаменателе  $f(z)$ . Порядок рациональной функции  $f(z)$  в точке  $z = \infty$  определяется как разность степеней знаменателя и числителя.

Следующая теорема, которая была доказана в [60] формулирует условия, которые являются необходимыми для того, чтобы имел место один из первых трех случаев, определенных в 1.5.1.

**Теорема 1.5.2** *Для дифференциального уравнения (1.5.3) следующие условия являются необходимыми для того, чтобы один из трех первых случаев, перечисленных 1.5.1, имел место, то есть чтобы у уравнения (1.5.3) существовало ливиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.*

1. Каждый полюс функции  $r$  имеет порядок 1 или четный порядок. Порядок  $r$  в  $\infty$  четный или выше, чем второй.
2.  $r$  имеет по меньшей мере один полюс или порядка 2 или нечетного порядка, большего чем 2.
3.  $r$  не имеет полюсов порядка большего, чем 2. Порядок  $r$  в  $\infty$  равен по меньшей мере 2. Если разложение функции  $r$  в сумму простейших дробей имеет вид

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j},$$

то

$$\sum_j \beta_j = 0, \quad \sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q} \text{ для любого } i,$$

и, кроме того,

$$\sqrt{1 + 4\gamma}, \quad \text{где } \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j.$$

Для того, чтобы найти лиувиллево решения типа 1 дифференциального уравнения (1.5.3), алгоритм Ковачича формулируется следующим образом (см. [3, 60]). Предположим, что необходимые условия существования решения в Случае 1 выполнены. Обозначим множество конечных полюсов функции  $r(x)$  через  $\Gamma$ .

**Шаг 1.** Для каждого  $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$  определим рациональную функцию  $[\sqrt{r}]_c$  и два комплексных числа  $\alpha_c^+$  и  $\alpha_c^-$  следующим образом.

( $c_1$ ) Если  $c \in \Gamma$  — полюс порядка 1, то

$$[\sqrt{r}]_c = 0, \quad \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

( $c_2$ ) Если  $c \in \Gamma$  — полюс порядка 2, то

$$[\sqrt{r}]_c = 0.$$

Обозначим за  $b$  коэффициент при  $\frac{1}{(x - c)^2}$  в разложении функции  $r(x)$

на простейшие дроби. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}.$$

( $c_3$ ) Если  $c \in \Gamma$  — полюс порядка  $2\nu \geq 4$  (порядок полюса должен быть четным в силу того, что необходимые условия из 1.5.2, выполняются), тогда  $[\sqrt{r}]_c$  является суммой слагаемых, которые включают в себя все  $\frac{1}{(x-c)^i}$  для  $2 \leq i \leq \nu$  в разложении функции  $\sqrt{r}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $c$ . Для функции  $[\sqrt{r}]_c$  имеются два значения, которые отличаются знаком; одно из них может быть выбрано. Таким образом,

$$[\sqrt{r}]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \dots + \frac{d}{(x-c)^2}.$$

Пусть  $b$  — коэффициент при  $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$  в выражении  $r - [\sqrt{r}]_c^2$ . Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{b}{a} + \nu \right).$$

( $\infty_1$ ) Если порядок функции  $r(x)$  в  $x = \infty$  больше, чем 2, то

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 1, \quad \alpha_\infty^- = 0.$$

( $\infty_2$ ) Если порядок функции  $r(x)$  в  $x = \infty$  равен 2, то

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0.$$

Пусть  $b$  — коэффициент при  $\frac{1}{x^2}$  в разложении в ряд Лорана функции  $r(x)$  в  $x = \infty$ . Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}.$$

( $\infty_3$ ) Если порядок функции  $r(x)$  в  $x = \infty$  равен  $-2\nu \leq 0$  (порядок должен быть четным в силу того, что необходимые условия из 1.5.2, выполняются), тогда функция  $[\sqrt{r}]_\infty$  является суммой членов со степенями  $x^i$ ,  $0 \leq i \leq \nu$  разложения в ряд Лорана функции  $\sqrt{r}$  в  $x = \infty$  (можно

выбрать один из двух вариантов). Тогда,

$$[\sqrt{r}]_{\infty} = ax^{\nu} + \dots + d.$$

Пусть  $b$  — коэффициент при  $x^{\nu-1}$  в выражении  $r - ([\sqrt{r}]_{\infty})^2$ . Тогда

$$\alpha_{\infty}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{b}{a} - \nu \right).$$

**Шаг 2.** Для каждого семейства  $s = (s(c))_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$ , где  $s(c)$  может быть либо знаком  $+$ , либо знаком  $-$ , положим

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}. \quad (1.5.4)$$

Если  $d$  — неотрицательное целое число, то тогда мы составляем функцию

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left( s(c) [\sqrt{r}]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x-c} \right) + s(\infty) [\sqrt{r}]_{\infty} \quad (1.5.5)$$

Если  $d$  не является неотрицательным целым числом, то тогда семейство  $s$  исключается из рассмотрения. Если все наборы  $s$  оказались неподходящими, то тогда Случай 1 не имеет места.

**Шаг 3.** Для каждого из семейств  $s$ , отобранного на Шаге 2, мы ищем многочлен  $P$  степени  $d$  с комплексными коэффициентами (значение  $d$  определяется формулой (1.5.4)), удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - r) P = 0. \quad (1.5.6)$$

Если такой многочлен нашелся, то

$$\eta = P \exp \left( \int \theta(x) dx \right)$$

является искомым решением дифференциального уравнения (1.5.3). Если для всех наборов  $s$ , которые мы определили на Шаге 2, многочлен  $P$  найти не удалось, то тогда Случай 1 не имеет места для дифференциального уравнения (1.5.3).

Теперь опишем алгоритм Ковачича для поиска у дифференциального уравнения (1.5.3) решений типа 2. Обозначим множество конечных полюсов функции  $r(x)$  через  $\Gamma$ .

**Шаг 1.** Для каждого  $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$  определим множество  $E_c$  следующим образом.

( $c_1$ ) Если  $c \in \Gamma$  — полюс порядка 1, то

$$E_c = \{4\}.$$

( $c_2$ ) Если  $c \in \Gamma$  — полюс порядка 2, и если  $b$  — коэффициент при  $\frac{1}{(x-c)^2}$  в разложении  $r(x)$  на простейшие дроби, то

$$E_c = \left\{ \left( 2 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

( $c_3$ ) Если  $c \in \Gamma$  — полюс порядка  $\nu > 2$ , то

$$E_c = \{\nu\}.$$

( $\infty_1$ ) Если  $r(x)$  имеет порядок  $> 2$  в  $x = \infty$ , то

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

( $\infty_2$ ) Если  $r(x)$  имеет порядок равный 2 в  $x = \infty$ , и  $b$  — коэффициент при  $\frac{1}{x^2}$  в разложении в ряд Лорана функции  $r$  в  $x = \infty$ , то

$$E_\infty = \left\{ \left( 2 + k\sqrt{1+4b} \right) \cap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

( $\infty_3$ ) Если  $r(x)$  имеет порядок  $\nu < 2$  в  $x = \infty$ , то

$$E_\infty = \{\nu\}.$$

**Шаг 2.** Рассмотрим семейства  $s = (e_\infty, e_c)$ ,  $c \in \Gamma$ , в которых  $e_c \in E_c$ ,  $e_\infty \in E_\infty$  и как минимум одно из этих чисел — нечетное. Определим

$$d = \frac{1}{2} \left( e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right). \quad (1.5.7)$$

Если  $d$  — неотрицательное целое число, то соответствующее семейство должно быть сохранено, в противном случае оно отбрасывается.

**Шаг 3.** Для каждого из семейств, оставленного на Шаге 2, мы составляем рациональную функцию

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x - c} \quad (1.5.8)$$

и ищем многочлен  $P$  степени  $d$  (постоянная  $d$  определяется формулой (1.5.7)) такой, что

$$\begin{aligned} P''' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r) P' + \\ + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r') P = 0. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Если нам удалось найти такой многочлен  $P$ , положим

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P}$$

и пусть  $\omega$  — решение квадратного уравнения (алгебраического уравнения степени 2) следующего вида:

$$\omega^2 - \varphi\omega + \frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - r = 0.$$

Тогда

$$\eta = \exp \left( \int \omega(x) dx \right) -$$

решение дифференциального уравнения (1.5.3). Если успех не достигнут, то Случай 2 не имеет места для дифференциального уравнения (1.5.3).

Похожим образом формулируется алгоритм Ковачича для поиска у дифференциального уравнения (1.5.3) лиувиллевых решений типа 3. В следующем разделе мы применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.4.10).

## 1.6. Применение алгоритма Ковачича

Исследуемое линейное дифференциальное уравнение имеет вид (1.4.10).  
Выполним в нем замену переменной по формуле

$$y(x) = u(x) \exp \left( \frac{1}{2} \int a(x) dx \right).$$

Тогда уравнение (1.4.10) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r(x)y, \quad r(x) = \frac{1}{2} \frac{da}{dx} + \frac{1}{4} a^2 - b. \quad (1.6.1)$$

В данном случае функция  $r(x)$  имеет следующий вид:

$$r(x) = \frac{U(x)}{V(x)}, \quad (1.6.2)$$

где многочлены, стоящие в знаменателе и числителе, выглядят так

$$V(x) = 16 \left( d_1 x^3 - \left( A - \frac{B}{2} \right) x^2 - (p - Bh) \right)^2 \times \\ \times \left( x^6 + (B^2 - 4h) x^4 + 4(-B^2 h + Bp + h^2 - 1) x^2 + (p - Bh)^2 \right)^2,$$

$$U(x) = u_0 x^{16} + u_1 x^{15} + u_2 x^{14} + u_3 x^{13} + u_4 x^{12} + u_5 x^{11} + u_6 x^{10} + u_7 x^9 + \\ + u_8 x^8 + u_9 x^7 + u_{10} x^6 + u_{11} x^5 + u_{12} x^4 + u_{13} x^3 + u_{14} x^2 + u_{15} x + u_{16},$$

$$u_0 = -4d_1^2 (1 + 4d_1^2),$$

$$u_1 = -8d_1 (1 + 2d_1^2) (B - 2A),$$

$$u_2 = -8d_1^2 (2d_1^2 - 1) (B^2 - 4h),$$

$$u_3 = 16d_1 (2d_1^2 + 5) (p - Bh) - 4d_1 (B - 2A) (1 + 4d_1^2) (B^2 - 4h) + \\ + 4d_1 (B - 2A)^3,$$

$$u_4 = 32d_1^2 (7 - 2d_1^2) (B(p - Bh) - 1 + h^2) + 2(B - 2A)^2 (B^2 - 4h) + \\ + 8(B - 2A) (p - Bh) + (B - 2A)^4,$$

$$\begin{aligned}
u_5 &= 32d_1^3 (B^2 - 4h) (p - Bh) - 64d_1^3 B (B - 2A) (p - Bh) + \\
&+ 152d_1 (B^2 - 4h) (p - Bh) + 8d_1 (6A + 17B) (B - 2A) (p - Bh) - \\
&- 8d_1 (B^2 - 4h)^2 (B - 2A) + 4d_1 (B^2 - 4h) (B - 2A)^3 - \\
&- 32d_1 (B - 2A) (5 - 2d_1^2) (1 - h^2), \\
u_6 &= 32 (1 + 17d_1^2 - 2d_1^4) (p - Bh)^2 + 96d_1^2 B (B^2 - 4h) (p - Bh) + \\
&+ 16 (B^2 - 4h) (B - 2A) (p - Bh) + 8 (B - 2A)^2 (5B + 2A) (p - Bh) - \\
&- 32 \left( (B - 2A)^2 + 3d_1^2 (B^2 - 4h) \right) (1 - h^2) + 4h (B - 2A)^2 \times \\
&\times (B^2 + 4AB - 4A^2) - 4 (B - 2A)^2 (4 + AB^2 (B - A)), \\
u_7 &= 64d_1 \left( (5 + 2d_1^2) B - (d_1^2 - 8) (B - 2A) \right) (p - Bh)^2 - \\
&- 64d_1 (5 + 2d_1^2) (1 - h^2) (p - Bh) + \\
&+ 16Bd_1 (B - 2A) \left( (B - 2A)^2 + B^2 - 4h \right) (p - Bh) - \\
&- 24d_1 (B^2 - 4h) \left( (B - 2A)^2 - 4 (B^2 - 4h) \right) (p - Bh) - \\
&- 16d_1 (1 - h^2) (B - 2A) \left( (B - 2A)^2 + B^2 - 4h \right), \\
u_8 &= 8 (24B^2 d_1^2 + (40d_1^2 + 7) (B^2 - 4h) + 2 (B - 2A) (5B - 18A)) \times \\
&\times (p - Bh)^2 + 8 (B - 2A) (3B^4 - AB^3 + 2A^2 B^2 - 4A^3 B + 40) \times \\
&\times (p - Bh) - 128 (3Bd_1^2 + 2 (B - 2A)) (1 - h^2) (p - Bh) - \\
&- 32h (B - 2A) (5B^2 + 2AB - 4A^2) (p - Bh) + 192d_1^2 (1 - h^2)^2 - \\
&- 4 (1 - h^2) (B - 2A)^2 \left( (B - 2A)^2 + 2 (B^2 - 4h) \right), \\
u_9 &= -128d_1 (2 - d_1^2) (p - Bh)^3 + 672Bd_1 (B^2 - 4h) (p - Bh)^2 - \\
&- 1088d_1 h (B - 2A) (p - Bh)^2 + 64d_1 (B - 2A) (A^2 + 2AB + 3B^2) \times \\
&\times (p - Bh)^2 + 96d_1 (1 - h^2) \left( (B - 2A)^2 - 7 (B^2 - 4h) \right) (p - Bh),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{10} &= -32 (B - 22A - 28Bd_1^2) (p - Bh)^3 + 12 (B^2 - 4h)^2 (p - Bh)^2 - \\
&\quad - 64 (5 + 14d_1^2) (1 - h^2) (p - Bh)^2 + 80 (B^2 - 4h) (B - 2A)^2 (p - Bh)^2 + \\
&\quad + 128B (B - 2A) (B^2 - 4h) (p - Bh)^2 - 4 (B - 2A)^3 (7B + 2A) \times \\
&\quad \times (p - Bh)^2 - 32 (1 - h^2) (B - 2A) \left( 4 (B^2 - 4h) - (B - 2A)^2 \right) (p - Bh), \\
u_{11} &= 32d_1 (48B^2 + 9 (B^2 - 4h) + (B - 2A) (17B + 6A)) (p - Bh)^3 - \\
&\quad - 128d_1 (1 - h^2) (29B - 10A) (p - Bh)^2 + 1536d_1 (1 - h^2)^2 (p - Bh), \\
u_{12} &= 16 (35 + 32d_1^2) (p - Bh)^4 + 32 (B + 4A) (B^2 - 4h) (p - Bh)^3 - \\
&\quad - 32 (B - 2A)^3 (p - Bh)^3 + 192B (B - 2A) (3B - 2A) (p - Bh)^3 - \\
&\quad - 96 (1 - h^2) (B^2 - 4h + 2 (B - 2A) (5B - 2A)) (p - Bh)^2 + \\
&\quad + 384 (B - 2A) (1 - h^2)^2 (p - Bh), \\
u_{13} &= -64d_1 (p - Bh)^3 (36 (1 - h^2) + (14A - 43B) (p - Bh)), \\
u_{14} &= -192 ((5h - (4B - 3A) (B - A)) (p - Bh) + 2 (1 - h^2) (B - 2A)) \times \\
&\quad \times (p - Bh)^3, \\
u_{15} &= 1152d_1 (p - Bh)^5, \\
u_{16} &= -192 (p - Bh)^4 (1 - h^2 - 2 (B - A) (p - Bh)).
\end{aligned}$$

Предположим, что все корни полиномов, которые входят в произведение в правой части функции  $V(x)$  — различные. Очевидно, что функция  $r(x)$  обладает девятью конечными полюсами второго порядка. Обозначим корни многочлена шестой степени из произведения, стоящего в правой части выражения для  $V(x)$

$$P_6(x) = x^6 + (B^2 - 4h) x^4 + 4 (-B^2h + Bp + h^2 - 1) x^2 + (p - Bh)^2 \quad (1.6.3)$$

через  $x_1, \dots, x_6$ . Так как данный многочлен включает в себя только члены с четными степенями, то его корни расположены симметрично относительно нуля:

$$x_1 = -x_2, \quad x_3 = -x_4, \quad x_5 = -x_6.$$

Обозначим за  $x_7, x_8, x_9$ . корни кубического многочлена

$$P_3(x) = d_1 x^3 - \left( A - \frac{B}{2} \right) x^2 - (p - Bh). \quad (1.6.4)$$

Разложение функции  $r(x)$  в сумму простейших дробей имеет вид:

$$r(x) = -\frac{3}{16} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{(x-x_i)^2} + \frac{3}{4} \sum_{i=7}^9 \frac{1}{(x-x_i)^2} + \sum_{i=1}^9 \frac{\gamma_i(x_i)}{(x-x_i)}.$$

Коэффициенты  $\gamma_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, 9$  имеют довольно громоздкий вид и здесь не приведены явно. Отметим особенности разложения  $r(x)$  в сумму простейших дробей:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x-x_i)^2}$ ,  $i = 1, \dots, 6$  одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x-x_i)^2}$ ,  $i = 7, 8, 9$  одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 7, 8, 9.$$

3. Разложение функции  $r(x)$  в окрестности  $x = \infty$  имеет вид

$$r(x) = -\frac{1+4d_1^2}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Отсюда следует, что  $b_\infty = -\frac{1}{4} - d_1^2$ .

Необходимые условия для существования лиувиллевых решений первого типа, указанные в теореме 1.5.2, выполнены. Поскольку точка  $x = \infty$  для функции  $r(x)$  является полюсом второго порядка, то для применения алгоритма Ковачича нам необходимо вычислить величины  $\alpha_\infty^\pm$  по формулам

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1+4b_\infty} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4d_1^2}.$$

Ранее мы определили, что величина  $d_1$  можем принимать значения в диапазоне  $(-1, 0)$ . Значит, при любом допустимом значении параметра  $d_1$  величина

$\alpha_\infty^\pm$  будет комплексным числом, откуда следует невозможность существования лиувиллевых решений первого типа у уравнения (1.4.10) (согласно шагу 2 алгоритма для поиска решений первого типа, число  $d$ , вычисляемое по формуле (1.5.4) должно быть целым).

Это же ограничение на параметр  $d_1$  исключает возможность существования лиувиллевых решений третьего типа. Действительно, так как коэффициент  $b_\infty$  совпадает с величиной  $\gamma$ , которая вычисляется при проверке необходимых условий, то нарушается одно из необходимых условий для существования решений типа 3:

$$\sqrt{1 + 4\gamma} = \sqrt{1 + 4b_\infty} = \sqrt{-4d_1^2} \in \mathbb{C}.$$

Значит, справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.6.1** *В случае, когда все корни многочленов (1.6.3), (1.6.4) различны, то в задаче о движении тяжелого гиригостата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского не существует лиувиллевых решений типа 1 и типа 3.*

Рассмотрим возможность существования лиувиллевых решений второго типа у дифференциального уравнения (1.4.10). Поскольку необходимые условия существования из теоремы 1.5.2 выполнены, приступим к пошаговому применению алгоритма Ковачича согласно предыдущему разделу.

**Шаг 1.** Определяем множества  $E_c$  и  $E_\infty$  для каждого из полюсов функции  $r(x)$ :

1. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 6.$$

2. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 7, 8, 9$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 7, 8, 9.$$

3. Множество  $E_\infty$  состоит из одного элемента

$$E_\infty = \{2\}.$$

**Шаг 2.** Составим из элементов полученных на предыдущем шаге множеств

$E_\infty, E_{x_i}, i = 1, \dots, 9$  наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_9}),$$

в которых хотя бы одно из чисел является нечетным. Для каждого из таких наборов вычислим по формуле (1.5.7) число  $d$  и оставим для дальнейшего рассмотрения те, для которых число  $d$  получилось неотрицательным целым. После проверки всех наборов получается, что существует один набор

$$s_1 = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2),$$

значение числа  $d$  для которого равно единице, а также существует 21 набор, для которых  $d = 0$ . Такими, в частности, являются наборы:

$$s_2 = (2, 3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2), \quad s_3 = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2),$$

а также прочие наборы, которые получаются при выборе одного из чисел  $e_{x_1}, \dots, e_{x_6}$  равным 3 или же двух из них равным 2. Все эти наборы нуждаются в проверке.

Переобозначим корни многочлена (1.6.3) так:

$$x_1 = -x_2 = y_1, \quad x_3 = -x_4 = y_2, \quad x_5 = -x_6 = iy_3,$$

(мы можем так сделать, так как в многочлене встречаются только слагаемые четного порядка, а свободный член — величина неотрицательная).

**Шаг 3.** Начнем с проверки набора  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = \frac{3x^5 + 2(B^2 - 4h)x^3 + 4(-B^2h + Bp + h^2 - 1)x}{x^6 + (B^2 - 4h)x^4 + 4(-B^2h + Bp + h^2 - 1)x^2 + (p - Bh)^2} - \frac{3d_1x^2 - (2A - B)x}{d_1x^3 - \left(A - \frac{B}{2}\right)x^2 - (p - Bh)}$$

Искомый полином  $P$  степени  $d = 1$

$$P = x + C$$

должен удовлетворять дифференциальному уравнению (1.5.9). После преобразований получаем в левой части уравнения рациональную функцию, числитель которой является многочленом девятой степени. Его старший член имеет вид:

$$P_9 = -4d_1^2 ((4d_1^2 + 1) C + 2d_1 (2A - B)) x^9 + \dots$$

Мы можем уничтожить коэффициент при старшей степени, если положим

$$C = \frac{-2d_1 (2A - B)}{4d_1^2 + 1}.$$

После подстановки коэффициента  $C$  в многочлен его старший член принимает вид:

$$P_8 = \frac{32d_1^2 (d_1^2 + 1) (2A - B)^2}{4d_1^2 + 1} x^8 + \dots$$

Так как мы ранее установили, что  $d_1 \neq 0$ , то единственный возможный вариант, когда это слагаемое обращается в ноль — это если  $A = \frac{B}{2}$ . Подставим это соотношение в  $P_8$ , и после упрощения мы получаем многочлен седьмой степени со старшим членом

$$P_7 = 48d_1^3 (p - Bh)^3 x^7 + \dots$$

Условие  $p = Bh$  эквивалентно тождественному обращению многочлена  $P_7$  в ноль. Значит, полученные нами соотношения

$$p = Bh, \quad A = \frac{B}{2}.$$

являются условиями существования лиувиллевых решений типа 2 у дифференциального уравнения (1.4.10). Проведение проверки остальных наборов  $s_i$ , для которых  $d = 0$ , не приносит новых результатов. Это означает, что условия, полученные для набора  $s_1$  являются необходимыми и достаточными. Соответственно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.6.2** *В задаче о движении тяжелого гиригостата с неподвижной точкой в интегрируемом случае Гесса–Сретенского лиувиллевы решения существуют только при выполнении условий*

$$p = Bh, \quad A = \frac{B}{2}. \tag{1.6.5}$$

Действительно, если эти условия выполнены, то общее решение уравнения (1.4.10) имеет следующий вид:

$$u(x) = C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x),$$

$$\Phi(x) = \int \frac{d_1 x}{\sqrt{x^4 + 4(A^2 - h)x^2 + 4h^2 - 4}} dx,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы.

Первое из условий (1.6.5) означает, что константа приведенного первого интеграла

$$\frac{B(y^2 + z^2)}{2} - y\nu_2 - z\nu_3 = Bh - p$$

равняется нулю. Через исходные параметры и переменные данное условие записывается следующим образом

$$\begin{aligned} & \frac{(A_1 x_1 s_2 - A_2 x_2 s_1)}{2(A_1 - A_2)x_1 x_2} \left[ \frac{((A_2 \omega_2 + s_2)x_1 - (A_1 \omega_1 + s_1)x_2)^2}{A_3(x_1^2 + x_2^2)} + A_3 \omega_3^2 \right] - \\ & - \frac{Mg}{x_1^2 + x_2^2} ((A_2 \omega_2 + s_2)x_1 - (A_1 \omega_1 + s_1)x_2)(\gamma_2 x_1 - \gamma_1 x_2) - Mg A_3 \omega_3 \gamma_3 = 0. \end{aligned}$$

В исходных обозначениях второе из условий (1.6.5) можно переписать так:

$$\begin{aligned} & A_1 x_1 s_2 (A_2 (x_1^2 + x_2^2) + (A_2 - A_1) x_1^2) = A_2 x_2 s_1 \times \\ & \times (A_1 (x_1^2 + x_2^2) + (A_1 - A_2) x_2^2). \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Правая часть выражения этого получается из левой при помощи циклической перестановки индексов 1 и 2 в левой части. Также это условие можно переписать в виде

$$(2A_3 - A_1) x_1 s_2 = (2A_3 - A_2) x_2 s_1. \tag{1.6.7}$$

Отметим, что данные результаты были получены в предположении, что все полюса функции  $r(x)$  различны. Для более полного исследования существования лиувиллевых решений в данной задаче нам необходимо рассмотреть случаи совпадения полюсов, чему и посвящен следующий раздел.

## 1.7. Особые случаи

Вернемся к явной форме функции  $r(x)$ , который определяется уравнением (1.6.2). Ее знаменатель  $V(x)$  представляет собой произведение полинома шестой степени  $P_6(x)$  (1.6.3) и кубического многочлена  $P_3(x)$  (1.6.4). Проанализируем структуру этих многочленов и исследуем критические ситуации, когда некоторые корни многочленов  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$  совпадают между собой.

### 1.7.1. Случай кратного корня у многочлена третьей степени

Начнем с исследования корней кубического многочлена (1.6.4). При помощи замены переменной по формуле

$$x = y + \frac{1}{3d_1} \left( A - \frac{B}{2} \right)$$

многочлен (1.6.4) приводится к виду

$$y^3 - \frac{\left( A - \frac{B}{2} \right)^2}{3d_1^2} y + \frac{27(Bh - p)d_1^2 - 2\left( A - \frac{B}{2} \right)^3}{27d_1^3} = 0. \quad (1.7.1)$$

Характер его корней определяется знаком его дискриминанта  $D$ , вычисляемого по формуле

$$D = q^2 + p^3,$$

где

$$p = -\frac{\left( A - \frac{B}{2} \right)^2}{9d_1^2}, \quad q = \frac{27(Bh - p)d_1^2 - 2\left( A - \frac{B}{2} \right)^3}{54d_1^3}.$$

В явном виде выражение  $D$  записывается так

$$D = \frac{(p - Bh) \left( (2A - B)^3 - 54d_1^2 (Bh - p) \right)}{216d_1^4}. \quad (1.7.2)$$

Многочлен третьей степени будет иметь кратный корень только если  $D = 0$ . Данный случай реализуется в двух ситуациях

$$p = Bh,$$

или при

$$p - Bh = -\frac{(2A - B)^3}{54d_1^2}.$$

Рассмотрим оба этих случая. Сначала положим  $p = Bh$ ; в этом случае многочлен (1.6.4) принимает вид

$$d_1 x^2 \left( x - \frac{\left( A - \frac{B}{2} \right)}{d_1} \right) = 0,$$

откуда следует, что

$$x_1 = \frac{A - \frac{B}{2}}{d_1}, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

Тогда  $A$  при помощи  $x_1$  выражается так

$$A = d_1 x_1 + \frac{B}{2}.$$

Подставляя это выражение в коэффициенты  $a(x)$  и  $b(x)$  уравнения (1.4.10), получаем следующие соотношения

$$a(x) = \frac{x^4 - 2x_1 x^3 - x_1(B^2 - 4h)x - 4h^2 + 4}{(x - x_1)(x^4 + (B^2 - 4h)x^2 + 4h^2 - 4)},$$

$$b(x) = \frac{d_1^2(x^2 - x_1^2)}{x^4 + (B^2 - 4h)x^2 + 4h^2 - 4},$$

которые далее используем для вычисления функции  $r(x)$ . Подставляя эти выражения в формулу (1.5.3), мы получаем рациональную функцию  $r(x)$  со знаменателем

$$V(x) = 4(x - x_1)^2 (x^4 + (B^2 - 4h)x^2 + 4h^2 - 4)^2.$$

Таким образом, рациональная функция  $r(x)$  обладает пятью конечными полюсами, все из которых – полюса второго порядка. Раскладывая  $r(x)$  в сумму простейших дробей, получаем:

1. Коэффициент  $b_{x_1}$  при выражении  $\frac{b_{x_1}}{(x - x_1)^2}$  равен

$$b_{x_1} = \frac{3}{4}.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i, i = 2, \dots, 5$  — корни многочлена

$$x^4 + (B^2 - 4h)x^2 + 4h^2 - 4 = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 2, \dots, 5.$$

3. В окрестности точки  $x = \infty$  функция  $r(x)$  представляется в виде ряда

$$r(x) = -\frac{1 + 4d_1^2}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

В силу того, что  $d_1 \in (-1, 0)$ , то из указанных свойств разложения функции  $r(x)$  вытекает утверждение о невозможности существования у уравнения (1.4.10) лиувиллевых решений первого и третьего типа. Для поиска решений второго типа воспользуемся алгоритмом Ковачича.

