

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Колегов Никита Антонович

Системы образующих матричных колец инцидентности

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Маркова Ольга Викторовна

Москва — 2026

Оглавление

Оглавление	2
Введение	4
1 Основные определения, соглашения и обзор известных результатов	19
1.1 Кольца и алгебры	19
1.2 Частично упорядоченные множества	21
1.3 Графы	24
1.4 Кольца инцидентности	28
1.5 Функция длины алгебр над полем	33
2 Минимальная мощность систем образующих	38
2.1 Описание систем образующих	38
2.2 Граф полных разностей	46
2.3 Полулокальные или простые кольца коэффициентов	53
2.4 Примеры оценок мощности порождающих подмножеств	56
2.5 Количество порождающих наборов в случае конечных колец инцидентности	59
3 Системы образующих, состоящие из идемпотентных матриц	65
3.1 Построение вложения диаграммы Хассе	65
3.2 Конструкция идемпотентных матриц	67
3.3 Оценка мощности	69
4 Оценки длины алгебр инцидентности над полем	73
4.1 Верхняя оценка длины	73
4.2 Специальные пары натуральных чисел	76
4.3 Нижняя оценка длины	81

4.4	Связь длины с инвариантами частично упорядоченного множества	89
4.5	Диагональное число алгебры инцидентности	93
5	Длина алгебр инцидентности над полем в случае	
	квадратично-нильпотентного радикала	99
5.1	Реализуемые значения длины	99
5.2	Верхняя оценка длины	107
5.3	Прямые суммы треугольных алгебр порядка 2	111
	Заключение	115
	Литература	116

Введение

Общая характеристика работы

Диссертация относится к области высшей алгебры, теории ассоциативных колец и алгебр. Исследуются системы образующих матричных колец инцидентности. Получены результаты о минимальной мощности систем образующих и о значениях функции длины.

Актуальность темы исследования

Системы образующих, которые также называют порождающими подмножествами, связаны с рядом задач в теории колец и алгебр. Так, в работе Амицура [12] системы образующих применялись для изучения полиномиальных тождеств в матричных алгебрах. Виктор Тимофеевич Марков [1] доказал достаточное условие, при котором алгебра матриц над необязательно ассоциативной алгеброй порождается двумя матрицами. Этот результат позволил ему решить проблему о вложении PI-алгебр.

Другое направление работы связано с поиском представлений алгебр в виде порождающих и определяющих соотношений. Этот вопрос изучался при помощи методов компьютерной алгебры в работе Карлсона и Мэтьюза [17]. Порождающие и определяющие соотношения исследовали Петренко и Сидки [50] в случае матриц над кольцом целых чисел.

Известен классический результат Герштенхабера [22], утверждающий, что размерность алгебры, порождённой двумя коммутирующими $n \times n$ матрицами с элементами в поле, не превосходит n . Ведутся исследования по аналогичной гипотезе для трёх матриц [47].

Обычно описание всех систем образующих алгебры является трудной задачей. Рассмотрим, например, случай алгебры $M_n(\mathbb{F})$ всех $n \times n$ матриц над алгебраически замкнутым полем. Множество матриц порождает $M_n(\mathbb{F})$ тогда

и только тогда, когда у них нет общих нетривиальных инвариантных подпространств. Этот факт восходит к классическому результату Бёрнсайда [16] 1905 года. Современную интерпретацию его результата можно найти в работах [39, 41]. Таким образом, имеется явный критерий того, когда подмножество является порождающим. Однако проблема нахождения общих инвариантных подпространств сама по себе является нетривиальной, см. монографию [24]. Лаффи [35, 36] исследовал ряд достаточных условий, при которых заданное семейство матриц порождает полную матричную алгебру.

В отдельное направление можно выделить исследования алгебр, порождённых идемпотентами. Простая алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ характеристики $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ порождается идемпотентами, если содержит хотя бы один нетривиальный идемпотент. Этот факт вытекает из более общего результата Амицура [13, теорема 2] об инвариантных подалгебрах. Простое независимое доказательство получил Брешар [14, раздел 2]. Лаффи [37] показал, что некоммутативная простая алгебра, порождённая двумя идемпотентами, всегда изоморфна алгебре 2×2 матриц над простым расширением основного поля.

Структура необязательно простых алгебр, порождённых идемпотентами, была описана в работах Вайса [63], Роуэна, Сегева [53]. Каваи [29] доказал, что коммутативная бесконечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем порождена идемпотентами тогда и только тогда, когда она является гомоморфным образом групповой алгебры с определёнными свойствами. Брешар [15] показал, что конечномерная алгебра порождена идемпотентами тогда и только тогда, когда она определена нулевым произведением. Ху, Сяо [28] получили гомологическое описание конечномерных алгебр, порождённых идемпотентами. Алгебры, порождённые двумя квадратичными элементами, исследовали Дренски, Сигети, ван Вэйк [19]. Гейнз, Лаффи, Шапиро [21] доказали, что размерность алгебры, порождённой двумя $n \times n$ матрицами с квадратичными минимальными многочленами, не превосходит $2n$, если n чётно, и $2n - 1$, если n нечётно, причём эти оценки являются точными.

Исследуется также минимальное количество ν идемпотентов, порождающих алгебру. Лаффи [37] показал, что $\nu \leq 3$ для $\mathbb{F}$ -алгебры $n \times n$ матриц $M_n(D)$, где D — конечномерная $\mathbb{F}$ -алгебра с делением, а её центр $Z(D)$ является сепарабельным расширением поля $\mathbb{F}$. Крупник [33] вычислил явное значение ν для $M_n(\mathbb{F})$. Келарев, ван дор Марве, ван Вэйк [30] определили ν для алгебры верхнетреугольных матриц над коммутативным кольцом. Этот результат был

обобщён в работе [44] на случай полных блочно-треугольных алгебр матриц над бесконечным полем.

Среди других интересных исследований — оценка того, «как часто» набор элементов кольца или алгебры является порождающим. Аккуратная постановка задачи и формулировка результата зависят от структуры рассматриваемого кольца или алгебры. Аюра, Какимура, Мурота [10] показали, что вещественная $*$ -алгебра порождается четырьмя «случайными» симметричными матрицами. Эти исследования были мотивированы потенциальными приложениями к некоторым инженерным задачам. Кравченко, Мазур, Петренко [32] развили методы вычисления «вероятности» того, что набор элементов порождает заданную алгебру, которая является свободным модулем над порядком в некотором поле алгебраических чисел. Как следствие, они нашли новую интерпретацию для значений дзета-функции Римана. Нойман, Пригер [46] получили оценки вероятности того, что пара матриц порождает алгебру $M_n(\mathbb{F}_q)$ всех $n \times n$ матриц над полем из q элементов. В частности, эта вероятность стремится к единице, если мощность конечного поля неограниченно возрастает. Позднее Сёркам, Шалев [55] показали, что аналогичное свойство выполняется для более широкого семейства алгебр.

Важной характеристикой систем образующих конечномерных алгебр над полем является *длина*. Эта величина связана с комбинаторикой слов, она показывает, насколько «длинные» произведения элементов порождающего подмножества необходимо взять, чтобы их линейная оболочка совпала со всей алгеброй. При этом максимум длин всех возможных порождающих подмножеств заведомо существует, его называют длиной алгебры. Фактически это численный инвариант алгебры, характеризующий её «мультипликативную сложность».

Впервые функция длины была рассмотрена для 3×3 матриц в связи с задачами из механики сплошных сред в статьях Спенсера, Ривлина [58, 59]. Систематическое исследование функции длины началось с работы Азари Пазы [49]. В ней он поставил задачу вычисления длины полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем. Эта проблема до сих пор является открытой, хотя был достигнут значительный прогресс в её решении [25, 48, 56, 62]. Следует также отметить приложения функции длины к вычислительной теории матриц [8, 11].

В настоящей работе исследуются системы образующих матричных колец специального вида — *кольцо инцидентности*. Такие кольца состоят из всех матриц с определённым узором из нулей. Кольцо инцидентности является свободным модулем над кольцом коэффициентов с базисом, который состоит из некоторых матричных единиц. В качестве примеров колец инцидентности можно привести кольцо всех верхнетреугольных матриц и кольцо всех диагональных матриц.

Джан-Карло Рота в своей работе [52] нашёл приложения колец инцидентности к ряду задач в комбинаторике и теории чисел. Он дал более общее определение кольца инцидентности как кольца функций на парах элементов некоторого локально-конечного частично упорядоченного множества. Если это множество на самом деле конечно, то кольцо инцидентности естественным образом можно считать матричным, в этом случае также используется термин *структурное матричное кольцо*. Со времени публикации работы Джан-Карло Роты [52] кольца инцидентности и различные их обобщения всесторонне исследовались. Необходимо отметить классическую монографию Шпигеля, О’Доннелла [57].

Кольцо инцидентности конструируется на основе частично упорядоченного множества. Поэтому многие исследования посвящены поиску связей между этими двумя объектами. В качестве примера можно привести проблему изоморфизма: верно ли, что из изоморфизма колец (алгебр) инцидентности вытекает изоморфизм соответствующих частично упорядоченных множеств. Эта проблема рассматривается в рамках различных подходов к определению кольца инцидентности, а также для различных колец коэффициентов. Согласно теореме Стенли [57, теорема 7.2.2], [60] проблема изоморфизма имеет положительное решение в случае, когда рассматриваются алгебры инцидентности над полем. Восс [61] получил обобщение на случай колец инцидентности над предпорядками в случае, когда кольцо коэффициентов является неразложимым по модулю радикала Джекобсона.

Описание порождающих систем матричных алгебр инцидентности над полем было получено в работе Лонгстаффа и Розенталя [42]. Исследования длины матричных алгебр инцидентности были начаты в работах Ольги Викторовны Марковой. Ей принадлежат результаты о точном значении длин двух экстремальных алгебр инцидентности: алгебры треугольных матриц [5] и алгебры диагональных матриц [2]. Кроме того, в её работе [3] фактически было пока-

зано, что длины этих алгебр ограничивают длину любой матричной алгебры инцидентности. Из этих результатов следует, что если мощность основного поля не меньше, чем размер матриц n , то длина любой матричной алгебры инцидентности равна $n - 1$. В случае же малых конечных полей проблема вычисления длины пока остаётся открытой.

В диссертационной работе исследуются системы образующих колец инцидентности. Найдены необходимые и достаточные условия, позволяющие установить, является ли подмножество кольца инцидентности системой образующих. Этот результат автора обобщает известный ранее критерий Лонгстаффа и Розенталя со случая полей коэффициентов на произвольные ассоциативные кольца с единицей. Также в диссертации получена формула для вычисления минимальной мощности систем образующих в случае, когда кольцо коэффициентов является полулокальным. Для произвольного коммутативного кольца коэффициентов автором установлена формула для минимального количества идемпотентов, порождающих алгебру инцидентности, что обобщает результат Келарева, ван дор Марве, ван Вэйка, а также позволяет получить новую интерпретацию их результата в терминах вложений графов. Кроме того, в диссертации получена точная верхняя оценка длины алгебр инцидентности над полем. Найдено множество всех реализуемых значений длины для алгебр инцидентности над полем в случае квадратично-нильпотентного радикала.

Объект и предмет исследования

Объект исследования — системы образующих ассоциативных колец и алгебр. Предметом выступают системы образующих колец и алгебр инцидентности над конечными частично упорядоченными множествами.

Цели и задачи работы

- Исследовать системы образующих колец инцидентности над ассоциативными кольцами. Установить необходимые и достаточные условия того, что подмножество является порождающим.
- Получить оценки на минимальную мощность систем образующих при дополнительных ограничениях на кольцо коэффициентов.

- Исследовать идемпотентные образующие алгебр инцидентности над коммутативными кольцами. Оценить минимальную мощность систем идемпотентных образующих.
- Установить связь между длиной алгебры инцидентности над полем и инвариантами частично упорядоченного множества.
- Построить оценки длины алгебры инцидентности над полем при ограничениях на её радикал. Установить, какие значения функция длины может принимать в этом случае.

Научная новизна

В работе получены следующие новые результаты. Установлено, что вопрос о том, является ли подмножество порождающим, сводится к исследованию проекций на 2×2 подматрицы специального вида (теорема 2.1.2). Если при этом подмножество содержит все скаляры, то критерий формулируется в терминах идеалов кольца коэффициентов (теорема 2.1.4). Он обобщает известную ранее теорему Лонгстаффа—Розенталя (теорема 1.4.15) со случая поля на произвольное ассоциативное кольцо коэффициентов.

Полученный критерий используется для вычисления минимальной мощности систем образующих. Установлены неравенства, связывающие эту величину с кликовым числом графа специального вида (теоремы 2.2.12, 2.2.13). В ситуации, когда кольцо коэффициентов полулокальное или простое, найдены точные формулы для минимальной мощности порождающих подмножеств (теоремы 2.3.1, 2.3.2). В частности, эти формулы выполняются и в случае поля коэффициентов (следствие 2.3.3). Разработанная техника также позволяет получать оценки минимальной мощности порождающих подмножеств для некоторых колец специального вида, см. § 2.4. Получена верхняя оценка минимальной мощности порождающих подмножеств для произвольного кольца коэффициентов, показано, что эта оценка достигается (следствие 2.4.1).

В случае коммутативного кольца коэффициентов, отдельно рассматривается вопрос о системах образующих, состоящих из идемпотентов. Установлена их связь с вложениями диаграммы Хассе в дополнение булева куба (леммы 3.1.1, 3.2.1). Это вложение позволяет получить формулу для вычисления минимального количества идемпотентов, порождающих алгебру инцидентности

(теорема 3.3.6). Указанная формула обобщает аналогичный результат Келарева, ван дор Марве, ван Вэйка [30] для алгебры треугольных матриц. Кроме того, получена новая интерпретация их результата в терминах теории графов, см. доказательство следствия 3.3.7.

Для алгебр инцидентности над полем исследуется вопрос о значениях функции длины. Согласно результатам Ольги Викторовны Марковой [3], если мощность поля не меньше размера матриц n , то длина алгебры инцидентности равна $n - 1$. В настоящей работе получен ряд результатов о длине алгебр инцидентности для случая малых конечных полей. Найдена верхняя оценка, которая связывает длину с такими инвариантами частично упорядоченного множества, как ширина и высота (теорема 4.4.3). Построены примеры, показывающие, что полученная оценка является точной.

Также в работе исследуются длины алгебр инцидентности над полем в случае, когда радикал квадратично-нильпотентен. Несмотря на такое сильное ограничение, функция длины ведёт себя нетривиальным образом. В работе найдены все её реализуемые значения в указанном случае (теорема 5.1.14). В частности, если мощность поля не меньше половины размера матриц, то реализуются, в принципе, все возможные значения длин алгебр инцидентности без ограничения на радикал (следствие 5.1.15). Кроме того, получен ряд новых оценок длин для некоторых алгебр инцидентности специального вида, см. § 5.2 и § 5.3.

Положения, выносимые на защиту

- Установлен критерий того, когда подмножество кольца инцидентности является системой образующих (теорема 2.1.4).
- Найдена наименьшая мощность системы образующих кольца инцидентности над полулокальным кольцом (теорема 2.3.2).
- Получена формула для наименьшего количества идемпотентных образующих алгебры инцидентности над произвольным коммутативным кольцом (теорема 3.3.6).
- Для длины алгебры инцидентности над полем получена точная верхняя оценка в терминах высоты и ширины частично упорядоченного множества (теорема 4.4.3).

- Описаны все реализуемые значения длины алгебры инцидентности над полем в случае квадратично-нильпотентного радикала (теорема 5.1.14).

Методология и методы исследования

В диссертационной работе используются классические методы теории колец, например, разложение полупростого кольца в прямое произведение колец матриц над телами согласно теореме Веддербёрна—Артина. Применяется техника работы с идемпотентами кольца: связь с разложением в прямую сумму, поднятие идемпотентов по модулю нильдеала. Диссертационная работа посвящена главным образом матричным кольцам, поэтому часто используются методы теории матриц и линейной алгебры.

Из методов теории графов следует отметить оценку кликового числа графов, ассоциированных с кольцами. При рассмотрении частичных порядков один из ключевых приемов — переход к отношению накрытия и построение соответствующей диаграммы Хассе. При исследовании функции длины алгебр используются комбинаторные методы при работе со словами от образующих.

В работе предложен ряд новых подходов, которые подталкивают к совершенствованию методов исследований на стыке теории колец и комбинаторных структур. Так, для оценки минимальной мощности систем образующих строится граф полных разностей кольца коэффициентов. При исследовании идемпотентных образующих рассматриваются вложения диаграммы Хассе в дополнение булева куба. Для построения оценок значений функции длины алгебр инцидентности, частично упорядоченное множество разбивается на антицепи и рассматривается как m -дольное. При исследовании реализуемых значений длины решается специальная задача дискретной оптимизации.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер и представляет интерес для специалистов по алгебре. Полученные результаты могут быть использованы для исследования колец инцидентности и близких классов колец.

Степень достоверности и апробация результатов

Автор неоднократно выступал по теме диссертации на семинаре «Кольца, модули и матрицы» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Были сделаны доклады на следующих конференциях и семинарах:

- «Системы образующих колец инцидентности», Научно-исследовательский семинар по алгебре, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры, Москва, сентябрь, 2025.
- «Системы образующих колец инцидентности», Международная конференция «Мальцевские чтения 2023», институт математики им. С.Л. Соболева, СО РАН, Новосибирск, ноябрь, 2023.
- «Структурные матричные кольца и их системы образующих», 1338-е заседание семинара «Алгебраические системы», Уральский федеральный университет, Екатеринбург, ноябрь, 2023.
- «Идемпотентные образующие алгебр инцидентности», XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», ТГПУ им. Л.Н. Толстого, Тула, сентябрь, 2023.
- «Образующие колец инцидентности», XXX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2023», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2023.
- «Образующие алгебр инцидентности», XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2022», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2022.
- «О длине матричных алгебр инцидентности», XX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», ТГПУ им. Л.Н. Толстого, Тула, сентябрь, 2021.
- «О длине конечных алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом», XXVIII Международная научная конференция

студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2021», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2021.

- «Системы образующих матричных алгебр инцидентности над конечными полями»,

XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2019», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2019.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 123 страницы. Список литературы вместе с публикациями автора включает 73 наименования.

Содержание работы

В главе 1 приводятся основные определения, соглашения и известные ранее результаты, которые используются в работе. В § 1.1 рассматриваются кольца и алгебры. Следующий § 1.2 посвящен частично упорядоченным множествам. В § 1.3 затрагивается теория графов. Основным является § 1.4, где вводится понятие кольца инцидентности над конечным частично упорядоченным множеством.

Определение (1.4.5) Пусть $\preceq$ — отношение частичного порядка на множестве $\{1, \dots, n\}$. Рассмотрим кольцо всех $n \times n$ матриц $M_n(\mathcal{R})$ над некоторым ассоциативным кольцом $\mathcal{R}$ с единицей. Кольцо $M_n(\mathcal{R})$ является правым и левым свободным $\mathcal{R}$ -модулем со стандартным базисом из матричных единиц

$\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда *кольцо инцидентности* определяется как

$$\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}) = \left\{ \sum_{i \preceq j} a_{ij} E_{ij} \mid a_{ij} \in \mathcal{R} \right\} = \{A \in M_n(\mathcal{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ при } i \not\preceq j\}.$$

В § 1.5 вводится понятие длины ассоциативной алгебры над полем, а также приводятся некоторые известные результаты о длинах матричных алгебр.

Глава 2 посвящена исследованию минимальной мощности систем образующих колец инцидентности в следующем смысле.

Определение (2.0.1) Обозначим через $\mathcal{R}E_n$ множество всех скалярных $n \times n$ матриц над кольцом $\mathcal{R}$. Для кольца инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ определим величину

$$\text{ngen}(\mathcal{A}) = \min\{|S| \mid S \subseteq \mathcal{A}, S \cup \mathcal{R}E_n \text{ порождает } \mathcal{A} \text{ как кольцо}\}.$$

В частности, если $\mathcal{R}$ коммутативно, то $\text{ngen}(\mathcal{A})$ совпадает с минимальной мощностью подмножества, порождающего $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.

В § 2.1 доказывается критерий, когда множество матриц является порождающим в кольце инцидентности.

Теорема (2.1.4) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Рассмотрим непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $i \neq j$, рассмотрим следующие идеалы кольца $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}(S) = \mathcal{R}\{(A)_{ii} - (A)_{jj} \mid A \in S\}\mathcal{R},$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{ij}(S) = \{(A)_{ij} \mid A \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R} : (A)_{ii} = (A)_{jj}\},$$

где $\mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$ — это под- $\mathcal{R}$ -бимодуль в $\mathcal{A}$, порождённый множеством $S \cup \{E_n\}$. Тогда множество $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо тогда и только тогда, когда

A. $\mathbf{a}_{ij} = \mathcal{R}$ для всех пар $i < j$;

B. $\mathbf{b}_{ij} = \mathcal{R}$ для всех пар $i \prec j$.

Здесь « $\prec$ » подразумевает стандартный линейный порядок на множестве $\{1, \dots, n\}$. Отношение $i \prec j$ означает, что $i < j$ и нет такого k , что $i < k < j$.

В § 2.2 вводится понятие графа полных разностей и исследуется связь его кликового числа с величиной $\text{ngen}(\cdot)$.

Определение (2.2.1) Следуя [18, определение 1], назовём элемент кольца $x \in \mathcal{R}$ *полным*, если $\mathcal{R}x\mathcal{R} = \mathcal{R}$. Другими словами, двусторонний идеал, порождённый (как $\mathcal{R}$ -бимодуль) элементом x , совпадает с кольцом $\mathcal{R}$. Тогда определим неориентированный *граф полных разностей* $\Phi(\mathcal{R})$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются все элементы кольца $\mathcal{R}$. Две вершины $r, s \in \mathcal{R}$ соединены ребром, если разность $r - s$ является полным элементом кольца $\mathcal{R}$.

В § 2.3 получены точные формулы для величины $\text{ngen}(\cdot)$ в случаях, когда кольцо коэффициентов является полулокальным или простым. Сначала разбирается случай простого кольца.

Теорема (2.3.1) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что кольцо $\mathcal{R}$ простое, но не является полем. Тогда

$$\text{ngen}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \lceil \log_{|\mathcal{R}|} n \rceil, & \text{если } \mathcal{R} \text{ конечно;} \\ 1, & \text{если } \mathcal{R} \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

В конце параграфа доказывается аналогичная формула для полулокального кольца коэффициентов. В частности, она выполняется и в случае поля.

Теорема (2.3.2) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что $\mathcal{R}$ — полулокальное кольцо. Обозначим через κ минимальную мощность колец $M_{n_i}(\mathcal{D}_i)$ в разложении Веддербёрна—Артина факторкольца по радикалу Джекобсона $\mathcal{R}/J(\mathcal{R}) \cong M_{n_1}(\mathcal{D}_1) \times \dots \times M_{n_d}(\mathcal{D}_d)$, где $n_1, \dots, n_d \geq 1$, а кольца $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^d$ являются телами. Тогда верны следующие утверждения.

1. Если $\kappa < n$, то $\text{ngen}(\mathcal{A}) = \lceil \log_{\kappa} n \rceil$.
2. Если $\kappa \geq n$ и $\mathcal{A} = D_n(\mathcal{R})$, то $\text{ngen}(\mathcal{A}) = 1$.
3. Предположим, что $\kappa \geq n$, $\mathcal{A} \neq D_n(\mathcal{R})$, и существует такое $i \in \{1, \dots, d\}$ что $n_i = 1$ и $\mathcal{D}_i$ является полем. Тогда $\text{ngen}(\mathcal{A}) = 2$.
4. Во всех остальных случаях выполнено $\text{ngen}(\mathcal{A}) = 1$.

В § 2.4 приводятся дополнительные оценки величины $\text{ngen}(\cdot)$ в ряде частных случаев.

В главе 3 исследуются системы образующих, состоящие из идемпотентных матриц. На протяжении всей главы предполагается, что кольцо коэффициентов коммутативно. Исследуется следующая величина.

Определение (3.0.1) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — алгебра инцидентности над коммутативным кольцом $\mathcal{R}$. Обозначим через $\nu(\mathcal{A})$ минимальное количество идемпотентных матриц, которые порождают $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.

В § 3.1 приводится конструкция вложения диаграммы Хассе в дополнение булева куба по заданной системе идемпотентных образующих. В § 3.2, наоборот, конструируются идемпотентные образующие по заданному вложению диаграммы Хассе в дополнение булева куба. В § 3.3 формулируется метод вычисления величины $\nu(\cdot)$, при этом используется следующее вспомогательное понятие.

Определение (3.3.3) Граф G на n вершинах принадлежит *нулевому классу идемпотентности*, если он изоморфен подграфу дополнения $\overline{\mathcal{Q}_{\lceil \log_2 n \rceil}}$ булева куба размерности $\lceil \log_2 n \rceil$. Если граф не принадлежит нулевому классу идемпотентности, то будем считать, что он принадлежит *первому классу идемпотентности*. Номер класса идемпотентности будет обозначаться через $\text{idem}(G)$. Таким образом, $\text{idem}(G) \in \{0, 1\}$.

Приводятся примеры, показывающие, что оба класса непустые. При помощи понятия класса идемпотентности формулируется основной результат главы.

Теорема (3.3.6) Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$. Тогда следующие величины совпадают.

1. Минимальное количество ν идемпотентных матриц, которые порождают $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.
2. Минимальное такое $m \in \mathbb{N}$, что диаграмма Хассе частичного порядка $\preceq$ может быть вложена в дополнение $\overline{\mathcal{Q}_m}$ булева куба размерности m .
3. Сумма $\lceil \log_2 n \rceil + \text{idem}(\prec)$, где $\text{idem}(\prec) \in \{0, 1\}$ — это номер класса идемпотентности диаграммы Хассе $\preceq$ в терминах определения 3.3.3.