**Шаг 1.** Определяем множества  $E_c$  и  $E_\infty$  для полюсов функции  $r(x)$ :

1. Для конечного полюса  $x = x_1$  множество  $E_{x_1}$  равно

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}.$$

2. Для конечных полюсов  $x = x_i, i = 2, \dots, 5$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 2, \dots, 5.$$

3. Множество  $E_\infty$  состоит из одного элемента

$$E_\infty = \{2\}.$$

**Шаг 2.** Используя элементы множеств  $E_\infty, E_{x_i}, i = 1, \dots, 5$ , составим наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_5})$$

и исключим из рассмотрения те наборы, которые состоят только из четных

чисел. Для подходящих наборов вычислим величину  $d$  по формуле

$$d = \frac{1}{2} \left( e_\infty - \sum_{i=1}^5 e_{x_i} \right),$$

и оставим для дальнейшего рассмотрения только те наборы элементов, которым соответствует неотрицательное целое число  $d$ . По результатам анализа подходящим оказался только один подходящий набор

$$s_1 = (2, -2, 1, 1, 1, 1),$$

для которого значение  $d = 0$ . Займемся его проверкой.

**Шаг 3.** Начнем с проверки набора  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = -\frac{1}{x - x_1} + \frac{2x^3 + x(B^2 - 4h)}{x^4 + (B^2 - 4h)x^2 + 4h^2 - 4}.$$

Многочлен  $P$  степени  $d = 0$  имеет вид

$$P \equiv 1.$$

Теперь подставляем функции  $r(x)$ ,  $\theta(x)$  и полином  $P$  в уравнение

$$P''' + 3\theta P + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r) P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r') P = 0.$$

Получаем в левой части рациональное выражение

$$P(x) = -\frac{4d_1^2 x_1}{x^4 + (B^2 - 4h)x^2 + 4h^2 - 4}.$$

Это выражение обращается в ноль в двух случаях: если  $d_1 = 0$  (этот случай нами не рассматривается), или если  $x_1 = 0$ , что влечет за собой  $A = \frac{B}{2}$ . Таким образом, этот случай не порождает новых условий для существования лиувиллевых решений.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$p - Bh = -\frac{(2A - B)^3}{54d_1^2}.$$

Подставляем это соотношение в кубический многочлен (1.4.10) и находим его

корни:

$$x_1 = -\frac{2A - B}{6d_1}, \quad x_2 = x_3 = \frac{2A - B}{3d_1}.$$

Получаем, что

$$A = -3d_1x_1 + \frac{B}{2}, \quad x_2 = x_3 = -2x_1,$$

$$P_3(x) = d_1(x - x_1)(x + 2x_1)^2.$$

Подставляем эти значения в выражения для  $a(x)$  и  $b(x)$ , которые затем используем для вычисления функции  $r(x)$ . Она является рациональной, ее знаменатель имеет вид:

$$V(x) = 4(x^6 + (B^2 - 4h)x^4 + 4(4Bd_1x_1^3 + h^2 - 1)x^2 + 64d_1^2x_1^6)^2 \times \\ \times (x - x_1)^2(x + 2x_1)^2.$$

Таким образом, у функции  $r(x)$  имеется восемь конечных полюсов второго порядка. Разложение  $r(x)$  на простейшие дроби имеет следующие свойства:

1. Коэффициент  $b_{x_1}$  при выражении  $\frac{b_{x_1}}{(x - x_1)^2}$  равен

$$b_{x_1} = \frac{3}{4}.$$

2. Коэффициент  $b_{-2x_1}$  при выражении  $\frac{b_{-2x_1}}{(x + 2x_1)^2}$  равен

$$b_{-2x_1} = 2.$$

3. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i, i = 3, \dots, 8$  — корни многочлена

$$x^6 + (B^2 - 4h)x^4 + 4(4Bd_1x_1^3 + h^2 - 1)x^2 + 64d_1^2x_1^6 = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 3, \dots, 8.$$

4. Разложение функции  $r(x)$  в ряд в окрестности точки  $x = \infty$  имеет вид

$$r(x) = -\frac{1 + 4d_1^2}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Как и в прошлом случае, структура разложения функции  $r(x)$  на простейшие дроби и в окрестности точки  $x = \infty$  свидетельствует о невозможности существования у дифференциального уравнения (1.4.10) лиувиллевых решений первого и третьего типа. Применим алгоритм Ковачича для поиска решений типа 2.

**Шаг 1.** Определяем множества  $E_c$  и  $E_\infty$  для полюсов функции  $r(x)$ :

1. Для конечного полюса  $x = x_1$  множество  $E_{x_1}$  равно

$$E_{x_1} = \{-2, 2, 6\}.$$

2. Для конечного полюса  $x = -2x_1$  множество  $E_{-2x_1}$  равно

$$E_{-2x_1} = \{-4, 2, 8\}.$$

3. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 3, \dots, 8$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 3, \dots, 8.$$

4. Множество  $E_\infty$  состоит из одного элемента

$$E_\infty = \{2\}.$$

**Шаг 2.** Рассмотрим все возможные комбинации элементов полученных множеств

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, e_{-2x_1}, e_{x_3}, \dots, e_{x_8}),$$

включающие в себя как минимум одно нечетное число, и вычислим для каждого их них число  $d$  по формуле (1.5.7). Для дальнейшего рассмотрения оставим только те наборы, для которых значения  $d$  — целое неотрицательное число. Имеем один набор

$$s_1 = (2, -2, -4, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

для которого значение  $d = 1$ , а также 21 набор, для которых  $d = 0$ . В число этих наборов входят

$$s_2 = (2, -2, -4, 1, 1, 1, 1, 1, 3), \quad s_3 = (2, -2, -4, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$$

(остальные наборы  $s_4, \dots, s_{22}$  строятся из наборов  $s_2$  и  $s_3$  перестановками значений  $e_{x_3}, \dots, e_{x_8}$  при фиксированных значениях остальных величин). Все эти наборы подлежат проверке.

**Шаг 3.** Начнем с проверки набора  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = -\frac{1}{x-x_1} - \frac{2}{x+2x_1} + \frac{x(3x^4 + 2(B^2 - 4h)x^2 + 4(4Bd_1x_1^3 + h^2 - 1))}{x^6 + (B^2 - 4h)x^4 + 4(4Bd_1x_1^3 + h^2 - 1)x^2 + 64d_1^2x_1^6}.$$

Многочлен  $P$  степени  $d = 1$

$$P = x + C,$$

согласно алгоритму Ковачича, должен являться тождественным решением дифференциального уравнения (1.5.9). После подстановки в уравнение (1.5.9) величин  $P$ ,  $\theta$  и  $r(x)$ , в левой части этого выражения получаем рациональную функцию. Числитель этого выражения — полином седьмой степени

$$P_7(x) = ((-4C + 12x_1)d_1^2 - C)x^7 + \dots$$

Подберем  $C$  так, чтобы старший член обратился в ноль. Подставляем

$$C = \frac{12x_1d_1^2}{4d_1^2 + 1}$$

в многочлен  $P_7(x)$ , тогда он принимает вид

$$P_6(x) = \frac{144d_1^2(d_1^2 + 1)x_1^2}{4d_1^2 + 1}x^6 + \dots$$

Это выражение обращается в ноль в двух случаях: если  $d_1 = 0$  (этот случай нами не рассматривается), или если  $x_1 = 0$ , что влечет за собой

$$A = \frac{B}{2}.$$

Таким образом, этот случай не порождает новых условий для существования лиувиллевых решений.

Рассмотрим набор  $s_2$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = \frac{x(3x^4 + 2(B^2 - 4h)x^2 + 4(4Bd_1x_1^3 + h^2 - 1))}{x^6 + (B^2 - 4h)x^4 + 4(4Bd_1x_1^3 + h^2 - 1)x^2 + 64d_1^2x_1^6} + \frac{1}{x - x_8} - \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x + 2x_1}.$$

Так как набору  $s_2$  соответствует  $d = 0$ , то искомый многочлен  $P$  является константой:  $P \equiv 1$ . При этом требуется, чтобы полином  $P$  тождественно удовлетворял дифференциальному уравнению (1.5.9). Анализируя левую часть этого уравнения после подстановки выражений для функций  $\theta(x)$  и  $r(x)$  и многочлена  $P$ , получается, что результат является рациональной функцией, в числителе которой стоит многочлен степени 7:

$$P_7(x) = ((4x_8 + 12x_1)d_1^2 + x_8)x^7 + \dots$$

Подберем такое значение  $x_8$ , при котором старший член в полиноме уничтожается. После подстановки

$$x_8 = -\frac{12x_1d_1^2}{4d_1^2 + 1},$$

многочлен  $P_7(x)$  принимает вид

$$P_6(x) = \frac{144d_1^2(d_1^2 + 1)x_1^2}{4d_1^2 + 1}x^6 + \dots$$

Это выражение обращается в ноль в двух случаях: если  $d_1 = 0$  (этот случай нами не рассматривается), или если  $x_1 = 0$ , что влечет за собой

$$A = \frac{B}{2}.$$

Таким образом, этот случай не порождает новых условий для существования лиувиллевых решений.

Остальные наборы  $s_i$  рассматриваются аналогично. Окончательно, можно утверждать, что в случае, когда у уравнения (1.4.10) имеется кратный корень, новых условий существования лиувиллевых решений не порождается.

### 1.7.2. Случай кратного корня у многочлена шестой степени

Как уже было отмечено ранее, полином шестой степени (1.6.3) состоит только из членов с четными степенями переменной  $x$ . Значит, при помощи  $x^2 = z$  мы можем свести многочлен шестой степени относительно переменной  $x$  к многочлену третьей степени относительно переменной  $z$ :

$$P_{3z}(z) = z^3 + (B^2 - 4h)z^2 + 4(B(p - Bh) + h^2 - 1)z + 4(p - Bh)^2. \quad (1.7.3)$$

Предположим, что у многочлена (1.7.3) есть кратный корень. Значит, его можно записать следующим образом

$$P_{3z}(z) = (z - z_1)(z - z_2)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при двух представлениях многочлена (1.7.3), мы получаем следующие соотношения на параметры задачи:

$$p - Bh = \frac{1}{2}z_2\sqrt{-z_1}, \quad h = \frac{B^2 + z_1}{4} + \frac{2}{(B + \sqrt{-z_1})^2} - \frac{(B - \sqrt{-z_1})^2}{8}.$$

При этом, корни  $z_2$  и  $z_1$  связаны между собой следующим образом:

$$z_2 = \frac{4}{(B + \sqrt{-z_1})^2} - \frac{(B - \sqrt{-z_1})^2}{4}.$$

В результате вычисления с использованием полученных выражений и формул для  $a(x)$  и  $b(x)$ , получаем, что функция  $r(x)$  представляется в виде рациональной функции со знаменателем

$$V(x) = 4(x^2 - z_1)^2(x^2 - z_2)^2(2d_1x^3 - (2A - B)x^2 - z_2\sqrt{-z_1})^2.$$

Следовательно, функция  $r(x)$  обладает семью конечными полюсами, причем все они — полюса второго порядка. Разложение функции  $r(x)$  на простейшие дроби характеризуется следующими свойствами:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражении  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  — корни много-

члена

$$x^2 - z_1 = 0 = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражении  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i, i = 3, 4$  – корни многочлена

$$x^2 - z_2 = 0 = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{4z_2d_1^2 + 4A^2 - 4AB + 4A\sqrt{-z_1} + B^2 - 2B\sqrt{-z_1} - 4z_2 + 3z_1}{16(z_2 - z_1)}.$$

3. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i, i = 5, 6, 7$  – корни многочлена

$$2d_1x^3 - (2A - B)x^2 - z_2\sqrt{-z_1} = 0 = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 5, 6, 7.$$

4. В окрестности точки  $x = \infty$  раскладывается в ряд:

$$r(x) = -\frac{1 + 4d_1^2}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Из структуры разложения  $r(x)$  мы можем сделать вывод, что в этом случае могут существовать лиувиллевы решения только второго типа. Применяем алгоритм Ковачича.

**Шаг 1.** Определяем множества  $E_c$  и  $E_\infty$  для полюсов функции  $r(x)$ :

1. Для конечных полюсов  $x = x_i, i = 1, 2$  множества  $E_{x_i}$  равно

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}.$$

2. Заметим, что коэффициенты  $b_i, i = 3, 4$ , являются функциями от параметров задачи. Следовательно, значение выражения  $\sqrt{1 + 4b_i}$  может быть как

рациональным, так и иррациональным числом. Упростим его:

$$\sqrt{1 + 4b_i} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2A - B + \sqrt{-z_1})^2 - 4z_2 d_1^2}{z_2 - z_1}}. \quad (1.7.4)$$

Видно, что для большинства значений параметров значение выражения (1.7.4) будет иррациональным числом. Отсюда можем сделать вывод, что для почти всех значений параметров задачи множества  $E_{x_i}$ , где  $i = 3, 4$  будут состоять только из одного элемента

$$E_{x_i} = \{2\}, \quad i = 3, 4.$$

3. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 5, 6, 7$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 5, 6, 7.$$

4. Множество  $E_\infty$  состоит из одного элемента

$$E_\infty = \{2\}.$$

**Шаг 2.** Для дальнейшего применения алгоритма построим наборы, составленные из элементов множеств  $E_\infty$  и  $E_{x_i}$  при  $i = 1, \dots, 7$ , причем выбирать элементы будем так, чтобы все значения в наборе не были четными

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}, e_{x_4}, e_{x_5}, e_{x_6}, e_{x_7}).$$

Выясним, для каких из них величина  $d$ , вычисляемая по формуле

$$d = \frac{1}{2} \left( e_\infty - \sum_{i=1}^7 e_{x_i} \right),$$

является неотрицательным целым числом. Среди всех рассмотренных наборов подходящими оказались только три: величине  $d = 1$  соответствует один набор

$$s_1 = (2, 1, 1, -2, -2, -2, 2, 2),$$

а два других набора

$$s_2 = (2, 1, 3, -2, -2, -2, 2, 2), \quad s_3 = (2, 3, 1, -2, -2, -2, 2, 2)$$

соответствуют  $d = 0$ . Переходим к третьему шагу алгоритма.

**Шаг 3.** Начнем с проверки набора  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = \frac{x}{x^2 - z_1} + \frac{2x}{x^2 - z_2} - \frac{3d_1x^2 - (2A - B)x}{d_1x^3 - \left(A - \frac{B}{2}\right)x^2 - \frac{1}{2}z_2\sqrt{-z_1}}.$$

Многочлен  $P$  степени  $d = 1$

$$P = x + C,$$

должен удовлетворять уравнению (1.5.9) из алгоритма Ковачича. Упрощая левую часть этого уравнения после подстановки  $P$  и выражений для функций  $\theta(x)$  и  $r(x)$ , в левой части этого выражения получаем рациональную дробь с полиномом степени 18 в числителе:

$$P_{18}(x) = (32Cd_1^5 + 32Ad_1^4 - 16Bd_1^4 + 8Cd_1^3)x^{18} + \dots$$

Если положить  $C$

$$C = -\frac{2d_1(2A - B)}{4d_1^2 + 1},$$

то это слагаемое уничтожается, а степень многочлена понижается до семнадцатой. Новый старший член имеет вид

$$P_{17}(x) = \frac{32d_1^3(d_1^2 + 1)(2A - B)^2}{4d_1^2 + 1}x^{17} + \dots,$$

а следовательно только при  $B = 2A$  старший член обратится в ноль. После подстановки получаем многочлен шестнадцатой степени:

$$P_{16}(x) = 48d_1^4z_2\sqrt{-z_1}x^{16} + \dots$$

Левая часть обращается в тождественный ноль, либо при условии, что  $z_1 = 0$ , или если  $z_2 = 0$ . Оба этих условия могут выполняться, только если  $p = Bh$ , а значит новых условий существования лиувиллевых решений в этом

случае не порождается.

Теперь рассмотрим набор  $s_2$ . Функция  $\theta$  имеет вид:

$$\theta = \frac{x}{x^2 - z_1} + \frac{2x}{x^2 - z_2} - \frac{3d_1x^2 - (2A - B)x}{d_1x^3 - \left(A - \frac{B}{2}\right)x^2 - \frac{1}{2}z_2\sqrt{-z_1}} + \frac{1}{x - \sqrt{-z_1}}.$$

Так как величина  $d = 0$ , то искомый многочлен имеет вид  $P = 1$ . Левая часть уравнения (1.5.9), после подстановки  $\theta(x)$ ,  $P$  и  $r(x)$  и упрощения, принимает вид рациональной функции с числителем

$$P_{20}(x) = -8d_1^3 \left(-4d_1^2\sqrt{-z_1} + 4Ad_1 - 2Bd_1 - \sqrt{-z_1}\right) x^{20} + \dots$$

Если взять  $A$

$$A = -\frac{(4d_1^2 + 1)\sqrt{-z_1} + 2Bd_1}{4d_1},$$

то старший член уничтожается, а степень многочлена  $P_{20}(x)$  понижается на один. Теперь числитель имеет вид

$$P_{19}(x) = 8d_1z_1 (d_1^2 + 1) (4d_1^2 + 1) x^{19} + \dots$$

Легко заметить, что старший член этого многочлена может обратиться в ноль только если  $z_1 = 0$  (или, в других обозначениях,  $p = Bh$ ). При подстановке этого значения уравнение превращается в тождество, но случай, когда

$$B = 2A, \quad p = Bh.$$

Аналогично проверяется набор  $s_3$ . Таким образом, нам удалось установить отсутствие новых условий существования лиувиллевых решений в этом критическом случае для почти всех параметров задачи.

### 1.7.3. Критический случай совпадающих корней

Перейдем к исследованию следующего критического случая. Предположим, что у полиномов третьей и шестой степеней существует совпадающий корень. А именно, пусть многочлен третьей степени (1.6.4) обладает корнем  $x = c$ . Таким

образом, справедливо равенство:

$$d_1 c^3 - \left( A - \frac{B}{2} \right) c^2 = p - Bh. \quad (1.7.5)$$

Допустим также, что  $x = c$  — одновременно является корнем многочлена шестой степени (1.6.3):

$$c^6 + (B^2 - 4h) c^4 + 4(B(p - Bh) + h^2 - 1) c^2 + 4(p - Bh)^2 = 0.$$

Отсюда, с учетом (1.7.5), мы получаем:

$$d_1^\pm = \frac{1}{c^2} \left( c(A - B) \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(c^2 - 2h)^2 + 4} \right).$$

Заметим, что в силу строения многочлена (1.6.3), если  $x = c$  является его корнем, то и значение  $x = -c$  также является его корнем.

Рассмотрим случай  $d_1^+$ . Подставляем полученное выражение в формулы для  $a(x)$  и  $b(x)$  и вычисляем функцию  $r(x)$  (1.4.7). Получаем рациональную функцию со знаменателем  $V(x)$

$$\begin{aligned} V(x) = & \left( x^4 + (B^2 + c^2 - 4h) x^2 + 2Bc\sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4} + c^4 - \right. \\ & \left. - B^2c^2 - 4c^2h + 4h^2 - 4 \right)^2 (x - c)^2 (x + c)^2 \left( \left( 2c(A - B) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4} \right) x^2 + \left( -c^2B + \sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4} \right) x - \right. \\ & \left. - Bc^3 + c^2\sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4} \right)^2. \end{aligned}$$

Видно, что функция  $r(x)$  обладает восемью конечными полюсами второго порядка. Отметим особенности ее разложения в сумму простейших дробей:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражении  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  — корни многочлена

$$\begin{aligned} & x^4 + (B^2 + c^2 - 4h) x^2 + 2Bc\sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4} + \\ & + c^4 - B^2c^2 - 4c^2h + 4h^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражении  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 5, 6$  – корни многочлена

$$\begin{aligned} & \left(2c(A - B) + \sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4}\right) x^2 + \\ & + \left(-c^2B + \sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4}\right) x - Bc^3 + \\ & + c^2\sqrt{-c^4 + 4c^2h - 4h^2 + 4} = 0 \end{aligned}$$

одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}.$$

3. Коэффициент  $b_c$  при выражении  $\frac{b_c}{(x - c)^2}$  равен

$$b_c = \frac{9}{16}.$$

4. Коэффициент  $b_{-c}$  при выражении  $\frac{b_{-c}}{(x + c)^2}$  равен

$$b_{-c} = -\frac{3}{16}.$$

5. Разложение функции  $r(x)$  в ряд в окрестности точки  $x = \infty$  имеет вид

$$r(x) = -\frac{1 + 4d_1^2}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Из особенностей указанного разложения следует, что в этом случае у дифференциального не может существовать лиувиллевых решений первого и третьего типов. Для нахождения решений типа 2 применим алгоритм Ковачича.

**Шаг 1.** Вычисляем для полюсов функции  $r(x)$  множества  $E_c$  и  $E_\infty$ :

1. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

2. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 5, 6$  множества  $E_{x_i}$  оказываются

равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

3. Для конечного полюса  $x = c$  множество  $E_c$  состоит из одного элемента

$$E_c = \{2\}.$$

4. Для конечного полюса  $x = -c$  множество  $E_{-c}$  равно

$$E_{-c} = \{1, 2, 3\}.$$

5. Множество  $E_\infty$  состоит из одного элемента

$$E_\infty = \{2\}.$$

**Шаг 2.** Используя элементы полученных на прошлом шаге множеств, составим все возможные наборы  $s$

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_6}, e_c, e_{-c})$$

таким образом, чтобы хотя бы один элемент в каждом наборе не был четным числом. Очевидно, что сумма наименьших значения элементов в каждом из множеств  $E_c, E_{-c}, E_{x_i}, i = 1, \dots, 6$  равна трем. Так как  $E_\infty$  состоит из одного элемента, равного двум, то значение параметра  $d$  при вычислении по формуле (1.5.8) всегда будет отрицательным числом. Значит, доступимые наборы  $s_i$  отсутствуют, что исключает возможность существования лиувиллевых решений.

Аналогично проверяется случай  $d_1^-$ . Так как разложение функции  $r(x)$  имеет тот же вид, что и в предыдущем случае, то лиувиллевых решений в этом случае также нет. Таким образом, мы установили отсутствие лиувиллевых решений в особом случае, когда многочлены (1.6.3) и (1.6.4) обладают совпадающим корнем.

#### 1.7.4. Особенный случай совпадающих корней

Теперь обратим внимание на последний критический случай, который является комбинацией случаев, рассмотренных в двух предыдущих подразделах.

А именно, предположим, что у многочлена шестой степени  $P_6(x)$  (1.6.3) есть кратный корень  $x = c$ . После замены переменной по формуле  $x^2 = z$ , этот многочлен превращается в кубический полином относительно переменной  $z$

$$\begin{aligned} P_{3z}(z) &= z^3 + (B^2 - 4h)z^2 + 4(B(p - Bh) + h^2 - 1)z + 4(p - Bh)^2 = \\ &= \left( (z - c^2)^2 \right) (z - z_1). \end{aligned}$$

Предположим, что корень  $x = c$  также является и корнем многочлена третьей степени  $P_3(x)$  (1.6.4). Справедливо следующее выражение:

$$p - Bh = d_1 c^3 - \left( A - \frac{B}{2} \right) c^2.$$

Используя разложение многочлена  $P_{3z}(z)$  по степеням  $z$  и его факторизованную форму, мы получаем следующие соотношения на параметры задачи:

$$\begin{aligned} B^2 - 4h &= -2c^2 - z_1, \\ B(p - Bh) + h^2 - 1 &= c^4 + 2c^2 z_1, \\ 4(p - Bh)^2 &= -c^4 z_1, \\ (p - Bh) &= d_1 c^3 - \left( A - \frac{B}{2} \right) c^2. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Решая эту систему, получаем следующие выражения:

$$(p - Bh)^\pm = \pm \frac{c^2 \sqrt{-z_1}}{2}, \quad h = \frac{B^2 + 2c^2 + z_1}{4}, \quad d_1^\pm = \pm \frac{\sqrt{-z_1}}{2c} + \frac{2A - B}{2c} \tag{1.7.7}$$

(отметим, что знаки  $\pm$  у величин  $(p - Bh)^\pm$  и  $d_1^\pm$  должны быть выбраны согласованно).

Сначала рассмотрим случай  $d_1^+$  и  $(p - Bh)^+$ . Подставляем формулы (1.7.7) в функции  $a(x)$  и  $b(x)$ , а затем при помощи них вычисляем функцию  $r(x)$ . Функция  $r(x)$  – рациональная, а в ее знаменателе стоит функция

$$\begin{aligned} V(x) &= (x - c)(x + c)^2(x^2 - z_1)^2 \left( (2A - B + \sqrt{-z_1})x^2 + \right. \\ &\quad \left. + c\sqrt{-z_1}x + c^2\sqrt{-z_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Функция  $r(x)$  обладает шестью конечными полюсами: пять из них яв-

ляются полюсами второго порядка, а шестой полюс имеет порядок один. Ее разложение на простейшие имеет следующие свойства:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражении  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  – корни многочлена

$$((2A - B + \sqrt{-z_1})x^2 + c\sqrt{-z_1}x + c^2\sqrt{-z_1}) = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражении  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 3, 4$  – корни многочлена

$$x^2 - z_1 = 0.$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}.$$

3. Коэффициент  $b_{-c}$  при выражении  $\frac{b_{-c}}{(x + c)^2}$  равен

$$b_{-c} = -\frac{1}{4}.$$

4. Разложение в ряд в окрестности  $x = \infty$  функции  $r(x)$  имеет вид

$$r(x) = -\frac{1 + 4d_1^2}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Отсюда следует, что как и в предыдущих случаях, дифференциальное уравнение второго порядка не имеет лиувиллевых решений первого и третьего типов. Для поиска решений второго типа используем алгоритм Ковачича.

**Шаг 1.** Определяем для полюсов функции  $r(x)$  множества  $E_c$  и  $E_\infty$ :

1. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 1, 2.$$

2. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 3, 4$  множества  $E_{x_i}$  оказываются

равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 3, 4.$$

3. Для конечного полюса  $x = c$  множество  $E_c$  состоит из одного элемента

$$E_c = \{4\}.$$

4. Для конечного полюса  $x = -c$  множество  $E_{-c}$  также состоит из одного элемента

$$E_{-c} = \{2\}.$$

5. Множество  $E_\infty$  в данном случае состоит из одного элемента

$$E_\infty = \{2\}.$$

**Шаг 2.** Рассмотрим все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_4}, e_c, e_{-c}),$$

составленные из элементов полученных множеств и выясним, для каких из них величина  $d$ , вычисляемая по формуле

$$d = \frac{1}{2} \left( e_\infty - \sum_{i=1}^6 e_{x_i} \right),$$

является неотрицательным целым числом. Если изучить все элементы, составляющие множества  $E_{x_i}$ , то очевидно, что минимальная сумма элементов, соответствующих конечным полюсам функции  $r(x)$ , равна 4. Поскольку  $e_\infty$  может быть равно только двум, то для любого набора элементов значение  $d$  будет отрицательным числом. Таким образом, возможность существования лиувиллевых решений исключена.

Аналогичная ситуация складывается при рассмотрении случая  $(p - Bh)^-$  и  $d_1^-$ . Отсюда следует вывод, что данный критический случай не допускает существования у дифференциального уравнения (1.4.10) лиувиллевых решений.

Таким образом, нами была рассмотрена задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса. Мы показали, что решение

задачи сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами (1.4.10). При помощи алгоритма Ковачича нам удалось доказать, что решение полученного уравнения может быть выражено только в форме лиувиллевого решения второго типа, причем только при выполнении условий (1.5.9). Был указан явный вид этого решения, а также проведен анализ полученных условий на параметры задачи. Дополнительно были исследованы все особенные случаи, когда функция  $r(x)$  (1.6.2) обладает совпадающими полюсами. Установлено, что критические случаи не порождают новых условий существования лиувиллевых решений для почти всех значений параметров задачи. Таким образом, мы полностью исследовали вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса.

## Глава 2. Качественный анализ движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой

### 2.1. Общее решение уравнения второго порядка

В Главе 1 рассматривалась задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса. Нам удалось свести решение задачи к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. После этого мы применили к полученному уравнению алгоритм Ковачича, при помощи которого мы смогли получить явный вид этого решения:

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x), \\ \Phi(x) &= \int \frac{d_1 x}{\sqrt{x^4 + 4(A^2 - h)x^2 + 4h^2 - 4}} dx, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы. Перепишем решение (2.1.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 \exp(\tilde{\Phi}(x)) + C_2 \exp(-\tilde{\Phi}(x)), \\ \tilde{\Phi}(x) &= \int \frac{d_1 x}{\sqrt{-x^4 - 4(A^2 - h)x^2 - 4h^2 + 4}} dx. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Заметим, что выражение  $\tilde{\Phi}(x)$  можно проинтегрировать явно:

$$\tilde{\Phi}(x) = \frac{d_1}{2} \arctan \left( \frac{2A^2 + x^2 - 2h}{\sqrt{-x^4 + 4(h - A^2)x^2 - 4h^2 + 4}} \right). \quad (2.1.3)$$

Получим из решения (2.1.2) выражение для переменной  $\varphi$ . Напомним, что ранее мы получили переменную  $u(x)$  из  $w(x)$  при помощи замены

$$u(x) = \exp \left( - \int f_2 w(x) dx \right).$$

Значит, обратная замена имеет вид

$$w(x) = -\frac{u'(x)}{f_2(x)u(x)}, \quad (2.1.4)$$

где штрихом обозначена производная по  $x$ . С учетом условий (1.6.5), функция  $f_2$  из уравнения Риккати (1.4.8) имеет вид

$$f_2 = -\frac{d_1 x}{\sqrt{-x^4 + 4(h - A^2)x^2 - 4h^2 + 4}},$$

что с точностью до знака совпадает с выражением  $\tilde{\Phi}'(x)$ . Производная от решения  $u(x)$  имеет вид

$$u'(x) = \tilde{\Phi}'(x) \left( C_1 \exp(\tilde{\Phi}(x)) - C_2 \exp(-\tilde{\Phi}(x)) \right).$$

Подставляя полученные выражения в (2.1.4), получаем:

$$w(x) = \frac{C_1 \exp(\tilde{\Phi}(x)) - C_2 \exp(-\tilde{\Phi}(x))}{C_1 \exp(\tilde{\Phi}(x)) + C_2 \exp(-\tilde{\Phi}(x))} = \tanh(\tilde{\Phi}(x) + C), \quad (2.1.5)$$

где  $C$  - некоторая константа. Теперь, выполняя замену, обратную к

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

мы получаем явный вид общего решения для переменной  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 2 \arctan \left( \tanh \left( \frac{d_1}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \arctan \left( \frac{2A^2 + x^2 - 2h}{\sqrt{-x^4 + 4(h - A^2)x^2 - 4h^2 + 4}} \right) + C \right) \right). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Для проведения качественного анализа движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса мы будем использовать метод годографов, разработанный П.В. Харламовым. Для задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса кинематическое истолкование движение было получено А. М. Ковалевым в работе [23] именно при помощи этого метода. В следующем разделе мы дадим теоретическое обоснование и описание

метода годографов.

## 2.2. Описание метода годографов

В основе метода годографов Харламова лежит теорема Пуансо: движение твердого тела воспроизводится качением без проскальзывания неизменно связанной с телом линейчатой поверхности (которая называется подвижным аксоидом) по неподвижной в пространстве линейчатой поверхности (так называемому неподвижному аксоиду) [46]. Отметим, что в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой данные аксоиды являются конусами с вершиной в неподвижной точке.

В методе годографов Харламова движение тела истолковывается при помощи анализа подвижного и неподвижного годографов угловой скорости твердого тела с неподвижной точкой. Для того, чтобы построить подвижный годограф, мы используем выражения для проекций угловой скорости на оси системы координат, жестко связанной с телом:

$$\omega_1 = \omega_1(\sigma), \quad \omega_2 = \omega_2(\sigma), \quad \omega_3 = \omega_3(\sigma), \quad (2.2.1)$$

где  $\sigma$  — некоторая переменная, которая зависит от времени

$$\sigma = \sigma(t).$$

Предположим, что нам удалось полностью проинтегрировать уравнения Эйлера–Пуассона и получить выражения для проекций вектора  $\gamma$  на подвижные оси:

$$\gamma_1 = \gamma_1(\sigma), \quad \gamma_2 = \gamma_2(\sigma), \quad \gamma_3 = \gamma_3(\sigma).$$

Соотношения, определяющие неподвижный годограф называются уравнениями Харламова. Для его построения мы будем использовать неподвижную цилиндрическую систему координат  $O\rho\zeta\alpha$  с началом в неподвижной точке гиростата; ось  $O\zeta$  при этом направлена параллельно вектору восходящей вертикали  $\gamma$ .

Уравнения неподвижного годографа угловой скорости тела имеют вид

$$\omega_\zeta = \omega_1(\sigma)\gamma_1(\sigma) + \omega_2(\sigma)\gamma_2(\sigma) + \omega_3(\sigma)\gamma_3(\sigma),$$

$$\omega_\rho^2 = \omega_1^2(\sigma) + \omega_2^2(\sigma) + \omega_3^2(\sigma) - \omega_\zeta^2(\sigma),$$

$$\omega_\rho^2 \frac{d\alpha}{d\sigma} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \frac{d\omega_1}{d\sigma} & \frac{d\omega_2}{d\sigma} & \frac{d\omega_3}{d\sigma} \end{vmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Таким образом, движение тела с неподвижной точкой может быть воспроизведено качением без скольжения неизменно связанной с телом кривой (2.2.1) по неподвижной кривой, определяемой формулами (2.2.2). Зная подвижный и неподвижный годографы, мы можем определить положение тела в пространстве при помощи неизменно связанного с телом годографа угловой скорости. Для этого достаточно знать положение точки  $\Omega$  касания годографов в каждый момент времени. Это определяется при помощи дуговых координат этой точки на соответствующих годографах.

Применим метод годографов Харламова для качественного описания движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса. Начнем с построения подвижного годографа.

### 2.3. Подвижный годограф угловой скорости

Для построения подвижного годографа угловой скорости нам нужно найти проекции угловой скорости тела на оси Харламова. В работе [3] были получены явные формулы для определения проекций угловой скорости через проекции кинетического момента. В нашей задаче эти выражения имеют вид

$$\omega_I = bL_2, \quad \omega_{II} = cL_2, \quad \omega_{III} = cL_3.$$

Произведем обезразмеривание этих формул также, как это было выполнено в Разделе 4 Главы 1. Пусть  $\Omega_I$ ,  $\Omega_{II}$ ,  $\Omega_{III}$  — безразмерные компоненты угловой скорости, которые определяются по формулам

$$\omega_i = \Omega_i \sqrt{\Gamma c}, \quad i = I, II, III.$$

В результате, получаем следующие соотношения на безразмерные проекции угловой скорости на оси Харламова:

$$\Omega_I = d_1 y, \quad \Omega_{II} = y, \quad \Omega_{III} = z. \quad (2.3.1)$$

Из выражений (2.3.1) видно, что подвижный годограф лежит в плоскости  $\Omega_I = d_1 \Omega_{II}$ . Проекцией подвижного годографа на плоскость  $\Omega_I = 0$  является кривая, которая определяется уравнениями

$$y = x \cos \varphi, \quad z = x \sin \varphi. \quad (2.3.2)$$

В качестве независимой переменной  $\sigma$  мы будем использовать переменную  $\theta$ , которая определяется так:

$$\nu_1 = \sin \theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

С учетом первого из интегралов (1.4.2) имеем зависимость  $x = x(\theta)$ :

$$x = \pm \sqrt{2(h - \sin \theta)}, \quad (2.3.3)$$

а выражение  $\varphi = \varphi(\theta)$  имеет вид

$$\varphi = 2 \arctan \left( \tanh \left( \frac{d_1}{2} \arctan \left( \frac{A^2 - \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 2A^2(\sin \theta - h)}} \right) + C \right) \right). \quad (2.3.4)$$

Отметим, что из выражения (2.3.4) следуют ограничения на параметры задачи, при которых возможно движение:

$$h \leq \frac{A^4 + 1}{2A^2}. \quad (2.3.5)$$

Здесь и далее предполагаем, что условие (2.3.5) выполняется. Из уравнения (2.3.3) видно, что в случае, когда  $h \leq 1$ , то при некотором значении угла  $\theta$  переменная  $x$  обращается в ноль. Таким образом, нам нужно рассмотреть три

случая:

$$I. h > 1;$$

$$II. 1 \geq h > 0;$$

$$III. 0 \geq h \geq -1.$$

### 2.3.1. Случай I.

Рассмотрим случай, когда  $h > 1$ . В этом случае, как мы уже отметили выше, переменная  $x$  никогда не обращается в ноль, а значит годограф не проходит через начало координат. Также, из выражения (2.3.3) следует, что годограф будет состоять из двух сегментов, симметричных относительно начала координат.

Обратимся к подкоренному выражению, стоящему в правой части (2.3.4). Заметим, что это выражение можно переписать в виде квадратного многочлена относительно переменной  $\sin \theta$ :

$$\cos^2 \theta + 2A^2 (h - \sin \theta) = -\sin^2 \theta + 2A^2 \sin \theta - 2A^2 h + 1$$

Обозначим за  $\theta_{min}$  и  $\theta_{max}$  такие значения  $\theta$ , при которых

$$-\sin^2 \theta + 2A^2 \sin \theta - 2A^2 h + 1 = 0.$$

Значит, что движение гиростата возможно только на замкнутых отрезках переменной  $\theta$ , а именно:

$$[\theta_{min}, \theta_{max}] \cup [\pi - \theta_{max}, \pi - \theta_{min}]$$

(с точностью до  $2\pi$ ). При этом, из явного вида выражений  $x(\theta)$  и  $\varphi(\theta)$  следует, что движение на обоих этих отрезках будет происходить по одним и тем же дугам годографа, но в различных направлениях. На рисунке 2.1 показан вид подвижного годографа угловой скорости тела. Кривая в левой части плоскости отвечает решению, когда выбирается знак минус в уравнении (2.3.3), а в правой части — когда выбирается знак плюс.

В данном случае параметры  $d_1$  и  $C$  влияют на наклон и кривизну дуг: чем больше эти параметры, тем сильнее выпрямляются дуги.

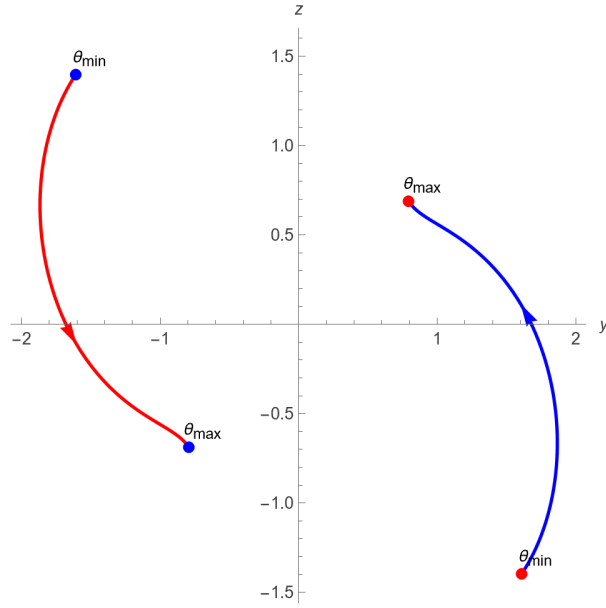


Рисунок 2.1 Подвижный годограф. Величины параметров равны:  $h = 1.5$ ,  $A = 0.3$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

### 2.3.2. Случай II.

Теперь рассмотрим случай, когда  $0 \leq h \leq 1$ . Как мы уже отметили ранее, в этом случае существует значение угла  $\theta$ , при котором  $x = 0$ :

$$\theta_0 = \arcsin h \rightarrow x(\theta_0) = 0. \quad (2.3.6)$$

Также, при  $\tilde{\theta}_0 = \pi - \arcsin h$  значение переменной  $x$  тоже обращается в ноль. При рассмотрении этого случая мы предполагаем, что переменная  $x$  может быть как положительной, так и отрицательной.

Для изучения поведения кривой в окрестностях точек  $\theta_0$ ,  $\tilde{\theta}_0$  нам нужно изучить производные

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{-\sin^2 \theta + 2A^2 \sin \theta - 2A^2 h + 1}}{2}, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= -\frac{x}{\cos \theta} \frac{dx}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Обратимся к области возможного движения, которая определяется подкоренным выражением в правой части (2.3.4). Заметим, что так как у нас параметр  $h < 1$ , то у нас существует только одно значение  $\theta_{min}$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , при котором подкоренное выражение обращается в ноль. Из первого уравнения системы (2.3.7) видно, что значение  $\theta_{min}$  — экстремальное значение

для переменной  $x$ , а именно - его максимум. Проследим за ходом годографа при увеличении времени  $\tau$  от нуля. Предположим, что в начальный момент времени у нас  $\theta = \theta_{min}$ . Так как  $\theta_{min}$  — это то значение параметра  $\theta$ , при котором достигается максимальное значение  $x = x(\theta)$ , то при увеличении времени  $\tau$  значение переменной  $x$  начнет уменьшаться, то есть

$$\frac{dx}{d\tau} < 0,$$

а в свою очередь переменная  $\theta$  — возрастает. Такое поведение сохраняется до момента, когда  $\theta = \theta_0$  и мы попадаем в начало координат:  $x = 0$ . В этой точке производная  $x$  имеет вид

$$\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\theta=\theta_0} = -\frac{\sqrt{1-h^2}}{2} < 0,$$

а значит, что переменная  $x$  принимает отрицательное значение. Таким образом, подвижный годограф проходит начало координат, касаясь луча  $\phi_0 = \phi(\theta_0)$ . Отметим, что в момент перехода из правой полуплоскости в левую, у нас меняется рассматриваемый диапазон  $\theta$ : теперь мы работаем в рамках отрезка  $[\pi - \arcsin h, \pi - \theta_{min}]$ . Угол  $\theta$  при переходе через начало координат продолжает возрастать:

$$\frac{d\theta}{d\tau} > 0,$$

и такое поведение сохраняется, пока мы не дойдем до значения угла  $\theta = \pi - \theta_{min}$ . В этом положении переменная  $x$  достигает своего минимального значения, а именно,

$$x|_{\theta=\pi-\theta_{min}} = -x|_{\theta=\theta_{min}}.$$

Заметим, что в этой точке у нас снова меняется знак производной  $x$ , а угол  $\theta$  начинает убывать:

$$\frac{dx}{d\tau} > 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} < 0.$$

Такое поведение продолжается вплоть до момента времени, при котором  $\theta$  достигает значения  $\pi - \arcsin h$ . В этот момент времени мы снова приходим в начало координат.

Таким образом, проекция подвижного годографа имеет вид симметричного

относительно начала координат отрезка кривой. Полный период обхода по подвижному годографу выражается формулой

$$T_1 = 4 \int_{\arcsin h}^{\pi - \arcsin h} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{2(h - \sin \theta)} \sqrt{\cos^2 \theta - 2A^2(h - \sin \theta)}}. \quad (2.3.8)$$

На рисунке 2.2 показан вид проекции подвижного годографа. Красным отмечена ветвь решения, соответствующая  $x = -\sqrt{2(h - \sin \theta)}$ , а синим —  $x = \sqrt{2(h - \sin \theta)}$ .

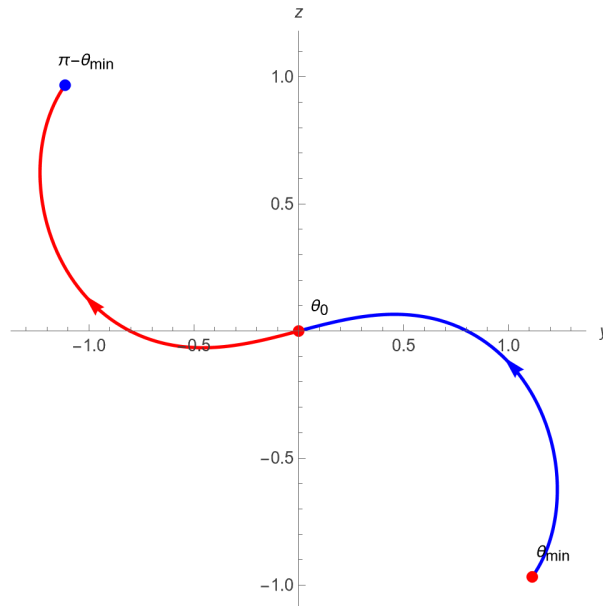


Рисунок 2.2 Подвижный годограф. Величины параметров равны:  $h = 0.72$ ,  $A = 0.63$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

Параметры  $C$  и  $d_1$  отвечают за угол наклона замкнутой кривой относительно оси  $Oy$ , а также за «спрямление кривой».

### 2.3.3. Случай III.

В силу периодичности и симметрии выражений относительно параметра  $\theta$ , случай, когда  $h < 0$ , дает нам аналогичные результаты, что и случай II. Единственное отличие заключается в том, что так как

$$\theta = \arcsin h < 0,$$

то отрезок  $[\theta_{min}, \arcsin h]$  лежит в интервале  $\theta < 0$ . В остальном картина годографа остается такой же. Период движения по годографу также определяется

формулой (2.3.8). На рисунке 2.3 представлен подвижный годограф для случая III.

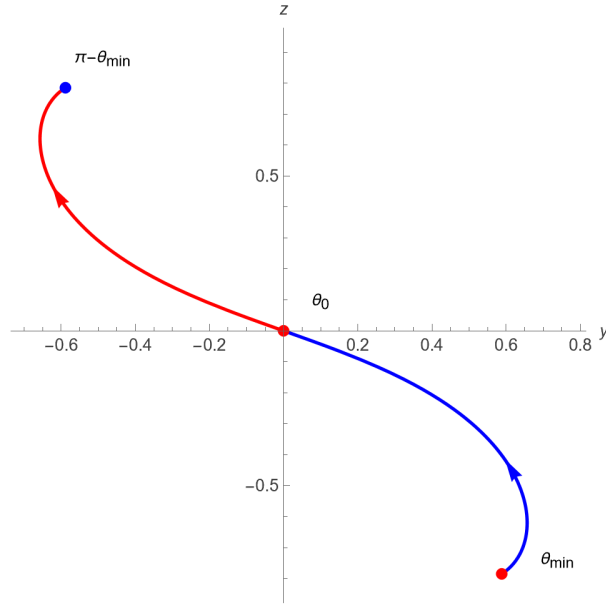


Рисунок 2.3 Подвижный годограф. Величины параметров равны:  $h = -0.43$ ,  $A = 0.42$ ,  $d_1 = -0.7$ ,  $C = 0$ .

## 2.4. Неподвижный годограф

Теперь нам нужно построить неподвижный годограф. Для того, чтобы использовать кинематические формулы Харламова (4.5.12), нам нужно получить выражения для  $\nu_2(\theta)$  и  $\nu_3(\theta)$ . Они вычисляются из системы уравнений, которая задает первые интегралы уравнений движения гиростата (1.4.2):

$$\cos \varphi \nu_2 + \sin \varphi \nu_3 = Ax, \quad \nu_2^2 + \nu_3^2 = \cos^2 \theta.$$

Разрешая эти уравнения относительно переменных  $\nu_2$  и  $\nu_3$ , получаем

$$\begin{aligned} \nu_2 &= Ax \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \theta - 2A^2(h - \sin \theta)}, \\ \nu_3 &= Ax \sin \varphi + \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \theta - 2A^2(h - \sin \theta)}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Теперь, согласно формулам (2.2.2), имеем:

$$\begin{aligned}
\omega_\zeta(\theta) &= A\sqrt{2(h - \sin\theta)} + d_1x \cos\varphi \sin\theta, \\
\omega_\rho(\theta) &= x\sqrt{1 - 2Ad_1x \cos\varphi \sin\theta - A^2x^2 + d_1^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta}, \\
\frac{d\alpha}{d\theta} &= \frac{1}{(1 + d_1^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta - 2Ad_1x \cos\varphi \sin\theta - A^2x^2)} \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta - A^2x^2}} \left( 2d_1 \cos\varphi \cos\theta (A \cos\varphi d_1x - \right. \\
&\left. - d_1 \sin\varphi \sqrt{\cos^2\theta - A^2x^2} - \sin\theta) \right).
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Отметим, что третье уравнение системы (2.4.2) имеет достаточно громоздкий вид и не получается получить явный вид выражения  $\alpha(\theta)$ . Поэтому далее это уравнение интегрировалось численно для различных значений параметров задачи.

Как показано в работах [44, 45], неподвижный годограф лежит на поверхности вращения, меридиан которой задается уравнениями (2.4.2). Рассмотрим линию меридиана для случаев I-III, которые были определены в предыдущем параграфе.

#### 2.4.1. Случай I.

Начнем с построения проекции годографа на плоскость  $O\omega_\rho\omega_\zeta$ . В данном случае, когда  $h > 1$ , мы снова имеем две ветви проекции неподвижного годографа для каждого из значений переменной  $x$ . Однако, в отличие от подвижного годографа, эти отрезки не будут симметричны друг другу, так как формулы для  $\omega_\rho$  и  $\omega_\zeta$  не являются симметричными по  $x$  из-за добавок, вызванных гиростатическим моментом.

Область возможного движения определяется таким же образом, как и для подвижного годографа. На рисунке 2.4 представлен вид проекции неподвижного годографа на плоскость  $O\omega_\rho\omega_\zeta$ .

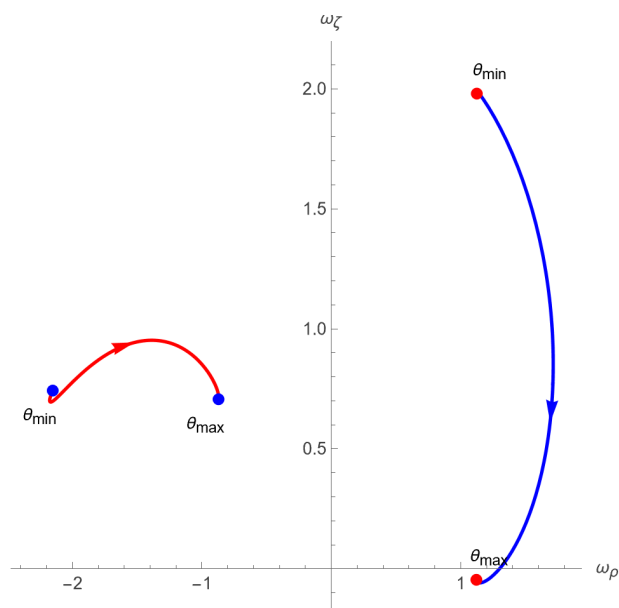


Рисунок 2.4 Проекция неподвижного годографа. Величины параметров равны:  $h = 1.5$ ,  $A = 0.3$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

Перейдем к определению зависимости угла  $\alpha(\theta)$ . График изменения этого угла был построен при помощи численного интегрирования (использовался метод Рунге-Кутты-Фельберга, численное интегрирование и построение графика производилось в программе MAPLE 2018). В результате, получился следующий график, который изображен на рисунке 2.5. Константа интегрирования подбиралась так, чтобы выполнялось  $\alpha(0) = 0$ .

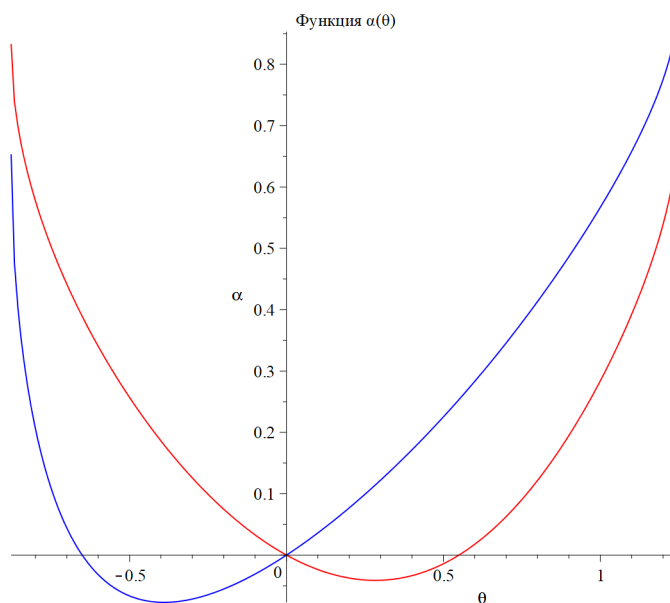


Рисунок 2.5 Зависимость величины угла  $\alpha$  в зависимости от  $\theta$ . Величины параметров равны:  $h = 1.5$ ,  $A = 0.3$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

Совмещая график проекции неподвижного годографа и график изменения

угла  $\alpha(\theta)$ , мы получаем неподвижный годограф в следующем виде (он изображен на рисунке 2.6 и рисунке 2.7):

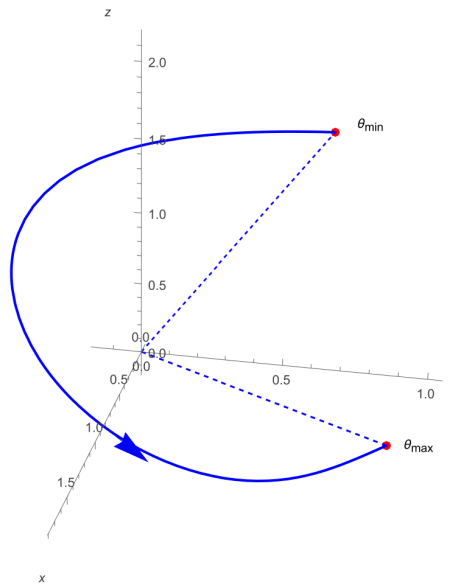


Рисунок 2.6 Неподвижный годограф. Первая ветвь. Величины параметров равны:  $h = 1.5$ ,  $A = 0.3$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

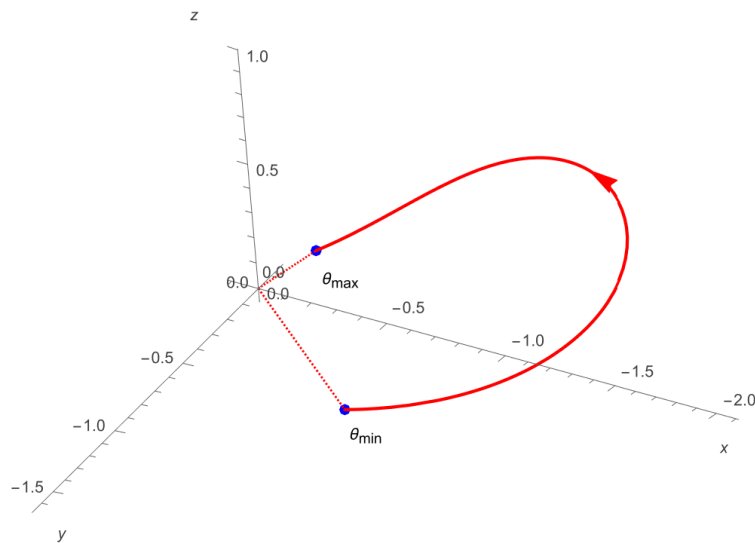


Рисунок 2.7 Неподвижный годограф. Вторая ветвь. Величины параметров равны:  $h = 1.5$ ,  $A = 0.3$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

Поместим вершины подвижного и неподвижного аксоидов в неподвижную точку. Качение подвижного аксоида по неподвижному определяется при помощи совмещения точек годографов, соответствующих одинаковым значениям  $\theta$  на отрезке  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ . Начальный момент времени  $\tau_0$  определим так, что  $\theta(\tau_0) = \theta_{min}$ , а за  $\tau_1$  — момент времени, когда  $\theta = \theta_{max}$ . На рисунке 2.8 изобра-

жено взаимное расположение аксоидов в момент времени  $\tau_0 < \tau < \tau_1$ , стрелками обозначены направления движения точки соприкосновения подвижного и неподвижного годографов. Синим цветом изображен неподвижный годограф, красным — подвижный.

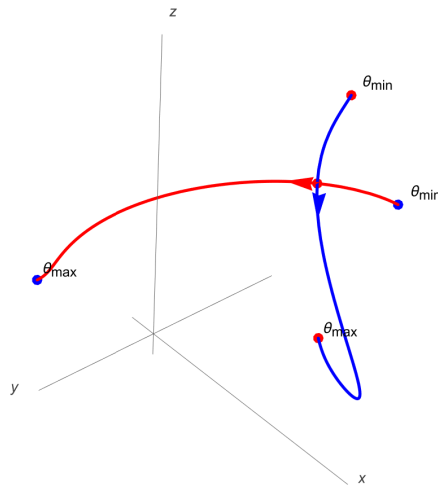


Рисунок 2.8 Взаимное расположение аксоидов.

Таким образом, в случае, когда  $h > 1$ , гироскат может двигаться по одному из двух отрезков параметра  $\theta$ :  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$  и  $[\pi - \theta_{max}, \pi - \theta_{min}]$ , каждому из которых соответствует две ветви решения — в зависимости от того, с каким знаком мы выбираем переменную  $x(\theta)$ . Реализуемым оказывается одно из двух возможных решений — в зависимости от выбора начальных условий, гироскат может двигаться только по одной ветви, а переход на вторую невозможен. При изменении значения угла  $\theta$  происходит переход от одной пространственной конфигурации, соответствующей значению  $\theta_{min}$ , к конфигурации, соответствующей значению  $\theta_{max}$ .

#### 2.4.2. Случай II.

Рассмотрим случай, когда  $0 < h \leq 1$ . Отметим, что из формул (2.4.2) видно, что в точках  $\theta_0 = \arcsin h$ ,  $\tilde{\theta}_0 = \pi - \arcsin h$  проекции угловой скорости на  $\zeta$  и на  $\rho$  превращаются в ноль. Таким образом, график проекции неподвижного годографа будет проходить через начало координат, а значит, как и для подвижного годографа, будет переход с одной ветви  $x$  на другую. На рисунке 2.9

изображена проекция неподвижного годографа на  $O\omega_\rho\omega_\zeta$  (стрелки отображают направление обхода по годографу на полупериоде).