Таким образом, величина $\nu(\cdot)$ заведомо известна с точностью до единицы, а ее конкретное значение может быть определено путём поиска специального подграфа в дополнении булева куба.

В главе 4 получены оценки длин алгебр инцидентности на основе структуры частично упорядоченного множества. В § 4.1 найдена верхняя оценка длины алгебры инцидентности над полем. Показано, в каких случаях она лучше известной ранее границы $n - 1$. Приводится пример вычисления этой оценки на основе диаграммы Хассе. В § 4.2 вводится вспомогательное техническое понятие *подходящей пары* натуральных чисел. Найдено достаточное условие, при котором пара чисел является подходящей. В § 4.3 доказана нижняя оценка длины

алгебры инцидентности в случае, когда частично упорядоченное множество является полным многодольным с рядом ограничений на числа Уитни. В § 4.4 установлена связь длины с другими инвариантами частично упорядоченного множества, доказывается следующий результат.

Теорема (4.4.3) Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$. Обозначим через h и w , соответственно, высоту и ширину частично упорядоченного множества $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$. Тогда

$$\ell(\mathcal{A}) \leq (\ell(D_w(\mathbb{F})) + 1) \cdot h - 1.$$

В этой формуле длина алгебры диагональных матриц $\ell(D_w(\mathbb{F}))$ находится согласно теореме 1.5.11. Более того, для любых $h', w' \in \mathbb{N}$ найдётся $n' \in \mathbb{N}$ и такой частичный порядок $\preceq'$ на множестве $\{1, \dots, n'\}$, что высота и ширина равны h' и w' , соответственно, и при этом

$$\ell(\mathcal{A}_{n'}(\preceq', \mathbb{F})) = (\ell(D_{w'}(\mathbb{F})) + 1) \cdot h' - 1.$$

В параграфе 4.5 затрагивается вопрос о длине алгебр инцидентности в случае, когда частично упорядоченное множество содержит значительное количество изолированных точек.

Глава 5 посвящена исследованию длин алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом. В параграфе 5.1 найдены все реализуемые значения длин указанных алгебр.

Теорема (5.1.14) Пусть даны натуральное $n \geq 2$, произвольное поле $\mathbb{F}$, алгебра инцидентности $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ с квадратично-нильпотентным радикалом. Если $n \leq |\mathbb{F}| \leq \infty$ или $(n, |\mathbb{F}|) = (3, 2)$, то $\ell(\mathcal{A}) = n - 1$. Иначе

$$\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq \ell(\mathcal{A}) \leq \ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c,$$

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_- \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \leq \delta_+ \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right), \\ 1, & \text{если } \delta_- \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) > \delta_+ \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right). \end{cases}$$

В этой формуле длина алгебры диагональных матриц $\ell(D_x(\mathbb{F}))$ находится согласно теореме 1.5.11. Функции δ_+, δ_- определяются как

$$\delta_+(n) = \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor} + q^{\lfloor \log_q n \rfloor} - 1 - n, \quad \delta_-(n) = n - \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor}$$

для $q = |\mathbb{F}|$. Более того, для всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq k \leq \ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c$, существует алгебра инцидентности $\mathcal{A}_{(k)} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ с квадратично-нильпотентным радикалом, у которой $\ell(\mathcal{A}_{(k)}) = k$.

Если мощность поля не меньше половины размера матриц, то на указанных алгебрах реализуются, в принципе, все возможные значения длин алгебр инцидентности без ограничений на радикал. По теореме 1.5.14 для алгебры инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ выполняется $\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq \ell(\mathcal{A}) \leq n-1$.

Следствие (5.1.15) Пусть даны натуральное $n \geq 2$, поле $\mathbb{F}$. Предположим, что $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq |\mathbb{F}| \leq \infty$. Тогда для всех натуральных k таких, что $\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq k \leq n-1$, существует алгебра инцидентности $\mathcal{A}_{(k)} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ с квадратично-нильпотентным радикалом, для которой выполнено $\ell(\mathcal{A}_{(k)}) = k$.

В § 5.2 доказана верхняя оценка длины алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом. В § 5.3 исследуется длина алгебр инцидентности, которые изоморфны прямой сумме алгебр треугольных матриц порядка 2.

Благодарность

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Марковой Ольге Викторовне за постановку задач, внимание к работе, полезные обсуждения. Автор признателен коллективу кафедры высшей алгебры за тёплую доброжелательную атмосферу.

Глава 1

Основные определения, соглашения и обзор известных результатов

1.1 Кольца и алгебры

В определении кольца будем предполагать ассоциативность умножения и наличие нейтрального элемента по умножению. В определении подкольца будем требовать, чтобы оно содержало единицу объемлющего кольца. В определении гомоморфизма колец будем требовать, чтобы единица одного кольца отображалась в единицу другого.

Под термином «алгебра» будем понимать ассоциативную алгебру с единицей над некоторым коммутативным кольцом. В определении подалгебры будем требовать, чтобы она содержала единицу объемлющей алгебры. В определении гомоморфизма алгебр будем требовать, чтобы единица одной алгебры отображалась в единицу другой.

Термин «идеал» будет подразумевать «двусторонний идеал», если только дополнительно не указано, что он левый или правый. Для натурального k определим k -ю степень идеала $\mathfrak{a}$ как аддитивную подгруппу $\mathfrak{a}^k$ кольца, порождённую всеми произведениями вида $a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k}$, где $a_{i_j} \in \mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{a}^k$ также является идеалом. Формально определим нулевую степень $\mathfrak{a}^0$ как совпадающую со всем кольцом. Идеал называется *нильпотентным*, если $\mathfrak{a}^k = (0)$ для некоторого k , *индексом nilьпотентности* $\text{ind}(\mathfrak{a})$ в этом случае будем считать наименьшее такое k , что $\mathfrak{a}^k = (0)$.

Кольцо считаем *простым*, если в нём ровно два различных идеала: нулевой и всё кольцо. Кольцо будем называть *полупростым* в ситуации, когда оно является полупростым правым (эквивалентно, левым) модулем над самим со-

бой. Кольцо называется *полулокальным*, если фактор по радикалу Джекобсона является полупростым кольцом.

На протяжении всей работы $\mathcal{R}$ — ненулевое кольцо. Его радикал Джекобсона будем обозначать как $J(\mathcal{R})$.

Если M — это $\mathcal{R}$ -бимодуль и $S \subseteq M$ — непустое подмножество, тогда обозначим через $\mathcal{R}S\mathcal{R}$ под- $\mathcal{R}$ -бимодуль, порождённый S , т.е.

$$\mathcal{R}S\mathcal{R} = \left\{ \sum_{j=1}^n p_{i_j} s_{i_j} q_{i_j} \mid s_{i_j} \in S, p_{i_j}, q_{i_j} \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Если S содержит ровно один элемент m , тогда будем писать для краткости $\mathcal{R}m\mathcal{R}$ вместо $\mathcal{R}\{m\}\mathcal{R}$.

Определение 1.1.1. Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативное кольцо с единицей $1_{\mathcal{A}}$ и при этом $\mathcal{B}$ — некоторое его подкольцо. Рассмотрим непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Скажем, что S порождает $\mathcal{B}$ как кольцо, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

1) для любого $b \in \mathcal{B}$ найдётся число $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, элементы $s_{i_1}, \dots, s_{i_m} \in S$ и многочлен f с целочисленными коэффициентами от m некоммутирующих переменных, что $b = f(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})$;

2) $\mathcal{B}$ совпадает с пересечением всех подколец в $\mathcal{A}$, которые содержат множество S ;

3) $\mathcal{B}$ — наименьшее подкольцо в $\mathcal{A}$, содержащее множество S , т.е. если $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{A}$ — подкольцо и $S \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$, то $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$.

Обозначение: $\langle S \rangle_{\text{Ring}} = \mathcal{B}$. В этом случае будем называть множество S *системой образующих*, или *порождающим подмножеством*, кольца $\mathcal{B}$.

Определение 1.1.2. Пусть $\mathcal{A}$ является алгеброй над коммутативным кольцом $\mathcal{K}$, и $\mathcal{B}$ — её подалгебра. Скажем, что подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$ порождает $\mathcal{B}$ как $\mathcal{K}$ -алгебру, если множество $S \cup \mathcal{K}1_{\mathcal{A}}$ порождает $\mathcal{B}$ как кольцо. Обозначение: $\langle S \rangle_{\text{Alg}} = \mathcal{B}$.

Рассмотрим кольцо $M_n(\mathcal{R})$ всех $n \times n$ матриц с элементами в кольце $\mathcal{R}$. Для матрицы $A \in M_n(\mathcal{R})$ обозначим через $(A)_{ij}$, или a_{ij} , элемент на позиции (i, j) . Стандартным образом обозначим через $E_{ij}^{(n)}$, или E_{ij} , матричную единицу в $M_n(\mathcal{R})$, т.е. матрицу, у которой на позиции (i, j) стоит единица, а на остальных местах — нули. При этом E_n , или E , будет обозначать единичную матрицу

в $M_n(\mathcal{R})$. Зафиксируем обозначение для множества всех скалярных матриц $\mathcal{R}E_n = \{r \cdot E_n \mid r \in \mathcal{R}\}$. Обозначим через $D_n(\mathcal{R})$ и $T_n(\mathcal{R})$ подкольца в $M_n(\mathcal{R})$, состоящие из всех диагональных и верхнетреугольных матриц, соответственно. Для натуральных a, b обозначим через $M_{a \times b}(\mathcal{R})$ множество всех прямоугольных $a \times b$ матриц с элементами в кольце $\mathcal{R}$. Для двух матриц $A \in M_{a \times b}(\mathcal{R})$, $B \in M_{a \times c}(\mathcal{R})$ определим матрицу $(A|B) \in M_{a \times (b+c)}(\mathcal{R})$, полученную присоединением матрицы B к матрице A справа.

На протяжении всей работы $\mathbb{F}$ — произвольное поле, а также $\mathbb{F}_q$ — конечное поле мощности q .

1.2 Частично упорядоченные множества

Бинарное отношение $\preceq$ на некотором множестве X называют *частичным порядком*, если оно транзитивное, рефлексивное и антисимметричное. Определим отношение *строгого частичного порядка* $\prec$ стандартным образом: $x \prec y$, если $x \preceq y$ и $x \neq y$.

Скажем, что два элемента $x, y \in X$ *сравнимы*, если выполнено $x \preceq y$ или $y \preceq x$. В противном случае, считаем, что элементы x, y *несравнимы*. Подмножество $Y \subseteq X$, в котором любые два различных элемента сравнимы (несравнимы) назовём *цепью* (*антицепью*). Если X целиком является цепью, то говорят, что X *линейно упорядочено*. В случае конечного X определим *высоту* (*ширину*) как максимальную мощность цепи (антицепи).

Элемент $x \in X$ назовём *минимальным*, если для любого $y \in X \setminus \{x\}$ либо $x \prec y$, либо x, y несравнимы. Элемент $x \in X$ назовём *наименьшим*, если для любого $y \in X \setminus \{x\}$ выполнено $x \prec y$. Аналогичным образом определяются *максимальный* и *наибольший* элементы.

Для двух элементов $x, y \in X$ зададим *отрезок*

$$[x, y] = \{t \in X \mid x \preceq t \preceq y\}.$$

Скажем, что элемент y *накрывает* x , если отрезок $[x, y]$ состоит в точности из двух элементов x, y . Обозначение: $x \prec: y$. Далее будем называть соответствующее бинарное отношение $\prec:$ *отношением накрытия*.

Пусть множество X конечно. Тогда его элементы можно занумеровать. В дальнейшем главным образом будет рассматриваться случай $X = \{1, \dots, n\}$.

Тогда на X помимо $\preceq$ задан также и естественный линейный порядок $\leq$, заданный как $1 \leq 2 \leq \dots \leq n$. Скажем, что частичный порядок $\preceq$ *согласован с естественным порядком $\leq$* , если $\preceq \subseteq \leq$ как бинарные отношения. Другими словами, для всех $x, y \in X$ из условия $x \preceq y$ следует $x \leq y$.

Пусть σ — некоторая подстановка на множестве $X = \{1, \dots, n\}$. Тогда σ задаёт на $\{1, \dots, n\}$ новый частичный порядок $\preceq_\sigma$ следующим образом. Для $x, y \in X$ полагаем $x \preceq_\sigma y$ при $\sigma^{-1}(x) \preceq \sigma^{-1}(y)$. Значит, σ задаёт изоморфизм двух частично упорядоченных множеств $(X, \preceq)$ и $(X, \preceq_\sigma)$.

Предложение 1.2.1 ([57, лемма 1.2.5]). *Пусть на множестве $X = \{1, \dots, n\}$ задан частичный порядок $\preceq$. Тогда существует биекция $\sigma : X \rightarrow X$ такая, что порядок $\preceq_\sigma$ будет согласован с естественным порядком $\leq$.*

Пусть даны два частично упорядоченных множества $(X_1, \preceq_1)$, $(X_2, \preceq_2)$. Отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ *сохраняет строгий порядок*, если для любых $a \prec_1 b$ выполняется $f(a) \prec_2 f(b)$.

Определение 1.2.2. Для натурального числа m определим *m -дольное*, или *многодольное* [9], частично упорядоченное множество как тройку $(X, \preceq, \vartheta)$, где отображение $\vartheta : X \rightarrow \{1, \dots, m\}$

- 1) сюръективно,
- 2) сохраняет строгий порядок между $(X, \preceq)$ и множеством $\{1, \dots, m\}$, которое линейно упорядоченным стандартным образом.

Данное определение близко к понятию многодольного графа ввиду следующего замечания.

Замечание 1.2.3 ([9]). Для каждого $i = 1, \dots, m$ обозначим через X_i прообраз $\vartheta^{-1}(i)$. Тогда из определения m -дольного частично упорядоченного множества вытекает следующее:

- (a) $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$,
- (b) X_i является непустой антицепью для каждого i ,
- (c) $X_i \cap X_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$,
- (d) для любых $x \prec y$, найдутся $1 \leq i < j \leq m$, такие что $x \in X_i$, $y \in X_j$.

Верно и обратное: любое семейство множеств $\{X_i\}_{i=1}^m$, которое удовлетворяет условиям (a)–(d), определяет сюръективное отображение ϑ , сохраняющее строгий порядок. Достаточно положить $\vartheta(X_i) = \{i\}$.

Небольшая модификация теоремы Мирского [45] показывает, для каких натуральных m частично упорядоченное множество является m -дольным.

Предложение 1.2.4. *Рассмотрим конечное частично упорядоченное множество $(X, \preceq)$ высоты h . Выберем произвольное натуральное m . Пусть на множестве $\{1, \dots, m\}$ задан стандартный линейный порядок $\leq$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) $h \leq m \leq |X|$;
- 2) существует сюръективное отображение $\vartheta : X \rightarrow \{1, \dots, m\}$, сохраняющее строгий порядок.

Доказательство. $\neg 1) \Rightarrow \neg 2)$ Если $m > |X|$, то отображения ϑ не существует ввиду требования сюръективности. При $m < h$ достаточно воспользоваться тем фактом, что пересечение цепи и антицепи содержит не более одной точки.

$1) \Rightarrow 2)$ Пусть $h \leq m \leq |X|$, сконструируем семейство множеств $\{X_i\}_{i=1}^m$ из замечания 1.2.3, используя индукцию по m . Для $m = h$ зададим каждое X_i как множество минимумов для $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_{i-1})$, при этом X_1 является множеством минимумов для X . Предположим, что семейство $\{X_i\}_{i=1}^m$ построено для некоторого m , удовлетворяющего $h \leq m < |X|$. Так как $m < |X|$, то существует такое k , что $|X_k| \geq 2$. Тогда X_k может быть представлено как объединение двух непустых непересекающихся множеств $X_k = Y \cup Z$, и мы получаем семейство $X_1, \dots, X_{k-1}, Y, Z, X_{k+1}, \dots, X_m$, которое состоит из $m + 1$ антицепи и удовлетворяет условиям (a)–(d) замечания 1.2.3. $\square$

Определение 1.2.5. Назовем m -дольное частично упорядоченное множество $(X, \preceq, \vartheta)$ *градуированным* [54, раздел 13.1], если для любой пары $x \prec y$ выполняется $\vartheta(y) - \vartheta(x) = 1$. В этом случае отображение ϑ называется *ранговой функцией*, прообраз $X_i = \vartheta^{-1}(i)$ — i -м уровнем, а мощность $\mathscr{W}_i = |X_i|$ — i -м числом Уитни (второго рода).

Определение 1.2.6. Скажем, что m -дольное частично упорядоченное множество *полное m -дольное* [64], или является *паутиной* [31, 34], в случае если $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $\vartheta(y) - \vartheta(x) = 1$.

Замечание 1.2.7. Если тройка $(X, \preceq, \vartheta)$ задаёт полное m -дольное частично упорядоченное множество, то бинарные отношения $\preceq$ и $\prec$ могут быть представлены в виде объединения декартовых произведений уровней:

$$\prec = \bigcup_{i=1}^{m-1} X_i \times X_{i+1}, \quad \prec = \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} X_i \times X_j.$$

В частности, высота частично упорядоченного множества $(X, \preceq)$ совпадает с величиной m . Более того, упорядоченный набор чисел Уитни $(\mathscr{W}_1, \dots, \mathscr{W}_m)$ однозначно задаёт полное многодольное частично упорядоченное множество с точностью до изоморфизма.

Далее отдельно будет рассматриваться случай частично упорядоченных множеств высоты два. Для этого нам понадобятся следующие обозначения.

Обозначение 1.2.8. Пусть ρ — некоторое бинарное отношение на множестве X , т.е. $\rho \subseteq X \times X$. Введём обозначения для проекции на каждую координату

$$Pr_1(\rho) = \{x \in X \mid \exists y : x\rho y\}.$$

$$Pr_2(\rho) = \{y \in X \mid \exists x : x\rho y\}.$$

Из определений получаем следующее наблюдение.

Замечание 1.2.9. Для частично упорядоченного множества $(X, \preceq)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) Высота равна 2.
- 2) Бинарные отношения $\prec$, $\prec$ совпадают.
- 3) $Pr_1(\prec) \cap Pr_2(\prec) = \emptyset$.

1.3 Графы

На протяжении работы термин «граф» будет подразумевать неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Другими словами, граф является парой $G = (V, E)$, где V — множество вершин, E — множество рёбер; каждое ребро является множеством, состоящим из некоторых двух различных вершин.

Граф считаем *конечным*, если множество вершин V конечно (тогда E также конечно ввиду отсутствия кратных рёбер). В противном случае будем называть граф *бесконечным*.

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Пусть задан произвольный граф G и некоторый его полный подграф G' , тогда множество вершин G' будем называть *кликой*. Определим *кликовое число* графа $\omega = \omega(G)$ как супремум мощностей всех клик графа.

Если $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — два (возможно, бесконечных) графа, то их *тензорным произведением* $G_1 \times G_2$ [26] называют граф с множеством вершин $V_1 \times V_2$, две вершины соединены ребром $(a, b) \sim (c, d)$ тогда и только тогда, когда соответствующие координаты соединены ребрами $a \sim c$ и $b \sim d$ в исходных графах G_1, G_2 .

Если дана клика в графе $G_1 \times G_2$, то её проекции на первую координату составляют клику в графе G_1 . Поэтому $\omega(G_1 \times G_2) \leq \omega(G_1)$. Аналогично, $\omega(G_1 \times G_2) \leq \omega(G_2)$. Обратно, если X_i — некоторая клика в графе G_i , $i = 1, 2$, $|X_1| = |X_2|$, $f : X_1 \rightarrow X_2$ — биекция, тогда множество $\{(x, f(x)) \mid x \in X_1\}$ является кликой в графе $G_1 \times G_2$. Тогда непосредственно проверяется, что

$$\omega(G_1 \times G_2) = \min\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}.$$

Определим *дополнение* $\bar{G} = (V, \bar{E})$ графа $G = (V, E)$ как граф с тем же множеством вершин V , и для всех $x, y \in V$ включение $\{x, y\} \in \bar{E}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\{x, y\} \notin E$. Таким образом, $E \cap \bar{E} = \emptyset$, а граф $(V, E \cup \bar{E})$ является полным.

Пусть множество $\{1, \dots, n\}$ частично упорядочено отношением $\preceq$. Тогда (неориентированной) *диаграммой Хассе* назовём граф с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$, две вершины $x, y \in \{1, \dots, n\}$ соединены ребром в случае когда либо $x \prec y$, либо $y \prec x$.

Для натурального $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\{0, 1\}^m$ множество всех возможных 2^m последовательностей нулей и единиц длины m . Обозначим через $\mathcal{Q}_m$ (неориентированный) *булев куб размерности m* . Это граф, в котором вершинами выступают все последовательности из множества $\{0, 1\}^m$. Две последовательности соединены ребром в графе $\mathcal{Q}_m$, если они отличаются ровно в одной позиции. Булев куб является диаграммой Хассе для множества всех подмножеств m -элементного множества, упорядоченного по включению.

В дальнейшем главным образом будет рассматриваться дополнение булева куба $\overline{\mathcal{Q}_m}$. Тогда по определению две последовательности из множества $\{0,1\}^m$ соединены ребром в графе $\overline{\mathcal{Q}_m}$, если они отличаются хотя бы в двух позициях. Рассмотрим некоторые простейшие свойства графа $\overline{\mathcal{Q}_m}$.

Предложение 1.3.1. *Для графа $\overline{\mathcal{Q}_m}$ верно следующее:*

- 1) *Каждая вершина имеет степень $2^m - m - 1$.*
- 2) *Кликовое число $\omega(\overline{\mathcal{Q}_m}) = 2^{m-1}$.*
- 3) *Существует ровно две клики C_0, C_1 максимальной мощности.*
- 4) *Каждая вершина из C_0 соединяется в точности с $2^{m-1} - m$ вершинами из C_1 и наоборот.*
- 5) *Для $m = 1, 2$, граф $\overline{\mathcal{Q}_m}$ несвязен. Если $m \geq 3$, то существует гамильтонов цикл в $\overline{\mathcal{Q}_m}$, т.е. цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз (за исключением начальной вершины, в которую цикл возвращается).*
- 6) *Граф $\overline{\mathcal{Q}_m}$ естественным образом изоморфен подграфу в $\overline{\mathcal{Q}_{m+1}}$.*

Доказательство. 1) Вытекает из того, что в m -мерном булевом кубе $\mathcal{Q}_m$ любая вершина имеет степень m .

2)–4) Пусть C_0 и C_1 будут множествами наборов, которые содержат чётное и нечётное количество единиц, соответственно. Тогда $|C_0| = |C_1| = 2^{m-1}$. Два различных набора с одинаковой чётностью количества единиц должны отличаться хотя бы в двух позициях. Поэтому они заведомо соединены ребром в графе $\overline{\mathcal{Q}_m}$, а значит, множества C_0, C_1 действительно являются кликами.

Рассмотрим произвольную вершину v в клике C_0 . Вычислим разность

$$\deg v - (|C_0| - 1) = 2^m - m - 1 - 2^{m-1} + 1 = 2^{m-1} - m.$$

Следовательно, вершина v соединена ровно с $2^{m-1} - m$ вершинами из клики C_1 . Симметричным свойством обладает любая вершина $v \in C_1$. Таким образом, пункт 4 доказан.

Пусть K — произвольная клика в графе $\overline{\mathcal{Q}_m}$. Обозначим $K_0 = K \cap C_0$ и $K_1 = K \cap C_1$. Рассмотрим множества

$$K'_0 = \{v \in C_1 \mid K_0 \cup \{v\} \text{ не является кликой в графе } \overline{\mathcal{Q}_m}\},$$

$$K'_1 = \{v \in C_0 \mid K_1 \cup \{v\} \text{ не является кликой в графе } \overline{\mathcal{Q}_m}\}.$$

Тогда по определению $K_0 \subseteq C_0 \setminus K'_1$ и $K_1 \subseteq C_1 \setminus K'_0$. Заметим, что существует инъекция $K_0 \rightarrow K'_0$. Например, можно в каждом наборе нулей и единиц, заменить первый элемент на противоположный. Тогда $|K'_0| \geq |K_0|$ и аналогично $|K'_1| \geq |K_1|$. Далее

$$|K| = |K_0| + |K_1| \leq |C_0| - |K'_1| + |C_1| - |K'_0| \leq 2^m - |K_0| - |K_1| = 2^m - |K|,$$

откуда $|K| \leq 2^{m-1}$, что доказывает пункт 2.

Предположим, что $|K| = 2^{m-1}$. Тогда предыдущая цепочка неравенств обращается в равенства. Значит, $|K'_0| + |K'_1| = 2^{m-1}$ и $|K_0| + |K_1| = 2^{m-1}$. Получаем

$$|K_0| = 2^{m-1} - |K_1| \geq 2^{m-1} - |K'_1| = |K'_0|,$$

откуда с учётом предыдущего получаем $|K_0| = |K'_0|$. Аналогично $|K_1| = |K'_1|$.

Рассмотрим случай $K_0 \neq \emptyset$. Для каждого $i = 1, \dots, m$ зададим отображение $\phi_i : K_0 \rightarrow K'_0$, которое заменяет i -й элемент последовательности на противоположный. По предыдущему ϕ_i является биекцией. Тогда композиция $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ задаёт биекцию на множестве K_0 . Действуя такими отображениями на произвольную вершину $v \in K_0$, можно получить любой элемент из C_0 . Значит, $C_0 = K_0$. Отсюда $K_1 = \emptyset$ в силу $|K_0| + |K_1| = 2^{m-1}$.

В случае $K_1 \neq \emptyset$ аналогично получаем $C_1 = K_1$ и $K_0 = \emptyset$. Пункт 3 доказан.