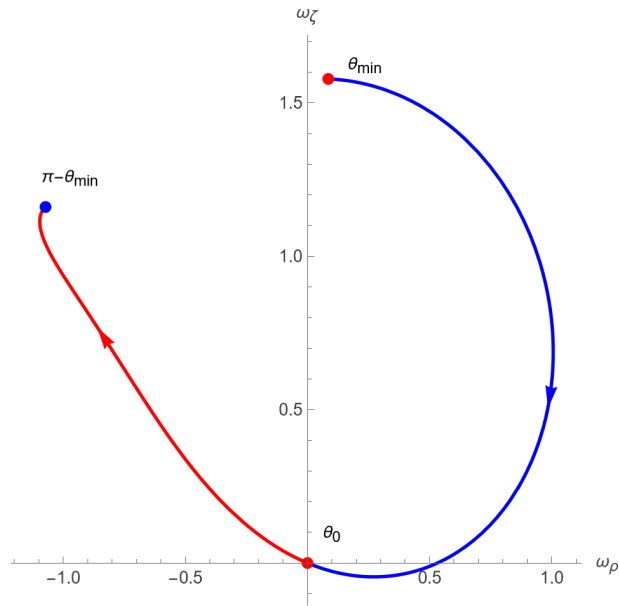


Рисунок 2.9 Проекция неподвижного годографа. Величины параметров равны:  $h = 0.72$ ,  $A = 0.63$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

Предположим, что у нас при  $\theta_0$  значение угла  $\alpha$  равно нулю:  $\alpha(\theta_0) = \alpha(\tilde{\theta}_0) = 0$ . При помощи численного интегрирования строим графики изменения угла  $\alpha$  от угла  $\theta$ . Его вид представлен на рисунке 2.10.

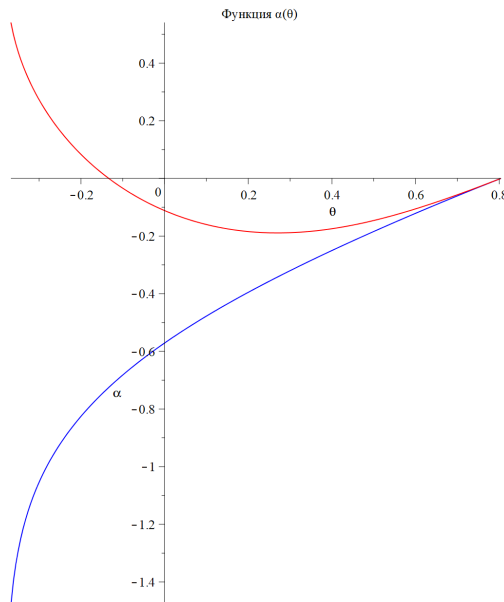


Рисунок 2.10 Зависимость величины угла  $\alpha$  в зависимости от  $\theta$ . Величины параметров равны:  $h = 0.72$ ,  $A = 0.63$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

Совмещая два полученных графика, получаем полный вид неподвижного годографа для данного случая. Он изображен на рисунке 2.11.

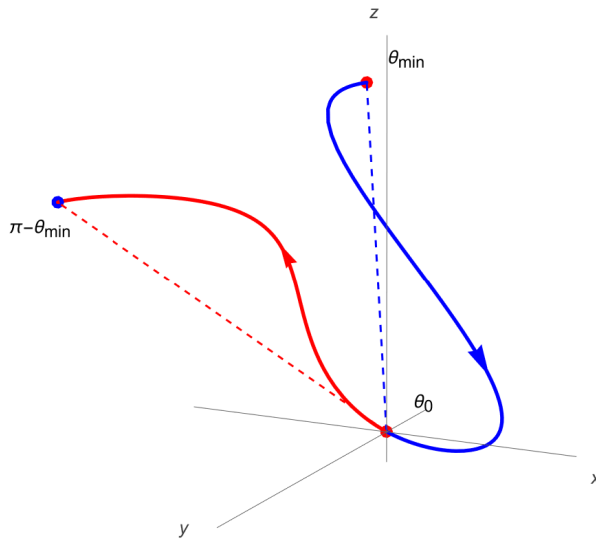


Рисунок 2.11 Неподвижный годограф. Величины параметров равны:  $h = 0.72$ ,  $A = 0.63$ ,  $d_1 = -0.5$ ,  $C = 0$ .

Заметим, что и график подвижного годографа, и не подвижного годографа симметричен относительно неподвижной точки. Значит, гири стат совершает периодические колебания с периодом  $T_1$ . При достижении времени  $\tau_1$ , при котором  $\theta = \theta_0$  у нас происходит остановка движения, и в следующий момент времени гири стат меняет направление вращения. При этом центр масс занимает свое наивысшее положение, равное  $h\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . На рисунке 2.12 показано положение аксоидов в момент времени  $\tau$ .

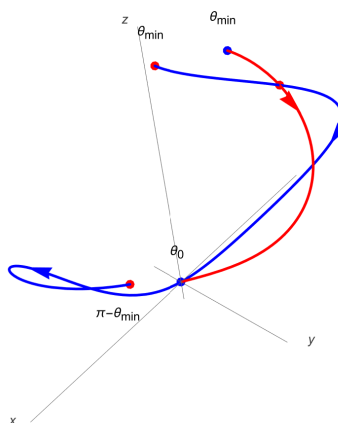


Рисунок 2.12 Качение подвижного годографа по неподвижному.

### 2.4.3. Случай III.

В данном случае движение по своей сути идентично прошлому случаю. На рисунках 2.13, 2.14, 2.15 представлены проекции неподвижного годографа, график зависимости угла  $\alpha$  от  $\theta$  и полный вид неподвижного годографа.

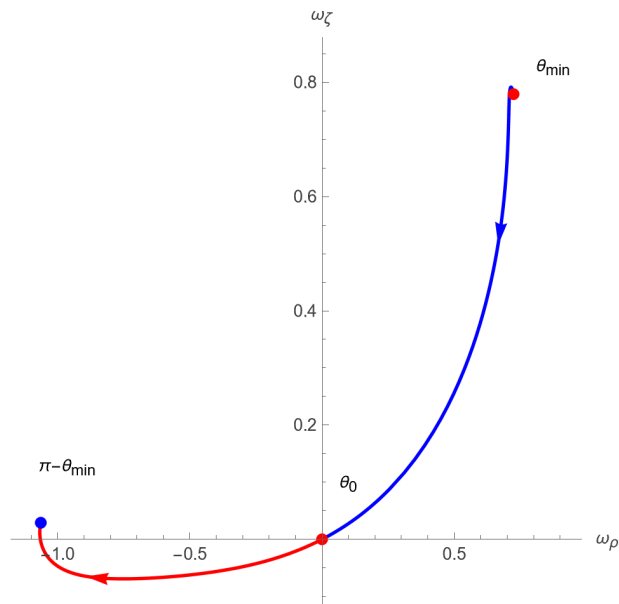


Рисунок 2.13 Проекция неподвижного годографа. Величины параметров равны:  $h = -0.43$ ,  $A = 0.42$ ,  $d_1 = -0.7$ ,  $C = 0$ .

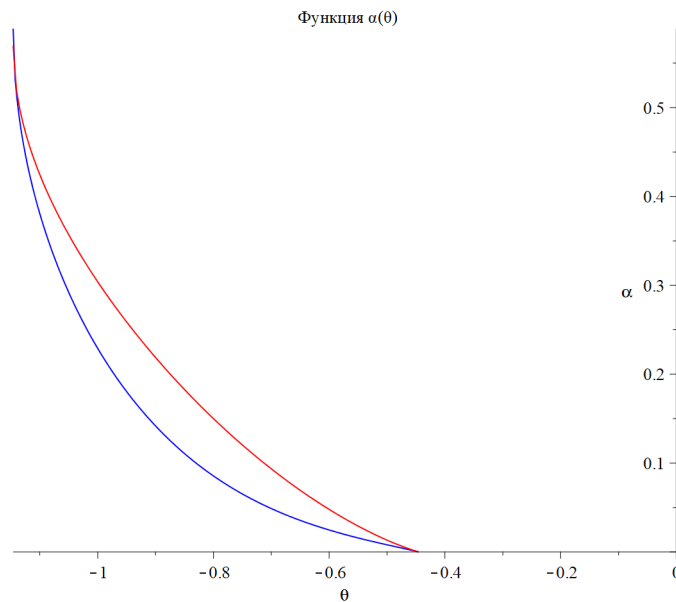


Рисунок 2.14 Зависимость величины угла  $\alpha$  в зависимости от  $\theta$ . Величины параметров равны:  $h = -0.43$ ,  $A = 0.42$ ,  $d_1 = -0.7$ ,  $C = 0$ .

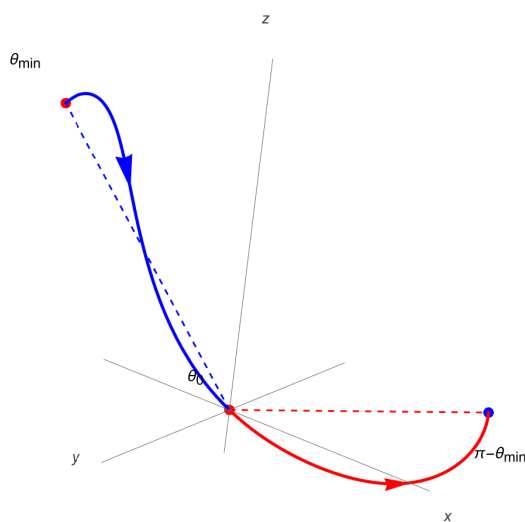


Рисунок 2.15 Неподвижный годограф. Величины параметров равны:  $h = -0.43$ ,  $A = 0.42$ ,  $d_1 = -0.7$ ,  $C = 0$ .

Как и в случае II, гиростат совершает периодические колебания с периодом  $T_1$ . В моменты остановки центр масс достигает своего наименьшего положения  $h\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . На рисунке 2.16 показано положение аксоидов в момент времени  $\tau_0 < \tau < \tau_1$ .

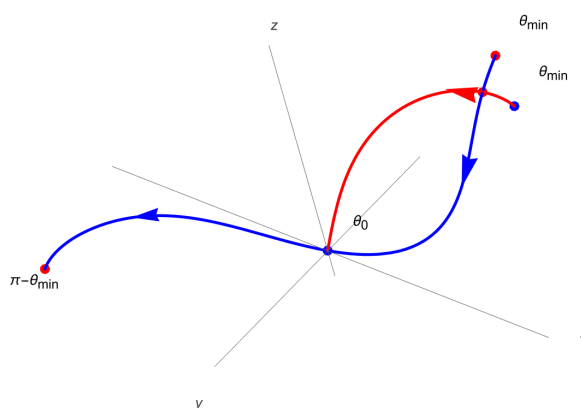


Рисунок 2.16 Качение подвижного годографа по неподвижному.

Таким образом, применение метода годографов Харламова позволило провести полный анализ и установить особенности движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского при выполнении соотношений на параметры, допускающих интегрирование в лиувиллевых функциях.

## Глава 3. О движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических сил

### 3.1. Постановка задачи. Уравнения движения гиростата и их первые интегралы

Рассмотрим движение в однородном поле тяжести гиростата с неподвижной точкой. Здесь и далее мы будем использовать ту же постановку задачи и обозначения как в Главе 1, если не указано иное. Предположим, что гиростат  $S$  движется под действием момента силы тяжести  $Mg [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0]$  и момента гироскопических сил  $[\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}]$ . Здесь  $\mathbb{G} = \mathbb{G}^T$  — некоторая симметричная матрица с постоянными коэффициентами. Момент сил такого вида возникает в результате действия силы Лоренца при вращении заряженного твердого тела, которое помещено в однородное магнитное поле с постоянным вектором напряженности [26, 27, 35, 41].

Закон изменения кинетического момента гиростата относительно неподвижной точки записывается в виде следующего векторного уравнение:

$$\mathbb{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s})] = Mg [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0] + [\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (3.1.1)$$

Векторное уравнение (3.1.1) совместно с уравнением Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (3.1.2)$$

образует замкнутую систему из шести дифференциальных уравнений, которые описывают движение гиростата.

При любых значениях параметров задачи система (3.1.1), (3.1.2) обладает

---

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором лично или в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [68, 74].

три первыми интегралами:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega}) + Mg (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}_0) = E = \text{const}, \\ K &= ((\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2} (\mathbb{G} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = k = \text{const}, \\ (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) &= 1. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

В работе А.А. Косова [27] были получены условия, при соблюдении которых у системы (3.1.1), (3.1.2) существует дополнительный частный интеграл, аналогичный интегралу в случае Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.1.1** Пусть для системы (3.1.1), (3.1.2) выполняются следующие условия

1.

$$\begin{aligned} A_2 (A_3 - A_1) x_2^2 &= A_1 (A_2 - A_3) x_1^2, \\ x_3 &= 0, \quad s_3 = 0, \quad A_2 \geq A_3 \geq A_1; \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

2. Матрица  $\mathbb{G}$  имеет вид:

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем для компонент  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  справедливы условия

$$g_{11}x_2 - g_{12}x_1 = 0, \quad g_{12}x_2 - g_{22}x_1 = 0. \tag{3.1.5}$$

Тогда система уравнений (3.1.1), (3.1.2) обладает частным интегралом Гесса–Сретенского, который имеет вид

$$A_1 \omega_1 x_1 + A_2 \omega_2 x_2 + \frac{A_1 x_1 (s_2 x_1 - s_1 x_2)}{(A_3 - A_1) x_2} = 0. \tag{3.1.6}$$

Проанализируем условия (3.1.5). Мы имеем два условия на три компоненты матрицы  $\mathbb{G}$ . Следовательно, вводя вспомогательный параметр  $\lambda$ , мы без

ограничения общности можем записать следующие соотношения

$$g_{11} = \lambda x_1^2, \quad g_{12} = \lambda x_1 x_2, \quad g_{22} = \lambda x_2^2.$$

При выполнении условий (3.1.4), (3.1.5) скалярная форма системы уравнений Эйлера–Пуассона (3.1.1), (3.1.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 - s_2 \omega_3 &= \lambda x_2 \omega_3 (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) - Mg x_2 \gamma_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_1 \omega_3 + s_1 \omega_3 &= Mg x_1 \gamma_3 - \lambda x_1 \omega_3 (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2), \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 + s_2 \omega_1 - s_1 \omega_2 &= Mg (x_2 \gamma_1 - x_1 \gamma_2) + \\ &+ \lambda (x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2); \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2. \quad (3.1.8)$$

У системы (3.1.7), (3.1.8) имеется три первых интеграла:

$$H = \frac{1}{2} (A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2) + Mg (x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) = E,$$

$$K = (A_1 \omega_1 + s_1) \gamma_1 + (A_2 \omega_2 + s_2) \gamma_2 + A_3 \omega_3 + \frac{\lambda}{2} (x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2)^2 = k,$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Докажем, что при выполнении условий (3.1.4), (3.1.5) у системы (3.1.7), (3.1.8) действительно существует частный интеграл (3.1.6). Для этого умножим первое уравнение системы (3.1.4) на  $x_1$ , второе уравнение — на  $x_2$  и сложим их, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A_1 \omega_1 x_1 + A_2 \omega_2 x_2) &= (A_3 - A_1) \omega_1 \omega_3 x_2 + (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 x_1 + \\ &+ \omega_3 (s_2 x_1 - s_1 x_2). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Правая часть выражения (3.1.9) с учетом условий (3.1.4) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} (A_3 - A_1) \omega_1 \omega_3 x_2 + (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 x_1 + \omega_3 (s_2 x_1 - s_1 x_2) &= \\ = \frac{(A_2 - A_3) \omega_3 x_1}{A_2 x_2} \left( A_1 \omega_1 x_1 + A_2 \omega_2 x_2 + \frac{A_1 x_1 (s_2 x_1 - s_1 x_2)}{(A_3 - A_1) x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

С учетом полученного соотношения (3.1.10) из уравнения (3.1.9) следует вывод: если в начальный момент времени условие (3.1.6) выполняется, то это условие справедливо во все время движения гиростата. Значит, система уравнений (3.1.7), (3.1.8) при соблюдении условий (3.1.4), (3.1.5) действительно допускает частный интеграл (3.1.6).

### 3.2. Уравнения движения гиростата в специальной системе координат П.В. Харламова

Запишем уравнения движения гиростата (3.1.7), (3.1.8) в специальных осях Харламова, как это было сделано в Главе 1. Для этого вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_2 &= \frac{A_2\omega_2x_1 - A_1\omega_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_3 &= A_3\omega_3, \\ \nu_1 &= \frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_2 &= \frac{\gamma_2x_1 - \gamma_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_3 &= \gamma_3, & k_1 &= \frac{s_1x_1 + s_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ k_2 &= \frac{s_2x_1 - s_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \Gamma &= Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & \Lambda &= \lambda(x_1^2 + x_2^2), \\ a &= \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & b &= \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & c &= \frac{1}{A_3}. \end{aligned}$$

Тогда в переменных  $L_1, L_2, L_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$  система уравнений (3.1.7), (3.1.8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= -bL_3 \left( L_1 - \frac{ck_2}{b} \right), \\ \dot{L}_2 &= (a - c)L_1L_3 + bL_2L_3 - ck_1L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 + \nu_3\Gamma, \\ \dot{L}_3 &= -(a - c)L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 + (k_1b - k_2a)L_1 + \\ &\quad + (k_1c - k_2b)L_2 + \Lambda(bL_1 + cL_2)\nu_1 - \nu_2\Gamma, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= (aL_1 + bL_2)\nu_3 - cL_3\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= -(aL_1 + bL_2)\nu_2 + (cL_2 + bL_1)\nu_1. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Из первого уравнения системы (3.2.1) легко находится частный интеграл

Гесса–Сретенского (3.1.6), который в новых обозначениях имеет вид

$$L_1 \equiv \frac{ck_2}{b}. \quad (3.2.2)$$

Интегрируемый случай Гесса–Сретенского в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой под действием гиросокопических сил определяется инвариантным многообразием (3.2.2) (или, в других обозначениях, (3.1.6)) вместе с условиями (3.1.4), (3.1.5). При выполнении этих условий на уровне частного интеграла Гесса–Сретенского (3.2.2) система уравнений (3.2.1) может быть записана в следующей упрощенной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}}_2 &= b\tilde{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 + \nu_3\Gamma, \\ \dot{L}_3 &= -b\tilde{L}_2^2 - (F - Gc)\tilde{L}_2 + \Lambda c\nu_1\tilde{L}_2 - \nu_2\Gamma, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\tilde{L}_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = -cL_3\nu_1 + b\tilde{L}_2\nu_3 + F\nu_3, \\ \dot{\nu}_3 &= c\tilde{L}_2\nu_1 - b\tilde{L}_2\nu_2 - F\nu_2. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Здесь, как и в предыдущей главе, используются следующие обозначения

$$\tilde{L}_2 = L_2 + k_2, \quad F = \frac{(ac - b^2)k_2}{b}, \quad G = \frac{ck_2}{b} + k_1.$$

У системы уравнений (3.2.3) есть три первых интеграла

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \left( \tilde{L}_2^2 + L_3^2 \right) + \Gamma\nu_1 &= E, \\ G\nu_1 + \tilde{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + \frac{\Lambda\nu_1^2}{2} &= k, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

### 3.3. Обезразмеривание уравнений движения. Редукция уравнений движения к одному дифференциальному уравнению второго порядка

Произведем обезразмеривание уравнений системы (3.2.3) и первых интегралов (3.2.4). Для этого введем безразмерные компоненты кинетического момента

$$y = \tilde{L}_2\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad z = L_3\sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

безразмерное время  $\tau = t\sqrt{\Gamma c}$  и безразмерные параметры:

$$d_1 = \frac{b}{c}, \quad Q = \Lambda\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad A = \frac{F}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad B = G\sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

а также безразмерные постоянные первых интегралов:

$$h = \frac{E}{\Gamma}, \quad p = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

В безразмерной форме система уравнений (3.2.3) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z + (A - B) z - Q \nu_1 z + \nu_3, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 - (A - B) y + Q \nu_1 y - \nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z \nu_2 - y \nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = d_1 y \nu_3 - z \nu_1 + A \nu_3, \\ \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1 y \nu_2 + y \nu_1 - A \nu_2. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Уравнения движения гиростата (3.3.1) обладает следующими первыми интегралами

$$\begin{aligned} \frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 &= h, \quad y \nu_2 + z \nu_3 + B \nu_1 + \frac{Q}{2} \nu_1^2 = p, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Произведем при помощи первых интегралов (3.3.2) обезразмеренной системы дифференциальных уравнений движения (3.3.1) ее редукцию к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Умножим первое и второе уравнения системы (3.3.1) на  $y$  и  $z$  соответственно и сложим их, получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{y^2 + z^2}{2} \right) = y \nu_3 - z \nu_2.$$

Первый из интегралов (3.3.2) дает нам следующее соотношение

$$\nu_1 = h - \frac{y^2 + z^2}{2}.$$

Используя это соотношение, из двух оставшихся интегралов мы получаем выра-

жения

$$\nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 - \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2,$$

$$y\nu_2 + z\nu_3 = p - B \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right) - \frac{Q}{2} \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2.$$

Теперь, используя тождество (1.4.4), мы находим

$$\begin{aligned} (y\nu_3 - z\nu_2)^2 &= (y^2 + z^2) \left( 1 - \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2 \right) - \\ &- \left( p - B \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right) - \frac{Q}{2} \left( h - \frac{y^2 + z^2}{2} \right)^2 \right)^2 = \frac{P_4(y^2 + z^2)}{64}. \end{aligned}$$

Здесь  $P_4(y^2 + z^2)$  — многочлен четвертой степени относительно  $y^2 + z^2$  с постоянными коэффициентами. В явном виде этот полином записывается так

$$\begin{aligned} P_4(y^2 + z^2) &= -Q^2(y^2 + z^2)^4 + 8(BQ + Q^2h - 2)(y^2 + z^2)^3 + \\ &+ 8(8h - 2B^2 - 6BQh - 3Q^2h^2 + 2pQ)(y^2 + z^2)^2 + 32(2 - 2h^2 - 2pB - \\ &- 2pQh + 2B^2h + 3QBh^2 + Q^2h^3)(y^2 + z^2) - 16(Qh^2 + 2Bh - 2p)^2. \end{aligned}$$

Выберем

$$y\nu_3 - z\nu_2 = -\frac{\sqrt{P_4(y^2 + z^2)}}{8} \quad (3.3.3)$$

(здесь, как и в предыдущей главе, знак перед корнем в правой части можно выбрать любым). Таким образом, уравнение (3.3.2) можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{y^2 + z^2}{2} \right) = -\frac{\sqrt{P_4(y^2 + z^2)}}{8}.$$

Домножая уравнения системы (3.3.1) на  $-z$  и  $y$  соответственно и складывая их, получаем:

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} &= -d_1 y (y^2 + z^2) - \frac{3Q}{8} (y^2 + z^2)^2 + \frac{1}{2} (Qh^2 + 2Bh - 2p) + \\ &+ \frac{1}{2} (Qh - 2A + B) (y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Вводим новые переменные  $x$  и  $\varphi$  по формулам (1.4.5). В результате мы

получаем систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка для определения параметров  $x$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{\sqrt{P_8(x)}}{8}, \\ x^2 \frac{d\varphi}{d\tau} &= -d_1 x^3 \cos \varphi - \frac{3Q}{8} x^4 + \frac{1}{2} (Qh - 2A + B) x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (Qh - 2A + B) x^2, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

где  $P_8(x)$  — многочлен восьмой степени от переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} P_8(x) &= -Q^2 x^8 + 8(BQ + Q^2 h - 2) x^6 + \\ &+ 8(8h - 2B^2 - 6BQh - 3Q^2 h^2 + 2pQ) x^4 + \\ &+ 32(2 - 2h^2 - 2pB - 2pQh + 2B^2 h + 3QBh^2 + Q^2 h^3) x^2 - \\ &- 16(Qh^2 + 2Bh - 2p)^2. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Разделив одно уравнение системы (3.3.4) на другое, получаем дифференциальное уравнение, которое определяет зависимость  $\varphi = \varphi(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{1}{x\sqrt{P_8(x)}} \left( 8d_1 x^3 \cos \varphi + 3Qx^4 + 4(-Qh + 2A - B)x^2 - \right. \\ &\left. - 4Qh^2 - 8Bh + 8p \right). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Выполнив в уравнении (3.3.6) замену переменной по формуле

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

получаем уравнение Риккати:

$$\frac{dw}{dx} = f_2 w^2 + f_0, \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{3Qx^4 - 8d_1 x^3 + 4(-Qh + 2A - B)x^2 - 4Qh^2 - 8Bh + 8p}{2x\sqrt{P_8(x)}}, \\ f_0 &= \frac{3Qx^4 + 8d_1 x^3 + 4(-Qh + 2A - B)x^2 - 4Qh^2 - 8Bh + 8p}{2x\sqrt{P_8(x)}}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

При помощи замены

$$u = \exp \left( - \int f_2 w(x) dx \right),$$

уравнение (3.3.7) приводится к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u = 0, \quad a(x) = -\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx}, \quad b(x) = f_0 f_2, \quad (3.3.9)$$

где выражение  $f_2(x)$  и  $f_0(x)$  определяются формулами (3.3.8). В явном виде коэффициенты  $a(x)$  и  $b(x)$  определяются формулами:

$$a(x) = \frac{P_{12}(x)}{x P_8(x) P_4(x)}, \quad b(x) = -\frac{P_4(x) (P_4(x) + 16d_1 x^3)}{4x^2 P_8(x)}, \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 3Qx^4 - 8d_1 x^3 + 4(-Qh + 2A - B)x^2 - 4Qh^2 - 8Bh + 8p, \\ P_{12}(x) &= 3Q^3 x^{12} - 16d_1 Q^2 x^{11} + 12(-Qh + 2A - B)Q^2 x^{10} + \\ &+ 64d_1(Q^2 h + BQ - 2)x^9 + \left(-28Q^3 h^2 + 88Q^2 p + \right. \\ &+ \left.((-128A - 56B)Q^2 + 64Q)h + 256A - 128B + \right. \\ &+ \left.(-128AB + 16B^2)Q\right)x^8 + \left(224Q^3 h^3 + 512p + \right. \\ &+ \left.((192A + 672B)Q^2 - 384Q)h^2 + 128AB^2 - 64B^3 + \right. \\ &+ \left.(-576Q^2 p + 384B(A + B)Q - 512A - 256B)h + \right. \\ &+ \left.(-128Ap - 576Bp + 384)Q\right)x^6 - 256d_1 \left(Q^2 h^3 + \right. \\ &+ \left.(3BQ - 2)h^2 + 2(B^2 - Qp)h - 2Bp + 2\right)x^5 - \\ &- 48(Qh^2 + 2Bh - 2p) \left(9Q^2 h^2 + 4B^2 - 10Qp + \right. \\ &+ \left.(18BQ - 16)h\right)x^4 + 256(Qh^2 + 2Bh - 2p)^2 x^3 - \\ &- 64(Qh^2 + 2Bh - 2p) \left(-5Q^2 h^3 - 4Ap + 10Bp - 8 + \right. \\ &+ \left.(8 + (2A - 15B)Q)h^2 + (10Qp + B(2A - 5B)h)\right)x^2 - \\ &- 64(Qh^2 + 2Bh - 2p)^3, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

а многочлен  $P_8(x)$  определяется формулой (3.3.5). С учетом того, какой вид имеют многочлены  $P_4(x)$ ,  $P_8(x)$ ,  $P_{12}(x)$ , можно сделать вывод, что коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.3.9) являются рациональными функциями независимого переменного  $x$ . Справедлива теорема.

**Теорема 3.3.1** *Решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в поле гироскопических сил в случае Гесса–Сретенского сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.3.9) с рациональными коэффициентами.*

Действительно, если нам удалось явно получить общее решение уравнения (3.3.9):

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

то из этого решения мы можем получить зависимость  $\varphi = \varphi(x)$ . Используя полученное соотношение, по формулам (1.4.5) мы получаем явные выражения  $y = y(x)$  и  $z = z(x)$ . Теперь из системы уравнений

$$\begin{aligned} y(x)\nu_2 + z(x)\nu_3 &= p - B \left( h - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{Q}{2} \left( h - \frac{x^2}{2} \right)^2, \\ y(x)\nu_3 - z(x)\nu_2 &= -\frac{1}{8} \sqrt{P_8(x)} \end{aligned}$$

мы определяем  $\nu_2$  и  $\nu_3$  как функции переменного  $x$ . Наконец, из первого интеграла

$$\nu_1 = h - \frac{y^2 + z^2}{2}.$$

мы определяем зависимость  $\nu_1 = \nu_1(x)$ , а зависимость  $x = x(\tau)$  определяется из первого уравнения системы (3.3.4) при помощи квадратур.

Таким образом, решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в поле гироскопических сил в случае Гесса–Сретенского сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. В следующем разделе при помощи алгоритма Ковачича мы исследуем вопрос о существовании у уравнения (3.3.9) лиувиллевых решений.

### 3.4. Применение алгоритма Ковачича

Для начала отметим, что здесь и далее мы считаем, что  $Q \neq 0$ , так как в противном случае движение гиростата происходит только под действием силы тяжести, что было полностью исследовано во Главе 1. Будем применять алгоритм Ковачича по шагам, как это описано в разделе 5 Главы 1, Замена вида

$$y(x) = u(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int a(x) dx\right).$$

приводит уравнение (3.3.9) к следующему виду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r(x)y, \quad r(x) = \frac{1}{2} \frac{da}{dx} + \frac{1}{4} a^2 - b. \quad (3.4.1)$$

С учетом формул (3.3.11), получаем, что функция  $r(x)$  является рациональной функцией, в числителе которой стоит многочлен  $P_{22}(x)$ . Явный вид этого многочлена здесь не приводится. Знаменатель функции  $r(x)$  устроен так:

$$V(x) = P_8(x)^2 P_4(x)^2,$$

где многочлены  $P_8$  и  $P_4$  определяются формулами (3.3.5) и (3.3.11) соответственно, откуда следует, что функция  $r(x)$  обладает двенадцатью конечными полюсами второго порядка. Из разложения  $r(x)$  на простейшие следует:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  — корни многочлена  $P_8(x)$  одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 9, \dots, 12$  — корни многочлена  $P_4(x)$  одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 9, \dots, 12.$$

3. В окрестности точки  $x = \infty$  функция  $r(x)$  разлагается в ряд:

$$r(x) = -\frac{2}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Из указанных особенностей разложения следует, что у уравнения (3.3.9) могут существовать решения всех трех типов. Применим алгоритм Ковачича для нахождения решений первого типа.

**Шаг 1.** Вычисляем функции  $[\sqrt{r}]_c$  и постоянные  $\alpha_c^\pm$ . Получаем следующие значения

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_i}^- = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \dots, 8;$$

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{x_i}^- = -\frac{1}{2}, \quad i = 9, 10, 11, 12;$$

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 2, \quad \alpha_\infty^- = -1.$$

**Шаг 2.** Так как количество конечных полюсов  $\rho$  функции  $r(x)$  равно 12, мы имеем  $2^{\rho+1} = 2^{13} = 8192$  наборов

$$s = (s(\infty), s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_{11}), s(x_{12})).$$

Рассмотрим набор

$$s_1 = (+, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -),$$

для которого значение постоянной  $d$ , вычисляемой по формуле (1.5.4), равно двум.

**Шаг 3.** Построим для набора  $s_1$  функцию  $\theta(x)$ , используя формулу (1.5.5) В явном виде эта функция имеет следующий вид

$$\theta = -\frac{2xP_6(x)}{P_8(x)} - \frac{2x(3Qx^2 - 6d_1x + 2(2A - B - Qh))}{P_4(x)},$$

где  $P_6(x)$  — полином шестой степени от  $x$ :

$$P_6(x) = Q^2x^6 + 6(2 - BQ - Q^2h)x^4 - 8(Qh^2 + 2Bh - 2p_1) \times \\ \times (B + Qh) + 4(3Q^2h^2 - 8h + 2B^2 + 6BQh - 2p_1Q)x^2 + 16(h^2 - 1).$$

Многочлен  $P$  степени  $d = 2$

$$P = x^2 + K_1x + K_2$$

должен являться тождественным решением дифференциального уравнения (1.5.6). После подстановки  $P$ ,  $\theta$  и  $r(x)$  в уравнение (1.5.6), мы получаем в левой части рациональное выражение, числитель которого является полиномом степени 11

$$\Pi_{11} = -6Q^2(2d_1 + QK_1)x^{11} + \dots$$

Положим

$$K_1 = -\frac{2d_1}{Q}.$$

Тогда многочлен в числителе левой части уравнения (1.5.6) принимает вид:

$$\Pi_{10} = -6Q(2AQ + Q^2K_2 + 2BQ + 2Q^2h - 4d_1^2 - 6)x^{10} + \dots$$

Чтобы превратить старший член этого многочлена в ноль, примем

$$K_2 = \frac{2(2d_1^2 + 3 - Q^2h - BQ - AQ)}{Q^2}.$$

В результате числитель рационального выражения в левой части уравнения (1.5.6) выглядит следующим образом

$$\Pi_9 = 144d_1(AQ - 1 - d_1^2)x^9 + \dots \quad (3.4.2)$$

Для того, чтобы старший член  $\Pi_9$  обратился в ноль, мы можем положить

$$A = \frac{1 + d_1^2}{Q}.$$

Тогда многочлен девятой степени  $\Pi_9$ , стоящий в числителе, принимает вид:

$$\begin{aligned} \Pi_8 = \frac{24}{Q} & \left( 10 - 10BQ - 4Q^2h + 4d_1^2 - 2hD_1^2Q^2 - 2Bd_1^2Q + d_1^4 + \right. \\ & \left. + 2p_1Q^3 + B^2Q^2 \right) x^8 + \dots \end{aligned}$$

Зануляем коэффициент при старшем члене полинома  $\Pi_8$ , приняв

$$p_1 = \frac{2Bd_1^2Q + 2hd_1^2Q^2 - 4d_1^2 - B^2Q^2 - d_1^4 - 10 + 10BQ + 4Q^2h}{2Q^3}.$$

После этой подстановки, числитель принимает вид

$$\Pi_7 = \frac{480d_1}{Q^2} (BQ - 1) x^7 + \dots$$

Положив

$$B = \frac{1}{Q},$$

многочлен  $\Pi_7$  трансформируется в многочлен следующего вида

$$\Pi_6 = \frac{432}{Q^3} (1 + Q^4 + 2d_1^2 + d_1^4 - 2Q^2h - 2hd_1^2Q^2) x^6 + \dots$$

Если мы положим

$$h = \frac{Q^4 + (d_1^2 + 1)^2}{2Q^2(d_1^2 + 1)},$$

то тогда многочлен  $\Pi_6$  превращается в ноль. Отсюда получаем следующую теорему.

**Теорема 3.4.1** *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (3.3.9) имеет ливиллевы решения типа 1, если соблюдаются условия:*

$$\begin{aligned} A &= \frac{d_1^2 + 1}{Q}, \quad B = \frac{1}{Q}, \quad h = \frac{Q^4 + (d_1^2 + 1)^2}{2Q^2(d_1^2 + 1)}, \\ p_1 &= \frac{Q^4 + (d_1^2 + 1)^2}{2Q^3(d_1^2 + 1)} + \frac{Q}{2}; \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

При выполнении условий (3.4.3) общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.3.9) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 u_1(x) + C_2 u_1(x) \int \frac{f_2^* dx}{u_1^2(x)}, \quad f_2^* = f_2|_{(3.4.3)}, \\ u_1(x) &= \frac{Q^4 - (d_1^2 + 1) \left( (Qx - d_1)^2 + 1 \right)}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Проверка остальных наборов  $s_i$  аналогичным образом дает нам те же самые

условия существования лиувиллевых решений типа 1, что и проверка набора  $s_1$ . Следовательно, условия (3.4.3) существования лиувиллевых решений первого типа у уравнения (3.3.9) являются не только необходимыми, но и достаточными.

Изучим вопрос о существовании у уравнения (3.3.9) лиувиллевых решений второго типа.

**Шаг 1.** Для каждого полюса функции  $r(x)$  определяем  $E_c$  и  $E_\infty$ :

1. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

2. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 9, \dots, 12$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 9, \dots, 12.$$

3. Множество  $E_\infty$  состоит из

$$E_\infty = \{-4, 2, 8\}.$$

**Шаг 2.** Составим из элементов полученных на прошлом шаге множеств  $E_\infty$ ,  $E_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, 12$  наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_{12}})$$

и исключим все те наборы, которые состоят только из четных чисел. Для оставленных наборов вычислим значение  $d$  по формуле (1.5.7). Для того, чтобы набор оказался подходящим для применения алгоритма Ковачича, нам нужно, чтобы число  $d$  было неотрицательным и целым. По результатам отсеивания наборов  $s_i$  можно сделать следующие выводы:

1. всего подходящих наборов — 3452;
2. для  $d = 4$  существует только один набор

$$s_1 = (8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2);$$

3. для  $d = 3$  существует 36 наборов;

4. для  $d = 2$  существует 270 наборов;
5. для  $d = 1$  существует 929 наборов;
6. для  $d = 0$  существует 2216 наборов.

**Шаг 3.** Начнем с проверки набора  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = -\frac{4xP_6(x)}{P_8(x)} - \frac{4x(3Qx^2 - 6d_1x + 2(2A - B - Qh))}{P_4(x)}.$$

Искомый полином  $P$  имеет вид

$$P = x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

Теперь подставляем функции  $r(x)$ ,  $\theta(x)$  и полином  $P$  в (1.5.9) и пытаемся отыскать такой многочлен  $P$ , при котором это уравнение превратится в тождество. После подстановки и упрощения получаем в левой части уравнения (1.5.9) рациональную функцию, в числителе которой стоит многочлен степени 16

$$\Pi_{16} = -90Q^3(QC_1 + 4d_1)x^{16} + \dots$$

Положим

$$C_1 = -\frac{4d_1}{Q}.$$

Тогда числитель превращается в многочлен 15 степени:

$$\Pi_{15} = -72Q^2(4AQ - 12d_1^2 + Q^2C_2 - 12 + 4BQ + 4Q^2h)x^{15} + \dots$$

Теперь положим

$$C_2 = \frac{4(3d_1^2 + 3 - AQ - BQ - Q^2h)}{Q^2}.$$

После подстановки этого значения многочлен в числителе левой части уравнения (1.5.9) упрощается и принимает вид

$$\Pi_{14} = 2592d_1Q(AQ - 1 - d_1^2)x^{14} + \dots$$

Чтобы превратить главный член многочлена  $\Pi_{14}$  в ноль, выберем

$$A = \frac{d_1^2 + 1}{Q}.$$

В результате, числитель левой части уравнения (1.5.9) принимает вид

$$\Pi_{13} = u_{13}x^{13} + u_{12}x^{12} + \dots,$$

$$u_{13} = 72Q^4C_4 + 216Q^3d_1C_3 + 1728(d_1^2 + 1)^2 - 1728Q(d_1^2 + 1) \times \\ \times (B + Qh) - 288Q^2(B + Qh)^2 + 288Q^2(B^2 + 6h + 2Qp_1),$$

$$u_{12} = \frac{24d_1}{Q} \left( -11Q^4C_4 - 48Q^3d_1C_3 + 44Q^3(Qh^2 + 2Bh - 2p_1) - \right. \\ \left. - 384(d_1^2 + 1)^2 + 384Q(B + Bd_1^2 + Qhd_1^2) \right).$$

Решая систему из двух уравнений

$$u_{13} = 0, \quad u_{12} = 0$$

относительно коэффициентов  $C_3$  и  $C_4$  многочлена  $P$ , мы получаем

$$C_3 = \frac{8(BQ(d_1^2 + 1) + Q^2hd_1^2 - (d_1^2 + 1)^2)}{d_1Q^3}, \quad C_4 = \frac{4(Qh^2 + 2Bh - 2p_1)}{Q}.$$

Подставляя эти выражения вместо  $C_3$  и  $C_4$  в  $\Pi_{13}$ , мы получаем, что этот многочлен обращается в 0. Таким образом, мы нашли условия существования лиувиллевых решений типа 2.

**Теорема 3.4.2** Пусть  $Q \neq 0$  (гироскопические силы присутствуют). Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (3.3.9) допускает общее решение, которое выражается в лиувиллевых функциях при выполнении условия

$$A = \frac{d_1^2 + 1}{Q}. \quad (3.4.4)$$

Действительно, при выполнении условия (3.4.4) общее решение дифференциального уравнения принимает вид

$$u(x) = \sqrt{\frac{\Pi_4(x)}{x}} (C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x)), \quad \Phi(x) = 8\sqrt{D} \int \frac{x f_2^* dx}{\Pi_4(x)},$$

$$\begin{aligned}
\Pi_4(x) &= d_1 Q^3 x^4 - 4d_1^2 Q^2 x^3 - 4d_1 Q (Q^2 h + BQ - 2 - 2d_1^2) x^2 + \\
&\quad + 8 \left( d_1^2 Q^2 h + (d_1^2 + 1) BQ - (d_1^2 + 1)^2 \right) x + 4d_1 Q^2 (Q^2 h + 2Bg - 2p), \\
D &= (d_1^2 + 1)^2 (BQ - d_1^2 - 1)^2 + 2d_1^2 Q^2 (d_1^2 + 1) (pQ - d_1^2 h - h) - Q^4 d_1^2, \\
f_2^* &= f_2|_{(3.4.4)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что если положить параметры  $A = B = 0$  (что в исходных параметрах означает, что  $s_1 = s_2 = 0$ ), то тогда гиростат вырождается в твердое тело. Таким образом, из теоремы 3.4.2 следует следующее утверждение:

**Следствие 3.4.1** Пусть  $Q \neq 0$  (гироскопические силы присутствуют). Тогда задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса допускает решение, выражающееся в терминах лиувиллевых функций только при выполнении условия  $d_1 = 0$ , то есть в том случае, когда распределение масс в твердом теле соответствует случаю интегрируемости Лагранжа.

Действительно, при выполнении условия  $d_1 = 0$ , общее решение уравнения (3.3.9) имеет вид:

$$u(x) = C_1 \cos g(x) + C_2 \sin g(x), \quad g(x) = f_2|_{A=B=d_1=0}.$$

### 3.5. Движение гиростата под действием только гироскопических сил

Вернемся к системе уравнений (3.2.3) и рассмотрим частный случай, когда на гиростат действуют только гироскопические силы ( $\Gamma = 0$ ). В этом случае уравнения движения гиростата принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{L}}_2 &= b\tilde{L}_2 L_3 + (F - Gc) L_3 - \Lambda c\nu_1 L_3, \\
\dot{\tilde{L}}_3 &= -b\tilde{L}_2^2 - (F - Gc) \tilde{L}_2 + \Lambda c\nu_1 \tilde{L}_2, \\
\dot{\nu}_1 &= cL_3 \nu_2 - c\tilde{L}_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = -cL_3 \nu_1 + b\tilde{L}_2 \nu_3 + F\nu_3, \\
\dot{\nu}_3 &= c\tilde{L}_2 \nu_1 - b\tilde{L}_2 \nu_2 - F\nu_2,
\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

а их первые интегралы выглядят так

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \left( \tilde{L}_2^2 + L_3^2 \right) = E, \quad G\nu_1 + \tilde{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + \frac{\Lambda\nu_1^2}{2} = k, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Получим уравнения системы (3.5.1) и первые интегралы (3.5.2) в безразмерной форме. В отличие от предыдущего случая, из-за отсутствия силы тяжести обезразмеривание нужно производить иным образом. Безразмерные компоненты кинетического момента вводятся по формулам

$$\tilde{L}_2 = y\Lambda, \quad L_3 = z\Lambda.$$

Безразмерное время  $\tau$  вводится при помощи выражения  $\tau = \Lambda ct$ , а безразмерные параметры и константы первых интегралом определяются следующим образом:

$$A = \frac{F}{c\Lambda}, \quad B = \frac{G}{\Lambda}, \quad h^2 = \frac{E}{\Lambda^2}, \quad p = \frac{k}{\Lambda}.$$

В результате обезразмеривания, система (3.5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z + (A - B) z - \nu_1 z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 - (A - B) y + \nu_1 y, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z\nu_2 - y\nu_3, \quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = d_1 y\nu_3 - z\nu_1 + A\nu_3, \\ \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1 y\nu_2 + y\nu_1 - A\nu_2. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Первые интегралы обезразмеренной системы (3.5.3) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 = h^2, \quad B\nu_1 + y\nu_2 + z\nu_3 + \frac{1}{2}\nu_1^2 = p, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Используя первые интегралы (3.5.4), сведем задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка. Для этого перепишем

тождество (1.4.4) в виде:

$$h^2 (1 - \nu_1^2) = \left( p - B\nu_1 - \frac{\nu_1^2}{2} \right)^2 + \left( \frac{d\nu_1}{d\tau} \right)^2,$$

откуда следует, что

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \pm \frac{\sqrt{4(h^2 - p^2) + 8Bp\nu_1 + 4(p - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}{2}. \quad (3.5.5)$$

Таким образом, зависимость  $\nu_1 = \nu_1(\tau)$  устанавливается при помощи квадратур из уравнения (3.5.5). Также, из уравнения (3.3.4) следует, что

$$z\nu_2 - y\nu_3 = \pm \frac{\sqrt{4(h^2 - p^2) + 8Bp\nu_1 + 4(p - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}{2}.$$

Для определенности выберем знак « $-$ » перед корнем (выбор знака не влияет на окончательный вид линейного дифференциального уравнения второго порядка, к нахождению общего решения которого сводится решение данной задачи). Введем новую переменную  $\varphi$  по формуле:

$$y = h \cos \varphi, \quad z = h \sin \varphi,$$

и будем считать, что  $\varphi = \varphi(\nu_1)$ . Так как

$$\frac{dy}{d\tau} = -h \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\nu_1} \frac{d\nu_1}{d\tau},$$

то из системы (3.5.3) мы получаем дифференциальное уравнение, которое выражает зависимость  $\varphi$  от переменной  $\nu_1$ :

$$\frac{d\varphi}{d\nu_1} = \frac{2d_1 h \cos \varphi + 2(A - B - \nu_1)}{\sqrt{4(h^2 - p^2) + 8Bp\nu_1 + 4(p - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}. \quad (3.5.6)$$

В дальнейшем для уменьшения размеров выкладок мы будем обозначать  $\nu_1$  за  $x$ . При помощи замены вида

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

уравнение (3.5.6) приводится к уравнению Риккати вида

$$\frac{dw}{dx} = f_2 w^2 + f_0, \quad (3.5.7)$$

$$f_2 = \frac{A - B - x - d_1 h}{\sqrt{4(h^2 - p^2) + 8Bp\nu_1 + 4(p - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}},$$

$$f_0 = \frac{A - B - x + d_1 h}{\sqrt{4(h^2 - p^2) + 8Bp\nu_1 + 4(p - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}.$$

При помощи замены

$$u = \exp\left(-\int f_2 w(x) dx\right),$$

уравнение Риккати (3.5.7) превращается в линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u = 0, \quad a(x) = -\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx}, \quad b(x) = f_0 f_2, \quad (3.5.8)$$

$$a(x) = \frac{P_4(x)}{x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p)x^2 - 8Bpx + 4(p^2 - h^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{x + d_1 h + B - A},$$

$$b(x) = -\frac{(A - B + d_1 h - x)(A - B - d_1 h - x)}{x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p)x^2 - 8Bpx + 4(p^2 - h^2)},$$

$$P_4(x) = x^4 + 2(2B - A + d_1 h)x^3 + 6B(B - A + d_1 h)x^2 +$$

$$+ 4((B - A + d_1 h)(B^2 + h^2) + p(A - d_1 h))x + 4(h^2 - p^2) -$$

$$- 4Bp(B - A + d_1 h).$$

Заметим, что коэффициенты  $a(x)$  и  $b(x)$  - рациональные функции переменной  $x$ . Таким образом, справедливо утверждение.

**Теорема 3.5.1** *Решение задачи о движении гиростата с неподвижной точкой в поле гироскопических сил в случае Гесса–Сретенского сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.5.8) с рациональными коэффициентами.*

Исследуем вопрос о существовании у уравнения (3.5.8) лиувиллевых решений. Для этого воспользуемся алгоритмом Ковачича.

При помощи замены

$$y(x) = u(x) \exp \left( \frac{1}{2} \int a(x) dx \right).$$

уравнение (3.5.8) приводится к дифференциальному уравнению вида (1.5.3). С учетом того, как устроены коэффициенты  $a(x)$  и  $b(x)$ , получаем, что в знаменателе функции  $r(x)$  стоит

$$V(x) = (x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p)x^2 - 8Bpx + 4(p^2 - h^2))^2 \times \\ \times (x + d_1h + B - A)^2.$$

Из явного вида выражения для  $V(x)$  мы можем сделать вывод, что рациональная функция  $r(x)$  обладает пятью конечными полюсами, причем все они — полюса второго порядка. Разложение  $r(x)$  в сумму простейших дробей обладает следующими свойствами:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  — корни многочлена

$$x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p)x^2 - 8Bpx + 4(p^2 - h^2) = 0,$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

2. Коэффициент  $b_5$  при выражении  $\frac{b_5}{(x - x_5)^2}$ , где  $x_5 = A - B - d_1h$ , равен

$$b_5 = \frac{3}{4}.$$

3. В окрестности точки  $x = \infty$  функцию  $r(x)$  можно представить в виде ряда

$$r(x) = \frac{3}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

В силу отмеченных нами свойств функции  $r(x)$  и особенностей ее разложения на простейшие дроби, мы можем утверждать о выполнении для уравнения (3.5.8) необходимых условий теоремы 1.5.2 для всех трех случаев. Следовательно,

дифференциальное уравнение (3.5.8) может обладать лиувиллевыми решениями каждого из трех типов.

Применим алгоритм Ковачича для поиска лиувиллевых решений первого типа.

**Шаг 1.** Вычисляем функции  $[\sqrt{r}]_c$  и постоянные  $\alpha_c^\pm$ . Имеем следующие результаты

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_i}^- = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$[\sqrt{r}]_{x_5} = 0, \quad \alpha_{x_5}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{x_5}^- = -\frac{1}{2},$$

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_\infty^- = -\frac{1}{2}.$$

**Шаг 2.** Так как функция  $r(x)$  обладает пятью конечными полюсами, то у нас есть 64 набора знаков

$$s = (s(\infty), s(x_1), s(x_2), s(x_3), s(x_4), s(x_5)).$$

Рассмотрим набор  $s_1$

$$s_1 = (+, -, -, -, -, -).$$

Используя формулу (1.5.4) получаем, что этому набору соответствует значение  $d = 1$ . Следовательно, набор  $s_1$  подходит для дальнейшего рассмотрения, так как в соответствии с алгоритмом мы должны исключить из рассмотрения те наборы, для которых величина  $d$  не является неотрицательным целым числом.

**Шаг 3.** Построим для набора  $s_1$  функцию  $\theta(x)$  по формуле (1.5.5). В явном виде эта функция имеет следующий вид:

$$\theta = -\frac{x^3 + 3Bx^2 + 2(B^2 + h^2 - p_1) - 2Bp_1}{x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p_1)x^2 - 8Bp_1x + 4(p_1^2 - h^2)} - \frac{1}{2(x + d_1h + B - A)}.$$

Многочлен  $P$  степени  $d = 1$

$$P = x + C,$$

согласно алгоритму Ковачича, должен являться тождественным решением дифференциального уравнения (1.5.6). После подстановки в уравнение (1.5.6) величин  $P$ ,  $\theta$  и  $r(x)$ , в левой части этого выражения получаем рациональную функцию. Числитель этого выражения — полином третьей степени:

$$\Pi_3 = (A + B + d_1 h - C) x^3 + \dots$$

Выберем

$$C = A + B + d_1 h.$$

После подстановки этого значения, числитель левой части уравнения (1.5.6) принимает вид

$$\Pi_2 = 4Ad_1 h x^2 + \dots \quad (3.5.9)$$

Мы предполагаем, что  $h \neq 0$ . Положив

$$A = 0,$$

коэффициент при  $x^2$  обращается в ноль и числитель левой части уравнения (1.5.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Pi = 2h (d_1^3 h^2 + 2Bh + 2d_1 h^2 - 2d_1 p_1 - d_1 B^2) x - \\ - 2d_1 h B^3 + d_1^4 h^4 - B^4 + 2d_1^3 h^3 B - 4p_1^2 - 4d_1 h B p_1 - 4B^2 p_1 + 4h^2. \end{aligned}$$

Многочлен превращается в ноль, если параметры задачи удовлетворяют условиям:

$$p_1 = \frac{d_1^3 h^2 - d_1 B^2 + 2d_1 h^2 + 2Bh}{2d_1}, \quad (1 + d_1^2) (d_1 h + B)^2 = d_1^2.$$

Таким образом, по итогам анализа набора  $s_1$ , мы можем сформулировать следующую теорему

**Теорема 3.5.2** *У линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.5.8) есть ливиллевы решения типа 1, если выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} (1 + d_1^2) (d_1 h + B)^2 = d_1^2, \quad A = 0, \\ p_1 = \frac{d_1^3 h^2 - d_1 B^2 + 2d_1 h^2 + 2Bh}{2d_1}; \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Если выполнены условия (3.5.10), то общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.5.8) имеет вид:

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_1(x) \int \frac{f_2^* dx}{u_1^2(x)},$$

$$u_1(x) = x \sqrt{d_1^2 + 1} + d_1, \quad f_2^* = f_2|_{(3.5.10)}.$$

Проверка остальных подходящих наборов  $s_i$  показывает, что они не дают новых условий — полученные соотношения на параметры задачи совпадают с уже полученными условиями (3.5.10) существования у уравнения (3.5.8) лиувиллевых решений первого типа. Следовательно, условия (3.5.10) можно считать необходимыми и достаточными.

Перейдем к поиску лиувиллевых решений второго типа для уравнения (3.5.8). Поскольку необходимые условия существования, сформулированные в теореме 1.5.2, выполнены, приступаем к применению алгоритма Ковачича.

**Шаг 1.** Определяем множества  $E_c$  и  $E_\infty$  для полюсов функции  $r(x)$ .

1. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

2. Для конечного полюса  $x = x_5$  множество  $E_{x_5}$  равно

$$E_{x_5} = \{-2, 2, 6\}.$$

3. Множество  $E_\infty$  состоит из трех элементов

$$E_\infty = \{-2, 2, 6\}.$$

**Шаг 2.** Составим из элементов множеств  $E_\infty, E_{x_i}, i = 1, \dots, 5$  наборы  $s$

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_5}).$$

После этого отбросим все наборы, которые состоят целиком из четных чисел, а также те, для которых значение  $d$ , вычисляемое по формуле (1.5.7) не является целым неотрицательным числом. По итогам проверки всех наборов можем сделать следующий вывод:

1. всего существует 31 наборов;
2. для  $d = 2$  существует только один набор

$$s_1 = (6, 1, 1, 1, 1, -2);$$

3. для  $d = 1$  существует 10 наборов;
4. для  $d = 0$  существует 20 наборов.

**Шаг 3.** Рассмотрим набор  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = \frac{2x^3 + 6Bx^2 + 4(B^2 + h^2 - p_1)x - 4Bp_1}{x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p_1)x^2 - 8Bp_1x + 4(p_1^2 - h^2)} - \frac{1}{x + d_1h + B - A}.$$

Искомый полином  $P$  имеет вид

$$P = x^2 + K_1x + K_2.$$

Подставляем функции  $r(x)$ ,  $\theta(x)$  и полином  $P$  в (1.5.9) и пытаемся отыскать такой многочлен  $P$ , при котором это уравнение превратится в тождество. После упрощения мы получаем в числителе левой части уравнения (1.5.9) полином четвертой степени

$$\Pi_4 = 3(2B + 2A + 2d_1h - K_1)x^4 + \dots$$

Выберем

$$K_1 = 2A + 2B + 2d_1h.$$

Тогда левая часть уравнения (1.5.9) упрощается, и ее числитель принимает форму:

$$\Pi_3 = 16Ad_1hx^3 + \dots$$

Мы предполагаем, что  $h \neq 0$ , поэтому берем

$$A = 0.$$

Тогда полином  $\Pi_3$  упрощается и принимает вид

$$\Pi_2 = 4h (2d_1h^2 + 2Bh + 2Bd_1^2h - 2d_1p_1 + 2d_1^3h^2 - K_2d_1) (x + B + d_1h)^2,$$

а если в полученный полином положить

$$K_2 = \frac{2(Bh + Bd_1^2h + d_1h^2 + d_1^3h^2 - d_1p_1)}{d_1},$$

то он обратится в ноль. Таким образом, мы получили первое условие существования лиувиллевых решений.

Проверка остальных наборов, полученных на втором шаге дает нам то же самое условие на параметр  $A$ , а также дополнительные ограничения на остальные переменные задачи. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.5.3** *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (3.5.8) допускает общее решение, выражающееся через лиувиллевы функции при выполнении условия*

$$A = 0. \quad (3.5.11)$$

Условие (3.5.11) можно интерпретировать следующим образом: лиувиллевы решения существуют, если кинетический момент ротора коллинеарен радиус-вектору из неподвижной точки в центр масс гиростата.

Действительно, при выполнении условия  $A = 0$  общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.5.8) выглядит так:

$$u(x) = \sqrt{\Pi_2(x)} (C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x)), \quad \Phi(x) = 2h\sqrt{D} \int \frac{f_2^* dx}{\Pi_2(x)},$$

$$\Pi_2(x) = d_1(x + B + d_1h)^2 + 2hB + d_1(h^2d_1^2 + 2h^2 - B^2 - 2p),$$

$$D = (B^2 - d_1^2h^2)(d_1^2 + 1)^2 + 2d_1^2(d_1^2 + 1)k_1 - d_1^2, \quad f_2^* = f_2|_{A=0}.$$

Аналогично предыдущему разделу, из теоремы 3.5.3 можно получить утверждение для случая движения твердого тела.

**Следствие 3.5.1** *В задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса лиувиллевы решения существуют при любых значениях параметров задачи.*

В этом случае общее решение имеет следующий вид:

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 2d_1hx + 2(d_1^2h^2 + h^2 - p)} (C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x)),$$

$$\Phi(x) = \int \frac{\sqrt{2(d_1^2 + 1)p - (d_1^2 + 1)^2 h^2 - 1}}{\sqrt{4(h^2 - p^2) + 4(p - h^2)x^2 - x^4}} \times$$

$$\times \frac{2h(x + d_1h)}{x^2 + 2d_1hx + 2(d_1^2h^2 + h^2 - p)} dx.$$

**Следствие 3.5.2** Если параметры задачи удовлетворяют условиям

$$h = \pm \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + 1}}, \quad p = \frac{d_1^2 + 2}{2(d_1^2 + 1)},$$

то общее решение упрощается и имеет вид:

$$u(x) = C_1 \left( 2d_1 + \left( x\sqrt{d_1^2 + 1} + d_1 \right) \ln \left( \frac{d_1 - x\sqrt{d_1^2 + 1}}{d_1 + x\sqrt{d_1^2 + 1}} \right) \right) +$$

$$+ C_2 \left( x\sqrt{d_1^2 + 1} + d_1 \right).$$

Таким образом, нам удалось доказать, что решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических сил сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. При помощи алгоритма Ковачича нам удалось найти соотношения на параметры задачи, выполнение которых обеспечивает существование у полученного уравнения решения, выражающегося через лиувиллевы функции. Дополнительно мы рассмотрели частные случаи этой задачи: когда гиростат является твердым телом, а также рассмотрели отсутствие силы тяжести; оказалось, что в этих случаях решение задачи также сводится к решению одного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Для этих случаев мы также получили условия существования лиувиллевых решений и дали качественное описание этих условий.