5) Граф $\overline{\mathcal{Q}_1}$ состоит из двух изолированных вершин, тогда как $\overline{\mathcal{Q}_2}$ является объединением двух неинцидентных рёбер. Для $m \geq 3$ рассмотрим наборы нулей и единиц длины m следующего вида: $v = (0 \dots 0000)$, $v' = (0 \dots 0110)$, $w = (0 \dots 0111)$, $w' = (0 \dots 0001)$. Рассмотрим путь, который начинается в вершине v , затем проходит через все вершины клики C_0 причём так, что вершина v' окажется последней. После этого путь приходит в вершину w' , далее посещает все вершины клики C_1 , заканчивая в вершине w . Затем путь возвращается в вершину v .

6) Отобразим упорядоченный набор $(a_1 \dots a_m)$ в набор $(a_1 \dots a_m 0)$, где все $a_i \in \{0, 1\}$. □

1.4 Кольца инцидентности

В качестве примера рассмотрим матрицы следующего вида

$$\text{а)} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{в)} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

где вместо «*» могут стоять положительные целые числа. Фактически задано три узора из нулей. В случае а) узор из нулей заведомо сохраняется при умножении двух матриц указанного вида. То же можно сказать про узор в). Однако в случае б) при умножении матриц на позиции (2,3) может появиться ненулевой элемент, если всюду вместо «*» стоят положительные целые числа.

Установим, когда узор из нулей сохраняется при матричном умножении. Аккуратная постановка этой задачи и её решение формулируется в терминах матричных единиц и бинарных отношений.

Пусть ρ — бинарное отношение на $\{1, \dots, n\}$, т.е. произвольное подмножество декартова квадрата $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$. Обозначим также через $\bar{\rho}$ дополнение ρ до декартова квадрата. В примерах а), б), в) выше ρ задает позиции, где расположены «*», в то время как $\bar{\rho}$ — позиции нулей. Матрица, у которой нули стоят на всех позициях $i\bar{\rho}j$, имеет вид $A = \sum_{i\rho j} a_{ij} E_{ij}$. Введём обозначение для множества всех таких матриц:

$$\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R}) = \left\{ \sum_{i\rho j} a_{ij} E_{ij} \mid a_{ij} \in \mathcal{R} \right\} = \{A \in M_n(\mathcal{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ при } i\bar{\rho}j\}.$$

Обозначение 1.4.1. Пусть S — некоторое непустое подмножество в кольце матриц $M_n(\mathcal{R})$. Зададим бинарное отношение на множестве $\{1, \dots, n\}$ следующим образом

$$\Omega(S) = \{(i, j) \mid \exists A \in S : (A)_{ij} \neq 0\} \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Тогда $\Omega(\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})) = \rho$.

Из правил умножения двух матричных единиц сразу вытекает критерий, когда узор из нулей сохраняется при умножении матриц.

Замечание 1.4.2. Следующие условия эквивалентны:

- 1) Отношение ρ транзитивно.

2) Множество $\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})$ замкнуто относительно операции умножения матриц.

3) Множество матричных единиц вместе с нулевой матрицей $\{E_{ij} \mid i\rho j\} \cup \{O\}$ является полугруппой относительно операции умножения матриц.

Дополнительным ограничением на $\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})$ является наличие единичной матрицы. Это условие можно тривиальным образом сформулировать в терминах отношения ρ .

Замечание 1.4.3. Следующие условия эквивалентны:

- 1) Отношение ρ рефлексивно.
- 2) Множество $\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})$ содержит единичную матрицу E_n .

Отношения, которые одновременно рефлексивны и транзитивны, будем стандартным образом называть *предпорядками*. Из предыдущего следует, что если ρ — частичный предпорядок, то $\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})$ является подкольцом в $M_n(\mathcal{R})$, содержащим единичную матрицу.

Рассмотрим ситуацию, когда отношение ρ является некоторым частичным порядком $\preceq$ на множестве $\{1, \dots, n\}$, т.е. дополнительно обладает свойством антисимметричности. Согласно предложению 1.2.1 существует такая подстановка σ на множестве $\{1, \dots, n\}$, что порядок $\preceq_\sigma$ согласован с естественным порядком. Пусть P — матрица перестановки σ , т.е. $(P)_{ij} = 1$, если $j = \sigma(i)$ и $(P)_{ij} = 0$ иначе. Тогда для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$\begin{aligned} P^{-1}E_{ij}P &= P^t E_{ij} P = P^t E_{ij} \sum_{k, \ell=1}^n (P)_{k\ell} E_{k\ell} = P^t E_{ij} \sum_{k=1}^n E_{k\sigma(k)} = P^t E_{i\sigma(j)} = \\ &= \sum_{k, \ell=1}^n (P)_{\ell k} E_{k\ell} E_{i\sigma(j)} = \sum_{k=1}^n (P)_{ik} E_{k\sigma(j)} = E_{\sigma(i)\sigma(j)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P^{-1}\{E_{ij} \mid i \preceq j\}P &= \{E_{\sigma(i)\sigma(j)} \mid i \preceq j\} = \\ &= \{E_{ij} \mid \sigma^{-1}(i) \preceq \sigma^{-1}(j)\} = \{E_{ij} \mid i \preceq_\sigma j\}. \end{aligned}$$

Так как $rP = Pr$ для всех $r \in \mathcal{R}$, то получаем, что

$$P^{-1}\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})P = \mathcal{A}_n(\preceq_\sigma, \mathcal{R}),$$

откуда $\mathcal{A}_n(\preceq_\sigma, \mathcal{R})$ и $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ изоморфны и как кольца, и как левые, и как правые $\mathcal{R}$ -модули. Заметим, что так как порядок $\preceq_\sigma$ согласован с естественным, то

$$\{E_{ij} \mid i \preceq_\sigma j\} \subseteq \{E_{ij} \mid i \leq j\},$$

откуда $\mathcal{A}_n(\preceq_\sigma, \mathcal{R})$ состоит только из верхнетреугольных матриц.

Верно и обратное. Пусть ρ — частичный предпорядок и существует матрица подстановки P такая, что кольцо $P^{-1}\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})P$ состоит из верхнетреугольных матриц. Это означает, что никакие две симметричные матричные единицы $E_{\sigma(i)\sigma(j)}$, $E_{\sigma(j)\sigma(i)}$ одновременно не принадлежат стандартному базису $P^{-1}\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})P$. Но тогда и никакие две симметричные матричные единицы E_{ij} , E_{ji} одновременно не принадлежат стандартному базису $\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})$. Отсюда отношение ρ антисимметрично.

Таким образом, выполнено следующее.

Предложение 1.4.4. Пусть ρ — отношение предпорядка на $\{1, \dots, n\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) Отношение ρ является частичным порядком;
- 2) Существует такая матрица подстановки P , что $P^{-1}\mathcal{A}_n(\rho, \mathcal{R})P$ состоит из верхнетреугольных матриц.

Определение 1.4.5. Пусть $\preceq$ — отношение частичного порядка на множестве $\{1, \dots, n\}$. Тогда кольцо инцидентности определяется как

$$\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}) = \left\{ \sum_{i \preceq j} a_{ij} E_{ij} \mid a_{ij} \in \mathcal{R} \right\} = \{A \in M_n(\mathcal{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ при } i \not\preceq j\}.$$

Отметим, что в литературе кольца инцидентности нередко определяются в том числе и над предпорядками. Также распространён термин *структурное матричное кольцо*. Однако далее в работе рассматривается только случай частичных порядков, но не предпорядков.

Замечание 1.4.6. Подкольцо $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathcal{R})$ является кольцом инцидентности тогда и только тогда, когда выполнены все следующие условия:

- 1) $\mathcal{A}$ является свободным подмодулем $M_n(\mathcal{R})$ как левого $\mathcal{R}$ -модуля и обладает базисом, который целиком состоит из некоторых матричных единиц;
- 2) все диагональные матричные единицы принадлежат указанному базису;

3) никакие две симметричные матричные единицы E_{ij} и E_{ji} при $i \neq j$ одновременно не принадлежат указанному базису.

Из предыдущих рассуждений получаем следующее предложение.

Предложение 1.4.7. Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathcal{R})$ — кольцо инцидентности. Тогда существует такое кольцо инцидентности $\mathcal{B} \subseteq M_n(\mathcal{R})$, что

- 1) $\mathcal{B}$ состоит из верхнетреугольных матриц, т.е. $\mathcal{B} \subseteq T_n(\mathcal{R})$,
- 2) $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, причём $\mathcal{B} = P^{-1}\mathcal{A}P$, где P — матрица некоторой подстановки.

Рассмотрим два ключевых примера колец инцидентности.

Пример 1.4.8. Пусть $\preceq$ совпадает с равенством $=$, т.е. множество $\{1, \dots, n\}$ целиком является антицепью. Тогда кольцо инцидентности $\mathcal{A}_n(=, \mathcal{R})$ совпадает с кольцом всех диагональных матриц $D_n(\mathcal{R})$. Отсюда $\mathcal{A}_n(=, \mathcal{R})$ изоморфно прямому произведению колец $\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}$. Более того, так как всякое отношение частичного порядка рефлексивно, то любое кольцо инцидентности содержит $D_n(\mathcal{R})$ в качестве подкольца.

Пример 1.4.9. Пусть $\preceq$ совпадает с естественным порядком $\leq$ на $\{1, \dots, n\}$. Тогда $\mathcal{A}_n(\leq, \mathcal{R})$ окажется кольцом всех верхнетреугольных матриц $T_n(\mathcal{R})$. Как было отмечено ранее в этом параграфе, любое кольцо инцидентности естественным образом вкладывается в $T_n(\mathcal{R})$.

Ввиду того, что все матрицы кольца инцидентности обладают специальным узором из нулей, формула матричного умножения упрощается для пар индексов связанных отношением накрытия.

Лемма 1.4.10. Для любых матриц $A, B \in \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ и пары индексов $i \prec j$ выполнено

$$(AB)_{ij} = (A)_{ii}(B)_{ij} + (A)_{ij}(B)_{jj}.$$

Для кольца инцидентности $\mathcal{A}$ имеет место следующее описание её радикала Джекобсона $J(\mathcal{A})$.

Предложение 1.4.11 ([57, предложение 4]). Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, то его радикал Джекобсона

$$\begin{aligned} J(\mathcal{A}) &= \{A \in \mathcal{A} \mid (A)_{ii} \in J(\mathcal{R}), i = 1, \dots, n\} = \\ &= \sum_{i=1}^n J(\mathcal{R})E_{ii} + \sum_{i \prec j} \mathcal{R}E_{ij}. \end{aligned}$$

Помимо радикала Джекобсона нам понадобится идеал, состоящий из матриц с нулевой диагональю.

Обозначение 1.4.12. Для кольца инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ определим

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} \mid (A)_{ii} = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Предложение 1.4.13. Для кольца инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ рассмотрим множество $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Тогда

- 1) $\mathcal{Z}$ является идеалом,
- 2) $\mathcal{Z}^n = O$, откуда $\mathcal{Z}$ — нильпотентный идеал,
- 3) $\mathcal{Z}^2 = \{A \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \mid (A)_{ij} = 0 \text{ для всех } i \prec j\}$,
- 4) равенство $J(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}$ выполняется тогда и только тогда, когда кольцо $\mathcal{R}$ полупримитивно, т.е. $J(\mathcal{R}) = 0$.

Доказательство. Из предложения 1.4.7 вытекают пункты 1, 2. Пункт 4 следует из предложения 1.4.11. Рассмотрим идеал $\mathcal{Z}^2$. По лемме 1.4.10 для любой матрицы $A \in \mathcal{Z}^2$ и каждой пары $i \prec j$ выполняется $(A)_{ij} = 0$. Обратно, для любой пары $i \prec j$ такой, что $i \not\prec j$, найдётся цепочка $i = i_1 \prec i_2 \prec \dots \prec i_k = j$ длины $k \geq 3$. Тогда $E_{ij} = E_{i_1 i_2} \cdot (E_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot E_{i_{k-1} i_k})$ принадлежит идеалу $\mathcal{Z}^2$. $\square$

Индекс нильпотентности идеала $\mathcal{Z}$ также связан со структурой частичного порядка.

Предложение 1.4.14. Индекс нильпотентности идеала $\mathcal{Z}$ кольца инцидентности совпадает с высотой частично упорядоченного множества.

Доказательство. Аналогично [70, предложение 4.11]. $\square$

Следующая теорема описывает все порождающие системы матричных алгебр инцидентности над произвольным полем.

Теорема 1.4.15 ([42, основная теорема]). Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — алгебра инцидентности над полем $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Рассмотрим непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Тогда S порождает $\mathcal{A}$ как $\mathbb{F}$ -алгебру тогда и только тогда, когда выполнены одновременно оба условия:

1. для любых $i \neq j$ найдётся матрица $A \in S$ такая, что $(A)_{ii} \neq (A)_{jj}$;
2. для любых $i \prec j$ в линейной оболочке S над $\mathbb{F}$ найдётся такая матрица B , что $(B)_{ij} \neq 0$ и $(B)_{ii} = (B)_{jj}$.

1.5 Функция длины алгебр над полем

Для конечного множества (алфавита) $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ конечные последовательности букв из Θ (буквы могут повторяться) назовем *словами*. Пусть Θ^* обозначает множество всех слов в алфавите Θ , включая пустое слово ε , F_Θ — свободный моноид над алфавитом Θ , т.е. Θ^* с операцией конкатенации. Длина слова $\theta_{i_1} \dots \theta_{i_k}$, где $\theta_{i_j} \in \Theta$, равна k . Считается, что ε имеет длину 0. Для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\Theta^{\leq k}$ множество всех слов в алфавите Θ длин не больших k , включая пустое слово.

Пусть $\mathcal{B}$ — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей $1_{\mathcal{B}}$ над полем $\mathbb{F}$. Произведения элементов из непустого множества $S \subseteq \mathcal{B}$ можно рассматривать как образы элементов свободной полугруппы F_S при естественном гомоморфизме. Считаем, что гомоморфизм отображает ε в $1_{\mathcal{B}}$. Такие произведения мы также будем называть словами от элементов S . Введем естественным образом обозначения $S^{\leq k}$ и S^* , предполагая теперь вместо конкатенации операцию умножения в алгебре $\mathcal{B}$. Для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L}_k(S) = \langle S^{\leq k} \rangle$ над полем $\mathbb{F}$.

Замечание 1.5.1. Пространство $\mathcal{L}_0(S)$ совпадает с линейной оболочкой единицы $1_{\mathcal{B}}$. При этом $\mathcal{L}_1(S) = \langle S \cup \{1_{\mathcal{B}}\} \rangle$ — линейная оболочка множества $S \cup \{1_{\mathcal{B}}\}$.

Пусть также $\mathcal{L}(S) = \langle S^* \rangle$, т.е. это линейная оболочка всех возможных конечных слов над алфавитом S , которые рассматриваются в качестве произведений в алгебре $\mathcal{B}$. При этом $1_{\mathcal{B}}$ всегда входит в эту линейную оболочку. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{L}(S)$ совпадает с подалгеброй в $\mathcal{B}$, порождённой множеством S , т.е.

$$\mathcal{L}(S) = \langle S \rangle_{\text{Alg}} = \langle S \cup \mathbb{F}1_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{Ring}}$$

согласно обозначениям, введённым в § 1.1.

Получаем цепочку вложенных подпространств $\mathcal{L}_k(S) \subseteq \mathcal{L}_{k+1}(S)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Из конечномерности $\mathcal{B}$ следует, что найдётся такой номер h , для которого $\mathcal{L}_h(S) = \mathcal{L}_{h+1}(S)$, откуда в силу ассоциативности алгебры сразу следует равенство $\mathcal{L}_k(S) = \mathcal{L}_h(S)$ для всех $k \geq h$. Заметим, что $\mathcal{L}(S) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k(S)$. Тогда $\mathcal{L}_k(S) = \mathcal{L}(S)$ для всех $k \geq h$. Таким образом, начиная с некоторого номера h , цепочка подпространств $\mathcal{L}_k(S)$ стабилизируется на подалгебре, порождённой множеством S .

Определение 1.5.2. *Длиной подмножества S алгебры $\mathcal{B}$ называется*

$$\ell(S) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \mathcal{L}_k(S) = \mathcal{L}(S)\}.$$

Замечание 1.5.3. Множество S порождает алгебру $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(S) = \mathcal{B}$.

Если $\mathcal{L}(S) = \mathcal{B}$, то мы получаем цепочку вложенных подпространств следующего вида

$$\langle 1_{\mathcal{B}} \rangle_{\mathbb{F}} = \mathcal{L}_0(S) \subsetneq \mathcal{L}_1(S) \subsetneq \mathcal{L}_2(S) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{L}_{\ell(S)-1}(S) \subsetneq \mathcal{L}(S) = \mathcal{B}.$$

Так как все включения строгие, то на каждом шаге происходит рост размерности хотя бы на единицу, а значит, $\ell(S) \leq \dim \mathcal{B} - 1$. Поэтому корректно определен максимум по всем порождающим системам.

Определение 1.5.4. *Длиной алгебры $\mathcal{B}$ называется*

$$\ell(\mathcal{B}) = \max\{\ell(S) \mid S \subseteq \mathcal{B} : \mathcal{L}(S) = \mathcal{B}\}.$$

Следующая лемма описывает ситуацию, когда верхняя оценка $\ell(S) \leq \dim \mathcal{B} - 1$ достигается.

Лемма 1.5.5 ([2, лемма 5.3]). *Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{F}$. Следующие условия эквивалентны.*

- 1) $\ell(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - 1$.

- 2) *Существует элемент $a \in \mathcal{A}$, такой что степень его минимального многочлена $\deg a$ совпадает с размерностью алгебры $\dim \mathcal{A}$.*

- 3) *Алгебра $\mathcal{A} = \langle a \rangle_{\text{Alg}}$ порождается одним своим элементом.*

В частности, такая алгебра $\mathcal{A}$ заведомо коммутативна.

Определение 1.5.6. Назовем подалгебру $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ *блочно-треугольной*, если любая матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k} \\ \hline 0 & A_{2,2} & \dots & A_{2,k} \\ \hline & & \dots & \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{k,k} \end{array} \right),$$

где каждое $A_{i,j}$ пробегает некоторое подмножество в $M_{n_i \times n_j}(\mathbb{F})$, причём $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Лемма 1.5.7 ([5, следствие 3]). Пусть $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — алгебра блочно-треугольных матриц, $E_n \in \mathcal{A}$. Пусть ℓ_i — длина алгебры $\{A_{i,i} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Тогда для $\ell(\mathcal{A})$ выполнены следующие неравенства:

$$\max\{\ell_1, \dots, \ell_k\} \leq \ell(\mathcal{A}) \leq \sum_{j=1}^k \ell_j + k - 1.$$

Приведем известные факты об оценке длины тензорного произведения алгебр.

Теорема 1.5.8 ([2, лемма 5.1]). Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — конечномерные ассоциативные алгебры с единицами над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}} &= \{a_1, \dots, a_s\}, & \mathcal{A} &= \langle S_{\mathcal{A}} \rangle_{Alg}, & \ell(S_{\mathcal{A}}) &= \ell(\mathcal{A}); \\ S_{\mathcal{B}} &= \{b_1, \dots, b_t\}, & \mathcal{B} &= \langle S_{\mathcal{B}} \rangle_{Alg}, & \ell(S_{\mathcal{B}}) &= \ell(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Тогда множество $S = \{a_i \otimes 1_{\mathcal{B}}\}_{i=1}^s \cup \{1_{\mathcal{A}} \otimes b_j\}_{j=1}^t$ порождает алгебру $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и при этом $\ell(S) = \ell(\mathcal{A}) + \ell(\mathcal{B})$. В частности,

$$\ell(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \geq \ell(\mathcal{A}) + \ell(\mathcal{B}).$$

Теорема 1.5.8 по индукции обобщается на большее число алгебр.

Следствие 1.5.9 ([2]). Пусть $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ — конечномерные ассоциативные алгебры с единицей над полем $\mathbb{F}$. Предположим, что множество $S_i = \{a_1^{(i)}, \dots, a_{s_i}^{(i)}\}$ порождает $\mathcal{A}_i$ и при этом $\ell(S_i) = \ell(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда множество

$$S = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{s_i} \{1_{\mathcal{A}_1} \otimes \dots \otimes 1_{\mathcal{A}_{i-1}} \otimes a_j^{(i)} \otimes 1_{\mathcal{A}_{i+1}} \otimes \dots \otimes 1_{\mathcal{A}_m}\}$$

порождает алгебру $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m$ и при этом $\ell(S) = \sum_{i=1}^m \ell(\mathcal{A}_i)$. В частности,

$$\ell(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m) \geq \sum_{i=1}^m \ell(\mathcal{A}_i).$$

Известно, что длина подалгебры может быть как больше, так и меньше длины содержащей её алгебры [7, раздел 5]. Однако в ряде случаев монотонность всё же имеет место.

Предложение 1.5.10 ([6, теорема 2]). Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{F}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ — подалгебра. Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} \triangleleft \mathcal{A}$ — идеал, причём $\mathcal{C} \cap \mathcal{B} = \{O\}$. Тогда $\ell(\mathcal{B}) \leq \ell(\mathcal{A})$.

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/\mathcal{C}$ и поэтому $\ell(\mathcal{B}) \leq \ell(\mathcal{A})$ ввиду [6, теорема 2]. $\square$

Перейдём к известным результатам о длине алгебр инцидентности. Начнём с алгебры диагональных матриц.

Теорема 1.5.11 ([2, теорема 5.4]). Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле.

1. Если $\mathbb{F}$ бесконечно, то $\ell(D_n(\mathbb{F})) = n - 1$.
2. Если $|\mathbb{F}| = q < \infty$, то $\ell(D_n(\mathbb{F})) = \begin{cases} n - 1, & \text{при } q \geq n; \\ (q - 1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1, & \text{при } q < n. \end{cases}$

Если $\mathbb{F}$ является полем из двух элементов, то формула из теоремы 1.5.11 упрощается до вида $\ell(D_n(\mathbb{F}_2)) = [\log_2 n]$. Этот факт проверяется прямым вычислением.

Отметим, что функция длины $\ell(D_n(\mathbb{F}))$ является монотонно неубывающей по аргументу n . Это было доказано в [2, теорема 3.2]. Кроме того, очевидно, что величина $\ell(D_n(\mathbb{F}))$ уходит на бесконечность, если n неограниченно возрастает, а мощность поля $\mathbb{F}$ фиксирована.

Теорема 1.5.12 ([2]). Рассмотрим функцию $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, определяемую формулой $\phi(n) = \ell(D_n(\mathbb{F}))$, где мощность поля $|\mathbb{F}|$ фиксирована. Тогда

1. ϕ не убывает;
2. $\phi(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Другой важный известный результат относится к длине алгебры верхнетреугольных матриц.

Теорема 1.5.13 ([3, теорема 4.1]). Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда

$$\ell(T_n(\mathbb{F})) = n - 1.$$

Приведём теперь основную оценку для длин алгебр инцидентности над произвольным полем.

Теорема 1.5.14 ([3, лемма 4.2, следствие 4.6]). Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — алгебра инцидентности. Если поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то $\ell(\mathcal{A}) = n - 1$. Если же $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ — конечное поле мощности q , тогда

$$\ell(D_n(\mathbb{F}_q)) \leq \ell(\mathcal{A}) \leq n - 1.$$

В частности, $\ell(\mathcal{A}) = n - 1$ для $q \geq n$.

Таким образом, если $|\mathbb{F}| \geq n$, то длина любой алгебры инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ равна $n - 1$. Поэтому при исследовании длины достаточно рассматривать только конечные поля $\mathbb{F}_q$ мощности q такие, что $q < n$.

Предложение 1.5.15 ([70, предложение 4.9]). Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}) \subseteq T_n(\mathbb{F})$ — алгебра инцидентности, $n \geq 2$, $\mathbb{F}$ — поле мощности $q \leq n - 1$. Рассмотрим систему порождающих Φ для $\mathcal{B}$ и произвольную матрицу $B \in \langle \Phi \rangle$. Обозначим через $R(B)$ определяемые матрицей B пары индексов (i, j) такие, что $i \prec j$, j накрывает i , и выполнены условия $(B)_{ij} \neq 0$ и $(B)_{ii} = (B)_{jj}$. Если $R(B) \neq \emptyset$, то существует матрица $Q \in \mathcal{L}_q(\{B\}) \subseteq \mathcal{L}_q(\Phi)$, для которой $(Q)_{ll} = 0$ для всех $l = 1, \dots, n$ и $(Q)_{ij} \neq 0$ для всех пар $(i, j) \in R(B)$.

Теорема 1.5.16 ([3, теорема 6.5]). Для всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется

$$\ell(T_2(\mathbb{F}_2) \oplus T_2(\mathbb{F}_2) \oplus D_m(\mathbb{F}_2)) = \max\{3, \lceil \log_2(m + 4) \rceil\}.$$

Лемма 1.5.17 ([70, лемма 4.8]). Пусть $n \geq 3$, $\mathbb{F}$ — поле мощности $q \leq n - 1$ и $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — алгебра инцидентности размерности $n + 1$. Тогда $\ell(\mathcal{A}) = \max\{2, (q - 1)\lceil \log_q n \rceil + \lceil q^{\lceil \log_q n \rceil} \rceil - 1\}$.

Глава 2

Минимальная мощность систем образующих

Результаты главы опубликованы в работах [67, 69, 70]. Рассматривается вопрос о минимальной мощности таких подмножеств S , что $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает кольцо инцидентности.

Определение 2.0.1. Для кольца инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ положим

$$\text{mgen}(\mathcal{A}) = \min\{|S| \mid S \subseteq \mathcal{A}, S \cup \mathcal{R}E_n \text{ порождает } \mathcal{A} \text{ как кольцо}\}.$$

Если $\mathcal{R}$ коммутативно, то $\text{mgen}(\mathcal{A})$ совпадает с минимальной мощностью подмножества, порождающего $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.