## Глава 4. О движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил

### 4.1. Постановка задачи. Уравнения движения гиростата и их первые интегралы

Рассмотрим более обобщенную постановку предыдущей задачи. Предположим, что на тяжелый гиростат с неподвижной точкой помимо силы тяжести и гироскопических сил также действуют и циркулярно-гироскопические силы, момент которых имеет вид

$$L [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}].$$

Здесь  $L = \text{const}$ . Отметим, что момент сил такого вида возникает при вращении ферромагнитного тела в постоянном и однородном магнитном поле [26,41]. В этом случае, уравнения движения гиростата в векторной форме имеют следующий вид

$$\mathbb{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{s})] = Mg [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{r}_0] + [\mathbb{G} \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}] + L [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}], \quad (4.1.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (4.1.2)$$

Для любых значений параметров системы и для любых начальных условий, уравнения (4.1.1), (4.1.2) допускают три первых интеграла:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega}) + Mg (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{r}_0) = E = \text{const}, \\ K &= ((\mathbb{J}_O \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2} (\mathbb{G} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = k = \text{const}, \\ (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) &= 1. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

В работе А.А. Косова [27] были сформулированы условия, при соблюдении которых система уравнений (4.1.1), (4.1.2) обладает дополнительным частным

интегралом, который аналогичен интегралу Гесса–Сретенского. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.1.1** Пусть для системы (4.1.1), (4.1.2) выполняются следующие условия

1.

$$\begin{aligned} A_2(A_3 - A_1)x_2^2 &= A_1(A_2 - A_3)x_1^2, \quad x_3 = 0, \\ s_3 &= 0, \quad A_2 \geq A_3 \geq A_1; \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

2. Матрица  $\mathbb{G}$  имеет вид:

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем для компонент  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  справедливо условие

$$g_{11}x_2^2 - 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_1^2 = 0; \quad (4.1.5)$$

3.

$$L = \frac{A_1(g_{11}x_2 - g_{12}x_1)}{x_2(A_1 - A_3)}. \quad (4.1.6)$$

Тогда система уравнений (4.1.1), (4.1.2) обладает частным интегралом Гесса–Сретенского, который имеет вид

$$A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + L\gamma_1x_1 + L\gamma_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} = 0. \quad (4.1.7)$$

Проанализируем условия на компоненты матрицы  $\mathbb{G}$ . Перепиывая условие (4.1.5) в виде пропорции, получаем:

$$\frac{g_{11}x_2 - g_{12}x_1}{x_1} = \frac{g_{12}x_2 - g_{22}x_1}{x_2}. \quad (4.1.8)$$

С учетом соотношения (4.1.8), а также условия (4.1.6), для параметра  $L$  справедливо следующее:

$$L = \frac{A_1(g_{11}x_2 - g_{12}x_1)}{x_2(A_1 - A_3)} = \frac{A_2(g_{12}x_2 - g_{22}x_1)}{x_1(A_3 - A_2)} \quad (4.1.9)$$

Окончательно, при выполнении условий, описанных в теореме 4.1.1, уравнения Эйлера–Пуассона в скалярной форме принимают вид

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 - s_2\omega_3 &= -Mgx_2\gamma_3 + \\ &+ \omega_3(g_{12}\gamma_1 + g_{22}\gamma_2) + L(\omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2), \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 + s_1\omega_3 &= Mgx_1\gamma_3 - \\ &- \omega_3(g_{11}\gamma_1 + g_{12}\gamma_2) + L(\omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3), \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned} A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + s_2\omega_1 - s_1\omega_2 &= Mg(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2) + \\ &+ \omega_2(g_{11}\gamma_1 + g_{12}\gamma_2) - \omega_1(g_{12}\gamma_1 + g_{22}\gamma_2) + L(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1); \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

У системы (4.1.10), (4.1.11) имеется три первых интеграла:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + Mg(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2) = E, \\ K &= (A_1\omega_1 + s_1)\gamma_1 + (A_2\omega_2 + s_2)\gamma_2 + A_3\omega_3 + \\ &+ \frac{1}{2}(g_{11}\gamma_1^2 + 2g_{12}\gamma_1\gamma_2 + g_{22}\gamma_2^2) = k, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Покажем, что при выполнении условий (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6) у системы (4.1.10), (4.1.11) действительно есть частный интеграл (4.1.7). Умножая первые два уравнения системы на  $x_1$  и  $x_2$  соответственно и складывая их, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2) &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + \\ &+ (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 + \omega_3(s_2x_1 - s_1x_2) + L(\omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2)x_1 + \\ &+ L(\omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3)x_2 + (g_{12}\gamma_1x_1 + g_{22}\gamma_2x_2 - g_{11}\gamma_1x_1 - g_{12}\gamma_2x_2). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Заметим, что в силу уравнений (4.1.11), последние два слагаемых в правой части уравнения (4.1.12) равны

$$L(\omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2)x_1 + L(\omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3)x_2 = -\frac{d}{dt}(L\gamma_1x_1 + L\gamma_2x_2).$$

Таким образом, после переноса этой суммы налево, в левой части (4.1.12) мы получаем нужное нам выражение. Далее, сумму первых трех слагаемых в правой части можно при помощи условия (4.1.4) переписать в виде

$$\begin{aligned} & (A_3 - A_1) \omega_1 \omega_3 x_2 + (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 x_1 + \omega_3 (s_2 x_1 - s_1 x_2) = \\ & = \frac{(A_2 - A_3) \omega_3 x_1}{A_2 x_2} \left( A_1 \omega_1 x_1 + A_2 \omega_2 x_2 + \frac{A_1 x_1 (s_2 x_1 - s_1 x_2)}{(A_3 - A_1) x_2} \right), \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

а сумму слагаемых, содержащих компоненты  $g_{ij}$ , используя условия (4.1.5), (4.1.6) и равенство (4.1.9) — в виде

$$\begin{aligned} & \omega_3 ((g_{12} x_1 - g_{11} x_2) \gamma_1 + (g_{22} x_1 - g_{12} x_2) \gamma_2) = \frac{(A_2 - A_3) \omega_3 x_1}{A_2 x_2} \times \\ & \times (L \gamma_1 x_1 + L \gamma_2 x_2). \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Таким образом, с учетом выражений (4.1.13) и (4.1.14), мы можем сделать следующий вывод: если в начальный момент времени условие (4.1.7) было справедливо, то оно будет выполняться в течение всего времени движения гиростата. Значит, система уравнений (4.1.10), (4.1.11), если соблюдаются условия (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), действительно обладает частным интегралом (4.1.7).

Теперь наша задача — попробовать свести систему уравнений Эйлера–Пуассона к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Для этого мы, как и в предыдущих главах, должны записать уравнения движения гиростата в специальной системе координат.

## 4.2. Уравнения движения гиростата в осях Харламова

Аналогично тому, как это было сделано в Главах 1 и 2, запишем уравнения движения гиростата (4.1.10), (4.1.11) в специальных осях Харламова. Используем

следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_2 &= \frac{A_2\omega_2x_1 - A_1\omega_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_3 &= A_3\omega_3, \\
\nu_1 &= \frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_2 &= \frac{\gamma_2x_1 - \gamma_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_3 &= \gamma_3, & k_1 &= \frac{s_1x_1 + s_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\
k_2 &= \frac{s_2x_1 - s_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \Gamma &= Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & \Lambda &= \lambda(x_1^2 + x_2^2), \\
a &= \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & b &= \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & c &= \frac{1}{A_3}.
\end{aligned}$$

Получим выражения для компонентов матрицы  $\mathbb{G}$  с учетом новых обозначений. Разрешая соотношение (4.1.6) относительно  $g_{11}$ , мы получаем выражение

$$g_{11} = \frac{L(A_1 - A_3)}{A_1} + g_{12}\frac{x_1}{x_2}.$$

Как уже было показано в предыдущих Главах, согласно условию (4.1.4), имеем

$$A_3 = \frac{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}{A_1x_1^2 + A_2x_2^2},$$

а значит можем выразить

$$g_{11} = \frac{L(A_1 - A_2)x_1^2}{A_1x_1^2 + A_2x_2^2} + g_{12}\frac{x_1}{x_2}. \quad (4.2.1)$$

Теперь, используя условие (4.1.5) и полученное соотношение (4.2.1), получаем выражение для  $g_{22}$ :

$$g_{22} = -\frac{L(A_1 - A_2)x_2^2}{A_1x_1^2 + A_2x_2^2} + g_{12}\frac{x_2}{x_1}. \quad (4.2.2)$$

Окончательно, получаем, что в новых переменных компоненты  $g_{11}$  и  $g_{12}$  выражаются так:

$$g_{11} = \frac{Lb}{c}\frac{x_1}{x_2} + g_{12}\frac{x_1}{x_2}, \quad g_{22} = -\frac{Lb}{c}\frac{x_2}{x_1} + g_{12}\frac{x_2}{x_1}.$$

Записываем систему уравнений (4.1.10), (4.1.11) в переменных  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,

$\nu_1, \nu_2, \nu_3$ :

$$\begin{aligned}
\dot{L}_1 + L\dot{\nu}_1 &= -bL_3 \left( L_1 + L\nu_1 - \frac{ck_2}{b} \right), \\
\dot{L}_2 &= (a - c) L_1 L_3 + bL_2 L_3 - ck_1 L_3 - \Lambda c\nu_1 L_3 + \nu_3 \Gamma + \\
&\quad + LbL_3\nu_2 - L(c - a) L_3\nu_1 + LcL_3\nu_1 - L\nu_3 (aL_1 + bL_2), \\
\dot{L}_3 &= -(a - c) L_1 L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 + (k_1 b - k_2 a) L_1 + \\
&\quad + (k_1 c - k_2 b) L_2 + \Lambda (bL_1 + cL_2) \nu_1 - \nu_2 \Gamma - LbL_2\nu_2 + \\
&\quad + LbL_1\nu_1 - L\frac{b^2}{c} L_1\nu_2 + L\frac{b^2}{c} L_2\nu_1 + L(c - a) L_2\nu_1 - \\
&\quad - L(bL_1 + cL_2) \nu_1 + L(aL_1 + bL_2) \nu_2, \\
\dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1) \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = (aL_1 + bL_2) \nu_3 - cL_3\nu_1, \\
\dot{\nu}_3 &= -(aL_1 + bL_2) \nu_2 + (cL_2 + bL_1) \nu_1.
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Из первого уравнения системы (4.2.3) легко находится частный интеграл (4.1.7), который в новых обозначениях имеет вид

$$L_1 + L\nu_1 \equiv \frac{ck_2}{b}. \tag{4.2.4}$$

Интегрируемый случай Гесса–Сретенского в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил определяется инвариантным многообразием (4.2.4) (или, в других обозначениях, (4.1.7)) вместе с условиями (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6). При выполнении этих условий на уровне частного интеграла (4.2.4) система уравнений

(4.2.3) может быть записана в следующей упрощенной форме:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{L}}_2 &= b\tilde{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 - LF\nu_3 + \\
&\quad + L^2H\nu_1\nu_3 - L(H - cJ)L_3\nu_1 + \nu_3\Gamma, \\
\dot{\tilde{L}}_3 &= -b\tilde{L}_2^2 - (F - Gc)\tilde{L}_2 + \Lambda c\nu_1\tilde{L}_2 + LF\nu_2 - \\
&\quad - L^2H\nu_1\nu_2 + L(H - cJ)\tilde{L}_2\nu_1 - \nu_2\Gamma, \\
\dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\tilde{L}_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = -cL_3\nu_1 + b\tilde{L}_2\nu_3 + F\nu_3 - LH\nu_1\nu_3, \\
\dot{\nu}_3 &= c\tilde{L}_2\nu_1 - b\tilde{L}_2\nu_2 - F\nu_2 + LH\nu_1\nu_2.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_2 &= L_2 + k_2 - L\frac{b\nu_1}{c}, \quad F = \frac{(ac - b^2)k_2}{b}, \quad G = \frac{ck_2}{b} + k_1, \\
H &= a - \frac{b^2}{c}, \quad J = \frac{a + c}{c}.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Отметим, что в исходных обозначениях величина  $H$  выражается следующим образом

$$H = a - \frac{b^2}{c} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{A_1x_1^2 + A_2x_2^2},$$

а значит  $H$  — величина строго положительная.

У системы уравнений (4.2.5) есть три первых интеграла

$$\begin{aligned}
\frac{c}{2} \left( \tilde{L}_2^2 + L_3^2 \right) - LF\nu_1 + \frac{L^2H\nu_1^2}{2} + \Gamma\nu_1 &= E, \\
G\nu_1 + \tilde{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + \frac{\Lambda\nu_1^2}{2} - \frac{LJ\nu_1^2}{2} &= k, \\
\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Отметим, что здесь и далее мы считаем, что  $L \neq 0$  (случай, когда  $L = 0$  был рассмотрен в предыдущей главе). Выполним еще одну замену переменной по формуле

$$\tilde{\nu}_1 = \nu_1 - \frac{F}{LH} + \frac{\Gamma}{L^2H}.$$

В результате, система (4.2.5) принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{L}}_2 &= b\tilde{L}_2L_3 - GcL_3 - \Lambda c\tilde{\nu}_1L_3 - \frac{c\Lambda L_3F}{LH} + L^2H\tilde{\nu}_1\nu_3 + \\
&+ LcJL_3\tilde{\nu}_1 - LHL_3\tilde{\nu}_1 + \frac{FcJL_3}{H} + \frac{c\Lambda L_3\Gamma}{L^2H} - \frac{cJL_3\Gamma}{LH} + \frac{\Gamma L_3}{L}, \\
\dot{\tilde{L}}_3 &= -b\tilde{L}_2^2 + Gc\tilde{L}_2 + \Lambda c\tilde{\nu}_1\tilde{L}_2 + \frac{c\Lambda\tilde{L}_2F}{LH} - L^2H\tilde{\nu}_1\nu_2 - \\
&- LcJ\tilde{L}_2\tilde{\nu}_1 + LHL_2\tilde{\nu}_1 - \frac{FcJ\tilde{L}_2}{H} - \frac{c\Lambda\tilde{L}_2\Gamma}{L^2H} + \frac{cJ\tilde{L}_2\Gamma}{LH} - \frac{\Gamma\tilde{L}_2}{L}, \\
\dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\tilde{L}_2\nu_3, \\
\dot{\nu}_2 &= -cL_3\tilde{\nu}_1 + b\tilde{L}_2\nu_3 - LH\tilde{\nu}_1\nu_3 + \frac{\Gamma\nu_3}{L} - \frac{cL_3F}{LH} + \frac{cL_3\Gamma}{L^2H}, \\
\dot{\nu}_3 &= c\tilde{L}_2\tilde{\nu}_1 - b\tilde{L}_2\nu_2 - LH\tilde{\nu}_1\nu_2 - \frac{\Gamma\nu_2}{L} + \frac{c\tilde{L}_2F}{LH} - \frac{c\tilde{L}_2\Gamma}{L^2H}.
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Три первых интеграла системы уравнений (4.2.8) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{c}{2} \left( \tilde{L}_2^2 + L_3^2 \right) + \frac{L^2H\tilde{\nu}_1^2}{2} &= E, \\
G\tilde{\nu}_1 + \tilde{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + \frac{\Lambda\nu_1^2}{2} + \frac{\Lambda F\tilde{\nu}_1}{LH} - \frac{LJ\tilde{\nu}_1^2}{2} - \frac{JF\tilde{\nu}_1}{H} - \\
- \frac{\Lambda\Gamma\tilde{\nu}_1}{L^2H} + \frac{\Gamma J\tilde{\nu}_1}{LH} &= k, \\
\left( \tilde{\nu}_1 + \frac{F}{LH} - \frac{\Gamma}{L^2H} \right)^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

### 4.3. Обезразмеривание уравнений. Сведение уравнений движения к одному уравнению второго порядка

Получим уравнения движения гиростата в обезразмеренной форме. Для этого введем безразмерные компоненты кинетического момента

$$y = \tilde{L}_2\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad z = L_3\sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

безразмерное время  $\tau = t\sqrt{\Gamma c}$  и безразмерные параметры:

$$d_1 = \frac{b}{c}, \quad Q = \Lambda\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad A = \frac{F}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad B = G\sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

$$C^2 = \frac{H}{c}, \quad J = D, \quad V = L\sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

а также безразмерные постоянные первых интегралов:

$$h^2 = \frac{E}{\Gamma}, \quad p = k\sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

В безразмерной форме система уравнений (4.2.8) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z + C^2 V^2 \tilde{\nu}_1 \nu_3 - C^2 V z \tilde{\nu}_1 + D V z \tilde{\nu}_1 - Q z \tilde{\nu}_1 - B z + \\ &+ \frac{ADz}{C^2} - \frac{AQz}{C^2 V} + \frac{z}{V} - \frac{Dz}{C^2 V} + \frac{Qz}{C^2 V^2}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 - C^2 V^2 \nu_2 \nu_3 + C^2 V y \tilde{\nu}_1 - D V y \tilde{\nu}_1 + Q y \tilde{\nu}_1 + B y - \\ &- \frac{ADy}{C^2} + \frac{AQy}{C^2 V} - \frac{y}{V} + \frac{Dy}{C^2 V} - \frac{Qy}{C^2 V^2}, \\ \frac{d\tilde{\nu}_1}{d\tau} &= z \nu_2 - y \nu_3, \\ \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1 y \nu_3 - z \tilde{\nu}_1 - C^2 V \tilde{\nu}_1 \nu_3 + \frac{\nu_3}{V} - \frac{Az}{C^2 V} + \frac{z}{C^2 V^2}, \\ \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1 y \nu_2 + y \tilde{\nu}_1 + C^2 V \tilde{\nu}_1 \nu_2 - \frac{\nu_2}{V} + \frac{Ay}{C^2 V} - \frac{y}{C^2 V^2}. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Первые интегралы (4.2.9) после обезразмеривания принимают вид

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 + C^2 V^2 \tilde{\nu}_1^2 &= h^2, \\ y \nu_2 + z \nu_3 + B \tilde{\nu}_1 + \frac{Q}{2} \tilde{\nu}_1^2 - \frac{VD \tilde{\nu}_1^2}{2} - \frac{AD \tilde{\nu}_1}{C^2} + \\ &+ \frac{AQ \tilde{\nu}_1}{C^2 V} + \frac{D \tilde{\nu}_1}{C^2 V} - \frac{Q \tilde{\nu}_1}{C^2 V^2} = p, \\ \left( \tilde{\nu}_1 + \frac{A}{C^2 V} + \frac{1}{C^2 V^2} \right)^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Получим теперь при помощи интегралов (4.3.2) из системы уравнений (4.3.1) линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Из первых интегралов (4.3.2) мы имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned}
y^2 + z^2 &= h^2 - C^2V^2\tilde{\nu}_1^2, \\
y\nu_2 + z\nu_3 &= p - B\tilde{\nu}_1 - \frac{Q}{2}\tilde{\nu}_1^2 + \frac{VD\tilde{\nu}_1^2}{2} + \frac{AD\tilde{\nu}_1}{C^2} - \\
&\quad - \frac{AQ\tilde{\nu}_1}{C^2V} - \frac{D\tilde{\nu}_1}{C^2V} + \frac{Q\tilde{\nu}_1}{C^2V^2}, \\
\nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1 - \left( \tilde{\nu}_1 + \frac{A}{C^2V} + \frac{1}{C^2V^2} \right)^2,
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

а значит, используя тождество (1.4.4), мы получаем

$$\begin{aligned}
(y\nu_3 - z\nu_2)^2 &= (h^2 - C^2V^2\tilde{\nu}_1^2) \left( 1 - \left( \tilde{\nu}_1 + \frac{A}{C^2V} + \frac{1}{C^2V^2} \right)^2 \right) - \\
&\quad - \left( p - B\tilde{\nu}_1 - \frac{Q}{2}\tilde{\nu}_1^2 + \frac{VD\tilde{\nu}_1^2}{2} + \frac{AD\tilde{\nu}_1}{C^2} - \frac{AQ\tilde{\nu}_1}{C^2V} - \frac{D\tilde{\nu}_1}{C^2V} + \frac{Q\tilde{\nu}_1}{C^2V^2} \right)^2 = \\
&= \frac{P_4(\tilde{\nu}_1)}{4V^4C^4}.
\end{aligned}$$

Здесь  $P_4(\tilde{\nu}_1)$  — многочлен четвертой степени относительно  $\tilde{\nu}_1$  с постоянными коэффициентами. В явном виде этот многочлен записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
P_4(\tilde{\nu}_1) &= a_0\tilde{\nu}_1^4 + a_1\tilde{\nu}_1^3 + a_2\tilde{\nu}_1^2 + a_3\tilde{\nu}_1 + a_4, \\
a_0 &= C^4V^4(4C^2V^2 - D^2V^2 + 2DQV - Q^2), \\
a_1 &= 4C^2V^2(BC^2DV^3 + 2AC^2V^3 - AD^2V^3 - BC^2V^2Q + \\
&\quad + 2ADV^2Q - AVQ^2 - 2C^2V^2 + D^2V^2 - 2DQV + Q^2), \\
a_2 &= -4C^6V^6 - 4C^4DV^5p - 4B^2C^2V^4 + 4C^4QV^4p - 4C^4V^4h^2 + \\
&\quad + 8ABC^2DV^4 + 4A^2C^2V^4 - 4A^2D^2V^4 - 8ABC^2QV^3 + 8A^2DQV^3 - \\
&\quad - 8BC^2DV^3 - 4A^2Q^2V^2 - 8AC^2V^3 + 8AD^2V^3 + 8BC^2QV^3 - \\
&\quad - 16ADQV^2 + 8AQ^2V + 4C^2V^2 - 4D^2V^2 + 8DQV - 4Q^2,
\end{aligned}$$

$$a_3 = -8V^2C^2 (ADV^2p - BC^2V^2p - AQPp + AVh^2 - DVp + Qp - h^2),$$

$$a_4 = 4 (C^4V^4h^2 - C^4V^4p^2 - 4A^2V^2h^2 + 8AVh^2 - 4h^2).$$

Выберем

$$y\nu_3 - z\nu_2 = -\frac{\sqrt{P_4(\tilde{\nu}_1)}}{2C^2V^2} \quad (4.3.4)$$

(здесь, как и в предыдущих главах, знак перед корнем в правой части можно выбрать любым).

Умножим уравнения системы (4.3.1) на  $-z$  и  $y$  соответственно и сложим, в результате получаем:

$$\begin{aligned} y\frac{dz}{d\tau} - z\frac{dy}{d\tau} = & -d_1y(y^2 + z^2) + Q(y^2 + z^2)\tilde{\nu}_1 + B(y^2 + z^2) + \\ & + \frac{D(y^2 + z^2)}{C^2V} + \frac{AQ(y^2 + z^2)}{C^2V} - \frac{AD(y^2 + z^2)}{C^2} + C^2V(y^2 + z^2)\tilde{\nu}_1 - \\ & - DV(y^2 + z^2)\tilde{\nu}_1 - C^2V^2(y\nu_2 + z\nu_3) - \frac{Q(y^2 + z^2)}{C^2V^2} - \frac{y^2 + z^2}{V}. \end{aligned}$$

Отметим, что с учетом соотношений (4.3.3), все члены правой части этого уравнения (кроме первого слагаемого) могут быть выражены как функции только от переменной  $\tilde{\nu}_1$ .

Введем новые переменные («сферические координаты») по формулам

$$y = h \cos \varphi \cos \theta, \quad z = h \sin \varphi \cos \theta, \quad \tilde{\nu}_1 = \frac{h}{CV} \sin \theta. \quad (4.3.5)$$

Дифференцируя по времени третье соотношение, получаем

$$\frac{d\tilde{\nu}_1}{d\tau} = \frac{d\tilde{\nu}_1}{d\theta} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{h}{CV} \cos \theta \frac{d\theta}{d\tau}.$$

Отсюда, с учетом третьего уравнения системы (4.3.1), находим

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{CV(y\nu_3 - z\nu_2)}{h \cos \theta}.$$

В силу полученного ранее выражения (4.3.4), мы можем записать полученную формулу так

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\sqrt{P_4(\tilde{\nu}_1)}}{2CVh \cos \theta}. \quad (4.3.6)$$

Таким образом, мы получаем систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка на переменные  $\varphi$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
h^2 \cos^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = & -\frac{h}{2C^2V^2} \left( 2d_1C^2V^2h^2 \cos \varphi \cos^3 \theta - \right. \\
& - CVh^2 (2C^2V - DV + Q) \sin \theta \cos^2 \theta + 2C^2Vh \cos^2 \theta + \\
& + CV (2pC^2V^2 + DVh^2 - Qh) \sin \theta + \\
& \left. + 2h (-BC^2V^2 + ADV^2 - AQV - DV + Q) \right), \\
\frac{d\theta}{d\tau} = & \frac{\sqrt{P_4(\sin \theta)}}{2C^2V^2h \cos \theta},
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

где многочлен  $P_4(\sin \theta)$  имеет вид

$$\begin{aligned}
P_4(\sin \theta) = & u_0 \sin^4 \theta + u_1 \sin^3 \theta + u_2 \sin^2 \theta + u_3 \sin \theta + u_4, \\
u_0 = & C^2h^4 ((2C - D)V + Q) ((2C - D)V - Q), \\
u_1 = & 4CVh^3 \left( ((BD + 2A)C^2 - AD^2)V^3 + \right. \\
& \left. + ((2AQ + D)D - C^2(BQ + 2))V^2 - QV(2D + AQ) + Q^2 \right), \\
u_2 = & 4h^2 \left( -C^6V^6 - C^4DpV^5 + (-C^4h^2 + (-B^2 + pQ)C^4 + \right. \\
& + A(2BD + A)C^2 - A^2D^2)V^4 + ((-2ABQ - 2BD - 2A)C^2 + \\
& + 2A^2DQ + 2AD^2)V^3 + ((2BQ + 1)C^2 - A^2Q^2 - 4ADQ - D^2)V^2 + \\
& \left. + (2AQ^2 + 2DQ)V - Q^2 \right), \\
u_3 = & -8hC^3V^3 \left( p(-BC^2 + AD)V^2 + (h^2A - p(AQ + D))V + pQ - h^2 \right), \\
u_4 = & -4C^2V^2 \left( (-C^4h^2 + C^4p^2)V^4 + A^2V^2h^2 - 2AVh^2 + h^2 \right).
\end{aligned}$$

Предполагая, что  $\varphi = \varphi(\theta)$ , то разделив одно уравнение системы (4.3.2) на

другое, получаем уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\theta} = & -\frac{2C^2V^2h^2d_1 \cos \varphi \cos^2 \theta}{\sqrt{P_4(\sin \theta)}} - \frac{2C^2Vh}{\sqrt{P_4(\sin \theta)}} + \\
& + \frac{CVh^2(2C^2V - DV + Q) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{P_4(\sin \theta)}} - \\
& - \frac{CV(2pC^2V^2 + DVh^2 - Qh) \sin \theta}{\cos \theta \sqrt{P_4(\sin \theta)}} \\
& - \frac{2h(-BC^2V^2 + ADV^2 - AQV - DV + Q)}{\cos \theta \sqrt{P_4(\sin \theta)}}.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Выполним в уравнении (4.3.8) замену переменных, а именно положим

$$x = \tan \frac{\theta}{2}, \quad w = \tan \frac{\varphi}{2}.$$

В новых переменных  $x$  и  $w$ , дифференциальное уравнение превращается в уравнение Риккати

$$\frac{dw}{dx} = f_2 w^2 + f_0, \tag{4.3.9}$$

$$f_2 = \frac{P_6(x)}{(x^4 - 1) \sqrt{P_8(x)}}, \quad f_0 = \frac{Q_6(x)}{(x^4 - 1) \sqrt{P_8(x)}},$$

$$P_6(x) = p_{06}x^6 + p_{16}x^5 + p_{26}x^4 + p_{36}x^3 + p_{46}x^2 + p_{56}x + p_{66},$$

$$Q_6(x) = P_6(x) - 2C^2V^2hd_1(x^2 - 1)^3,$$

$$P_8(x) = p_{08}x^8 + p_{18}x^7 + p_{28}x^6 + p_{38}x^5 + p_{48}x^4 + p_{58}x^3 +$$

$$+ p_{68}x^2 + p_{78}x + p_{88},$$

$$p_{06} = h((hd_1 - B)C^2 + AD)V^2 + (-AQ + C^2 - D)V + Q, \tag{4.3.10}$$

$$p_{16} = 2CV(C^2V^2p - h^2(C^2 - D)V - Qh^2),$$

$$p_{26} = h(3((-hd_1 - B)C^2 + AD)V^2 - (3AQ + C^2 + D)V + Q),$$

$$p_{36} = 4C^3V^2(pV + h^2),$$

$$p_{46} = h(3((hd_1 - B)C^2 + AD)V^2 - (3AQ + C^2 + D)V + Q),$$

$$p_{56} = 2CV(C^2V^2p - h^2(C^2 - D)V - Qh^2),$$

$$\begin{aligned}
p_{66} &= h \left( ((-hd_1 - B) C^2 + AD) V^2 + (-AQ + C^2 - D) V + Q \right), \\
p_{08} &= C^2 V^2 (C^4 V^4 h^2 - C^4 V^4 p^2 - A^2 V^2 h^2 + 2AVh^2 - h^2), \\
p_{18} &= 4C^3 V^3 h (p (BC^2 - AD) V^2 - ((AQ + D) p - Ah^2) V - pQ + h^2), \\
p_{28} &= -4C^6 V^6 p^2 - 4C^4 DV^5 h^2 p - 4h^2 (C^4 h^2 + (B - pQ) C^4 - \\
&\quad - 2ABC^2 D + A^2 D^2) V^4 + 8h^2 (AQ + D) (-BC^2 + AD) V^3 - \\
&\quad - 4h^2 (A^2 Q^2 - 2BC^2 Q + 4ADQ + D^2) V^2 + 8Qh^2 (AQ + D) V - 4Q^2 h^2, \\
p_{38} &= -4CVh \left( 3C^2 p (-BC^2 + AD) V^4 + (((-2BD - A) C^2 + 2AD^2) h^2 - \right. \\
&\quad - 3C^2 p (AQ + D)) V^3 + (((2BQ + 1) C^2 - 4ADQ - 2D^2) h^2 + \\
&\quad \left. + 3C^2 Qp) V^2 + 2Qh^2 (AQ + 2D) V - 2Q^2 h^2 \right), \\
p_{48} &= -2C^6 (h^2 + 3p^2) V^6 - 8C^4 Dh^2 p V^5 + 2h^2 \left( (4C^4 - 2C^2 D^2) h^2 + \right. \\
&\quad \left. + (-4B^2 + 4pQ) C^4 + A(8BD + A) C^2 - 4A^2 D^2 \right) V^4 + \\
&\quad + 4h^2 (2C^2 DQh^2 + (-4ABQ - 4BD - A) C^2 + AD(AQ + D)) V^3 - \\
&\quad - 2h^2 (C^2 Q^2 h^2 + (-8BQ - 1) C^2 + A^2 Q^2 + 4ADQ + D^2) V^2 + \\
&\quad + 16Qh^2 (AQ + D) V - 8Q^2 h^2, \\
p_{58} &= p_{38}, \quad p_{68} = p_{28}, \quad p_{78} = p_{18}, \quad p_{88} = p_{08}.
\end{aligned}$$

При помощи замены

$$u = \exp \left( - \int f_2 w(x) dx \right),$$

уравнение Риккати (4.3.9) превращается в линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u = 0, \quad a(x) = -\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx}, \quad b(x) = f_0 f_2, \quad (4.3.11)$$

$$a(x) = \frac{P_{17}(x)}{(x^4 - 1) P_8(x) P_6(x)}, \quad b(x) = -\frac{P_6(x) Q_6(x)}{(x^4 - 1)^2 P_8(x)}, \quad (4.3.12)$$

где  $P_{17}(x)$  — многочлен семнадцатой степени от  $x$ . Он имеет громоздкий вид и поэтому здесь явно не приводится, но мы можем сказать, что он вычисляется

по формуле

$$P_{17}(x) = -2(x^4 - 1)P_8(x)\frac{dP_6(x)}{dx} + 8x^3P_8(x)P_6(x) + \\ + (x^4 - 1)P_6(x)\frac{dP_8(x)}{dx}.$$

Заметим, что так как коэффициенты многочлены  $P_8(x)$  и  $P_6(x)$  - рациональные функции переменной  $x$ , то и сами функции  $a(x)$  и  $b(x)$  являются рациональными. Таким образом, справедливо утверждение.

**Теорема 4.3.1** *Решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в поле действия гироскопических и циркулярно-гироскопических сил в случае Гесса-Сретенского сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (4.3.11) с рациональными коэффициентами.*

Действительно, если нам удалось найти общее решение уравнения (4.3.11) в явном виде:

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x),$$

то при помощи обратной замены переменных мы можем явно установить зависимость  $\varphi = \varphi(\theta)$ . Далее, формулы (4.3.5) позволяют нам определить  $y$ ,  $z$  и  $\tilde{\nu}_1$  как функции переменной  $\theta$ . Теперь, используя систему уравнений:

$$y(\theta)\nu_2 + z(\theta)\nu_3 = p - B\tilde{\nu}_1 - \frac{Q}{2}\tilde{\nu}_1^2 + \frac{VD\tilde{\nu}_1^2}{2} + \frac{AD\tilde{\nu}_1}{C^2} - \frac{AQ\tilde{\nu}_1}{C^2V} - \\ - \frac{D\tilde{\nu}_1}{C^2V} + \frac{Q\tilde{\nu}_1}{C^2V^2}, \\ y(\theta)\nu_3 - z(\theta)\nu_2 = -\frac{1}{2C^2V^2}\sqrt{P_4(\tilde{\nu}_1)},$$

мы находим выражения для  $\nu_2$  и  $\nu_3$  как функций переменной  $\theta$ . Наконец, зависимость

$$\theta = \theta(\tau)$$

определяется из второго уравнения системы (4.3.7) при помощи квадратур.

Таким образом, решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических

сил в случае Гесса–Сретенского сводится к решению одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами (4.3.11). Значит, для данной задачи представляет интерес вопрос о существовании у уравнения (4.3.11) лиувиллевых решений. В следующем разделе мы при помощи алгоритма Ковачича дадим ответ на этот вопрос.

#### 4.4. Применение алгоритма Ковачича

Будем применять алгоритм Ковачича по шагам, как это описано в разделе 5 Главы 1, Используя замену переменной

$$y(x) = u(x) \exp \left( \frac{1}{2} \int a(x) dx \right),$$

мы приводим уравнение (4.3.11) к следующему виду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r(x)y, \quad r(x) = \frac{1}{2} \frac{da}{dx} + \frac{1}{4} a^2 - b. \quad (4.4.1)$$

С учетом формул (4.3.12), получаем, что функция  $r(x)$  является рациональной функцией, в числителе которой стоит многочлен  $P_{28}(x)$  (его явный вид здесь не приводится). Знаменатель функции  $r(x)$  устроен так:

$$V(x) = P_8(x)^2 P_6(x)^2 (x^2 + 1)^2,$$

где многочлены  $P_8$  и  $P_6$  определяются формулами (4.3.12). Соответственно, у функции  $r(x)$  есть 16 конечных полюсов второго порядка. Разложим функцию  $r(x)$  на простейшие и укажем ключевые свойства такого представления:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  — корни многочлена  $P_8(x)$  одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 9, \dots, 14$  — корни

многочлена  $P_6(x)$  одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 9, \dots, 14.$$

3. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 15, 16$  — корни многочлена

$$x^2 + 1 = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = \frac{C^2 V Q}{(4C^2 - D^2) V^2 + 2D V Q - Q^2}, \quad i = 15, 16.$$

4. В окрестности точки  $x = \infty$  функция  $r(x)$  раскладывается в ряд вида

$$r(x) = \frac{b_\infty}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

(коэффициент  $b_\infty$  также имеет довольно громоздкий вид и в явном виде не приводится). Так как коэффициенты  $b_i$ ,  $i = 15, 16$  являются функциями от параметров задачи, то выражение  $\sqrt{1 + 4b_i}$  может принимать как рациональное, так и иррациональное значение. Упростим его:

$$\sqrt{1 + 4b_i} = \sqrt{\frac{4C^2 V^2 + 4C^2 V Q - D^2 V^2 + 2V Q - Q^2}{(4C^2 - D^2) V^2 + 2D V Q - Q^2}} = \sqrt{\beta} \quad (4.4.2)$$

Видно, что для почти всех значений параметров значение выражения (4.4.2) будет иррациональным числом.

Исследуем вопрос о существовании у уравнения (4.3.11) лиувиллевых решений типа 1. Для этого применим к нему алгоритм Ковачича так, как это описано в разделе 5 Главы 1.

**Шаг 1.** Вычисляем функции  $[\sqrt{r}]_c$  и постоянные  $\alpha_c^\pm$ . Получаем следующие

значения

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_i}^- = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \dots, 8;$$

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{x_i}^- = -\frac{1}{2}, \quad i = 9, \dots, 14;$$

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta}, \quad i = 15, 16;$$

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 1, \quad \alpha_\infty^- = -0.$$

**Шаг 2.** Так как количества конечных полюсов  $\rho$  функции  $r(x)$  равно 16, мы имеем  $2^{\rho+1} = 2^{17} = 131072$  наборов

$$s = (s(\infty), s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_{15}), s(x_{16})).$$

Для каждого набора мы вычисляем постоянную  $d$  по формуле (1.5.4). Из предположения, что  $\sqrt{\beta}$  — число иррациональное, следует, что число  $d$  может быть неотрицательным целым только тогда, когда для  $s(x_{15})$  и  $s(x_{16})$  были выбраны противоположные знаки. С учетом этого получаем, что минимальная сумма значений  $\alpha_{x_i}^\pm$  равна 0. Рассмотрим набор  $s_1$

$$s_1 = (-, -, -, \dots, -, -, +),$$

для которого  $d = 0$ .

**Шаг 3.** Вычисляем по формуле (1.5.5) функцию  $\theta$  для набора  $s_1$ . Эта функция имеет следующий вид

$$\theta = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{x - x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=9}^{14} \frac{1}{x - x_i} + \frac{x - i\sqrt{\beta}}{x^2 + 1}$$

(функция  $\theta$  имеет довольно громоздкий вид и поэтому явно здесь не приводится), а многочлен  $P \equiv 1$ . Подставляем выражения для  $\theta$ ,  $r$ ,  $P$  в уравнение (1.5.6), и в результате получаем рациональную функцию, в числителе которой стоит

$$P_{15}(x) = 2iC^2V^2(2CV + VD - Q)(2CV - VD + Q) \times \\ \times \Pi(A, B, C, D, Q, V, p, h, d_1)x^{15} + \dots,$$

где  $\Pi$  — комплексный коэффициент, зависящий от параметров задачи. Проанализируем множители в старшем члене  $P_{15}(x)$ : ранее уже было отмечено, что

$C \neq 0, V \neq 0$ . Выражение

$$(2CV + VD - Q)(2CV - VD + Q)$$

находится в знаменателе  $\beta$ , а значит тоже не может обращаться в ноль. Разрешая

$$\Pi(A, B, C, D, Q, V, p, h, d_1) = 0$$

относительно какого-либо из параметров задачи, мы получаем комплексную величину для значения этого параметра, что невозможно. Значит, для набора  $s_1$  не существуют лиувиллевых решений первого порядка.

Теперь рассмотрим набор

$$s_2 = (+, -, -, \dots, -, -, +),$$

для которого  $d = 1$ . Функция  $\theta$  в этом случае имеет такой же вид, как и для набора  $s_1$ , а многочлен  $P$  представляется следующим образом

$$P = x + K.$$

Согласно алгоритму Ковачича для Случая 1, подставляем выражения для функций  $P, r, \theta$  в уравнение (1.5.6). В итоге мы получаем рациональную функцию, в числителе которой стоит многочлен пятнадцатой степени. Данный многочлен имеет очень громоздкий вид, поэтому здесь в явном виде не приводится. Выбирая

$$Q = \frac{V(C^2Vhd_1 - BC^2V + ADV + C^2 - D)}{AV - 1},$$

$$K = -i\sqrt{\frac{(AV - 1)((hd_1 - B)C^2 + AD)V + C^2 - D}{(2AV - 2)^2 - C^2(V(B - hd_1) - 1)^2}},$$

мы понижаем степень многочлена до 13. В результате получаем полином:

$$P_{13}(x) = 2iC^6V^5\Pi_1(A, B, C, D, V, p, h, d_1) + \dots$$

где  $\Pi_1$  - комплексный коэффициент от параметров задачи. Значит, как и для  $s_1$ , мы не имеем лиувиллевых решений первого порядка.

Аналогичным образом проверяются остальные наборы  $s$ , получаемые на шаге 2. Справедливо утверждение.

**Теорема 4.4.1** *Для почти всех значений параметров задачи у дифференциального уравнения (4.3.11) нет лиувиллевых решений типа 1.*

Теперь исследуем вопрос о существовании у уравнения (4.3.11) лиувиллевых решений типа 2.

**Шаг 1.** Сначала определяем следующие множества  $E_c$  и  $E_\infty$  для каждого полюса функции  $r(x)$ :

1. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

2. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 9, \dots, 14$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 9, \dots, 14.$$

3. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 15, 16$  множества  $E_{x_i}$  состоят из одного элемента

$$E_{x_i} = \{2\}, \quad i = 15, 16.$$

4. Множество  $E_\infty$  имеет вид

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

**Шаг 2.** Выбирая по одному элементу множеств  $E_\infty$ ,  $E_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, 16$ , составим такие наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_{16}}),$$

в которых хотя бы одно число было бы нечетным. Полученный  $s$  считается пригодным для дальнейшего рассмотрения, если значение  $d$ , вычисляемая по формуле

$$d = \frac{1}{2} \left( e_\infty - \sum_{i=1}^{16} e_{x_i} \right),$$

является неотрицательным целым числом. Результаты проверки всех наборов оказываются следующими:

1. всего подходящих наборов — 347;
2. для  $d = 2$  существует только один набор;
3. для  $d = 1$  существует 37 наборов, среди которых есть набор

$$s_1 = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 2, 2);$$

4. для  $d = 0$  существует 309 наборов.

**Шаг 3.** Рассмотрим набора  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{x - x_i} - \sum_{i=9}^{14} \frac{1}{x - x_i} + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Искомый полином  $P$  степени  $d = 1$

$$P = x + K_1,$$

согласно алгоритму Ковачича, должен тождественно являться решением дифференциального уравнения (1.5.9). Преобразование уравнения с учетом выражения для  $P$  и функций  $r(x)$  и  $\theta(x)$  показывает, что его левая часть является рациональной дробью, числителем которой является полином двадцатой степени:

$$\Pi_{20} = u_{20}x^{20} + \dots,$$

где  $u_{20}$  — коэффициент, члены которого являются произведениями различных степеней параметров задачи и постоянной величины  $K_1$  (выражение  $u_{20}$  имеет очень громоздкий вид и поэтому здесь в явном виде не приводится). Выберем  $K_1$  так, чтобы коэффициент  $u_{20}$  обратился в ноль. После подстановки получаем многочлен 19 степени:

$$\begin{aligned} \Pi_{19} = & 8h^2 (C^2V^2hd_1 - BC^2V^2 + ADB^2 + C^2V - DV - A QV + Q) \times \\ & \times u_{19}x^{19} + \dots, \end{aligned}$$

где  $u_{19}$  — коэффициент, который является суммой произведений различных

степеней параметров задачи. Теперь положим

$$Q = \frac{V(C^2Vhd_1 - BC^2V + ADV + C^2 - D)}{AV - 1}.$$

После подстановки этого значения многочлен в числителе левой части уравнения (1.5.9) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{18} &= (-h^3 + AVp - Ah^2 + h^2B - p) \times \\ &\times (-C^4V^4h^2 + C^4V^4p^2 + A^2V^2h - 2AVh^2 + h^2) P_{18}(x). \end{aligned}$$

Из структуры многочлена  $\Pi_{18}$  видно, что он превратится в ноль, если один из двух множителей будет равен нулю. Таким образом, мы нашли условия существования лиувиллевых решений типа 2. Справедлива теорема.

**Теорема 4.4.2** Пусть  $V \neq 0$  (циркулярно-гирскопические силы присутствуют). Тогда в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой под действием гирскопических и циркулярно-гирскопических сил общее решение уравнения (4.3.11) выражается в лиувиллевых функциях, если выполнены условия

$$\begin{aligned} Q &= \frac{V(C^2Vhd_1 - BC^2V + ADV + C^2 - D)}{AV - 1}, \\ p &= \frac{h^2(d_1h + A - B)}{AV - 1} \text{ или } p = \pm \frac{h\sqrt{C^4V^4 - A^2V^2 + 2AV - 1}}{C^2V^2}. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

#### 4.5. Движение гиростата под действием только гирскопических и циркулярно-гирскопических сил

Вернемся к системе уравнений (4.2.5) и рассмотрим случай, когда гиростат движется под действием только гирскопических и циркулярно-гирскопических сил ( $\Gamma = 0$ ). В силу этого предположения, система уравнений движения гиро-

стата (4.2.5) и ее первые интегралы (4.1.6) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{L}}_2 &= b\tilde{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 - LF\nu_3 + \\ &\quad + L^2H\nu_1\nu_3 - L(H - cJ)L_3\nu_1, \\ \dot{\tilde{L}}_3 &= -b\tilde{L}_2^2 - (F - Gc)\tilde{L}_2 + \Lambda c\nu_1\tilde{L}_2 + LF\nu_2 - \\ &\quad - L^2H\nu_1\nu_2 + L(H - cJ)\tilde{L}_2\nu_1,\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

$$\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - c\tilde{L}_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = -cL_3\nu_1 + b\tilde{L}_2\nu_3 + F\nu_3 - LH\nu_1\nu_3,$$

$$\dot{\nu}_3 = c\tilde{L}_2\nu_1 - b\tilde{L}_2\nu_2 - F\nu_2 + LH\nu_1\nu_2.$$

$$\begin{aligned}\frac{c}{2}(\tilde{L}_2^2 + L_3^2) - LF\nu_1 + \frac{L^2H\nu_1^2}{2} &= E, \\ G\nu_1 + \tilde{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + \frac{\Lambda\nu_1^2}{2} - \frac{LJ\nu_1^2}{2} &= k,\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.$$

Произведем замену переменной  $\tilde{\nu}_1$  по формуле:

$$\tilde{\nu}_1 = \nu_1 - \frac{F}{LH}.$$

В результате, уравнения движения гиростата (4.5.1) выглядят так

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{L}}_2 &= b\tilde{L}_2L_3 - GcL_3 - \Lambda c\tilde{\nu}_1L_3 - \frac{c\Lambda L_3F}{LH} + \frac{FcJL_3}{H} \\ &\quad + LcJL_3\tilde{\nu}_1 - LHL_3\tilde{\nu}_1 + L^2H\tilde{\nu}_1\nu_3, \\ \dot{\tilde{L}}_3 &= -b\tilde{L}_2^2 + Gc\tilde{L}_2 + \Lambda c\tilde{\nu}_1\tilde{L}_2 + \frac{c\Lambda\tilde{L}_2F}{LH} - \frac{FcJ\tilde{L}_2}{H} \\ &\quad - LcJ\tilde{L}_2\tilde{\nu}_1 + LHL_2\tilde{\nu}_1 - L^2H\tilde{\nu}_1\nu_2,\end{aligned}\tag{4.5.3}$$

$$\dot{\nu}_1 = cL_3\nu_2 - c\tilde{L}_2\nu_3,$$

$$\dot{\nu}_2 = -cL_3\tilde{\nu}_1 + b\tilde{L}_2\nu_3 - LH\tilde{\nu}_1\nu_3 - \frac{cL_3F}{LH},$$

$$\dot{\nu}_3 = c\tilde{L}_2\tilde{\nu}_1 - b\tilde{L}_2\nu_2 - LH\tilde{\nu}_1\nu_2 + \frac{c\tilde{L}_2F}{LH}.$$

Три первых интеграла системы уравнений (4.5.3) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \left( \tilde{L}_2^2 + L_3^2 \right) + \frac{L^2 H \tilde{\nu}_1^2}{2} &= E, \\ G \tilde{\nu}_1 + \tilde{L}_2 \nu_2 + L_3 \nu_3 + \frac{\Lambda \nu_1^2}{2} + \frac{\Lambda F \tilde{\nu}_1}{LH} - \frac{LJ \tilde{\nu}_1^2}{2} - \frac{JF \tilde{\nu}_1}{H} &= k, \\ \left( \tilde{\nu}_1 + \frac{F}{LH} \right)^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

В этом случае обезразмеривание уравнений движения нужно проводить иным образом. А именно, введем безразмерные компоненты кинетического момента  $y$  и  $z$  по формулам:

$$\tilde{L}_2 = y\Lambda, \quad L_3 = z\Lambda,$$

безразмерное время  $\tau$  — при помощи выражения  $\tau = \Lambda ct$ , а безразмерные параметры и константы первых введем следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \frac{F}{c\Lambda}, \quad B = \frac{G}{\Lambda}, \quad h^2 = \frac{E}{\Lambda^2}, \quad p = \frac{k}{\Lambda}, \\ L &= Q\Lambda, \quad C^2 = \frac{H}{c}, \quad J = D, \quad d_1 = \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

После обезразмеривания система уравнений движения гиростата переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z - z \tilde{\nu}_1 - B z + \frac{AD}{C^2} z - \frac{Az}{C^2 Q} + D Q z \tilde{\nu}_1 + \\ &\quad + C^2 Q^2 \tilde{\nu}_1 \nu_3 - C^2 Q z \tilde{\nu}_1, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 + y \tilde{\nu}_1 + B y - \frac{AD}{C^2} y + \frac{Ay}{C^2 Q} - D Q y \tilde{\nu}_1 - \\ &\quad - C^2 Q^2 \tilde{\nu}_1 \nu_2 + C^2 Q y \tilde{\nu}_1, \\ \frac{d\tilde{\nu}_1}{d\tau} &= z \nu_2 - y \nu_3, \quad \frac{\nu_2}{d\tau} = d_1 y \nu_3 - z \tilde{\nu}_1 - \frac{Az}{C^2 Q} - C^2 Q \tilde{\nu}_1 \nu_3, \\ \frac{\nu_3}{d\tau} &= -d_1 y \nu_2 + y \tilde{\nu}_1 + \frac{Ay}{C^2 Q} + C^2 Q \tilde{\nu}_1 \nu_2. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Первые интегралы системы (4.5.5) имеют вид

$$\begin{aligned}
y^2 + z^2 + C^2 Q^2 \tilde{\nu}_1^2 &= h^2, \\
B\tilde{\nu}_1 + y\nu_2 + z\nu_3 + \frac{(1 - QD)\tilde{\nu}_1^2}{2} + \frac{A\tilde{\nu}_1}{QC^2} - \frac{AD}{C^2}\tilde{\nu}_1 &= p, \\
\left(\tilde{\nu}_1 + \frac{A}{C^2 Q}\right)^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Отметим, что здесь мы предполагаем, что  $Q \neq 0$ . Случай, при котором  $Q = 0$  был рассмотрен в разделе 5 Главы 2.

Приведем при помощи интегралов (4.5.6) систему уравнений (4.5.5) к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Из первых интегралов (4.5.1) имеем

$$\begin{aligned}
y^2 + z^2 &= h^2 - C^2 Q^2 \tilde{\nu}_1^2, \quad \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 - \left(\tilde{\nu}_1 + \frac{A}{C^2 Q}\right)^2, \\
y\nu_2 + z\nu_3 &= p - B\tilde{\nu}_1 - \frac{(1 - DQ)\tilde{\nu}_1^2}{2} + \frac{AD\tilde{\nu}_1}{C^2} - \frac{A\tilde{\nu}_1}{C^2 Q},
\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

а значит, используя тождество (1.4.4), мы получаем

$$\begin{aligned}
(y\nu_3 - z\nu_2)^2 &= (h^2 - C^2 Q^2 \tilde{\nu}_1^2) \left(1 - \left(\tilde{\nu}_1 + \frac{A}{C^2 Q}\right)^2\right) - \\
&- \left(p - B\tilde{\nu}_1 - \frac{(1 - DQ)\tilde{\nu}_1^2}{2} + \frac{AD\tilde{\nu}_1}{C^2} - \frac{A\tilde{\nu}_1}{C^2 Q}\right)^2 = \frac{P_4(\tilde{\nu}_1)}{4C^4 Q^2}.
\end{aligned}$$

Здесь  $P_4(\tilde{\nu}_1)$  — многочлен четвертой степени относительно  $\tilde{\nu}_1$  с постоянными коэффициентами. В явном виде этот многочлен записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
P_4(\tilde{\nu}_1) &= a_0 \tilde{\nu}_1^4 + a_1 \tilde{\nu}_1^3 + a_2 \tilde{\nu}_1^2 + a_3 \tilde{\nu}_1 + a_4, \\
a_0 &= C^4 Q^2 (2CQ + DQ - 1)(2CQ - DQ + 1), \\
a_1 &= 4C^2 Q (BC^2 DQ + 2AC^2 Q^2 - AD^2 Q^2 - BC^2 Q + 2ADQ - A),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= -4C^6Q^4 - 4C^4DQ^3p - 4B^2C^4Q^2 - 4C^4Q^2h^2 + \\
&\quad + 8ABC^2DQ + 4C^4Q^2p + 4A^2C^2Q^2 - 4A^2D^2Q^2 - \\
&\quad - 8ABC^2Q + 8A^2DQ - 4A^2, \\
a_3 &= -8C^2Q(-BC^2Qp + ADQp + Ah^2 - Ap), \\
a_4 &= 4C^4Q^2h^2 - 4C^4Q^2p^2 - 4A^2h^2.
\end{aligned}$$

Выберем

$$y\nu_3 - z\nu_2 = -\frac{\sqrt{P_4(\tilde{\nu}_1)}}{2C^2Q} \quad (4.5.8)$$

(здесь, как и в предыдущих главах, выбор знака перед корнем в правой части не влияет на конечный вид уравнения второго порядка). Для определенности выберем знак « $-$ » перед корнем.

Умножая уравнения системы (4.5.5) на  $-z$  и  $y$  соответственно и складывая их, получаем:

$$\begin{aligned}
y\frac{dz}{d\tau} - z\frac{dy}{d\tau} &= -d_1y(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)\tilde{\nu}_1 + B(y^2 + z^2) + \\
&\quad + \frac{A(y^2 + z^2)}{C^2Q} - \frac{AD(y^2 + z^2)}{C^2} + C^2Q\tilde{\nu}_1(y^2 + z^2) - \\
&\quad - DQ\tilde{\nu}_1(y^2 + z^2) - C^2Q^2\tilde{\nu}_1(y\nu_2 + z\nu_3).
\end{aligned}$$

Отметим, что с учетом соотношений (4.5.7), все члены правой части этого уравнения (кроме первого слагаемого) могут быть выражены как функции только от переменной  $\tilde{\nu}_1$ .