2.1 Описание систем образующих

Целью параграфа является доказательство теоремы 2.1.4. Она даёт необходимые и достаточные условия того, что подмножество вместе со скалярными матрицами порождает кольцо инцидентности. Ключевым элементом доказательства является следующая лемма, которая обобщает подход из работы [42].

Лемма 2.1.1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что $\mathcal{A}$ состоит только из верхнетреугольных матриц. Обозначим $\mathcal{N}' = \{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим ограничение частичного порядка $\preceq' = \preceq \cap \mathcal{N}' \times \mathcal{N}'$ и соответствующее кольцо инцидентности $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{n-1}(\preceq', \mathcal{R})$. Введём следующие отображения:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{B}, \quad (f(A))_{ij} = (A)_{ij} \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad i, j = 1, \dots, n-1; \\ g : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{R}, \quad g(A) = (A)_{nn} \quad \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что f и g являются гомоморфизмами колец, т.к. $\mathcal{A}$ состоит из верхнетреугольных матриц. Рассмотрим аддитивную подгруппу $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, которая замкнута относительно умножения матриц и удовлетворяет следующим условиям.

1. Ограничение $f|_{\mathcal{C}}$ сюръективно.
2. Ограничение $g|_{\mathcal{C}}$ сюръективно.
3. Пересечение $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(1) \cap \mathcal{C}$ непусто.
4. Для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, удовлетворяющего $i \prec n$, найдётся матрица $B^{(i)} \in \mathcal{C}$, такая что $(B^{(i)})_{ii} = (B^{(i)})_{nn} = 0$ и $(B^{(i)})_{in} = 1$.

Тогда $\mathcal{C}$ совпадает со всем кольцом инцидентности $\mathcal{A}$.

Доказательство. Из условий 1,2 вытекает существование отображений следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{C}, \quad \mathbf{F}(B) \in f^{-1}(B) \cap \mathcal{C} \quad \forall B \in \mathcal{B}; \\ \mathbf{G} : \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{C}, \quad \mathbf{G}(r) \in g^{-1}(r) \cap \mathcal{C} \quad \forall r \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что $\{E_{ij}^{(n)}\}_{i \preceq j} \cup \mathcal{R}E_n \subseteq \mathcal{C}$. Рассмотрим два случая.

[Случай 1.] Пусть n несравнимо с каждым из элементов $1, \dots, n-1$ относительно частичного порядка $\preceq$. Это означает, что $(A)_{in} = 0$ для каждого $A \in \mathcal{A}$ и всех $i = 1, \dots, n-1$. Тогда $E_{nn}^{(n)} \in \mathcal{C}$ в силу условия 3. Значит, для всех $i \preceq j$, таких что $i, j \neq n$, получаем

$$\mathcal{C} \ni \mathbf{F}\left(E_{ij}^{(n-1)}\right) - \mathbf{F}\left(E_{ij}^{(n-1)}\right) E_{nn}^{(n)} = E_{ij}^{(n)}. \quad (2.1.1)$$

Отсюда $\{E_{ij}^{(n)}\}_{i \preceq j} \subseteq \mathcal{C}$. Более того, для всех $r \in \mathcal{R}$ выполнено

$$\mathcal{C} \ni \mathbf{F}(rE_{n-1}) - \mathbf{F}(rE_{n-1}) E_{nn}^{(n)} + E_{nn}^{(n)} \mathbf{G}(r) = rE_n. \quad (2.1.2)$$

Таким образом, $\mathcal{R}E_n \subseteq \mathcal{C}$, а значит, $\mathcal{C} = \mathcal{A}$.

[Случай 2.] Предположим теперь, что существует такой элемент $i \neq n$, который сравним с n относительно частичного порядка $\preceq$. Так как $\mathcal{A}$ состоит из верхнетреугольных матриц, то заведомо $i \prec n$. Сначала рассмотрим ситуацию, когда

n накрывает i . Согласно условию 3 найдётся матрица, принадлежащая множеству $f^{-1}(O) \cap g^{-1}(1) \cap \mathcal{C}$. Обозначим её как $B^{(n)}$. Теперь рассмотрим матрицу $A = \mathbf{F}\left(E_{ii}^{(n-1)}\right) B^{(i)} B^{(n)} \in \mathcal{C}$. Покажем, что на самом деле $A = E_{in}^{(n)}$. Заметим, что $f(A) = O$ и $g(A) = 0$ согласно определению матриц $B^{(n)}$ и $B^{(i)}$. Поэтому остаётся проверить, что для всех $k \leq n-1$ выполнено $(A)_{kn} = \delta_{ki}$, где δ_{ki} — это символ Кронекера. Действительно, учитывая, что все рассматриваемые матрицы верхнетреугольные и $(B^{(i)})_{nn} = 0$, явно вычислим $(A)_{kn}$ как

$$\sum_{t=k}^n \left(\mathbf{F}\left(E_{ii}^{(n-1)}\right) \right)_{kt} \left(B^{(i)} B^{(n)} \right)_{tn} = \sum_{t=k}^{n-1} \delta_{ki} \delta_{ti} \left(B^{(i)} B^{(n)} \right)_{tn} = \delta_{ki} \left(B^{(i)} B^{(n)} \right)_{in}$$

и затем применим лемму 1.4.10. Получаем

$$(A)_{kn} = \delta_{ki} \left((B^{(i)})_{ii} (B^{(n)})_{in} + (B^{(i)})_{in} (B^{(n)})_{nn} \right) = \delta_{ki}.$$

Теперь предположим, что n не накрывает i . Значит, найдётся такой элемент j , что $i \prec j \prec n$ и n накрывает j . Предыдущие рассуждения показывают, что $E_{jn}^{(n)} \in \mathcal{C}$. Следовательно, $\mathcal{C} \ni \mathbf{F}\left(E_{ij}^{(n-1)}\right) E_{jn}^{(n)} = E_{in}^{(n)}$.

Заметим, что $E_{nn}^{(n)} \in \mathcal{C}$ согласно равенству

$$B^{(n)} - \sum_{i \prec n} E_{in} \mathbf{G}((B^{(n)})_{in}) = E_{nn}^{(n)}.$$

Таким образом, выполняются равенства (2.1.1), (2.1.2), а значит, $\mathcal{C} = \mathcal{A}$. $\square$

Следующая теорема даёт описание порождающих подмножеств колец инцидентности. Оказывается, что для проверки того, является ли подмножество порождающим, достаточно рассмотреть проекции на некоторые 2×2 подматрицы.

Теорема 2.1.2. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Рассмотрим непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Тогда S порождает $\mathcal{A}$ как кольцо тогда и только тогда, когда выполнены оба условия:

1. для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, таких что $i < j$, множество

$$\{((A)_{ii}, (A)_{jj}) \mid A \in S\}$$

порождает кольцо $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ (здесь $<$ обозначает естественный линейный порядок);

2. для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, таких что $i \prec j$, множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} (A)_{ii} & (A)_{ij} \\ (A)_{ji} & (A)_{jj} \end{pmatrix} \mid A \in S \right\}$$

порождает кольцо всех 2×2 верхнетреугольных матриц.

Доказательство. Сначала покажем, что без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathcal{R})$. Для всех пар $i \neq j$, определим отображения

$$\begin{aligned} \chi_{ij} : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}, \quad \forall A \in \mathcal{A} : \chi_{ij}(A) = ((A)_{ii}, (A)_{jj}); \\ \xi_{ij} : \mathcal{A} &\rightarrow T_2(\mathcal{R}), \quad \forall A \in \mathcal{A} : \xi_{ij}(A) = \begin{pmatrix} (A)_{ii} & (A)_{ij} \\ (A)_{ji} & (A)_{jj} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Кроме того, введём обозначение для автоморфизма кольца $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, который переставляет местами координаты:

$$h : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}, \quad h((x, y)) = (y, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{R}.$$

По предложению 1.4.4 найдётся такая подстановка σ на множестве $\{1, \dots, n\}$, что кольцо $\mathcal{A}_n(\preceq_\sigma, \mathcal{R})$ состоит из верхнетреугольных матриц. Обозначим через P матрицу этой перестановки, т.е. $(P)_{ij} = 1$ при $j = \sigma(i)$, а иначе $(P)_{ij} = 0$. Положим $S_\sigma = P^{-1}SP$.

[Шаг 1.] Покажем, что множество S_σ удовлетворяет условию 1 тогда и только тогда, когда условие 1 выполнено для S . Если $A = \sum_{i \preceq j} a_{ij} E_{ij}$ для некоторых $a_{ij} \in \mathcal{R}$, тогда $P^{-1}AP = \sum_{i \preceq j} a_{ij} E_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Значит, для всех пар $i \neq j$ получаем $\chi_{ij}(S_\sigma) = \chi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}(S)$. Тогда

$$\begin{aligned} \{\chi_{ij}(S_\sigma) \mid i < j\} &= \{\chi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}(S) \mid i < j\} = \{\chi_{ij}(S) \mid \sigma(i) < \sigma(j)\} = \\ &= \{\chi_{ij}(S) \mid i < j \text{ \& } \sigma(i) < \sigma(j)\} \cup \{\chi_{ij}(S) \mid i > j \text{ \& } \sigma(i) < \sigma(j)\} = \\ &= \{\chi_{ij}(S) \mid i < j \text{ \& } \sigma(i) < \sigma(j)\} \cup \{h(\chi_{ij}(S)) \mid i < j \text{ \& } \sigma(i) > \sigma(j)\}. \end{aligned}$$

Так как h является автоморфизмом кольца $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, множество $\chi_{ij}(S)$ порождает $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $h(\chi_{ij}(S))$ порождает $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Следовательно, множество S_σ удовлетворяет условию 1 тогда и только тогда, когда S удовлетворяет условию 1.

[Шаг 2.] Рассуждая так же как на предыдущем шаге, получаем, что для всех $i \neq j$, выполнено $\xi_{ij}(S_\sigma) = \xi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}(S)$. Поэтому

$$\{\xi_{ij}(S_\sigma) \mid i \prec_\sigma j\} = \{\xi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}(S) \mid \sigma^{-1}(i) \prec \sigma^{-1}(j)\} = \{\xi_{ij}(S) \mid i \prec j\}.$$

Отсюда множество S_σ и частичный порядок $\prec_\sigma$ удовлетворяют условию 2 тогда и только тогда, когда условие 2 выполнено для S и $\prec$. Кроме того, условие, что S_σ порождает $\mathcal{A}_n(\preceq_\sigma, \mathcal{R})$, эквивалентно тому, что S порождает $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$, т.к. сопряжение $P^{-1}(\cdot)P$ является изоморфизмом колец.

Таким образом, далее без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathcal{R})$.

[Шаг 3.] Докажем импликацию $(\Rightarrow)$ в теореме. Заметим, что отображения χ_{ij} и ξ_{ij} сюръективны, что следует напрямую из определения кольца инцидентности. Зафиксируем пару элементов $i < j$. В силу включения $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathcal{R})$ отображение χ_{ij} окажется гомоморфизмом колец, т.к. является проекцией на часть диагонали матриц. Отсюда образ $\chi_{ij}(S)$ порождает $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ в силу того, что множество S порождает кольцо $\mathcal{A}$, а отображение χ_{ij} сюръективно. Таким образом, условие 1 выполняется. Остаётся проверить условие 2. Теперь зафиксируем пару элементов $i \prec j$. По лемме 1.4.10, отображение ξ_{ij} является гомоморфизмом колец. Тогда образ $\xi_{ij}(S)$ порождает $T_2(\mathcal{R})$, т.к. множество S порождает кольцо $\mathcal{A}$, а отображение ξ_{ij} сюръективно.

[Шаг 4.] Докажем импликацию $(\Leftarrow)$ в теореме. Обозначим через $\mathcal{C}$ кольцо, порождённое множеством S . Применяя индукцию по размеру матриц n , покажем, что выполняется $\mathcal{C} = \mathcal{A}$. Проверим базу индукции, пусть $n = 2$. В этом случае существуют только два верхнетреугольных кольца инцидентности. Если $\mathcal{A} = T_2(\mathcal{R})$, тогда утверждение вытекает из условия 2. В ситуации $\mathcal{A} = D_2(\mathcal{R})$ применяется условие 1. Для доказательства шага индукции достаточно проверить, что выполнены условия 1–4 леммы 2.1.1.

- [условие 1 леммы 2.1.1.] Вытекает из предположения индукции.
- [условие 2 леммы 2.1.1.] Применим условие 1 теоремы для $j = n$ и произвольного i .
- [условие 3 леммы 2.1.1.] Из условия 1 теоремы вытекает, что для каждого $i = 1, \dots, n - 1$, найдётся такая матрица $A^{(i)} \in \mathcal{C}$, что $(A^{(i)})_{ii} = 0$ и $(A^{(i)})_{nn} = 1$. Обозначим $B^{(n)} = A^{(1)} \cdot \dots \cdot A^{(n-1)}$. Тогда $B^{(n)} \in f^{-1}(O) \cap g^{-1}(1) \cap \mathcal{C}$.

- [условие 4 леммы 2.1.1.] Применим условие 2 теоремы в случае $j = n$ и таких $i \in \{1, \dots, n-1\}$, что $i \prec n$.

Теорема доказана. $\square$

Далее предыдущая теорема будет применена к порождающим подмножествам, которые содержат все скалярные матрицы. Для этих целей предварительно нужно доказать следующую лемму. Она показывает, что не имеет значения, рассматриваем мы подкольца или подбимодули, порождённые некоторыми 2×2 треугольными матрицами, среди которых встречаются все скалярные матрицы.

Лемма 2.1.3. *Рассмотрим непустое подмножество $\Phi \subseteq T_2(\mathcal{R})$. Тогда кольцо, порождённое множеством $\Phi \cup \mathcal{R}E_2$, совпадает с $\mathcal{R}$ -бимодулем, порождённым $\Phi \cup \{E_2\}$.*

Доказательство. Пусть $\Phi = \{A_\lambda = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ 0 & c_\lambda \end{pmatrix}\}_{\lambda \in \Lambda}$ для некоторого индексного множества Λ . Положим $\tilde{\Phi} = \{\tilde{A} = \begin{pmatrix} p_\lambda & b_\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $p_\lambda = a_\lambda - c_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда $\mathcal{R}$ -бимодули, порождённые множествами $\Phi \cup \{E_2\}$, $\tilde{\Phi} \cup \{E_2\}$, совпадают в силу того, что $\tilde{A}_\lambda = A_\lambda - c_\lambda E_2$. Аналогично кольца, порождённые множествами $\Phi \cup \mathcal{R}E_2$ и $\tilde{\Phi} \cup \mathcal{R}E_2$, также совпадают. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\Phi = \tilde{\Phi}$. Тогда для любого конечного подмножества $\{\begin{pmatrix} p_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}_{i=1}^m \subseteq \tilde{\Phi}$ и произвольных $r_0, \dots, r_m \in \mathcal{R}$ выполнено

$$r_0 \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r_1 \begin{pmatrix} p_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r_2 \cdots r_{m-1} \begin{pmatrix} p_m & b_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r_m = r \begin{pmatrix} p_m & b_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r_m$$

для подходящего скаляра $r \in \mathcal{R}$. Отсюда кольцо, порождённое множеством $\tilde{\Phi} \cup \{\mathcal{R}E_2\}$, совпадает с бимодулем, порождённым $\tilde{\Phi} \cup \{E_2\}$. $\square$

Теперь всё готово для доказательства основного результата параграфа.

Теорема 2.1.4. *Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Рассмотрим непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, таких что $i \neq j$, рассмотрим следующие идеалы кольца $\mathcal{R}$:*

$$\mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{ij}(S) = \mathcal{R}\{(A)_{ii} - (A)_{jj} \mid A \in S\}\mathcal{R},$$

$$\mathfrak{b}_{ij} = \mathfrak{b}_{ij}(S) = \{(A)_{ij} \mid A \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R} : (A)_{ii} = (A)_{jj}\},$$

где $\mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$ — это под- $\mathcal{R}$ -бимодуль в $\mathcal{A}$, порождённый множеством $S \cup \{E_n\}$. Тогда множество $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо тогда и только тогда, когда

A. $\mathbf{a}_{ij} = \mathcal{R}$ для всех пар $i < j$;

B. $\mathbf{b}_{ij} = \mathcal{R}$ для всех пар $i \prec j$.

Доказательство. Покажем, что условия A, B эквивалентны условиям 1, 2 теоремы 2.1.2, которая применяется к множеству $S \cup \mathcal{R}E_n$.

[Шаг 1.] Зафиксируем произвольную пару $i < j$. Докажем, что равенство $\mathbf{a}_{ij}(S) = \mathcal{R}$ выполняется тогда и только тогда, когда множество $\{((A)_{ii}, (A)_{jj}) \mid A \in S \cup \mathcal{R}E_n\}$ порождает кольцо $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Обозначим $\tilde{S} = \{A - (A)_{jj}E_n \mid A \in S\}$. Заметим, что множества $\{((A)_{ii}, (A)_{jj}) \mid A \in \tilde{S} \cup \mathcal{R}E_n\}$ и $\{((A)_{ii}, (A)_{jj}) \mid A \in S \cup \mathcal{R}E_n\}$ порождают одинаковые кольца. Однако

$$\begin{aligned} \{((A)_{ii}, (A)_{jj}) \mid A \in \tilde{S} \cup \mathcal{R}E_n\} = \\ \{((A)_{ii} - (A)_{jj}, 0) \mid A \in S\} \cup \{(r, r) \mid r \in \mathcal{R}\}. \end{aligned}$$

Это множество порождает $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $1 \in \mathbf{a}_{ij}(S)$.

[Шаг 2.] Теперь зафиксируем пару элементов $i \prec j$. Заметим, что

$$\left\{ \begin{pmatrix} (A)_{ii} & (A)_{ij} \\ (A)_{ji} & (A)_{jj} \end{pmatrix} \mid A \in S \cup \mathcal{R}E_n \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} (A)_{ii} & (A)_{ij} \\ (A)_{ji} & (A)_{jj} \end{pmatrix} \mid A \in S \right\} \cup \mathcal{R}E_2.$$

Обозначим через $\mathcal{K}$ кольцо, порождённое множеством

$$\left\{ \begin{pmatrix} (A)_{ii} & (A)_{ij} \\ (A)_{ji} & (A)_{jj} \end{pmatrix} \mid A \in S \right\} \cup \mathcal{R}E_2.$$

Для доказательства теоремы остаётся проверить, что равенства $\mathbf{b}_{ij}(S) = \mathcal{R}$ и $\mathbf{a}_{ij}(S) = \mathcal{R}$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathcal{K} = T_2(\mathcal{R})$. Принимая во внимание шаг 1 доказательства, а также естественный изоморфизм $D_2(\mathcal{R}) \cong \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, получаем что равенство $\mathbf{a}_{ij}(S) = \mathcal{R}$ выполняется тогда и только тогда, когда $D_2(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{K}$. Поэтому достаточно показать что равенство $\mathbf{b}_{ij}(S) = \mathcal{R}$ верно тогда и только тогда, когда $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$. Действительно, идеал $\mathbf{b}_{ij}(S)$ является несобственным тогда и только тогда, когда $1 \in \mathbf{b}_{ij}(S)$. Это эквивалентно требованию, что найдётся такая матрица $A \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$, что $(A)_{ij} = 1$ и $(A)_{ii} = (A)_{jj} = r$ для некоторого $r \in \mathcal{R}$. Обозначим $B = A - rE_n$.

Тогда включения $A \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$ и $B \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$ выполняются или не выполняются одновременно. Таким образом, $\mathfrak{b}_{ij}(S) = \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда существует матрица $B \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$, удовлетворяющая $(B)_{ij} = 1$ и $(B)_{ii} = (B)_{jj} = 0$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\mathcal{R}$ -бимодуль

$$\mathcal{R} \left(\left\{ \begin{pmatrix} (A)_{ii} & (A)_{ij} \\ (A)_{ji} & (A)_{jj} \end{pmatrix} \mid A \in S \right\} \cup \{E_2\} \right) \mathcal{R}$$

содержит матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Однако указанный бимодуль совпадает с $\mathcal{K}$ согласно лемме 2.1.3. Это наблюдение завершает доказательство. $\square$

Если применить теорему 2.1.4 к случаю, когда кольцо $\mathcal{R}$ является простым, то получится результат очень близкий к теореме Лонгстаффа—Розенталя для случая поля, см. теорему 1.4.15.

Следствие 2.1.5. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что кольцо $\mathcal{R}$ является простым. Рассмотрим непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Тогда $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия.

1. Для каждой пары $i < j$ найдётся такая матрица $A \in S$, что $(A)_{ii} \neq (A)_{jj}$.
2. Для каждой пары $i \prec j$ найдётся такая матрица $B \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$, что $(B)_{ij} \neq 0$ и $(B)_{ii} = (B)_{jj}$.

Доказательство. Так как кольцо $\mathcal{R}$ простое, то условия А, В теоремы 2.1.4 могут быть переписаны следующим образом: (а) $\mathfrak{a}_{ij} \neq 0$ для всех пар $i < j$; (б) $\mathfrak{b}_{ij} \neq 0$ для всех пар $i \prec j$. Из определения идеалов $\mathfrak{a}_{ij}$ и $\mathfrak{b}_{ij}$ получаем условия 1, 2 следствия. $\square$

Теорема 2.1.4 может быть переформулирована для частного случая, когда кольцо инцидентности изоморфно прямому произведению n копий кольца $\mathcal{R}$.

Следствие 2.1.6. Пусть $S = \{\mathbf{v}_k = (r_{k1}, \dots, r_{kn})\}_{k=1}^m$ — это непустое подмножество кольца $\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}$. Для каждой пары $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, рассмотрим следующий идеал кольца $\mathcal{R}$:

$$\mathfrak{a}'_{ij} = \mathfrak{a}'_{ij}(S) = \mathcal{R}\{r_{ki} - r_{kj} \mid k = 1, \dots, m\}\mathcal{R}.$$

1. Тогда множество $S \cup \{(r, \dots, r) \mid r \in \mathcal{R}\}$ порождает $\mathcal{R}^n$ как кольцо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}'_{ij} = \mathcal{R}$ для всех $i < j$.

2. Пусть дополнительно кольцо $\mathcal{R}$ является простым. Тогда множество $S \cup \{(r, \dots, r) \mid r \in \mathcal{R}\}$ порождает $\mathcal{R}^n$ как кольцо тогда и только тогда для каждой пары $i < j$, найдётся такой элемент $k \in \{1, \dots, m\}$, что $r_{ki} \neq r_{kj}$.

Доказательство. Указанный результат вытекает из теоремы 2.1.4 и следствия 2.1.5 в силу изоморфизма $D_n(\mathcal{R}) \cong \mathcal{R}^n$, который может быть задан как $\text{diag}\{r_1, \dots, r_n\} \mapsto (r_1, \dots, r_n)$. $\square$

2.2 Граф полных разностей

В этом параграфе рассматриваются два численных инварианта. Первый — это минимальная мощность $\text{ngen}(\mathcal{A})$ таких подмножеств S кольца инцидентности $\mathcal{A}$, что $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$. В качестве второго инварианта рассматривается кликовое число специального графа, ассоциированного с кольцом $\mathcal{R}$. Основными результатами параграфа являются теоремы 2.2.12, 2.2.13 которые связывают обе эти характеристики. Начнём с конструкции графа.

Определение 2.2.1. Следуя [18, определение 1], назовём элемент кольца $x \in \mathcal{R}$ *полным*, если $\mathcal{R}x\mathcal{R} = \mathcal{R}$. Другими словами, двусторонний идеал, порождённый (как $\mathcal{R}$ -бимодуль) элементом x , совпадает с кольцом $\mathcal{R}$. Тогда определим неориентированный *граф полных разностей* $\Phi(\mathcal{R})$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются все элементы кольца $\mathcal{R}$. Две вершины $r, s \in \mathcal{R}$ соединены ребром, если разность $r - s$ является полным элементом кольца $\mathcal{R}$.

Замечание 2.2.2. Так как кольцо $\mathcal{R}$ предполагается ненулевым, то множество $\{0, 1\}$ является кликой, откуда заведомо выполнено $\omega(\Phi(\mathcal{R})) \geq 2$.

Рассмотрим некоторые простые примеры.

Пример 2.2.3. Ненулевое кольцо $\mathcal{R}$ является простым тогда и только тогда, когда все его ненулевые элементы являются полными. Поэтому простота кольца $\mathcal{R}$ эквивалентна тому, что граф $\Phi(\mathcal{R})$ является полным. В этом случае, в частности, получаем $\omega(\Phi(\mathcal{R})) = |\mathcal{R}|$. Если кольцо $\mathcal{R}$ конечно, то последнее равенство также равносильно полноте графа.

Пример 2.2.4. Если кольцо $\mathcal{R}$ коммутативно, то элемент $r \in \mathcal{R}$ является полным тогда и только тогда, когда он обратим. Тогда $\Phi(\mathcal{R})$ становится так называемым коунитальным графом, см. работы [43, раздел 6].

Следующая лемма показывает, как изменяются величины $\text{mgen}(\mathcal{A})$ и ω относительно действия гомоморфизмов колец. Необходимо отметить, что в лемме не требуется накладывать на гомоморфизм условие сюръективности или инъективности.