Введем новые переменные ("сферические координаты") по формулам

$$y = h \cos \varphi \cos \theta, \quad z = h \sin \varphi \cos \theta, \quad \tilde{\nu}_1 = \frac{h}{CQ} \sin \theta. \quad (4.5.9)$$

При помощи третьего уравнения из системы (4.4.3) и соотношения (4.5.8), мы получаем следующее дифференциальное уравнение для переменной  $\theta$ :

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{CQ(y\nu_3 - z\nu_2)}{h \cos \theta} = \frac{\sqrt{P_4(\tilde{\nu}_1)}}{Ch \cos \theta}. \quad (4.5.10)$$

Таким образом, у нас есть система из двух дифференциальных уравнений

для определения переменных  $\varphi$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\sqrt{P_4(\sin \theta)}}{2C^2Qh \cos \theta}, \\ h^2 \cos^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{2C^2Q} \left( -(h^2(2C^2Q - DQ + 1) \cos^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + (1 - DQ)h^2 - 2C^2Q^2p)C \sin \theta + 2h(d_1C^2Qh \cos \varphi \cos^3 \theta - \right. \\ &\quad \left. - BC^2Q + ADQ - A) \right), \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

где многочлен  $P_4(\sin \theta)$  имеет вид

$$\begin{aligned} P_4(\sin \theta) &= u_0 \sin^4 \theta + u_1 \sin^3 \theta + u_2 \sin^2 \theta + u_3 \sin \theta + u_4, \\ u_0 &= C^2h^4(2CQ + DQ - 1)(2CQ - DQ + 1), \\ u_1 &= 4Ch^3(BC^2DQ + 2AC^2Q^2 - AD^2Q^2 - BC^2Q + 2ADQ - A), \\ u_2 &= 4h^2 \left( -C^6Q^4 - C^4DQ^3p - B^2C^4Q^2 - C^4Q^2h^2 + 2ABC^2DQ + \right. \\ &\quad \left. + C^4Q^2p + A^2C^2Q^2 - A^2D^2Q^2 - 2ABC^2Q + 2A^2DQ - A^2 \right), \\ u_3 &= -8C^3Q^2h(-BC^2Qp + ADQp + Ah^2 - Ap), \\ u_4 &= -4C^2Q^2(-C^4Q^2h^2 + C^4Q^2p^2 + A^2h^2). \end{aligned}$$

Предполагая, что  $\varphi = \varphi(\theta)$ , то разделив одно уравнение системы (4.5.11) на другое, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\theta} &= -\frac{2C^2Qh^2d_1 \cos \varphi \cos^2 \theta}{\sqrt{P_4(\sin \theta)}} - \frac{2h(A(DQ - 1) - BC^2Q)}{\cos \theta \sqrt{P_4(\sin \theta)}} + \\ &\quad + \frac{Ch^2(2C^2Q - DQ + 1) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{P_4(\sin \theta)}} + \frac{C \sin \theta}{\cos \theta \sqrt{P_4(\sin \theta)}} \times \\ &\quad \times ((1 - DQ)h^2 - 2C^2Q^2p). \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

При помощи замены переменных

$$x = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

дифференциальное уравнение (4.5.12) превращается в уравнение Риккати

$$\frac{dw}{dx} = f_2 w^2 + f_0, \quad (4.5.13)$$

$$f_2 = \frac{P_6(x)}{(x^4 - 1)\sqrt{P_8(x)}}, \quad f_0 = \frac{Q_6(x)}{(x^4 - 1)\sqrt{P_8(x)}},$$

где  $P_6$  и  $Q_6$  — многочлены шестой степени,  $P_8$  — многочлен восьмой степени:

$$\begin{aligned} P_6(x) &= p_{06}x^6 + p_{16}x^5 + p_{26}x^4 + p_{36}x^3 + p_{46}x^2 + p_{56}x + p_{66}, \\ Q_6(x) &= P_6(x) - 2C^2Qh^2d_1(x^2 - 1)^3, \\ P_8(x) &= p_{08}x^8 + p_{18}x^7 + p_{28}x^6 + p_{38}x^5 + p_{48}x^4 + p_{58}x^3 + \\ &\quad + p_{68}x^2 + p_{78}x + p_{88}, \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

а их коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{06} &= h(C^2Qhd_1 - BC^2Q + ADQ - A), \\ p_{16} &= 2C(C^2Q^2p - C^2Qh^2 + DQh^2 - h^2), \\ p_{26} &= 3h(-C^2Qhd_1 - BC^2Q + ADQ - A), \\ p_{36} &= 4C^3Q(Qp + h^2), \\ p_{46} &= 3h(C^2Qhd_1 - BC^2Q + ADQ - A), \\ p_{56} &= 2C(C^2Q^2p - C^2Qh^2 + DQh^2 - h^2), \\ p_{66} &= h(-C^2Qhd_1 - BC^2Q + ADQ - A), \\ p_{08} &= p_{88} = C^2Q^2(C^4Q^2h^2 - C^4Q^2p^2 - A^2h^2), \\ p_{18} &= p_{78} = -4C^3Q^2h(-BC^2Qp + ADQp + Ah^2 - Ap), \\ p_{28} &= p_{68} = -4C^6Q^4p^2 - 4C^4DQ^3h^2p - 4B^2C^4Q^2h^2 - 4C^4Q^2h^4 + \\ &\quad + 8ABC^2DQ^2h^2 + 4C^4Q^2h^2p - 4A^2D^2Q^2h^2 - 8ABC^2Qh^2 + \\ &\quad + 8A^2DQh^2 - 4A^2h^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{38} &= p_{58} - 4Ch \left( -3BC^4Q^3p + 3AC^2DQ^3p - 2BC^2DQ^2h^2 - AC^2Q^2h^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2AD^2Q^2h^2 - 3AC^2Q^2p + 2BC^2Qh^2 - 4ADQh^2 + 2Ah^2 \right), \\
p_{48} &= -2C^6Q^4p^2 - 6C^6Q^4p^2 - 8C^4DQ^3h^2p - 8B^2C^4Q^2h^2 + 8C^4Q^2h^4 - \\
&\quad - 4C^2D^2Q^2h^4 + 16ABC^2DQ^2h^2 + 8C^4Q^2h^2p + 2A^2C^2Q^2h^2 - 4h^4C^2 - \\
&\quad - 8A^2D^2Q^2h^2 + 8C^2DQh^4 - 16ABC^2Qh^2 + 16A^2DQh^2 - 8A^2h^2.
\end{aligned}$$

Используя замену

$$u = \exp \left( - \int f_2 w(x) dx \right),$$

мы получаем из уравнения Риккати (4.5.13) линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x)u = 0, \quad a(x) = -\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx}, \quad b(x) = f_0 f_2, \quad (4.5.15)$$

$$a(x) = \frac{P_{17}(x)}{(x^4 - 1) P_8(x) P_6(x)}, \quad b(x) = -\frac{P_6(x) Q_6(x)}{(x^4 - 1)^2 P_8(x)}, \quad (4.5.16)$$

где  $P_{17}(x)$  — многочлен семнадцатой степени от  $x$ . Он имеет громоздкий вид и поэтому здесь явно не приводится, но мы можем сказать, что он вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
P_{17}(x) &= -2(x^4 - 1) P_8(x) \frac{dP_6(x)}{dx} + 8x^3 P_8(x) P_6(x) + \\
&\quad + (x^4 - 1) P_6(x) \frac{dP_8(x)}{dx}.
\end{aligned}$$

Заметим, что так как коэффициенты многочлены  $P_8(x)$  и  $P_6(x)$  — рациональные функции переменной  $x$ , то и сами функции  $a(x)$  и  $b(x)$  являются рациональными. Таким образом, справедливо утверждение.

**Теорема 4.5.1** *Решение задачи о движении гиростата с неподвижной точкой в поле гироскопических и циркулярно-гироскопических сил в случае Гесса-Сретенского сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (4.5.15) с рациональными коэффициентами.*

Применим к полученному уравнению алгоритм Ковачича для поиска лиувилле-

вых решений. При помощи замены переменной вида

$$y(x) = u(x) \exp \left( \frac{1}{2} \int a(x) dx \right).$$

уравнение (4.5.15) приводится к следующему виду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r(x)y, \quad r(x) = \frac{1}{2} \frac{da}{dx} + \frac{1}{4} a^2 - b. \quad (4.5.17)$$

С учетом формул (4.5.16), получаем, что функция  $r(x)$  является рациональным выражением, в числителе которого стоит многочлен  $P_{28}(x)$ , явный вид которого здесь не приводится. Знаменатель функции  $r(x)$  имеет вид:

$$V(x) = (x^2 + 1)^2 P_8(x)^2 P_6(x)^2,$$

где многочлены  $P_8$  и  $P_6$  определяются формулами (4.5.14). Таким образом, у функции  $r(x)$  есть шестнадцать конечных полюсов второго порядка. Декомпозиция функции  $r(x)$  на простейшие дроби обладает следующими свойствами:

1. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  — корни многочлена  $P_8(x)$  одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{3}{16}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

2. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 9, \dots, 14$  — корни многочлена  $P_6(x)$  одинаковы и равны

$$b_i = \frac{3}{4}, \quad i = 9, \dots, 14.$$

3. Коэффициенты  $b_i$  при выражениях  $\frac{b_i}{(x - x_i)^2}$ , где  $x_i$ ,  $i = 15, 16$  — корни многочлена

$$x^2 + 1 = 0$$

одинаковы и равны

$$b_i = -\frac{C^2 Q}{(4C^2 - D^2) Q^2 + 2DQ - 1}, \quad i = 15, 16.$$

4. В окрестности  $x = \infty$   $r(x)$  раскладывается в ряд вида

$$r(x) = \frac{b_\infty}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

(коэффициент  $b_\infty$  также имеет довольно громоздкий вид и в явном виде не приводится). Так как коэффициенты  $b_i$ ,  $i = 15, 16$  являются функциями от параметров задачи, то выражение  $\sqrt{1 + 4b_i}$  может принимать как рациональное, так и иррациональное значение. Упростим его:

$$\sqrt{1 + 4b_i} = \sqrt{\frac{4C^2Q^2 - D^2Q^2 - 4C^2Q + 2DQ - 1}{4C^2Q^2 - D^2Q^2 + 2DQ - 1}} = \sqrt{\beta} \quad (4.5.18)$$

Видно, что для почти всех значений параметров значение выражения (4.5.18) будет иррациональным числом.

Исследуем вопрос о существовании у уравнения (4.5.17) лиувиллевых решений типа 1. Для этого применим к нему алгоритм Ковачича так, как это описано в разделе 5 Главы 1.

**Шаг 1.** Вычисляем функции  $[\sqrt{r}]_c$  и постоянные  $\alpha_c^\pm$ . Получаем следующие значения

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{x_i}^- = \frac{1}{4}, \quad i = 1, \dots, 8;$$

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^+ = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{x_i}^- = -\frac{1}{2}, \quad i = 9, \dots, 14;$$

$$[\sqrt{r}]_{x_i} = 0, \quad \alpha_{x_i}^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta}, \quad i = 15, 16;$$

$$[\sqrt{r}]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 1, \quad \alpha_\infty^- = -0.$$

**Шаг 2.** Так как количество конечных полюсов  $\rho$  функции  $r(x)$  равно 16, мы имеем  $2^{\rho+1} = 2^{17} = 131072$  наборов

$$s = (s(\infty), s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_{15}), s(x_{16})).$$

Для каждого набора мы вычисляем постоянную  $d$  по формуле (1.5.4). Из предположения, что  $\sqrt{\beta}$  — число иррациональное, следует, что число  $d$  может быть неотрицательным целым только тогда, когда для  $s(x_{15})$  и  $s(x_{16})$  были выбраны противоположные знаки. С учетом этого получаем, что минимальная

сумма значений  $\alpha_{x_i}^\pm$  равна 0. Рассмотрим набор  $s_1$

$$s_1 = (-, -, -, \dots -, -, +),$$

для которого  $d = 0$ .

**Шаг 3.** Вычисляем по формуле (1.5.5) функцию  $\theta$  для набора  $s_1$ . Эта функция имеет следующий вид

$$\theta = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{x - x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=9}^{14} \frac{1}{x - x_i} + \frac{x - i\sqrt{\beta}}{x^2 + 1}$$

(функция  $\theta$  имеет довольно громоздкий вид и поэтому явно здесь не приводится), а многочлен  $P \equiv 1$ . Подставляем выражения для  $\theta$ ,  $r$ ,  $P$  в уравнение (1.5.6), и в результате получаем рациональную функцию, в числителе которой стоит

$$P_{15}(x) = 2iC^2Q^2(2CQ + QD - 1)(2CQ - QD + 1) \times \\ \times \Pi(A, B, C, D, Q, p, h, d_1)x^{15} + \dots,$$

где  $\Pi$  — комплексный коэффициент, зависящий от параметров задачи. Проанализируем множители в старшем члене  $P_{15}(x)$ : ранее уже было отмечено, что  $C \neq 0$ ,  $Q \neq 0$ . Выражение

$$(2CQ + QD - 1)(2CQ - QD + 1)$$

находится в знаменателе  $\beta$ , а значит тоже не может обращаться в ноль. Разрешая

$$\Pi(A, B, C, D, Q, p, h, d_1) = 0$$

относительно какого-либо из параметров задачи, мы получаем комплексную величину для значения этого параметра, что невозможно. Значит, для набора  $s_1$  не существуют лиувиллевых решений первого порядка.

Теперь рассмотрим набор

$$s_2 = (+, -, -, \dots -, -, +),$$

для которого  $d = 1$ . Функция  $\theta$  в этом случае имеет такой же вид, как и для

набора  $s_1$ , а многочлен  $P$  представляется следующим образом

$$P = x + K.$$

Согласно алгоритму Ковачича для Случая 1, подставляем выражения для функций  $P$ ,  $r$ ,  $\theta$  в уравнение (1.5.6). В итоге мы получаем рациональную функцию, в числителе которой стоит многочлен пятнадцатой степени. Данный многочлен имеет очень громоздкий вид, поэтому здесь в явном виде не приводится. Выбирая

$$B = \frac{C^2 Q d_1 h + ADQ - A}{C^2 Q},$$

$$K = -i \sqrt{\frac{4C^2 Q^2 - D^2 Q^2 - 4C^2 Q + 2DQ - 1}{(2CQ - DQ + 1)(2CQ + DQ - 1)}},$$

мы понижаем степень многочлена до 13. В результате получаем полином:

$$P_{13}(x) = -4iC^4 Q \cdot \Pi_1(A, B, C, D, p, h, d_1) + \dots$$

где  $\Pi_1$  - комплексный коэффициент от параметров задачи. Значит, как и для  $s_1$ , мы не имеем лиувиллевых решений первого порядка.

Аналогичным образом проверяются остальные наборы  $s$ , получаемые на шаге 2. Справедливо утверждение.

**Теорема 4.5.2** *Для почти всех значений параметров задачи, у дифференциального уравнения (4.5.4) нет лиувиллевых решений первого типа.*

Перейдем к поиску лиувиллевых решений второго типа у дифференциального уравнения (4.5.9).

**Шаг 1.** Для каждого из полюсов функции  $r(x)$  определяем множества  $E_c$  и  $E_\infty$ :

1. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

2. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 9, \dots, 14$  множества  $E_{x_i}$  оказываются равными

$$E_{x_i} = \{-2, 2, 6\}, \quad i = 9, \dots, 14.$$

3. Для конечных полюсов  $x = x_i$ ,  $i = 15, 16$  множества  $E_{x_i}$  состоят из одного элемента

$$E_{x_i} = \{2\}, \quad i = 15, 16.$$

4. Множество  $E_\infty$  состоит из одного элемента

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}.$$

**Шаг 2.** Составим все возможные наборы

$$s = (e_\infty, e_{x_1}, \dots, e_{x_{16}})$$

из элементов множеств  $E_\infty, E_{x_i}, i = 1, \dots, 16$ . Набор  $s$  считается подходящим для нас, если в нем хотя бы одно из чисел является нечетным, а также величина  $d$ , вычисляемая по формуле

$$d = \frac{1}{2} \left( e_\infty - \sum_{i=1}^{16} e_{x_i} \right),$$

является неотрицательным целым числом. Результаты проверки всех наборов оказываются следующими:

1. всего подходящих наборов — 347;
2. для  $d = 2$  существует только один набор;
3. для  $d = 1$  существует 37 наборов, среди которых есть набор

$$s_1 = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2, -2, -2, 2, 2);$$

4. для  $d = 0$  существует 309 наборов.

**Шаг 3.** Рассмотрим набор  $s_1$ . Составляем функцию  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{x - x_i} - \sum_{i=9}^{14} \frac{1}{x - x_i} + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Искомый полином  $P$  степени  $d = 1$

$$P = x + K_1$$

должен тождественно удовлетворять дифференциальному уравнению (1.5.9). Преобразование уравнения с учетом выражения для  $P$  и функций  $r(x)$  и  $\theta(x)$  показывает, что его левая часть является рациональной дробью, числителем которой является полином степени 20

$$\Pi_{20} = u_{20}x^{20} + \dots,$$

где  $u_{20}$  — коэффициент, члены которого являются произведениями различных степеней параметров задачи и постоянной величины  $K_1$  (выражение  $u_{20}$  имеет очень громоздкий вид и поэтому здесь в явном виде не приводится). Выберем  $K_1$  так, чтобы коэффициент  $u_{20}$  обратился в ноль. После подстановки этого значения получаем в числителе левой части уравнения (1.5.3) многочлен

$$\Pi_{19} = 8Ch^2 (C^2Qhd_1 - BC^2Q + ADQ - A) \times u_{19}x^{19} + \dots,$$

где  $u_{19}$  — коэффициент, который является суммой произведений различных степеней параметров задачи. Теперь положим

$$B = \frac{C^2Qd_1h + ADQ - A}{C^2Q}.$$

После подстановки этого значения многочлен  $\Pi_{19}$  упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{18} &= (C^2Q^2p - C^2Qh^2 + DQh^2 - h^2)^2 \times \\ &\times (-C^4Q^2h^2 + C^4Q^2p^2 + A^2h^2) P_{18}(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что если выполнено одно из условий

$$C^2Q^2p - C^2Qh^2 + DQh^2 - h^2 = 0, \quad -C^4Q^2h^2 + C^4Q^2p^2 + A^2h^2 = 0,$$

то уравнение (1.5.3) превращается в тождество. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.5.3** Пусть  $Q \neq 0$  (циркулярно-гироскопические силы в системе присутствуют). Тогда в задаче о движении гири с неподвижной точкой под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил дифференци-

альное уравнение (4.5.10) имеет лиувиллевы решения при выполнении условий

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{C^2 Q d_1 h + ADQ - A}{C^2 Q}, \\
 p &= \frac{h^2 (C^2 Q - DQ + 1)}{C^2 Q^2} \text{ или } p = \pm \frac{h \sqrt{C^4 Q^2 - A^2}}{C^2 Q}.
 \end{aligned}
 \tag{4.5.19}$$

Таким образом, нам удалось доказать, что решение задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, а также установить соотношения на параметры задачи, выполнение которых допускает существование лиувиллевых решений для почти всех значений параметров. Дополнительно рассмотрен частный случай когда гириостат движется в отсутствие силы тяжести и свели решение задачи к решению одного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Для этого случая мы также получили условия существования лиувиллевых решений для почти всех значений параметров.

## Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

1. Рассмотрена задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского. Показано, что решение данной задачи сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича были получены соотношения на параметры задачи, при выполнении которых полученное дифференциальное уравнение допускает решение, выражающееся в лиувиллевых функциях. Был указан явный вид этого решения, а также проведен анализ полученных условий.
2. Используя явный вид лиувиллевых решений, найденных в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой в случае Гесса–Сретенского, при помощи метода годографов Харламова проведен качественный анализ движения. Используя формулы Харламова, получены уравнения подвижного и неподвижного годографов угловой скорости гиростата, и отмечены их особенности в зависимости от значений параметров задачи. Построены наглядные представления подвижного и неподвижного аксоидов угловой скорости гиростата, позволяющие геометрически интерпретировать движение тела. Совмещение полученных годографов дало возможность описать характер движения гиростата и выявить его качественные особенности при различных значениях параметров системы.
3. Рассмотрена задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса–Сретенского. Доказано, что решение данной задачи сводится к решению одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Затем при помощи алгоритма Ковачича были найдены условия существования у данного уравнения лиувиллевых решений, а также указан явный вид этих решений. Также рассмотрен частный случай, когда гиростат

движется под действием только гироскопических сил. Показано, что в этом случае решение задачи может быть сведено к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентами, являющимися рациональными функциями независимой переменной. Были найдены условия, при которых полученное уравнение интегрируется в квадратурах, а также указан явный вид этого решения. Дополнительно, были сформулированы условия существования лиувиллевых решений в случае, когда гиростат вырождается в твердое тело, а также выписан явный вид этих решений.

4. Рассмотрена задача о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических и циркулярно-гироскопических сил в случае Гесса–Сретенского. Показано, что решение данной задачи сводится к решению одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Применение алгоритма Ковачича позволило установить условия существования в данной задаче лиувиллевых решений для почти всех значений параметров. Кроме того, отдельно был исследован частный случай, в котором сила тяжести не учитывается. В этом случае также были получены условия существования лиувиллевых решений для почти всех значений параметров.

## Список литературы

- [1] *Аппельрот Г.Г.* По поводу § 1 мемуара С.В. Ковалевской “Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe” (Acta Mathematica. 12. 2) // Математический сборник. 1892. Т. 16. № 3. С. 483–507.
- [2] *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
- [3] *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. Москва: Издательство МАИ, 2020. 260 с.
- [4] *Бардин Б.С., Кулешов А.С.* Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Динамические системы. 2020. Т. 10. № 2. С. 197-204.
- [5] *Беляев А.В.* Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса // Математический сборник. 2015. Т. 206. № 5. С. 5-34.
- [6] *Бизяев И.А., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Система Гесса–Аппельрота и ее неголономные аналоги // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2016. Том 294. С. 268–292
- [7] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.
- [8] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Случай Гесса в динамике твердого тела // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 256-265.
- [9] *Буров А.А., Карпетян А.В.* О движении твердого тела в потоке частиц // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 77–81.
- [10] *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. Москва: Мир, 1980. 298 с.

- [11] *Гашененко И.Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // *Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов.* Киев. Украина. 2010. № 40. С. 12–20.
- [12] *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
- [13] *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
- [14] *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики // *Нелинейная динамика.* 2012. Т. 8. № 2. С. 369–376.
- [15] *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера – Пуассона. Киев: Наукова думка, 1992. 168 с.
- [16] *Жуковский Н.Е.* Локсодромический маятник Гесса // *Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии.* 1893. Вып. 6.
- [17] *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Санкт-Петербург: типография В. Демакова, 1885. 139 с.
- [18] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.
- [19] *Ицкович М.О.* О движении по горизонтальной плоскости тел, имеющих с ней одну или две точки соприкосновения // *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.* М.: 2017. 126 с.
- [20] *Ицкович М.О., Кулешов А.С.* Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // *Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2021. Т. 4(62). № 2. С. 291-299.
- [21] *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. Москва: Издательство иностранной литературы, 1959. 83 с.

- [22] *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1111-1118.
- [23] *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Киев. Украина. 1969. Вып. 1. С. 12-27.
- [24] *Ковалев А.М.* Кинематическое истолкование движения тела в решении Гесса // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 567-570.
- [25] *Ковалев А.М., Кириченко В.В.* Годограф вектора кинетического момента в решении Гесса // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Киев. Украина. 2004. Вып. 34. С. 9-20.
- [26] *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 6. С. 28–33.
- [27] *Косов А.А.* Об аналогах случая Гесса для гиростата при действии момента гироскопических и циркулярных сил // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 6. С. 839–856.
- [28] *Кулешов А.С.* Применение алгоритма Ковачича для исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2021. Т. 202. С. 10–42.
- [29] *Кулешов А.С., Соломина Д.В.* Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Вестник Санкт – Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8(66). № 4. С. 653-660.
- [30] *Кулешов А.С., Соломина Д.В.* Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Проблемы информатики. 2021. № 1. С. 15-24.
- [31] *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости с помощью алгоритма

- Ковачича // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 145. С. 3-85.
- [32] *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2013. № 4. С. 93-102.
- [33] *Кулешов А.С., Шишков А.А.* Об интегрируемости в квадратурах задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т 11 (69). Вып. 2. С. 347-353.
- [34] *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. I. М.-Л.: Гостехиздат. 1950.
- [35] *Лунев В.В.* Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Доклады АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 824–826.
- [36] *Макеев Н.Н.* Интегралы геометрической теории динамики гиростата // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 2(10). С. 26-35.
- [37] *Млодзеевский Б.К., Некрасов П.А.* Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1893. Т. 6. Вып. 1. С. 43–52.
- [38] *Некрасов П.А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1896. Т. 18. Вып. 2. С. 161-274.
- [39] *Некрасов П.А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Математический сборник. 1892. Т. 16. Вып. 2. С. 508-517.
- [40] *Новиков М.А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 3. С. 28-37.

- [41] *Самсонов В.А.* О вращении тела в магнитном поле // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 4. С. 32–34.
- [42] *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 1963. Вып. 3. С. 60-71.
- [43] *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Доклады АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.
- [44] *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502-507.
- [45] *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1965. 221 с.
- [46] *Харламов П.В.* Об уравнениях движения гиростата // Труды межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости и аналитической механике. Казань. 1962. С. 57-63.
- [47] *Харламов П.В.* Избранные труды. Киев: Наукова думка, 2004. 255 с.
- [48] *Харламов П.В.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 703-707.
- [49] *Харламов П.В.* Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 158-159.
- [50] *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1904. Т. 12. Вып. 1. С. 1–4.
- [51] *Черняков Г.А.* Исследование задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости методом Ко-

- вачича // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: 2016. 148 с.
- [52] *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.-М.: ГРОТ, 1936. 271 с.
- [53] *Bardin B.S., Kuleshov A.S.* Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2022. Vol. 102. № 11.
- [54] *Euler L.* De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexilium methodus nova et facilis // Commentarii Academiae scientiarum imperiales Petropolitanae. 1734–1735. 1740. T. 7. P. 99–122.
- [55] *Gavrilov L.* Nonintegrability of the equations of heavy gyrostat // Compositio Math. 1992. Vol. 82. Iss. 3. P. 275–291.
- [56] *Hess W.* Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. 1890. Bd. 37. Heft 2. S. 153-181.
- [57] *Liouville R.* Sur la rotation des solides // Comptes rendus de l'Acad. des Sci. Paris. 1895. Vol. 120. No. 17. P. 903–906.
- [58] *Kholostova O.V.* On the Dynamics of a Rigid Body in the Hess Case at High-Frequency Vibrations of a Suspension Point // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 16. No. 1. P. 59-84.
- [59] *Komarov I.V.* A generalization of the Kovalevskaya top // Physics Letters A. 1987. Vol. 123. Iss. 1. P. 14–15.
- [60] *Kovacic J.J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2, No. 1. P. 3-43; DOI: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4
- [61] *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica. 1889. Vol. 12. No. 1. P. 177-232.

- [62] *Kowalevski S.* Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Mathematica*. 1890. Vol. 14. No. 1. P. 81-93.
- [63] *Kuleshov A.S., Chernyakov G.A.* Investigation of the motion of a heavy body of revolution on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 245. No. 4. P. 417–497.
- [64] *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des corps // *Journal de Mathématique pures et appliquées*. 1851. T. 16. P. 9–130.
- [65] *Volterra V.* Sur la th'éorie des variations des latitudes // *Acta Mathematica*. 1899. Vol. 22 No. 1. P. 201–358.
- [66] *Yehia H.M.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // *Mechanics Research Communications*. 1986. Vol. 13. No. 3. P. 169–172.
- [67] *Yehia H.M.* *Rigid Body Dynamics: A Lagrangian Approach*. Basel: Birkhauser, 2022.
- [68] *Кулешов А.С., Скрипкин А.Д.* О существовании лиувиллевых решений в случае Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой под действием гироскопических сил // *Прикладная математика и механика*. 2025. Т. 89. №. 3. С. 438-449.
- [69] *Кулешов А.С., Скрипкин А.Д.* О лиувиллевых решениях в случае Гесса-Сретенского задачи о движении гиростата с неподвижной точкой // *Проблемы математического анализа*. 2025. Т. 130. С. 59-66.
- [70] *Кулешов А.С., Скрипкин А.Д.* О лиувиллевых решениях в интегрируемом случае Гесса задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2024): сборник научных трудов. Москва, 17-20 июня 2024 г. Москва: ИПУ РАН, 2024. С. 802-806.
- [71] *Кулешов А.С., Скрипкин А.Д.* О существовании лиувиллевых решений в интегрируемом случае Гесса задачи о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой // X Поляховские чтения: материалы международной

научной конференции по механике. Санкт-Петербург, 23-27 сентября 2024 г.  
Санкт-Петербург: ООО Издательство ВВМ, 2024. С. 109-113.

- [72] *Кулешов А.С., Скрипкин А.Д.* О существовании лиувиллевых решений в случае Гесса задачи о движении тяжелого гиростата под действием гироскопических сил // Процессы управления и устойчивость. Материалы V Международной конференции «Устойчивость и процессы управления», посвященной 95-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В.И. Зубова. Санкт-Петербург: Издательский дом Федоровой Г.В., 2025. Т. 12. № S2-1. С. 57-58.
- [73] *Kuleshov A.S., Skripkin A.D.* Liouvillian solutions in the problem of motion of a heavy gyrostат in the Hess–Sretensky case // Journal of Mathematical Sciences. 2025. Vol. 294. №. 1. P. 67-75.
- [74] *Kuleshov A.S., Skripkin A.D.* Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Heavy Gyrostат with a Fixed Point under the Action of Gyroscopic Forces in the Hess Case // Regular and Chaotic Dynamics. 2026. Vol. 31. №. 1. P. 161-172.
- [75] *Kuleshov A.S., Skripkin A.D.* Existence of liouvillian solutions in the problem of motion of a heavy gyrostат under the action of gyroscopic forces // Компьютерная алгебра = Computer Algebra: материалы 6-й Международной конференции. Москва, 23-25 июня 2025 г. Москва: РУДН, 2025. С. 76-79.

## Список иллюстративного материала

1.1 Гиростат . . . . .	17
2.1 Подвижный годограф. Величины параметров равны: $h = 1.5$ , $A = 0.3$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	74
2.2 Подвижный годограф. Величины параметров равны: $h = 0.72$ , $A = 0.63$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	76
2.3 Подвижный годограф. Величины параметров равны: $h = -0.43$ , $A = 0.42$ , $d_1 = -0.7$ , $C = 0$ . . . . .	77
2.4 Проекция неподвижного годографа. Величины параметров равны: $h = 1.5$ , $A = 0.3$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	79
2.5 Зависимость величины угла $\alpha$ в зависимости от $\theta$ . Величины параметров равны: $h = 1.5$ , $A = 0.3$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	79
2.6 Неподвижный годограф. Первая ветвь. Величины параметров равны: $h = 1.5$ , $A = 0.3$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	80
2.7 Неподвижный годограф. Вторая ветвь. Величины параметров равны: $h = 1.5$ , $A = 0.3$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	80
2.8 Взаимное расположение аксоидов. . . . .	81
2.9 Проекция неподвижного годографа. Величины параметров равны: $h = 0.72$ , $A = 0.63$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	82
2.10 Зависимость величины угла $\alpha$ в зависимости от $\theta$ . Величины параметров равны: $h = 0.72$ , $A = 0.63$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	82
2.11 Неподвижный годограф. Величины параметров равны: $h = 0.72$ , $A = 0.63$ , $d_1 = -0.5$ , $C = 0$ . . . . .	83
2.12 Качение подвижного годографа по неподвижному. . . . .	83
2.13 Проекция неподвижного годографа. Величины параметров равны: $h = -0.43$ , $A = 0.42$ , $d_1 = -0.7$ , $C = 0$ . . . . .	84
2.14 Зависимость величины угла $\alpha$ в зависимости от $\theta$ . Величины параметров равны: $h = -0.43$ , $A = 0.42$ , $d_1 = -0.7$ , $C = 0$ . . . . .	84

2.15	Неподвижный годограф. Величины параметров равны: $h = -0.43$ , $A = 0.42$ , $d_1 = -0.7$ , $C = 0$ . . . . .	85
2.16	Качение подвижного годографа по неподвижному. . . . .	85