Лемма 2.2.5. Пусть $\phi : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$ — это гомоморфизм ненулевых колец $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$. Согласно нашему определению гомоморфизма колец $\phi(1) = 1$. Тогда

1. $\omega(\Phi(\mathcal{R}_1)) \leq \omega(\Phi(\mathcal{R}_2))$;
2. $\text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_1)) \geq \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_2))$ для любого натурального $n \geq 2$ и произвольного частичного порядка $\preceq$ на $\{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Если элемент $x \in \mathcal{R}_1$ является полным, тогда его образ $\phi(x)$ тоже полон, т.к. $\mathcal{R}_2\phi(x)\mathcal{R}_2 \supseteq \phi(\mathcal{R}_1x\mathcal{R}_1) \ni \phi(1) = 1$. Значит, образ клики при действии отображения ϕ также является кликой. Из этого наблюдения вытекает первый пункт леммы. Докажем второй пункт. Обозначим через $\phi_n : M_n(\mathcal{R}_1) \rightarrow M_n(\mathcal{R}_2)$ гомоморфизм колец, действующий на матрицах поэлементно как ϕ . Выберем такое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_1)$, что $|S| = \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_1))$ и $S \cup \mathcal{R}_1 E_n$ порождает $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_1)$ как кольцо. Другими словами, кольцо, порождённое $S \cup \mathcal{R}_1 E_n$, содержит матричные единицы E_{ij} для всех пар $i \preceq j$. Из условия $\phi(1) = 1$ следует, что кольцо, порождённое $\phi_n(S) \cup \mathcal{R}_2 E_n$, также содержит E_{ij} для всех $i \preceq j$. Следовательно, $\phi_n(S) \cup \mathcal{R}_2 E_n$ порождает $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_2)$. Остаётся заметить, что

$$\text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_1)) = |S| \geq |\phi_n(S)| \geq \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_2)).$$

Лемма доказана. □

Следующее предложение показывает, что факторкольцо по радикалу Джекобсона обладает тем же кликовым числом ω , что и исходное кольцо.

Предложение 2.2.6. $\omega(\Phi(\mathcal{R})) = \omega(\Phi(\mathcal{R}/J(\mathcal{R})))$.

Доказательство. Обозначим $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/J$. Из леммы 2.2.5 сразу получаем, что $\omega(\Phi(\mathcal{R})) \leq \omega(\Phi(\overline{\mathcal{R}}))$. Докажем обратное неравенство. Пусть $\{\tilde{r}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \overline{\mathcal{R}}$ — это

множество вершин некоторой клики в графе $\Phi(\overline{\mathcal{R}})$. Выберем представителя смежного класса $r_\lambda \in \tilde{r}_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Тогда для любой пары $\lambda \neq \mu$, найдутся элементы $\{p_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{R}$ и $\{q_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{R}$, такие что $\sum_{i=1}^m p_i(r_\lambda - r_\mu)q_i = 1 + t$ для некоторого $t \in J$. Однако элемент $1 + t$ является обратимым в силу квазирегулярности радикала Джекобсона. Следовательно, $\mathcal{R}(r_\lambda - r_\mu)\mathcal{R} = \mathcal{R}$. Это означает, что множество $\{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует клику в графе $\Phi(\mathcal{R})$. Тогда $\omega(\Phi(\mathcal{R})) = \omega(\Phi(\overline{\mathcal{R}}))$. $\square$

Порождающие подмножества могут быть «подняты» по модулю радикала Джекобсона кольца коэффициентов.

Лемма 2.2.7. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности. Обозначим через $J = J(\mathcal{R})$ радикал Джекобсона кольца $\mathcal{R}$. Положим $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/J$ и $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_n(\preceq, \overline{\mathcal{R}})$. Рассмотрим естественный гомоморфизм колец $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$, заданный равенством $(\psi(A))_{ij} = (A)_{ij} + J$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Для непустого подмножества $S \subseteq \mathcal{A}$ обозначим его образ как $\overline{S} = \psi(S)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо;
- 2) $\overline{S} \cup \overline{\mathcal{R}E_n}$ порождает $\overline{\mathcal{A}}$ как кольцо.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Вытекает из того факта, что ψ является сюръективным гомоморфизмом колец.

2) $\Rightarrow$ 1) Обозначим через $\mathcal{B}$ кольцо, порождённое множеством $S \cup \mathcal{R}E_n$. Из пункта 2 получаем, что $\psi(\mathcal{B}) = \overline{\mathcal{A}}$, а значит, $\mathcal{B} + \sum_{i \preceq j} E_{ij}J = \mathcal{A}$. При этом $\sum_{i \preceq j} E_{ij}J \subseteq J(\mathcal{A})$ согласно предложению 1.4.11. Следовательно, $\mathcal{B} + \mathcal{A}J(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Однако $\mathcal{A}$ является конечнопорождённым правым $\mathcal{R}$ -модулем, т.к. в качестве порождающего подмножества можно выбрать базис $\{E_{ij}\}_{i \preceq j}$. Тогда равенство $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ вытекает из леммы Накаямы для некоммутативных колец [51, раздел 4.2 в случае $R = \mathbb{Z}$]. $\square$

Минимальная мощность порождающего подмножества $\text{mgen}(\cdot)$ не изменяется при замене кольца коэффициентов на его фактор по радикалу Джекобсона.

Предложение 2.2.8. Для натурального $n \geq 2$ рассмотрим частичный порядок $\preceq$ на $\{1, \dots, n\}$. Тогда

$$\text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})) = \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}/J(\mathcal{R}))).$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм ψ из леммы 2.2.7. Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) \geq \text{mgen}(\overline{\mathcal{A}})$ согласно лемме 2.2.5. Чтобы доказать обратное неравенство, выберем подмножество $\overline{S} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$, такое что $\overline{S} \cup \overline{\mathcal{R}E_n}$ порождает $\overline{\mathcal{A}}$ как кольцо и $\text{mgen}(\overline{\mathcal{A}}) = |\overline{S}|$. Выберем $S \subseteq \mathcal{A}$, удовлетворяющее $|S| = |\overline{S}|$ и $\psi(S) = \overline{S}$. По лемме 2.2.7 $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо. Из определения величины $\text{mgen}(\cdot)$ получаем, что $\text{mgen}(\mathcal{A}) \leq |S| = |\overline{S}| = \text{mgen}(\overline{\mathcal{A}})$. $\square$

Далее рассмотрим случай, когда $\mathcal{R}$ является прямым произведением колец. Сначала затронем вопрос о порождающих подмножествах.

Лемма 2.2.9. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности. Предположим, что $\mathcal{R}$ содержит множество центральных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_1, \dots, e_m\}$, удовлетворяющих $\sum_{i=1}^m e_i = 1_{\mathcal{R}}$. Тогда для непустого подмножества $S \subseteq \mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо;
- 2) $e_i S \cup e_i \mathcal{R}E_n$ порождает $e_i \mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, e_i \mathcal{R})$ как кольцо для любого индекса $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Так как множество $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$, то проекция $e_i S \cup e_i \mathcal{R}E_n$ порождает $e_i \mathcal{A}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Множество $\mathcal{R}E_n$ содержит $\{e_1 E_n, \dots, e_m E_n\}$. Отсюда $\langle S \cup \mathcal{R}E_n \rangle_{\text{Ring}} \supseteq \langle e_i S \cup e_i \mathcal{R}E_n \rangle_{\text{Ring}} = e_i \mathcal{A}$. В силу того $e_1 \mathcal{A} + \dots + e_m \mathcal{A} = \mathcal{A}$, получаем $\langle S \cup \mathcal{R}E \rangle_{\text{Ring}} = \mathcal{A}$. $\square$

Следующая небольшая лемма описывает полные элементы в прямом произведении колец.

Лемма 2.2.10. Предположим, что $\mathcal{R}$ содержит множество центральных попарно ортогональных идемпотентов $\{e_1, \dots, e_m\}$, удовлетворяющих $\sum_{i=1}^m e_i = 1_{\mathcal{R}}$. Тогда для элемента $r \in \mathcal{R}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) r является полным;
- 2) элемент $e_i r$ полон в кольце $e_i \mathcal{R}$ для каждого $i = 1, \dots, m$;
- 3) e_i содержится в двустороннем идеале $\mathcal{R}e_i r \mathcal{R}$ для любого $i = 1, \dots, m$;

Доказательство. Заметим, что

- 1) $\Rightarrow$ 2) Из условия $\mathcal{R}r\mathcal{R} = \mathcal{R}$ вытекает, что $(e_i \mathcal{R})(e_i r)(e_i \mathcal{R}) = e_i \mathcal{R}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Идемпотент e_i — нейтральный элемент по умножению кольца $e_i\mathcal{R}$. Поэтому равенство $(e_i\mathcal{R})(e_ir)(e_i\mathcal{R}) = e_i\mathcal{R}$ равносильно включению $e_i \in (e_i\mathcal{R})(e_ir)(e_i\mathcal{R})$. В то же время, $\mathcal{R}e_ir\mathcal{R} = (e_i\mathcal{R})(e_ir)(e_i\mathcal{R})$.

3) $\Rightarrow$ 1) Получаем $e_i \in \mathcal{R}e_ir\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}r\mathcal{R}$. Тогда $1 = \sum_{i=1}^m e_i \in \mathcal{R}r\mathcal{R}$. $\square$

Теперь рассмотрим величины $\omega(\Phi(\mathcal{R}))$ и $\text{mgen}(\mathcal{A})$ в ситуации, когда $\mathcal{R}$ является прямым произведением колец.

Предложение 2.2.11. Пусть $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m$ — ненулевые кольца. Рассмотрим кольца инцидентности $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}_i)$ для $n \geq 2$. Обозначим также $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_m$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$. Тогда выполнено следующее:

1. $\omega(\Phi(\mathcal{R})) = \min_{i=1, \dots, m} \omega(\Phi(\mathcal{R}_i));$
2. $\text{mgen}(\mathcal{A}) = \max_{i=1, \dots, m} \text{mgen}(\mathcal{A}_i).$

Доказательство. 1. По лемме 2.2.10 получаем, что $\Phi(\mathcal{R}) = \Phi(\mathcal{R}_1) \times \dots \times \Phi(\mathcal{R}_m)$, см. § 1.3.

2. Обозначим $\mu_i = \text{mgen}(\mathcal{A}_i)$ и $\mu = \text{mgen}(\mathcal{A})$. Неравенство $\mu \geq \max_{i=1, \dots, m} \mu_i$ вытекает из леммы 2.2.5, применённой к проекциям $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_i$. Докажем обратное неравенство. Выберем такие матрицы $A_1^{(i)}, \dots, A_{\mu_i}^{(i)} \subseteq \mathcal{A}_i$, что множество $\{A_k^{(i)}\}_{k=1}^{\mu_i} \cup \mathcal{R}_i E_n$ порождает $\mathcal{A}_i$ как кольцо. Без ограничения общности можно считать, что $\max_{i=1, \dots, m} \mu_i = \mu_1$. В случае $\mu_i < \mu_1$ положим $A_k^{(i)} = O$ для всех $\mu_i < k \leq \mu_1$. Рассмотрим матрицы

$$A_k = e_1 A_k^{(1)} + \dots + e_m A_k^{(m)} \in \mathcal{A}, \quad k = 1, \dots, \mu_1,$$

где $e_i \in \mathcal{R}$ — идемпотент, проекция на $\mathcal{R}_i$. Все матрицы $A_1^{(1)}, \dots, A_{\mu_1}^{(1)}$ различны ввиду минимальности порождающего подмножества кольца $\mathcal{A}_1$. Значит, и все матрицы $A_1, \dots, A_{\mu_1}$ также различны. По лемме 2.2.9 множество $\{A_1, \dots, A_{\mu_1}\} \cup \mathcal{R} E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо. $\square$

Следующая теорема показывает связь между кликовым числом и минимальной мощностью порождающего подмножества в случае, когда $\omega < n$.

Теорема 2.2.12. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что выполнено $\omega = \omega(\Phi(\mathcal{R})) < n$. Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) \leq \lceil \log_\omega n \rceil$.

Доказательство. Обозначим через $\Delta \subseteq \mathcal{R}$ множество вершин клики максимальной мощности графа $\Phi(\mathcal{R})$. Значит, $|\Delta| = \omega$ и $\mathcal{R}(r - r')\mathcal{R} = \mathcal{R}$ для любых $r \neq r'$, лежащих в Δ . Обозначим $m = \lceil \log_\omega n \rceil$. Заметим, что $m \geq 2$ ввиду $\omega < n$.

[Шаг 1.] Сначала сконструируем такое подмножество $S' \subseteq \mathcal{R}^n$, что $|S'| = m$ и $S' \cup \{(r, \dots, r) \mid r \in \mathcal{R}\}$ порождает кольцо $\mathcal{R}^n$. Так как $\omega^m \geq n$, то найдётся множество наборов $\{\mathbf{u}_s = (r_{1s}, \dots, r_{ms})\}_{s=1}^n \subseteq \Delta^m$, такое что $\mathbf{u}_s \neq \mathbf{u}_t$ для любых $s \neq t$. Далее положим $S' = \{\mathbf{v}_k = (r_{k1}, \dots, r_{kn})\}_{k=1}^m$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{a}'_{ij}$ из следствия 2.1.6 для множества S' и произвольной пары $1 \leq i < j \leq n$. Так как $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}_j$, то найдётся индекс k , для которого $r_{ki} \neq r_{kj}$. Тогда разность $r_{ki} - r_{kj}$ является полной в силу $r_{ki}, r_{kj} \in \Delta$. Кроме того, $r_{ki} - r_{kj} \in \mathfrak{a}'_{ij}$. Отсюда $\mathfrak{a}'_{ij} = \mathcal{R}$, а значит, $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{R}^n$ по следствию 2.1.6.

[Шаг 2.] Теперь будем конструировать такое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$, что $|S| = m$ и $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$. Вложим построенное на предыдущем шаге множество S' в кольцо диагональных матриц $S' \subseteq D_n(\mathcal{R})$, используя естественный изоморфизм $D_n(\mathcal{R}) \cong \mathcal{R}^n$, заданный как $\text{diag}\{r_1, \dots, r_n\} \mapsto (r_1, \dots, r_n)$. Далее для каждой пары $i \prec j$ будем изменять матрицы из S' следующим образом.

- [Случай I.] Если существует такая матрица $C \in S'$, что $(C)_{ii} = (C)_{jj}$, тогда присвоим матричному элементу $(C)_{ij}$ значение 1.
- [Случай II.] Теперь пусть $(C)_{ii} \neq (C)_{jj}$ для всех $C \in S'$. Тогда выберем произвольную матрицу $A \in S'$ и положим $(A)_{ij} = (A)_{ii} - (A)_{jj}$.

После завершения указанного алгоритма S' преобразуется в другое множество, которое далее будет обозначаться как S .

[Шаг 3.] Покажем, что множество $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает кольцо инцидентности $\mathcal{A}$. Достаточно проверить условия A, B теоремы 2.1.4. Условие A выполнено согласно шагу 1. Перейдём к условию B . Зафиксируем пару $i \prec j$. Если выполняется требование случая I, тогда равенство $\mathfrak{b}_{ij}(S) = \mathcal{R}$ получается сразу. Остаётся рассмотреть случай II. В силу неравенства $m \geq 2$, помимо матрицы A найдётся другая матрица $B \in S$, удовлетворяющая $(B)_{ii} \neq (B)_{jj}$ и $(B)_{ij} = 0$. Так как разности $(A)_{ii} - (A)_{jj}$, $(B)_{ii} - (B)_{jj}$ являются полными элементами кольца $\mathcal{R}$, заключаем, что $\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha((A)_{ii} - (A)_{jj})q_\alpha = 1$ и $\sum_{\beta=1}^M r_\beta((B)_{jj} - (B)_{ii})s_\beta = 1$

для некоторых $p_\alpha, q_\alpha, r_\beta, s_\beta \in \mathcal{R}$. Тогда рассмотрим матрицу

$$G = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha (A - (A)_{jj} E_n) q_\alpha + \sum_{\beta=1}^M r_\beta (B - (B)_{ii} E_n) s_\beta \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\}) \mathcal{R}.$$

По построению получаем, что $(G)_{ii} = (G)_{jj} = (G)_{ij} = 1$. Отсюда, $1 \in \mathfrak{b}_{ij}(S)$ и доказательство окончено. $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда кликовое число не меньше размера матриц n .

Теорема 2.2.13. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что $\omega = \omega(\Phi(\mathcal{R})) \geq n$. Тогда выполнено следующее.

1. $\text{mgen}(\mathcal{A}) \leq 2$.
2. Если $\mathcal{A} = D_n(\mathcal{R})$, тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$.
3. Пусть $\mathcal{A} \neq D_n(\mathcal{R})$. Если найдётся такой идеал $\mathfrak{c} \triangleleft \mathcal{R}$, что $\mathfrak{c} \neq \mathcal{R}$ и факторкольцо $\mathcal{R}/\mathfrak{c}$ коммутативно, тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 2$.

Доказательство. Обозначим через $\Delta = \{r_1, \dots, r_n\}$ клику мощности n в графе $\Phi(\mathcal{R})$. Сначала докажем пункт 2 теоремы. Пусть $\mathcal{A} = D_n(\mathcal{R})$. Положим $D = \text{diag}\{r_1, \dots, r_n\}$. Следовательно, $\{D\} \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $D_n(\mathcal{R})$ согласно условию A теоремы 2.1.4.

Пусть теперь $\mathcal{A} \neq D_n(\mathcal{R})$. Значит, найдутся два различных числа $i_0, j'_0 \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих $i_0 \prec j'_0$. Подберём такое $j_0 \in \{1, \dots, n\}$, что $i_0 \prec: j_0 \preceq j'_0$.

Докажем пункт 1. Рассмотрим множество $S = \{D, A\}$, где $A = \sum_{i \prec j} E_{ij}$. Покажем, что $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо. Действительно, $D_n(\mathcal{R})$ порождается множеством $\{D\} \cup \mathcal{R}E_n$, как отмечалось ранее. Остаётся получить все недиагональные матричные единицы. Например, это можно сделать следующим образом: $E_{ij} = E_{ii} A E_{jj}$ для всех $i \prec j$.

Перейдём к пункту 3. Рассмотрим сначала случай $\mathfrak{c} = \{0\}$, т.е. когда кольцо $\mathcal{R}$ коммутативно. Предположим противное, т.е. $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$. Выберем матрицу $C \in \mathcal{A}$ такую, что $\{C\} \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$. Докажем, что разность $(C)_{i_0 i_0} - (C)_{j_0 j_0}$ должна быть полным элементом кольца $\mathcal{R}$. Действительно, согласно условию A теоремы 2.1.4 идеал $\mathfrak{a}_{i_0 j_0}(\{C\})$ является главным, т.е.

порождается (как $\mathcal{R}$ -бимодуль) единственным элементом $(C)_{i_0 i_0} - (C)_{j_0 j_0}$. Однако, т.к. кольцо $\mathcal{R}$ коммутативно, то разность $(C)_{i_0 i_0} - (C)_{j_0 j_0}$ обратима. Теперь рассмотрим идеал $\mathfrak{b}_{i_0 j_0}(\{C\})$ из условия B теоремы 2.1.4. Если $(rC + sE_n)_{i_0 i_0} = (rC + sE_n)_{j_0 j_0}$ для некоторых $r, s \in \mathcal{R}$, тогда $r((C)_{i_0 i_0} - (C)_{j_0 j_0}) = 0$ и $r = 0$. Следовательно, $\mathfrak{b}_{i_0 j_0}(\{C\}) = \{0\} \neq \mathcal{R}$, противоречие.

В ситуации, когда факторкольцо $\mathcal{R}/\mathfrak{c}$ коммутативно для некоторого идеала $\mathfrak{c} \neq \mathcal{R}, \{0\}$, применяем лемму 2.2.5 к каноническому гомоморфизму $\pi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathfrak{c}$. $\square$

2.3 Полулокальные или простые кольца коэффициентов

В этом параграфе приводятся обоснования формул для величины $\text{ngen}(\mathcal{A})$ в случае, когда кольцо $\mathcal{R}$ полулокальное или простое. В частности, доказывается одно из положений выносимых на защиту — теорема 2.3.2. Начнём со случая простого кольца $\mathcal{R}$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что кольцо $\mathcal{R}$ простое, но не является полем. Тогда*

$$\text{ngen}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \lceil \log_{|\mathcal{R}|} n \rceil, & \text{если } \mathcal{R} \text{ конечно;} \\ 1, & \text{если } \mathcal{R} \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Доказательство. Сначала предположим, что $|\mathcal{R}| < n$. Из примера 2.2.3 получаем, что $|\mathcal{R}| = \omega(\Phi(\mathcal{R}))$. Тогда из теоремы 2.2.12 вытекает верхняя оценка $\text{ngen}(\mathcal{A}) \leq \lceil \log_{|\mathcal{R}|} n \rceil$. Докажем обратное неравенство. Предположим противное. Тогда найдётся такое $S \subseteq \mathcal{A}$, что $|S| = m < \log_{|\mathcal{R}|} n \leq \lceil \log_{|\mathcal{R}|} n \rceil$ и множество $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо. Рассмотрим проекции матриц из S на свои диагонали. Таким образом получается подмножество $S' \subseteq \mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}$, которое обладает следующими свойствами: $|S'| = m$ и $S' \cup \{(r, \dots, r) \mid r \in \mathcal{R}\}$ порождает $\mathcal{R}^n$ как кольцо. Пусть $S' = \{\mathbf{v}_k = (r_{k1}, \dots, r_{kn})\}_{k=1}^m$. Из условия 1 следствия 2.1.5 вытекает, что для произвольной пары $1 \leq i < j \leq n$, найдётся число k такое, что $r_{ki} \neq r_{kj}$. Тогда множество $\{\mathbf{u}_s = (r_{1s}, \dots, r_{ms})\}_{s=1}^n \subseteq \mathcal{R}^m$ состоит из n различных наборов, а значит, $|\mathcal{R}|^m \geq n$. Однако это противоречит предположению, что $m < \log_{|\mathcal{R}|} n$.

Пусть теперь $|\mathcal{R}| \geq n$, включая случай, когда кольцо $\mathcal{R}$ бесконечно. Докажем, что в этих ограничениях выполнено $\text{ngen}(\mathcal{A}) = 1$. Так как $\mathcal{R}$ некоммукативно, то найдутся элементы $x, y \in \mathcal{R}$, удовлетворяющие $[x, y] = xy - yx \neq 0$. Для каждого $r \in \mathcal{R}$, введём обозначение для централизатора: $C(r) = \{s \in \mathcal{R} \mid sr = rs\}$.

Сконструируем матрицу A такую, что множество $\{A\} \cup \mathcal{R}E_n$ порождает кольцо $\mathcal{A}$. Выберем произвольные n различных элементов $d_1, \dots, d_n \in \mathcal{R}$. Для каждой пары индексов i, j таких, что $C(d_i - d_j) \neq \mathcal{R}$, выберем элемент $c_{ij} \in \mathcal{R}$, для которого выполнено $[c_{ij}, d_i - d_j] \neq 0$. Тогда положим

$$(A)_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{если } i = j; \\ c_{ij}, & \text{если } i \prec j, C(d_i - d_j) \neq \mathcal{R}; \\ x, & \text{если } i \prec j, C(d_i - d_j) = \mathcal{R}; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что множество $\{A\} \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо. Условие 1 следствия 2.1.5 выполнено по построению, остаётся проверить условие 2. Зафиксируем произвольную пару $i \prec j$. Возможны два случая.

[Случай 1.] Пусть $C(d_i - d_j) \neq \mathcal{R}$. Тогда рассмотрим матрицу

$$B = (d_i - d_j)(A - d_j E_n) - (A - d_j E_n)(d_i - d_j) \in \mathcal{R}\{A, E_n\}\mathcal{R}.$$

По построению получаем, что $(B)_{ii} = (B)_{jj} = 0$. При этом $(B)_{ij} \neq 0$, т.к. $c_{ij}(d_i - d_j) \neq (d_i - d_j)c_{ij}$.

[Случай 2.] Пусть $C(d_i - d_j) = \mathcal{R}$. В этой ситуации положим

$$B = y(A - d_j E_n) - (A - d_j E_n)y \in \mathcal{R}\{A, E_n\}\mathcal{R}.$$

Следовательно, $(B)_{ii} = (B)_{jj} = 0$. В то же время $(B)_{ij} \neq 0$ в силу $[x, y] \neq 0$.

Таким образом, выполнены условия следствия 2.1.5, а значит, множество $\{A\} \cup \mathcal{R}E_n$ порождает кольцо $\mathcal{A}$. $\square$

Теперь всё готово для доказательства теоремы 2.3.2.

Теорема 2.3.2. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что $\mathcal{R}$ — полулокальное кольцо. Обозначим через k минимальную

мощность колец $M_{n_i}(\mathcal{D}_i)$ в разложении Веддербёрна–Артина факторкольца по радикалу Джекобсона $\mathcal{R}/J(\mathcal{R}) \cong M_{n_1}(\mathcal{D}_1) \times \dots \times M_{n_d}(\mathcal{D}_d)$, где $n_1, \dots, n_d \geq 1$, а кольца $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^d$ являются телами. Тогда верны следующие утверждения

1. Если $\kappa < n$, то $\text{mgen}(\mathcal{A}) = \lceil \log_\kappa n \rceil$.
2. Если $\kappa \geq n$ и $\mathcal{A} = D_n(\mathcal{R})$, то $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$.
3. Предположим, что $\kappa \geq n$, $\mathcal{A} \neq D_n(\mathcal{R})$, и существует такое $i \in \{1, \dots, d\}$ что $n_i = 1$ и $\mathcal{D}_i$ является полем. Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 2$.
4. Во всех остальных случаях выполнено $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$.

Доказательство. Объединяя результаты предложений 2.2.6, 2.2.11, а также пример 2.2.3, заключаем, что $\kappa = \omega(\Phi(\mathcal{R}))$. Также согласно предложениям 2.2.6, 2.2.8 можно считать, что $J(\mathcal{R}) = \{0\}$ без ограничения общности. Докажем пункты 1–4.

1. Пусть $\kappa < n$. Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) = \lceil \log_\kappa n \rceil$ согласно пункту 2 предложения 2.2.11 и теореме 2.3.1.
2. Если $\kappa \geq n$ и $\mathcal{A} = D_n(\mathcal{R})$, тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$ в силу теоремы 2.2.13.
3. Предположим теперь, что $\kappa \geq n$, $\mathcal{A} \neq D_n(\mathcal{R})$ и найдётся такой индекс $i \in \{1, \dots, k\}$, что $n_i = 1$ и тело $\mathcal{D}_i$ является полем. Тогда из теоремы 2.2.13 вытекает, что $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 2$.
4. Если ни одно из условий предыдущих пунктов не выполнено, тогда получаем $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$ из предложения 2.2.11 и теоремы 2.3.1.

Теорема доказана. □

Частным случаем полулокального кольца является поле.

Следствие 2.3.3. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — алгебра инцидентности над полем $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Тогда

$$\text{mgen}(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{A} = D_n(\mathbb{F}) \text{ и } n \leq |\mathbb{F}| \leq \infty; \\ 2, & \text{если } \mathcal{A} \neq D_n(\mathbb{F}) \text{ и } n \leq |\mathbb{F}| \leq \infty; \\ \lceil \log_{|\mathbb{F}|} n \rceil, & \text{если } |\mathbb{F}| < n. \end{cases}$$

В случае, когда полулокальное кольцо коммутативно теорема 2.3.2 сводит вычисление величины $\text{ngen}(\cdot)$ к случаю полей.

Следствие 2.3.4. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что $\mathcal{R}$ коммутативно и полулокальное. Пусть $\mathbb{F}$ — это поле вычетов кольца $\mathcal{R}$ минимальной мощности. Тогда $\text{ngen}(\mathcal{A}) = \text{ngen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}))$.

Доказательство. Применим теорему 2.3.2. Кольцо $\mathcal{R}$ коммутативно, поэтому $n_i = 1$ и тело $\mathcal{D}_i$ является полем для любого $i \in \{1, \dots, d\}$. Для коммутативного кольца радикал Джекобсона является пересечением всех максимальных (двусторонних) идеалов, поэтому $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^d$ — это в точности множество всех полей вычетов кольца $\mathcal{R}$. Остаётся сравнить пункты теоремы 2.3.2 и следствия 2.3.3. $\square$

2.4 Примеры оценок мощности порождающих подмножеств

Если зафиксировать частично упорядоченное множество, но рассматривать различные кольца коэффициентов, то величина $\text{ngen}(\cdot)$ достигнет своего максимума в случае поля из двух элементов.

Следствие 2.4.1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Тогда

$$\text{ngen}(\mathcal{A}) \leq \text{ngen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_2)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{A} = D_2(\mathcal{R}); \\ 2, & \text{если } \mathcal{A} \neq D_2(\mathcal{R}), n = 2; \\ \lceil \log_2 n \rceil, & \text{если } n > 2. \end{cases}$$

Доказательство. Из замечания 2.2.2 получаем, что $\omega(\Phi(\mathcal{R})) \geq 2$. Тогда остаётся применить следствие 2.3.3 и теоремы 2.2.12, 2.2.13. $\square$

Приведём другие примеры, в которых предыдущая оценка достигается, но при этом $\mathcal{R} \not\cong \mathbb{F}_2$.

Пример 2.4.2. Пусть $\mathcal{R}$ совпадает с кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Тогда заведомо $\text{ngen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{Z})) = \text{ngen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_2))$. Действительно, $\mathbb{F}_2$ — это поле вычетов для $\mathbb{Z}$, а значит, лемма 2.2.5 может быть применена к каноническому гомоморфизму $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Пример 2.4.3. Если $\mathcal{R}$ — булево кольцо, то получаем $\text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})) = \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_2))$. Это следует из того факта, что булево кольцо коммутативно и любое его поле вычетов изоморфно $\mathbb{F}_2$. Поэтому снова лемма 2.2.5 может быть применена к каноническому гомоморфизму $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Далее рассмотрим случай, когда кликовое число $\omega(\Phi(\mathcal{R}))$ бесконечно.

Следствие 2.4.4. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что $\omega = \omega(\Phi(\mathcal{R}))$ бесконечно. Тогда

$$\text{mgen}(\mathcal{A}) \leq \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{Q})) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{A} = D_n(\mathcal{R}); \\ 2, & \text{если } \mathcal{A} \neq D_n(\mathcal{R}). \end{cases}$$

Более того, если существует идеал $\mathfrak{c} \triangleleft \mathcal{R}$ такой, что $\mathfrak{c} \neq \mathcal{R}$ и факторкольцо $\mathcal{R}/\mathfrak{c}$ коммутативно, тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) = \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{Q}))$.

Доказательство. Результат получается применением следствия 2.3.3 и теоремы 2.2.13. $\square$

Простейший пример, когда существует бесконечная клика, это кольцо с бесконечным подполем. Однако существуют кольца, которые не содержат подполей, но при этом обладают бесконечной кликой.

Пример 2.4.5. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[x]$ многочленов с целыми коэффициентами. Пусть S — подмножество, состоящее из всех многочленов со старшим коэффициентом 1. Тогда S является мультипликативным моноидом. Рассмотрим локализацию $\mathcal{R} = S^{-1}\mathbb{Z}[x]$. Элементы

$$\frac{1}{1}, \frac{1+x}{1}, \frac{1+x+x^2}{1}, \dots, \frac{1+x+x^2+\dots+x^k}{1}, \dots$$

образуют бесконечную клику в графе $\Phi(\mathcal{R})$, т.к. разность любых двух элементов обратима в кольце $\mathcal{R}$.

Другую оценку величины $\text{mgen}(\cdot)$ можно получить, если известны характеристики простых факторколец.

Следствие 2.4.6. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Рассмотрим множество всех максимальных идеалов $\{\mathfrak{m}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ кольца $\mathcal{R}$. Обозначим через p_λ характеристику факторкольца $\mathcal{R}/\mathfrak{m}_\lambda$.

1. Пусть для хотя бы одного индекса $\lambda \in \Lambda$ выполнено $p_\lambda \neq 0$. Обозначим

$$p = \min\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda : p_\lambda \neq 0\}.$$

Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) \leq \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_p))$.

2. Пусть $p_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) \leq \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{Q}))$.

Доказательство. Так как идеал $\mathbf{m}_\lambda$ максимален, то факторкольцо $\mathcal{R}/\mathbf{m}_\lambda$ простое. Характеристика простого кольца либо равна нулю, либо является простым числом.

Обозначим через $\pi_\lambda : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathbf{m}_\lambda$ канонический гомоморфизм. Заметим, что элемент $x \in \mathcal{R}$ является полным тогда и только тогда, когда $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{m}_\lambda$, или, эквивалентно, $\pi_\lambda(r) \neq 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

В пункте 1 получаем, что все элементы $1, \dots, p-1$ полны в кольце $\mathcal{R}$. Тогда множество $\{0, \dots, p-1\}$ образует клику в графе $\Phi(\mathcal{R})$, откуда $\omega(\Phi(\mathcal{R})) \geq p$. Значит, $\text{mgen}(\mathcal{A}) \leq \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_p))$ в силу следствия 2.3.3 и теорем 2.2.12, 2.2.13.

В пункте 2 аналогично получаем, что кликовое число $\omega(\Phi(\mathcal{R}))$ бесконечно, а значит, применимо следствие 2.4.4. $\square$

Оценка из пункта 1 следствия 2.4.6 достигается, например, в следующем случае.

Пример 2.4.7. Пусть $\mathcal{R}$ — произвольное подкольцо в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, $\mathcal{R} \neq \mathbb{Q}$. Тогда найдётся множество некоторых простых чисел $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}$, такое что кольцо $\mathcal{R}$ порождает множеством $\left\{\frac{1}{p} \mid p \in \mathcal{U}\right\}$. Все максимальные идеалы кольца $\mathcal{R}$ имеют вид $p\mathcal{R}$, где p — простое число, не лежащее в $\mathcal{U}$. Выберем минимальное простое $p \notin \mathcal{U}$. Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})) \leq \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_p))$ по следствию 2.4.6. На самом деле здесь достигается равенство. Это вытекает из леммы 2.2.5, применённой к каноническому гомоморфизму $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/p\mathcal{R}$. Таким образом, $\text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})) = \text{mgen}(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_p))$.

В качестве кольца $\mathcal{R}$ можно взять некоторое матричное кольцо. Тогда теорема 2.3.1 позволяет дать оценки для мощности порождающих подмножеств специальных матричных алгебр, полученных с помощью тензорного произведения.

Следствие 2.4.8. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — кольцо инцидентности над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $n \geq 2$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} M_k(\mathbb{F})$ для некоторого $k \geq 2$. Тогда $\mathcal{B}$ может быть порождена $\lceil \log_{k^2 q} n \rceil + 2$ матрицами как $\mathbb{F}$ -алгебра.

Доказательство. Применим теорему 2.3.1 к $\mathcal{R} = M_k(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{B}$ порождается как кольцо $\lceil \log_{k^2 q} n \rceil$ матрицами и множеством

$$\mathcal{R}1_{\mathcal{B}} = E_n \otimes M_k(\mathbb{F}) = \left\{ \underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_{n \text{ раз}} \mid A \in M_k(\mathbb{F}) \right\}.$$

Однако алгебра $E_n \otimes M_k(\mathbb{F}) \cong M_k(\mathbb{F})$ порождается двумя матрицами, например, жордановой клеткой порядка k с собственным числом ноль и транспонированной к ней матрицей. Тогда алгебра $\mathcal{B}$ порождается $\lceil \log_{k^2 q} n \rceil + 2$ матрицами как $\mathbb{F}$ -алгебра. $\square$

2.5 Количество порождающих наборов в случае конечных колец инцидентности

Основным результатом этого параграфа является теорема 2.5.9. Она даёт формулу для количество наборов матриц $(A_1, \dots, A_m)$, таких что множество $\{A_i\}_{i=1}^m \cup \mathcal{R}E_n$ порождает кольцо инцидентности над *конечным* кольцом $\mathcal{R}$.

Обозначение 2.5.1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности. Положим

$$\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R}) = \{(A_1, \dots, A_m) \in \mathcal{A}^m \mid \{A_i\}_{i=1}^m \cup \mathcal{R}E \text{ порождает } \mathcal{A} \text{ как кольцо}\},$$

следуя аналогичному обозначению [32].

Замечание 2.5.2. Для минимального количества образующих $\text{mgen}(\cdot)$ по определению выполняется следующее

$$\text{mgen}(\mathcal{A}) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R}) \neq \emptyset\}.$$

Для того, чтобы далее вычислить мощность $|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, M_k(\mathbb{F}_q))|$ нам понадобятся две простые леммы из линейной алгебры.

Лемма 2.5.3. Пусть $\varphi : M_k(\mathbb{F}) \longrightarrow M_k(\mathbb{F})$ является отображением, которое линейно над полем $\mathbb{F}$, $k \geq 1$. Тогда найдётся такое натуральное число r и матрицы $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_r$, что

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^r P_i X Q_i, \quad \forall X \in M_k(\mathbb{F}).$$

Доказательство. Заметим, что отображения вида $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(X) = E_{\alpha\beta} X E_{\gamma\delta}$ образуют базис в пространстве всех линейных отображений $M_k(\mathbb{F}) \longrightarrow M_k(\mathbb{F})$. $\square$

Лемма 2.5.4. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим произвольные векторы $v_1, \dots, v_m$, а также $w_1, \dots, w_m$ из V . Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Найдутся линейные операторы $\varphi_i : V \longrightarrow V$, где $i = 1, \dots, m$, такие что

$$\begin{cases} \varphi_1(v_1) + \dots + \varphi_m(v_m) = 0, \\ \varphi_1(w_1) + \dots + \varphi_m(w_m) \neq 0. \end{cases}$$

2) Не существует такого $\lambda \in \mathbb{F}$, что $w_i = \lambda v_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Непосредственная подстановка $w_i = \lambda v_i$ в систему приводит к противоречию.

2) $\Rightarrow$ 1) Рассмотрим (внешнюю) прямую сумму $V^m = V \oplus \dots \oplus V$ (m раз). Для $i = 1, \dots, m$ обозначим i -е прямое слагаемое как V_i , проекцию на него как $\pi_i : V^m \longrightarrow V_i$, а естественное вложение как $\iota_i : V_i \longrightarrow V^m$. Пространство V^m содержит такие векторы v, w , что их проекции на каждое слагаемое V_i равны v_i и w_i , соответственно. Согласно пункту 2 имеем $w \neq \lambda v$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда найдётся линейный оператор $\Phi : V^m \longrightarrow V^m$, такой что $\Phi(w) = u \neq 0$, но $\Phi(v) = 0$. Так как вектор $u \neq 0$, то его проекция на хотя бы одно из прямых слагаемых V_i должна быть ненулевой, скажем, $\pi_k(u) \neq 0$ для некоторого индекса $k \in \{1, \dots, m\}$. Тогда положим $\varphi_i = \pi_k \circ \Phi \circ \iota_i$. $\square$

Докажем уточнение критерия из теоремы 2.1.4 для случая, когда основное кольцо $\mathcal{R}$ является кольцом матриц над полем.

Лемма 2.5.5. Пусть $\mathcal{R} \cong M_k(\mathbb{F})$ является кольцом всех $k \times k$ матриц над полем $\mathbb{F}$, $k \geq 1$. Рассмотрим кольцо инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$, $n \geq 2$ и его непустое конечное подмножество $S = \{A_1, \dots, A_m\}$. Тогда множество $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо тогда и только тогда, когда

1) в следующей $n \times t$ матрице над $\mathcal{R}$

$$\Delta = \begin{pmatrix} (A_1)_{11} & \dots & (A_m)_{11} \\ \dots & \dots & \dots \\ (A_1)_{nn} & \dots & (A_m)_{nn} \end{pmatrix}$$

никакие две строки не совпадают;

2) для каждой пары $i \prec j$, векторы

$$v = ((A_1)_{ii} - (A_1)_{jj}, (A_2)_{ii} - (A_2)_{jj}, \dots, (A_m)_{ii} - (A_m)_{jj}) \in \mathcal{R}^m,$$

$$w = ((A_1)_{ij}, (A_2)_{ij}, \dots, (A_m)_{ij}) \in \mathcal{R}^m$$

линейно независимы **над полем** $\mathbb{F}$.

Доказательство. Кольцо $\mathcal{R}$ простое, поэтому условие А теоремы 2.1.4 может быть переписано следующим образом. Для каждой пары $i \neq j$, найдётся такое $\alpha \in \{1, \dots, t\}$, что $(A_\alpha)_{ii} \neq (A_\alpha)_{jj}$. Это эквивалентно требованию, что никакие две строки матрицы Δ не совпадают.

Далее для произвольной пары $i \prec j$ рассмотрим условие В теоремы 2.1.4. Снова пользуясь тем, что кольцо $\mathcal{R}$ простое, получаем, что равенство $\mathbf{b}_{ij} = \mathcal{R}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{b}_{ij} \neq 0$. Это означает, что кольцо $\mathcal{R}$ должно содержать такие элементы $p_{\alpha,\beta}$, $q_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = 1, \dots, t$, а также $\beta = 1, \dots, r_\alpha$, что для матрицы $B = \sum_{\alpha=1}^t \sum_{\beta=1}^{r_\alpha} p_{\alpha,\beta} A_\alpha q_{\alpha,\beta}$ выполнено $(B)_{ii} = (B)_{jj}$ и при этом $(B)_{ij} \neq 0$. Другими словами,

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{r_1} p_{1,\beta}((A_1)_{ii} - (A_1)_{jj})q_{1,\beta} + \dots + \sum_{\beta=1}^{r_t} p_{t,\beta}((A_t)_{ii} - (A_t)_{jj})q_{t,\beta} = 0, \\ \sum_{\beta=1}^{r_1} p_{1,\beta}(A_1)_{ij}q_{1,\beta} + \dots + \sum_{\beta=1}^{r_t} p_{t,\beta}(A_t)_{ij}q_{t,\beta} \neq 0. \end{cases}$$

Согласно лемме 2.5.3, это условие эквивалентно тому, что найдутся операторы $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ на $\mathcal{R}$ как на линейном пространстве над $\mathbb{F}$, что выполняется

$$\begin{cases} \varphi_1((A_1)_{ii} - (A_1)_{jj}) + \dots + \varphi_t((A_t)_{ii} - (A_t)_{jj}) = 0, \\ \varphi_1((A_1)_{ij}) + \dots + \varphi_t((A_t)_{ij}) \neq 0, \end{cases}$$

Заметим, что $v \neq 0$ в силу условия 1. Остаётся применить лемму 2.5.4. $\square$

Далее будет доказана формула для количества наборов матриц, которые порождают кольцо инцидентности над конечным матричным кольцом.

Лемма 2.5.6. Пусть $\mathcal{R} \cong M_k(\mathbb{F}_q)$ — кольцо всех $k \times k$ матриц над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $k \geq 1$. Рассмотрим кольцо инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$, $n \geq 1$. Тогда для натурального $m \geq \text{ngen}(\mathcal{A})$ выполнено

$$|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})| = \frac{q^{k^2 m}!}{(q^{k^2 m} - n)!} \cdot (q^{k^2 m} - q)^c \cdot q^{k^2 m(\rho - n - c)}.$$

Здесь через ρ и c обозначены мощности частичного порядка и отношения накрытия, соответственно, т.е.

$$\rho = |\preceq| = |\{(i, j) \mid i \preceq j\}|, \quad c = |\prec| = |\{(i, j) \mid i \prec j\}|.$$

Доказательство. Если $n = 1$, то заведомо выполняется $\rho = 1$, $c = 0$, а также $|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})| = |\mathcal{R}|^m$, что согласуется с формулой. Пусть $n \geq 2$. Необходимо найти количество наборов матриц $(A_1, \dots, A_m) \in \text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})$.

[Шаг 1.] Рассмотрим диагональные элементы матриц $A_1, \dots, A_m$. Все они содержатся в матрице Δ из леммы 2.5.5. Строки этой матрицы должны быть попарно различны согласно условию 1. Отсюда количество способов выбрать матрицу Δ равно

$$|\mathcal{R}|^m (|\mathcal{R}|^m - 1) \cdot \dots \cdot (|\mathcal{R}|^m - (n - 1)) = \frac{|\mathcal{R}|^m!}{(|\mathcal{R}|^m - n)!} = \frac{q^{k^2 m}!}{(q^{k^2 m} - n)!}.$$

Заметим, что $m \geq \text{ngen}(\mathcal{A})$ по условию, откуда $\text{ngen}(\mathcal{A}) \geq \lceil \log_{|\mathcal{R}|} n \rceil$ согласно теореме 2.3.2. Следовательно, хотя бы одна матрица Δ существует.

[Шаг 2.] Далее рассмотрим матричные элементы $(A_\alpha)_{ij}$ для $i \prec j$, а также $\alpha = 1, \dots, m$. Согласно условию 2 леммы 2.5.5 векторы v, w должны быть линейно независимы над $\mathbb{F}$. Вектор v однозначно определяется по матрице Δ . Тогда окажется в точности $|\mathcal{R}|^m - q = q^{k^2 m} - q$ способов выбрать вектор w неколлинеарный v . Количество способов выбрать векторы w для всех пар $i \prec j$ равно $(q^{k^2 m} - q)^c$.

[Шаг 3.] Остаётся рассмотреть элементы $(A_\alpha)_{ij}$ для $i \prec j$, $i \not\prec j$, а также $\alpha = 1, \dots, m$. Согласно лемме 2.5.5 все эти элементы могут быть выбраны произвольными. Количество таких элементов равно $m(\rho - n - c)$. Значит, выбрать их можно $|\mathcal{R}|^{m(\rho - n - c)} = q^{k^2 m(\rho - n - c)}$ способами.

Перемножая величины, полученные на шагах 1-3, получаем требуемое выражение для $|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})|$. □

Замечание 2.5.7. При $m < \text{ngen}(\mathcal{A})$ заведомо $|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})| = 0$.

Замечание 2.5.8. Если $k = m = 1$ и при этом $c = 0$, то множитель $(q^{k^2m} - q)^c$ принимает вид 0^0 . Этот случай следует интерпретировать как 1 согласно шагу 2 доказательства.

Теперь всё готово для доказательства основного результата параграфа.

Теорема 2.5.9. Пусть $\mathcal{R}$ — конечное кольцо. Рассмотрим разложение Веддербёрна–Артина по модулю радикала Джекобсона $\mathcal{R}/J(\mathcal{R}) \cong M_{n_1}(\mathbb{F}_{q_1}) \times \dots \times M_{n_d}(\mathbb{F}_{q_d})$, где каждое $\mathbb{F}_{q_i}$ является конечным полем мощности q_i , $n_i \geq 1$. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 1$. Тогда для любого натурального $m \geq \text{ngen}(\mathcal{A})$ выполнено

$$|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})| = |J(\mathcal{R})|^{m\rho} \cdot \prod_{i=1}^d \frac{q_i^{n_i^2 m}!}{(q_i^{n_i^2 m} - n)!} \cdot (q_i^{n_i^2 m} - q_i)^c \cdot q_i^{n_i^2 m(\rho - n - c)}.$$

Здесь через ρ и c обозначены мощности частичного порядка и отношения накрытия, соответственно, т.е.

$$\rho = |\preceq| = |\{(i, j) \mid i \preceq j\}|, \quad c = |\prec| = |\{(i, j) \mid i \prec j\}|.$$

Указанная формула использует соглашение $0^0 = 1$.

Доказательство. В обозначениях леммы 2.2.7 для $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$ имеем

$$|\varphi^{-1}(\overline{A})| = \prod_{i \preceq j} |(A)_{ij} + J| = |J|^\rho.$$

Тогда в случае набора $(\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_m) \in \overline{\mathcal{A}}^m$ получаем $|\varphi^{-1}(\overline{A}_1) \times \dots \times \varphi^{-1}(\overline{A}_m)| = |J|^{m\rho}$. Из леммы 2.2.7 вытекает, что

$$|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})| = |J|^{m\rho} \cdot |\text{Gen}_m(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{R}})|.$$

Далее рассмотрим множество $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_d$ попарно ортогональных центральных идемпотентов кольца $\overline{\mathcal{R}}$, такое что $\sum_i \overline{e}_i = 1_{\overline{\mathcal{R}}}$ и при этом $\overline{e}_i \overline{\mathcal{R}} \cong M_{n_i}(\mathbb{F}_{q_i})$. Заметим, что $\overline{e}_i \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_n(\preceq, \overline{e}_i \overline{\mathcal{R}})$. Применяя лемму 2.2.9 к кольцу $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_n(\preceq, \overline{\mathcal{R}})$, получаем

$$|\text{Gen}_m(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{R}})| = |\text{Gen}_m(\overline{e}_1 \overline{\mathcal{A}}, \overline{e}_1 \overline{\mathcal{R}})| \cdot \dots \cdot |\text{Gen}_m(\overline{e}_d \overline{\mathcal{A}}, \overline{e}_d \overline{\mathcal{R}})|.$$

Выражение для $|\text{Gen}_m(\overline{e}_i \overline{\mathcal{A}}, \overline{e}_i \overline{\mathcal{R}})|$ было получено в лемме 2.5.6. □

Предыдущая теорема может быть переформулирована в терминах стандартной вероятностной меры на конечном множестве $\mathcal{A}^m$.

Следствие 2.5.10. *В обозначениях теоремы 2.5.9, вероятность того, что набор из m матриц ($m \geq \text{ngen}(\mathcal{A})$) вместе со всеми скалярными матрицами порождает кольцо инцидентности, может быть найдена как*

$$P = \prod_{i=1}^d \left(1 - \frac{1}{q_i^{n_i^2 m - 1}} \right)^c \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\ell}{q_i^{n_i^2 m}} \right).$$

Доказательство. Мощность прямого произведения $\mathcal{A}^m$ представляется в виде

$$|\mathcal{A}^m| = |\mathcal{R}|^{m\rho} = |J(\mathcal{R})|^{m\rho} \cdot |\mathcal{R}/J(\mathcal{R})|^{m\rho} = |J(\mathcal{R})|^{m\rho} \cdot \prod_{i=1}^d q_i^{n_i^2 m\rho}.$$

Из теоремы вытекает, что указанная вероятность вычисляется как

$$P = \frac{|\text{Gen}_m(\mathcal{A}, \mathcal{R})|}{|\mathcal{A}^m|} = \prod_{i=1}^d \frac{q_i^{n_i^2 m} \cdot \dots \cdot (q_i^{n_i^2 m} - (n-1))(q_i^{n_i^2 m} - q_i)^c}{q_i^{n_i^2 m(n+c)}},$$

что равно выражению из следствия. □

Глава 3

Системы образующих, состоящие из идемпотентных матриц

Результаты главы опубликованы в работе [66]. На протяжении всей главы предполагается дополнительно, что основное кольцо $\mathcal{R}$ коммутативно. Введём следующую величину.

Определение 3.0.1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — алгебра инцидентности над коммутативным кольцом $\mathcal{R}$. Обозначим через $\nu(\mathcal{A})$ минимальное количество идемпотентных матриц, которые порождают $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.

В работе [30], величина ν была вычислена для алгебры верхнетреугольных матриц $T_n(\mathcal{R})$. Выяснилось, что $\nu = \lceil \log_2 n \rceil$ во всех случаях, кроме $n = 2, 3, 4$, когда выполняется $\nu = \lceil \log_2 n \rceil + 1$. Основным результатом главы является теорема 3.3.6, которая обобщает этот результат на случай произвольной алгебры инцидентности. Будет доказано, что снова ν равно либо $\lceil \log_2 n \rceil$, либо $\lceil \log_2 n \rceil + 1$, однако разграничение этих случаев более сложное, чем в случае $T_n(\mathcal{R})$. Оно связано с вложением диаграммы Хассе в дополнение булева куба. В случае $\nu(T_n(\mathcal{R}))$, выбор между двумя формулами можно интерпретировать в терминах существования гамильтонова пути, см. доказательство следствия 3.3.7.

3.1 Построение вложения диаграммы Хассе

Пусть дано множество идемпотентных матриц, которое порождает алгебру инцидентности. На основе этого множества в следующей лемме строится

вложение диаграммы Хассе в дополнение булева куба достаточно большой размерности. В доказательстве сначала предполагается, что основное кольцо $\mathcal{R}$ является полем, а затем рассматривается общий случай.

Лемма 3.1.1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — алгебра инцидентности над коммутативным кольцом $\mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{A}$ порождается как $\mathcal{R}$ -алгебра различными идемпотентными матрицами $A_1, \dots, A_u$, для некоторого $u \in \mathbb{N}$. Тогда диаграмма Хассе частичного порядка $\preceq$ изоморфна подграфу дополнения $\overline{\mathcal{Q}_m}$ булева куба размерности m для любого $m \geq u$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

[Случай 1.] Предположим, что кольцо $\mathcal{R} = \mathbb{F}$ является полем. Если $m = 1$, тогда $u = 1$ и линейная оболочка единичной матрицы E_n и A_1 совпадает со всей алгеброй $\mathcal{A}$, т.к. A_1 идемпотентная. Отсюда $\dim \mathcal{A} \leq 2$, что возможно только когда $n = 1$ или $n = 2$ и $\mathcal{A} = D_2(\mathbb{F})$. В этом случае диаграмма Хассе состоит из одной или двух изолированных точек, а значит, может быть вложена в $\overline{\mathcal{Q}_1}$. Далее будем предполагать, что $m \geq 2$.

Рассмотрим набор матриц $(A_1, \dots, A_m)$, где $A_{u+1} = A_{u+2} = \dots = A_m = A_1$. Согласно предложению 1.4.7 можно считать без ограничения общности, что $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathcal{R})$, т.е. все матрицы $A_1, \dots, A_m$ верхнетреугольные. Так как они идемпотентные, то элементы на диагонали должны быть идемпотентами в поле $\mathbb{F}$, а значит, равны нулю или единице. Получаем, что набор $((A_1)_{ii}, \dots, (A_m)_{ii})$ принадлежит $\{0,1\}^m$ для любого $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим отображение $f : \mathcal{N} \rightarrow \{0,1\}^m$, заданное как $f(i) = ((A_1)_{ii}, \dots, (A_m)_{ii})$. Из пункта 1 теоремы 1.4.15 вытекает, что f инъективно.

Покажем, что f является вложением диаграммы Хассе в граф $\overline{\mathcal{Q}_m}$. Предположим противное, т.е. существует такая пара $i_* \prec j_*$, что наборы $f(i_*)$ и $f(j_*)$ отличаются в точности в одной позиции. Другими словами, найдётся такое $k_* \in \{1, \dots, m\}$, что $(A_{k_*})_{i_* i_*} \neq (A_{k_*})_{j_* j_*}$, но при этом для любого $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_*\}$ выполняется $(A_k)_{i_* i_*} = (A_k)_{j_* j_*}$.

Так как $A_k^2 = A_k$ и $i_* \prec j_*$, то из леммы 1.4.10 получаем, что $(1 - (A_k)_{i_* i_*} - (A_k)_{j_* j_*}) \cdot (A_k)_{i_* j_*} = 0$. При $k \neq k_*$ элементы $(A_k)_{i_* i_*}$ и $(A_k)_{j_* j_*}$ равны и принадлежат $\{0,1\}$. Следовательно, $1 - (A_k)_{i_* i_*} - (A_k)_{j_* j_*} \neq 0$, откуда $(A_k)_{i_* j_*} = 0$ для любого $k \neq k_*$.

Согласно пункту 2 теоремы 1.4.15 в линейной оболочке $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$ найдётся такая матрица B , что $(B)_{i_* j_*} \neq 0$ и $(B)_{i_* i_*} = (B)_{j_* j_*}$. Запишем разложение

$B = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ из поля $\mathbb{F}$. Тогда по крайней мере одна из матриц $A_1, \dots, A_m$ должна содержать ненулевой элемент на позиции (i_*, j_*) . Это возможно только в ситуации, когда $(A_{k_*})_{i_* j_*} \neq 0$ и $\lambda_{k_*} \neq 0$. Тогда

$$(B)_{i_* i_*} - (B)_{j_* j_*} = \sum_{k=1}^m \lambda_k ((A_k)_{i_* i_*} - (A_k)_{j_* j_*}) = \lambda_{k_*} ((A_{k_*})_{i_* i_*} - (A_{k_*})_{j_* j_*}) \neq 0.$$

Получаем противоречие с тем, что $(B)_{i_* i_*} = (B)_{j_* j_*}$.

[Случай 2.] Пусть теперь $\mathcal{R}$ — некоторое ненулевое коммутативное кольцо. Рассмотрим произвольный максимальный идеал $\mathbf{m} \triangleleft \mathcal{R}$ и соответствующее поле вычетов $\mathbb{F} = \mathcal{R}/\mathbf{m}$. Обозначим через $\pi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathbf{m}$ каноническую проекцию. Сконструируем сюръективный гомоморфизм колец $\pi_n : \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$, заданный равенством $(\pi_n(A))_{ij} = \pi((A)_{ij})$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. По построению π_n сохраняет множество скалярных матриц: $\pi_n(\mathcal{R}E_n) = \mathbb{F}E_n$.

Рассмотрим матрицы $\pi_n(A_1), \dots, \pi_n(A_u)$. Некоторые из них могут совпадать. С точностью до перенумерации можно считать, $\pi_n(A_1), \dots, \pi_n(A_{u'})$, $u' \leq u$ — это все попарно различные матрицы среди $\pi_n(A_1), \dots, \pi_n(A_u)$. Так как множество $\{A_1, \dots, A_u\} \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ как кольцо, то образ $\{\pi_n(A_1), \dots, \pi_n(A_{u'})\} \cup \mathbb{F}E_n$ порождает $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ как кольцо. Таким образом, $\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ порождается идемпотентами $\pi_n(A_1), \dots, \pi_n(A_{u'})$ как алгебра над полем $\mathbb{F}$. Согласно случаю 1, диаграмма Хассе частичного порядка $\preceq$ изоморфна подграфу в $\overline{\mathcal{Q}_m}$ для всех $m \geq u'$. В частности, можно выбрать любое $m \geq u$. $\square$

3.2 Конструкция идемпотентных матриц

В следующей лемме приводится алгоритм построения идемпотентных матриц, которые порождают алгебру инцидентности в случае, если дано вложение диаграммы Хассе в дополнение булева куба.

Лемма 3.2.1. Пусть множество $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ частично упорядочено отношением $\preceq$. Предположим, что диаграмма Хассе частичного порядка $\preceq$ изоморфна подграфу в $\overline{\mathcal{Q}_m}$. Тогда найдется такое натуральное число $u \leq m$, что алгебра инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ над коммутативным кольцом $\mathcal{R}$ порождается некоторыми различными идемпотентными матрицами $A_1, \dots, A_u$.

Доказательство. Пусть отображение $f : \mathcal{N} \longrightarrow \{0,1\}^m$ задаёт вложение диаграммы Хассе в граф $\overline{\mathcal{Q}_m}$. Для каждого $i \in \mathcal{N}$ обозначим $f(i) = (a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)})$, где $a_k^{(i)} \in \{0,1\}$. По определению графа $\overline{\mathcal{Q}_m}$ для любой пары $i \prec j$ найдутся такие индексы $\eta \neq \theta$, что $a_\eta^{(i)} \neq a_\eta^{(j)}$ и $a_\theta^{(i)} \neq a_\theta^{(j)}$. Поэтому будем рассматривать $\eta = \eta(i,j)$ и $\theta = \theta(i,j)$ как отображения, заданные на парах $i \prec j$.

Согласно предложению 1.4.7 можно считать, не ограничивая общности, что все матрицы алгебры $\mathcal{A}$ верхнетреугольные. Для каждого $k = 1, \dots, m$ сконструируем матрицу $\tilde{A}_k$ следующим образом:

$$(\tilde{A}_k)_{ij} = \begin{cases} a_k^{(i)}, & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \prec j \text{ и } \eta(i,j) = k; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим множество указанных матриц через $\tilde{S}$. По построению $\tilde{S} \subseteq \mathcal{A}$. Покажем, что множество $\tilde{S}$ порождает $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру. Для этого достаточно проверить, что выполнены условия А, В теоремы 2.1.4.

Так как отображение f является вложением, то оно инъективно по определению. Значит, для каждой пары $i \neq j$ наборы $(a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)})$ и $(a_1^{(j)}, \dots, a_m^{(j)})$ различны, т.е. существует такой индекс $\xi = \xi(i,j)$, что $a_\xi^{(i)} \neq a_\xi^{(j)}$. Тогда $(\tilde{A}_\xi)_{ii} - (\tilde{A}_\xi)_{jj} = \pm 1$, и условие А теоремы 2.1.4 выполнено в силу $1 \in \mathfrak{a}_{ij}(\tilde{S})$.

Зафиксируем произвольную пару $i \prec j$. Рассмотрим соответствующие индексы $\eta = \eta(i,j)$ и $\theta = \theta(i,j)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} (\tilde{A}_\eta)_{ii} & (\tilde{A}_\eta)_{ij} \\ 0 & (\tilde{A}_\eta)_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 - x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\tilde{A}_\theta)_{ii} & (\tilde{A}_\theta)_{ij} \\ 0 & (\tilde{A}_\theta)_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 - y \end{pmatrix}$$

для некоторых $x, y \in \{0,1\} \subseteq \mathcal{R}$. Положим

$$\tilde{B} = \begin{cases} \tilde{A}_\eta + \tilde{A}_\theta, & \text{если } x \neq y; \\ \tilde{A}_\eta - \tilde{A}_\theta + E_n, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} (\tilde{B})_{ii} & (\tilde{B})_{ij} \\ 0 & (\tilde{B})_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда условие В теоремы 2.1.4 также выполнено ввиду $1 \in \mathfrak{b}_{ij}(\tilde{S})$.

Таким образом, применяя теорему 2.1.4 получаем, что множество $\tilde{S}$ порождает $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру. Однако матрицы $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$ необязательно являются идемпотентными. Требуется дополнительные построения.

Рассмотрим идеал $\mathcal{Z}^2$ из предложения 1.4.13. Обозначим через $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{Z}^2$ естественную проекцию на факторалгебру $\mathcal{A}/\mathcal{Z}^2$. Докажем, что $\pi(\tilde{A}_k^2 - \tilde{A}_k) = 0$ для всех $k = 1, \dots, m$. Так как все эти матрицы верхнетреугольные и на диагоналях содержат только нули и единицы, то получаем, что $(\tilde{A}_k^2)_{ii} - (\tilde{A}_k)_{ii} = 0$ для всех $i \in \mathcal{N}$. Далее зафиксируем произвольную пару $i \prec j$. Если $(\tilde{A}_k)_{ij} = 0$, то $(\tilde{A}_k^2)_{ij} = 0$ по лемме 1.4.10. Пусть теперь $(\tilde{A}_k)_{ij} = 1$. Тогда по построению $k = \eta(i, j)$, а значит, $(\tilde{A}_k)_{ii} \neq (\tilde{A}_k)_{jj}$. Значит, один из элементов $(\tilde{A}_k)_{ii}, (\tilde{A}_k)_{jj}$ равен единице, а другой — нулю. Отсюда $(\tilde{A}_k^2)_{ij} = 1$ по лемме 1.4.10. В итоге получаем, $\tilde{A}_k^2 - \tilde{A}_k \in \mathcal{Z}^2$, что эквивалентно $\pi(\tilde{A}_k^2 - \tilde{A}_k) = 0$.

Так как π является гомоморфизмом алгебр, то выполнено $\pi(\tilde{A}_k)^2 = \pi(\tilde{A}_k)$, т.е. образы $\pi(\tilde{A}_1), \dots, \pi(\tilde{A}_m)$ являются идемпотентами в факторалгебре $\mathcal{A}/\mathcal{Z}^2$. Известно, что идемпотенты поднимаются по модулю нильидеала, см. [40, §3.6, предложение 1]. Поэтому в алгебре $\mathcal{A}$ найдутся матрицы $A_1, \dots, A_m$ такие, что $A_k^2 = A_k$ и $\pi(A_k) = \pi(\tilde{A}_k)$ для всех $k = 1, \dots, m$. Обозначим множество этих матриц через S .

Покажем, что S по-прежнему порождает $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру. Так как $A_k - \tilde{A}_k \in \mathcal{Z}^2$ для любого $k = 1, \dots, m$, то получаем, что $(A_k)_{ii} = (\tilde{A}_k)_{ii}$ для всех $i \in \mathcal{N}$, а также $(A_k)_{ij} = (\tilde{A}_k)_{ij}$ для всех пар $i \prec j$. Это означает, что $\mathbf{a}_{ij}(S) = \mathbf{a}_{ij}(\tilde{S}) = \mathcal{R}$ и $\mathbf{b}_{ij}(S) = \mathbf{b}_{ij}(\tilde{S}) = \mathcal{R}$ в обозначениях теоремы 2.1.4. Отсюда S порождает $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.

Остаётся заметить, что матрицы $A_1, \dots, A_m$ необязательно попарно различны (то же самое можно сказать и про матрицы $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$). Убрав повторяющиеся матрицы, получим $u \leq m$ матриц, как и утверждалось в лемме. $\square$

3.3 Оценка мощности

В этом параграфе будет доказан основной результат главы — теорема 3.3.6 о минимальном количестве идемпотентных матриц, которые порождают алгебру инцидентности. Перед этим объединим результаты предыдущих двух параграфов.

Теорема 3.3.1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — алгебра инцидентности над коммутативным кольцом $\mathcal{R}$. Тогда диаграмма Хассе частичного порядка $\preceq$

изоморфна подграфу дополнения $\overline{\mathcal{Q}_m}$ булева куба размерности m тогда и только тогда, когда существует такое $u \in \{1, \dots, m\}$, что $\mathcal{A}$ порождается как $\mathcal{R}$ -алгебра различными идемпотентными матрицами $A_1, \dots, A_u$.

Доказательство. Импликация $(\Rightarrow)$ была доказана в лемме 3.2.1, а обратная к ней $(\Leftarrow)$ — в лемме 3.1.1. $\square$

Следующая простая лемма даёт ограничения на возможные подграфы в $\overline{\mathcal{Q}_m}$.

Лемма 3.3.2. *Рассмотрим произвольный граф G на n вершинах. Если $m < \lceil \log_2 n \rceil$, то в $\overline{\mathcal{Q}_m}$ не существует подграфов, изоморфных G . В случае $m \geq \lceil \log_2 n \rceil + 1$, в $\overline{\mathcal{Q}_m}$ заведомо существует подграф изоморфный G .*

Доказательство. Пусть G является подграфом в $\overline{\mathcal{Q}_m}$. Тогда $\overline{\mathcal{Q}_m}$ должен содержать хотя бы n вершин, откуда $2^m \geq n$, или $m \geq \lceil \log_2 n \rceil$.

Пусть теперь $m = \lceil \log_2 n \rceil + 1$. По пункту 2 предложения 1.3.1 граф $\overline{\mathcal{Q}_m}$ содержит клику мощности $2^{m-1} = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} \geq n$. Значит, любой граф на n вершинах может быть вложен в $\overline{\mathcal{Q}_m}$. $\square$

Предыдущая лемма не покрывает только случая $m = \lceil \log_2 n \rceil$. Как будет показано в следующих примерах, $\overline{\mathcal{Q}_{\lceil \log_2 n \rceil}}$ может как содержать заданный граф G , так и нет. Поэтому разделим графы на два класса.

Определение 3.3.3. Граф G на n вершинах принадлежит *нулевому классу идемпотентности*, если он изоморфен подграфу дополнения $\overline{\mathcal{Q}_{\lceil \log_2 n \rceil}}$ булева куба размерности $\lceil \log_2 n \rceil$. Если граф не принадлежит нулевому классу идемпотентности, то будем считать, что он принадлежит *первому классу идемпотентности*. Номер класса идемпотентности будет обозначаться через $\text{idem}(G)$. Таким образом, $\text{idem}(G) \in \{0, 1\}$.

Следующий пример показывает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует граф на $n = 2^m$ вершинах, принадлежащий первому классу идемпотентности. Более того, этот граф является диаграммой Хассе для некоторого частично упорядоченного множества.

Пример 3.3.4. *Если граф G на n вершинах обладает вершиной степени строго больше, чем величина $2^{\lceil \log_2 n \rceil} - \lceil \log_2 n \rceil - 1$, тогда G принадлежит первому*

классу идемпотентности в силу пункта 1 предложения 1.3.1. Рассмотрим такой частичный порядок на множестве $\{1, \dots, 2^m\}$, что все элементы $2, 3, \dots, 2^m$ попарно несравнимы и 1 является наименьшим элементом. Тогда диаграмма Хассе этого частично упорядоченного множества принадлежит первому классу идемпотентности, т.к. вершина 1 имеет степень $2^m - 1 > 2^m - m - 1$.

Нулевой класс идемпотентности замкнут относительно дизъюнктивной суммы графов на 2^k вершинах. Для первого класса это неверно.

Пример 3.3.5. Дизъюнктивная сумма $G_1 + G_2$ двух произвольных графов G_1, G_2 на 2^k вершинах всегда принадлежит нулевому классу идемпотентности. Действительно, общее количество вершин графа $G_1 + G_2$ равно $n = 2^{k+1}$, а значит, $\lceil \log_2 n \rceil = k + 1$. Согласно пунктам 2-3 предложения 1.3.1 граф $\overline{\mathcal{Q}_{\lceil \log_2 n \rceil}}$ содержит две непересекающиеся клики C_0, C_1 , каждая из которых имеет мощность 2^k . Следовательно, G_1 и G_2 могут быть вложены в C_0 и C_1 , соответственно.

Теперь докажем основную теорему главы.

Теорема 3.3.6. Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$. Тогда следующие величины совпадают.

1. Минимальное количество ν идемпотентных матриц, которые порождают $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.
2. Минимальное такое $m \in \mathbb{N}$, что диаграмма Хассе частичного порядка $\preceq$ может быть вложена в дополнение $\overline{\mathcal{Q}_m}$ булева куба размерности m .
3. Сумма $\lceil \log_2 n \rceil + \text{idem}(\prec)$, где $\text{idem}(\prec) \in \{0, 1\}$ — это номер класса идемпотентности диаграммы Хассе $\preceq$ в терминах определения 3.3.3.

Доказательство. Инварианты из пунктов 1, 2 равны в силу теоремы 3.3.1. Из леммы 3.3.2 вытекает равенство величин из пунктов 2, 3. $\square$

В качестве следствия приведём концептуально новое доказательство ранее известного результата о величине $\nu(T_n(\mathcal{R}))$, см. [30, теорема 6, пункт (i)]. Оказывается, что в этом случае идемпотентные порождающие связаны с гамильтоновыми путями в графе.

Следствие 3.3.7 ([30] Келарев, ван дор Марве, ван Вэйк). Обозначим через ν минимальное количество идемпотентных матриц, порождающих алгебру

$T_n(\mathcal{R})$ всех $n \times n$ верхнетреугольных матриц. Тогда $\nu = \lceil \log_2 n \rceil$, если $n \geq 5$, но $\nu = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ для $n = 2, 3, 4$.

Доказательство. Алгебра $T_n(\mathcal{R})$ является алгеброй инцидентности стандартного линейного порядка $\leq$ на $\{1, \dots, n\}$. Тогда (неориентированная) диаграмма Хассе порядка $\leq$ является графом с рёбрами $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}$. Он может быть вложен в $\overline{\mathcal{Q}_{\lceil \log_2 n \rceil}}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{Q}_{\lceil \log_2 n \rceil}}$ содержит простой путь на n вершинах. По пункту 5 предложения 1.3.1 в графе $\overline{\mathcal{Q}_m}$ существует гамильтонов путь тогда и только тогда, когда $m \geq 3$, т.е. $\lceil \log_2 n \rceil \geq 3$, или $n \geq 5$. Граф $\overline{\mathcal{Q}_1}$ не имеет рёбер, тогда как $\overline{\mathcal{Q}_2}$ не содержит простого пути даже на трёх, а значит, и на четырёх вершинах. Остаётся применить теореме 3.3.6. $\square$

Глава 4

Оценки длины алгебр инцидентности над полем

Результаты главы опубликованы в работе [65]. В этой главе рассматриваются алгебры инцидентности над полями. Исследуется длина этих алгебр. Ввиду теоремы 1.5.14 требуется рассматривать только случай конечных полей, мощность которых меньше размера матриц.

Основным результатом главы является теорема 4.4.3, которая даёт верхнюю оценку для длины алгебры инцидентности в терминах двух инвариантов частично упорядоченного множества — ширины и высоты. Будут построены примеры, демонстрирующие точность этой оценки. Указанные результаты окажутся следствиями из более общих фактов о многодольных частично упорядоченных множествах.

4.1 Верхняя оценка длины

Как обсуждалось ранее, любое частично упорядоченное множество всегда может рассматриваться как m -дольное для подходящего натурального m (предложение 1.2.4). Это позволяет установить связь между длиной алгебры инцидентности и структурой антицепей частично упорядоченного множества.

Предложение 4.1.1. *Пусть $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, его можно рассматривать как m -дольное $(\{1, \dots, n\}, \preceq, \vartheta)$ согласно предложению 1.2.4. Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$. Тогда*

$$\ell(\mathcal{A}) \leq \ell(D_{x_1}(\mathbb{F})) + \dots + \ell(D_{x_m}(\mathbb{F})) + m - 1,$$

где каждое x_i равно мощности прообраза $\vartheta^{-1}(i)$, а длины $\ell(D_{x_i}(\mathbb{F}))$ находятся из теоремы 1.5.11.

Доказательство. Рассмотрим семейство множеств $\{X_i\}_{i=1}^m$ из замечания 1.2.3. Тогда $x_i = |X_i|$, где $i \in \{1, \dots, m\}$. Для удобства положим дополнительно $x_0 = 0$.

Пусть $X_i = \{k_{i,1}, \dots, k_{i,x_i}\}$. В силу замечания 1.2.3 корректно определена подстановка σ на множестве $\{1, \dots, n\}$ согласно правилу $\sigma(k_{i,j}) = j + \sum_{t=0}^{i-1} x_t$. Обозначим через X'_i образ $\sigma(X_i)$. Тогда $X'_i = \mathbb{N} \cap [\sum_{t=0}^{i-1} x_t + 1, \sum_{t=0}^i x_t]$.

Рассмотрим новый частичный порядок $\preceq_\sigma$ на множестве $\{1, \dots, n\}$ такой, что $i \preceq_\sigma j$ тогда и только тогда, когда $\sigma^{-1}(i) \preceq \sigma^{-1}(j)$, см. § 1.4. Положим $\vartheta' = \vartheta \circ \sigma^{-1}$. Заметим, что тогда $(\{1, \dots, n\}, \preceq_\sigma, \vartheta')$ является m -дольным. Более того,

$$\vartheta'^{-1}(i) = \sigma(\vartheta^{-1}(i)) = \sigma(X_i) = X'_i.$$

Значит, семейство $\{X'_i\}_{i=1}^m$ удовлетворяет условиям замечания 1.2.3 по отношению к частичному порядку $\preceq_\sigma$.

Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_n(\preceq_\sigma, \mathbb{F})$. Так как частично упорядоченные множества $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$ и $(\{1, \dots, n\}, \preceq_\sigma)$ изоморфны, то алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ также изоморфны, а значит, их длины совпадают $\ell(\mathcal{A}) = \ell(\mathcal{A}')$.

Покажем, что алгебра $\mathcal{A}'$ имеет следующий блочно-треугольный вид

$$\mathcal{A}' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_{x_1}(\mathbb{F}) & * & \dots & * \\ \hline 0 & D_{x_2}(\mathbb{F}) & \dots & * \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & D_{x_m}(\mathbb{F}) \end{array} \right).$$

Пусть $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha \neq \beta$. Рассмотрим два случая:

[Случай 1.] Предположим, что $\alpha, \beta \in X'_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m\}$. Так как X'_i является антицепью, то имеем $\alpha \not\preceq_\sigma \beta$, а значит, $(A)_{\alpha\beta} = 0$ для каждой матрицы $A \in \mathcal{A}'$.

[Случай 2.] Теперь пусть $\alpha \in X'_i$, $\beta \in X'_j$, где $i > j$. Согласно условию (d) замечания 1.2.3 снова получаем $\alpha \not\preceq_\sigma \beta$. Следовательно, $(A)_{\alpha\beta} = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}'$.

Таким образом, матричная алгебра $\mathcal{A}'$ действительно является блочно-треугольной. Поэтому остаётся применить лемму 1.5.7. $\square$

Покажем, в каких случаях полученная верхняя оценка лучше известной ранее границы $n - 1$ из теоремы 1.5.14.

Предложение 4.1.2. *Рассмотрим величину*

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \ell(D_{x_1}(\mathbb{F})) + \dots + \ell(D_{x_m}(\mathbb{F})) + m - 1$$

из предложения 4.1.1. Верно следующее:

1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, и при этом $x_k > q$ для хотя бы одного $k \in \{1, \dots, m\}$. Тогда $\phi(x_1, \dots, x_m) < n - 1$.
2. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, и при этом $x_k \leq q$ для всех $k \in \{1, \dots, m\}$. Тогда $\phi(x_1, \dots, x_m) = n - 1$.
3. Пусть поле $\mathbb{F}$ бесконечно. Тогда $\phi(x_1, \dots, x_m) = n - 1 = \ell(\mathcal{A})$.

Доказательство. Докажем первый пункт. Выберем индекс $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ так, что $x_{k_0} > q$. Минимальный многочлен каждой матрицы из алгебры $D_{x_{k_0}}(\mathbb{F})$ имеет степень строго меньше, чем x_{k_0} . Отсюда заключаем, что $\ell(D_{x_{k_0}}(\mathbb{F})) < x_{k_0} - 1$ согласно лемме 1.5.5. При этом из теоремы 1.5.14 вытекает неравенство $\ell(D_{x_k}(\mathbb{F})) \leq x_k - 1$ для любого k . Также $\sum_{k=1}^m x_k = n$ в силу условия (а) замечания 1.2.3. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^m \ell(D_{x_i}(\mathbb{F})) + m - 1 < \sum_{i=1}^m (x_i - 1) + m - 1 = n - m + m - 1 = n - 1.$$

Для доказательства второго и третьего пункта заметим, что в обоих случаях выполняется $\ell(D_{x_k}(\mathbb{F})) = x_k - 1$ для всех $k \in \{1, \dots, m\}$ в силу теоремы 1.5.11. Значит, предыдущее неравенство обращается в равенство. Тот факт, что для бесконечных полей $\ell(\mathcal{A}) = n - 1$, был взят из теоремы 1.5.14. $\square$

Следует отметить, что на частично упорядоченном множестве функция ϑ может быть определена не единственным образом даже для одного и того же значения m . При этом предложение 4.1.1 может давать различные верхние оценки длины в зависимости от выбора функции ϑ .

Пример 4.1.3. На множестве $\{1, 2, \dots, 10\}$ рассмотрим частичный порядок $\preceq$, диаграмма Хассе которого изображена на рисунке 4.1. Такое частично

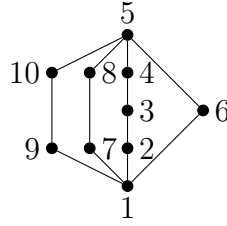


Рис. 4.1: Диаграмма Хассе некоторого 5-дольного частично упорядоченного множества.

упорядоченное множество может быть представлено как 5-дольное по крайней мере двумя различными способами. Построим два разбиения на антицепи как в замечании 1.2.3. Первое разбиение может быть задано как

$$X_1 = \{1\}, X_2 = \{9, 7, 2, 6\}, X_3 = \{3, 8\}, X_4 = \{10, 4\}, X_5 = \{5\}.$$

Второе разбиение вводится, например, следующим образом

$$X'_1 = \{1\}, X'_2 = \{6, 2\}, X'_3 = \{9, 7, 3\}, X'_4 = \{10, 8, 4\}, X'_5 = \{5\}.$$

В качестве основного поля рассмотрим $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Тогда для алгебры инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{10}(\preceq, \mathbb{F}_2)$ предложение 4.1.1 даёт две оценки:

$$\ell(\mathcal{A}) \leq 0 + 2 + 1 + 1 + 0 + 5 - 1 = 8 \quad \text{для первого разбиения,}$$

$$\ell(\mathcal{A}) \leq 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 5 - 1 = 7 \quad \text{для второго разбиения.}$$

Заметим, что обе эти оценки лучше, чем граница $n-1 = 9$ из теоремы 1.5.14. Поэтому этот пример также иллюстрирует применение пункта 1 предложения 4.1.2.

4.2 Специальные пары натуральных чисел

Прежде чем перейти к нижней оценке длины, необходимо ввести вспомогательное понятие подходящей пары чисел. Основным результатом параграфа является предложение 4.2.8, которое даёт достаточное условие, при котором пара чисел является подходящей.

Обозначение 4.2.1. Зададим отображение $\text{col} : D_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ как $\text{col}(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) = (d_1, \dots, d_n)^t$. Затем определим отображение

$$\mathcal{F} : \underbrace{D_n(\mathbb{F}) \times \dots \times D_n(\mathbb{F})}_{n \text{ раз}} \rightarrow M_n(\mathbb{F})$$

по правилу

$$\mathcal{F}(D_1, \dots, D_n) = (\text{col}(D_1) | \text{col}(D_2) | \dots | \text{col}(D_n)).$$

Определение 4.2.2. Рассмотрим натуральные $n, q \in \mathbb{N}$, где $q \neq 1$ является степенью некоторого простого числа. Пару (n, q) будем называть *подходящей*, если существует такое подмножество $S = \{D_1, \dots, D_m\} \subseteq D_n(\mathbb{F}_q)$ и такие одночлены $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_m]$ от m коммутирующих переменных, что выполняется следующее:

1. S порождает $D_n(\mathbb{F}_q)$ как алгебру над $\mathbb{F}_q$;
2. $\ell(S) = \ell(D_n(\mathbb{F}_q))$;
3. множество матриц $\{f_i(D_1, \dots, D_m) \mid i : \deg f_i \leq k\}$ составляет базис пространства $\mathcal{L}_k(S)$ для каждого $k = 0, \dots, \ell(S)$;
4. $f_1 \equiv 1$ и при этом $\deg f_n = \ell(S)$;
5. $\{f_i(D_1, \dots, D_m)\}_{i=1}^n$ является базисом алгебры $D_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$;
6. матрица $G = \mathcal{F}(f_1(D_1, \dots, D_m), \dots, f_n(D_1, \dots, D_m))$ невырождена, причём последняя строка матрицы G^{-1} не содержит ни одного нуля, см. обозначение 4.2.1.

В действительности, для любой коммутативной алгебры над полем и любого ее порождающего подмножества максимальной длины возможно построить семейство одночленов так, чтобы выполнялись условия 1-5 определения 4.2.2. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим подмножество $S = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \mathcal{A}$, которое порождает $\mathcal{A}$ как алгебру. Обозначим $\ell = \ell(S)$, $d = \dim \mathcal{A}$, а также $d_k = \dim \mathcal{L}_k(S)$ для $k = 0, 1, \dots, \ell$. Тогда найдется такое множество одночленов $\{f_i\}_{i=0}^{d-1} \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]$, что верно следующее:

1. $\deg f_i \neq 0$ для всех $i \in \{1, \dots, d-1\}$, но $f_0 \equiv 1_{\mathcal{A}}$;
2. множество $\{f_i(A_1, \dots, A_m)\}_{i=0}^{d-1}$ является базисом $\mathcal{A}$;
3. для каждого $k \in \{0, \dots, \ell\}$ множество одночленов $\{f_i\}_{i=0}^{d_k-1}$ совпадает с множеством $\{f_i \mid i : \deg f_i \leq k\}$ и, более того, $\{f_i(A_1, \dots, A_m)\}_{i=0}^{d_k-1}$ является базисом $\mathcal{L}_k(S)$;
4. для каждого $k \in \{0, \dots, \ell\}$ найдётся $i \in \{0, \dots, d-1\}$ так, что $\deg f_i = k$.

Доказательство. Условия 1,2 вытекают из условия 3. Более того, условие 3 влечёт условие 4 в силу свойств пространств $\mathcal{L}_k(S)$ и роста их размерностей. Поэтому достаточно найти множество одночленов, удовлетворяющее условию 3. Сконструируем это множество по индукции. Для $k = 0$, положим $\{1_{\mathcal{A}}\}$. Если $\{f_i(A_1, \dots, A_m)\}_{i=0}^{d_k-1}$ — это базис $\mathcal{L}_k(S)$, то дополним его до базиса $\mathcal{L}_{k+1}(S)$, добавляя слова над S длины $k + 1$. $\square$

Условие 6 определения 4.2.2 выглядит специфичным для алгебры диагональных матриц. Автору неизвестно, существуют ли нетривиальные примеры пар чисел, которые не являются подходящими. Тем не менее, далее будут получены примеры подходящих пар чисел.

Обозначение 4.2.4. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — некоторые элементы поля $\mathbb{F}$, тогда введём обозначение для матрицы Вандермонда

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Лемма 4.2.5. Если матрица Вандермонда $V = \mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ невырождена, то последняя строка обратной матрицы V^{-1} не содержит ни одного нуля.

Доказательство. Известно, что $\det V \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \neq \alpha_j$ для всех $i \neq j$. Тогда по формуле для элементов обратной матрицы

$$(V^{-1})_{ni} = (-1)^{i+n} \cdot \frac{1}{\det V} \cdot \det \mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq 0$$

для всех $i = 1, \dots, n$. $\square$

Лемма 4.2.6. Пусть натуральное $q \neq 1$ является степенью некоторого простого числа. Рассмотрим произвольное натуральное $n \leq q$. Тогда пара (n, q) будет подходящей в смысле определения 4.2.2.

Доказательство. Так как $n \leq q$, то в конечном поле $\mathbb{F}_q$ найдутся n попарно различных элементов, обозначим их через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Положим $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Тогда степень минимального многочлена матрицы D равна n . Следовательно, множество из одной матрицы $\{D\}$ порождает алгебру $D_n(\mathbb{F}_q)$, и при этом $\ell(\{D\}) = n - 1 = \ell(D_n(\mathbb{F}_q))$ согласно теореме 1.5.11.

Значит, множество $S = \{D\}$ и одночлены $\{f_i(x) = x^{i-1}\}_{i=1}^n$ удовлетворяют условиям 1,2,4,5 определения 4.2.2. Условие 3 вытекает из определения пространств $\mathcal{L}_k(S)$, см. § 1.5. Условие 6 может быть получено из леммы 4.2.5, т.к. $\mathcal{F}(f_1(D), \dots, f_n(D)) = \mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. $\square$

Для произвольных прямоугольных матриц $P \in M_{a \times b}(\mathbb{F})$, $Q \in M_{c \times d}(\mathbb{F})$, будем использовать стандартные обозначения для прямой суммы $P \oplus Q$ и произведения Кронекера $P \otimes Q$. Чтобы получить больше примеров подходящих пар, нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 4.2.7. Пусть $m_1, \dots, m_s$ — произвольные натуральные числа, обозначим их произведение как $n = m_1 \cdot \dots \cdot m_s$. Для каждого $j = 1, \dots, s$ рассмотрим произвольное подмножество матриц $\{P_1^{(j)}, \dots, P_{m_j}^{(j)}\} \subset D_{m_j}(\mathbb{F}_q)$. Тогда семейство матриц

$$\{P_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes P_{i_s}^{(s)} \mid i_j = 1, \dots, m_j, j = 1, \dots, s\} \subset D_n(\mathbb{F}_q), \quad (4.2.1)$$

может быть лексикографически упорядочено относительно набора индексов $(i_1, \dots, i_s)$. Используя только один индекс $i \in \{1, \dots, n\}$, мы можем занумеровать все элементы семейства от наименьшего к наибольшему. Обозначим i -ю матрицу как D_i . Тогда

$$\mathcal{F}(D_1, \dots, D_n) = \mathcal{F}(P_1^{(1)}, \dots, P_{m_1}^{(1)}) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}(P_1^{(s)}, \dots, P_{m_s}^{(s)}),$$

где отображение $\mathcal{F}$ задаётся в соответствии с обозначением 4.2.1.

Доказательство. Будем использовать индукцию по s . База индукции $s = 1$ очевидна. Предположим, что лемма верна для $s - 1$. Обозначим $n' = \frac{n}{m_s} = m_1 \cdot \dots \cdot m_{s-1}$. Пусть $D'_1, \dots, D'_{n'}$ — лексикографически упорядоченное семейство матриц, построенное для множеств $\{P_{i_j}^{(j)}\}_{i_j=1}^{m_j}$, $j = 1, \dots, s - 1$. Тогда $\mathcal{F}(D_1, \dots, D_n)$ совпадает с

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D'_1 \otimes P_1^{(s)}, \dots, D'_1 \otimes P_{m_s}^{(s)}, \dots, D'_{n'} \otimes P_1^{(s)}, \dots, D'_{n'} \otimes P_{m_s}^{(s)}) = \\ \mathcal{F}(D'_1, \dots, D'_{n'}) \otimes \mathcal{F}(P_1^{(s)}, \dots, P_{m_s}^{(s)}). \end{aligned}$$

Остаётся применить предположение индукции к $\mathcal{F}(D'_1, \dots, D'_{n'})$. $\square$

Теперь всё готово для того, чтобы получить серию примеров подходящих пар.

Предложение 4.2.8. Пусть натуральное $q \neq 1$ является степенью некоторого простого числа. Предположим, что натуральное n может быть представлено в виде $n = kq^r$, где $r \in \mathbb{N}_0$, а также $k \in \{1, \dots, q-1\}$. Тогда пара (n, q) будет подходящей в смысле определения 4.2.2.

Доказательство. Если $r = 0$, то предложение совпадает с леммой 4.2.6. Далее будем предполагать, что $r > 0$. Рассмотрим два случая.

[Случай 1.] Пусть $k \geq 2$. Будем использовать конструкцию из работы [2]. Обозначим все элементы поля $\mathbb{F}_q$ как $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. Рассмотрим матрицу $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in D_q(\mathbb{F}_q)$, а также $P = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in D_k(\mathbb{F}_q)$. Далее введём обозначения для следующих произведений Кронекера:

$$\begin{aligned} D_j &= E_q^{\otimes(j-1)} \otimes D \otimes E_q^{\otimes(r-j)} \otimes E_k, \quad j = 1, \dots, r; \\ D_{r+1} &= E_q^{\otimes r} \otimes P. \end{aligned}$$

Обозначим $S = \{D_1, \dots, D_{r+1}\}$. Тогда для всех $i_1, \dots, i_r \in \{0, \dots, q-1\}$, а также любого $i_{r+1} \in \{0, \dots, k-1\}$ рассмотрим одночлены $x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_{r+1}^{i_{r+1}}$. Множество таких одночленов может быть лексикографически упорядочено относительно набора индексов $(i_1, \dots, i_{r+1})$. Тогда, используя только один индекс $i = 1, \dots, n$, пронумеруем все одночлены от наименьшего к наибольшему. Обозначим i -й одночлен как f_i . Покажем, что множество матриц S вместе с одночленами $\{f_i\}_{i=1}^n$ удовлетворяет условиям 1–6 определения 4.2.2.

1) Заметим, что $D_n(\mathbb{F}_q) = D_q(\mathbb{F}_q)^{\otimes r} \otimes D_k(\mathbb{F}_q)$. Тогда одноэлементные множества $\{D\}$, $\{P\}$ порождают алгебры $D_q(\mathbb{F}_q)$ и $D_k(\mathbb{F}_q)$, соответственно. Значит, условие 1 вытекает из оценки для длины тензорных произведений (следствие 1.5.9).

2) Принимая во внимание равенство $n = kq^r$, теорему 1.5.11 и следствие 1.5.9, получаем

$$\ell(S) = r \cdot \ell(D_q(\mathbb{F}_q)) + \ell(D_k(\mathbb{F}_q)) = (q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1 = \ell(D_n(\mathbb{F}_q)).$$

3) Множество $\Theta_k = \{f_i(D_1, \dots, D_{r+1}) \mid i : \deg f_i \leq k\}$ состоит из всех возможных произведений не более чем k матриц из множества S , таких что каждая матрица входит в произведение в степени меньшей, чем степень её минимального многочлена. Тогда $\langle \Theta_k \rangle = \mathcal{L}_k(S)$ по определению пространства $\mathcal{L}_k$, см. § 1.5. Покажем, что множество Θ_k линейно независимо. Действительно,

наборы матриц $E_q = D^0, D, D^2, \dots, D^{q-1}$ и $E_k = P^0, P, P^2, \dots, P^{k-1}$ являются базисами алгебр $D_q(\mathbb{F}_q)$ и $D_k(\mathbb{F}_q)$, соответственно. Так как произведение Кронекера реализует тензорное произведение, то матрицы $D^{i_1} \otimes \dots \otimes D^{i_r} \otimes P^{i_{r+1}}$, где $i_1, \dots, i_r \in \{0, \dots, q-1\}$, а также $i_{r+1} \in \{0, \dots, k-1\}$, составляют базис алгебры $D_n(\mathbb{F}_q) = D_q(\mathbb{F}_q)^{\otimes r} \otimes D_k(\mathbb{F}_q)$. Тогда множество Θ_k линейно независимо как подмножество линейно независимого множества.

4) Имеем $f_1 = x_1^0 \dots x_{r+1}^0 = 1$, а также $\deg f_n = \deg(x_1^{q-1} \dots x_r^{q-1} x_{r+1}^k) = r(q-1) + k = \ell(S)$ аналогично доказательству условия 2.

5) Условие 5 является частным случаем условия 3 при $k = \ell(S)$.

6) Сначала заметим, что матрица G невырождена согласно условию 5. Далее, применяя лемму 4.2.7, заключаем, что

$$\begin{aligned} G &= \mathcal{F}(E_q, D, \dots, D^{q-1})^{\otimes r} \otimes \mathcal{F}(E_q, P, \dots, P^{k-1}) = \\ &= \mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\otimes r} \otimes \mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G^{-1} = (\mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{-1})^{\otimes r} \otimes \mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^{-1}.$$

По лемме 4.2.5 матрицы $\mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{-1}$, $\mathbf{V}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^{-1}$ не содержат нулей в последней строке. Однако тогда и матрица G^{-1} также не содержит нулей в последней строке по определению произведения Кронекера.

[Случай 2.] Пусть $k = 1$. Тогда все рассуждения аналогичны с той разницей, что теперь необходимо рассмотреть множество $S = \{E_q^{\otimes(i-1)} \otimes D \otimes E_q^{\otimes(r-i)}\}_{i=1}^r$ вместе с одночленами $x_1^{i_r} \dots x_r^{i_r}$, где $i_1, \dots, i_r \in \{0, \dots, q-1\}$. $\square$

4.3 Нижняя оценка длины

Нижняя оценка длины будет получена для случая полных многодольных частично упорядоченных множеств с ограничениями на их числа Уитни. Фактически речь будет идти о матричных алгебрах следующего вида.

Предложение 4.3.1. *Рассмотрим алгебру инцидентности*

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_{\mathcal{W}_1}(\mathbb{F}_q) & M_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2}(\mathbb{F}_q) & \dots & M_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_h}(\mathbb{F}_q) \\ \hline O & D_{\mathcal{W}_2}(\mathbb{F}_q) & \dots & M_{\mathcal{W}_2 \times \mathcal{W}_h}(\mathbb{F}_q) \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \dots & D_{\mathcal{W}_h}(\mathbb{F}_q) \end{array} \right) \subseteq M_n(\mathbb{F}_q)$$

над полем $\mathbb{F}_q$, причём $n, h \geq 2$. Предположим, что пары $(\mathscr{W}_2, q), \dots, (\mathscr{W}_{h-1}, q)$ являются подходящими в смысле определения 4.2.2. Тогда верна следующая оценка для длины алгебры

$$\ell(\mathscr{A}) \geq \gamma, \text{ где } \gamma = h - 1 + \sum_{i=1}^h \ell(D_{\mathscr{W}_i}(\mathbb{F}_q)).$$

В этой формуле длины алгебр диагональных матриц находятся согласно теореме 1.5.11.

Для удобства читателя далее приводится короткий план доказательства.

[Шаг 1.] Сконструируем порождающее подмножество $\mathbf{S} \subseteq \mathscr{A}$.

[Шаг 2.] Выберем вспомогательное подмножество $\Phi \subseteq J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$. Докажем, что линейная оболочка $\langle \Phi \rangle$ совпадает с $J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$.

[Шаг 3.] Найдём другое подмножество $\Upsilon \subseteq J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$. Покажем, что $\Phi \subset \langle \Upsilon \rangle$. Значит, $\langle \Upsilon \rangle = J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$ согласно шагу 2.

[Шаг 4.] Докажем, что некоторые элементы множества Υ являются нулевыми.

[Шаг 5.] Покажем, что $|\Upsilon \setminus \{O_n\}| < \dim(J(\mathscr{A}))$. Тогда по шагу 3 получаем, что

$$\dim(J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})) < \dim(J(\mathscr{A})).$$

Значит, $J(\mathscr{A}) \not\subseteq \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$, а значит, $\mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S}) \neq \mathscr{A}$. Таким образом, $\ell(\mathscr{A}) \geq \ell(\mathbf{S}) \geq \gamma$.

Следуя плану, необходимо начать с построения множества $\mathbf{S}$.

Конструкция 4.3.2. Для каждого $j = 2, \dots, h - 1$ рассмотрим множество матриц $S_j = \{D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}\} \subseteq D_{\mathscr{W}_j}(\mathbb{F}_q)$ вместе с одночленами $\{f_1^{(j)}, \dots, f_{\mathscr{W}_j}^{(j)}\}$ от m_j коммутирующих переменных из определения 4.2.2. Также положим

$$G_j = \mathcal{F}(f_1^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}), \dots, f_{\mathscr{W}_j}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)})) \in M_{\mathscr{W}_j}(\mathbb{F}_q). \quad (4.3.1)$$

Кроме того, для $j \in \{1, h\}$ рассмотрим множество $S_j = \{D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}\} \subseteq D_{\mathscr{W}_j}(\mathbb{F}_q)$ вместе с одночленами $\{f_1^{(j)}, \dots, f_{\mathscr{W}_j}^{(j)}\}$ от m_j коммутирующих переменных, которые удовлетворяют по крайней мере условиям 1–5 определения 4.2.2. Это возможно ввиду леммы 4.2.3.

Для каждого $j = 1, \dots, h-1$ определим матрицу $A_{j,j+1}$ размера $\mathscr{W}_j \times \mathscr{W}_{j+1}$ следующим образом. Пусть все элементы матрицы $A_{1,2}$ равны 1. Для удобства обозначим каждый столбец матрицы $A_{1,2}$ как $\left(z_1^{(1)}, \dots, z_{\mathscr{W}_1}^{(1)}\right)^t = (1, \dots, 1)^t$.

Далее для $2 \leq j \leq h-1$ положим все столбцы матрицы $A_{j,j+1}$ одинаковыми и равными последней строке матрицы G_j^{-1} . Другими словами,

$$\begin{pmatrix} (A_{j,j+1})_{1,1} \\ \vdots \\ (A_{j,j+1})_{\mathscr{W}_j,1} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} (A_{j,j+1})_{1,\mathscr{W}_{j+1}} \\ \vdots \\ (A_{j,j+1})_{\mathscr{W}_j,\mathscr{W}_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(j)} \\ \vdots \\ z_{\mathscr{W}_j}^{(j)} \end{pmatrix} = (G_j^{-1})^t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Тогда выполняется

$$\begin{pmatrix} z_1^{(j)} & \dots & z_{\mathscr{W}_j}^{(j)} \end{pmatrix} G_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 2, \dots, h-1. \quad (4.3.3)$$

Важно подчеркнуть, что каждый элемент матрицы $A_{j,j+1}$ отличен от нуля в силу условия 6 определения 4.2.2, т.е.

$$z_\alpha^{(j)} \neq 0, \quad j = 1, \dots, h-1, \quad \alpha = 1, \dots, \mathscr{W}_j. \quad (4.3.4)$$

Для каждого $j = 1, \dots, h-1$ положим $\hat{A}_{j,j+1} \in \mathscr{A}$ равной такой блочной матрице, что все её блоки нулевые за исключением блока на позиции $(j, j+1)$, который равен $A_{j,j+1}$. Аналогично для всех $j = 1, \dots, h$, а также $i_j = 0, \dots, m_j$, положим $\hat{D}_{i_j}^{(j)} \in \mathscr{A}$ равной такой блочной матрице, что все её блоки нулевые за исключением блока на позиции (j, j) , который равен $D_{i_j}^{(j)}$, если $i_j \neq 0$, или единичной матрице $E_{\mathscr{W}_j}$, если $i_j = 0$. Пусть $\hat{S}_j = \{\hat{D}_0^{(j)}, \hat{D}_1^{(j)}, \dots, \hat{D}_{m_j}^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, h$. Наконец положим

$$\mathbf{S} = \{\hat{A}_{1,2}, \hat{A}_{2,3}, \dots, \hat{A}_{h-1,h}\} \cup \hat{S}_1 \cup \hat{S}_2 \cup \dots \cup \hat{S}_h \subseteq \mathscr{A}, \quad (4.3.5)$$

что завершает конструкцию.

Фактически только что была построена некоторая система образующих.

Лемма 4.3.3. *Множество $\mathbf{S}$ порождает алгебру $\mathscr{A}$ из предложения 4.3.1.*

Доказательство. Множество S_j порождает алгебру $D_{\mathscr{W}_j}(\mathbb{F}_q)$ согласно определению 4.2.2. Принимая во внимание структуру матриц $\hat{D}_0^{(j)} \in \hat{S}_j$, заключаем, что множество $\bigcup_{j=1}^h \hat{S}_j$ порождает алгебру $D_{\mathscr{W}_1}(\mathbb{F}_q) \oplus \dots \oplus D_{\mathscr{W}_h}(\mathbb{F}_q) = D_n(\mathbb{F}_q)$. Тогда множество $\bigcup_{j=1}^h \hat{S}_j$ удовлетворяет пункту 1 теоремы 1.4.15, применённой к алгебре $D_n(\mathbb{F}_q)$. Так как $\bigcup_{j=1}^h \hat{S}_j \subseteq \mathbf{S}$, то множество $\mathbf{S}$ удовлетворяет

пункту 1 теоремы 1.4.15, применённой к алгебре $\mathcal{A}$. Из замечания 1.2.7 и равенства (4.3.4) приходим к выводу, что $\{\hat{A}_{j,j+1}\}_{j=1}^{h-1}$ удовлетворяет пункту 2 теоремы 1.4.15, применённой к алгебре $\mathcal{A}$. Таким образом, множество $\mathbf{S}$ порождает $\mathcal{A}$ как алгебру над полем $\mathbb{F}_q$. $\square$

Далее требуется оценить длину множества $\mathbf{S}$. Для этого рассмотрим пространство $J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(S)$. В следующей конструкции будет выбрано специальное подмножество $\Phi \subseteq J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(S)$.

Конструкция 4.3.4. Для каждого $j = 1, \dots, h$, а также $k \in \mathbb{N}$ определим

$$\hat{S}_j^k = \underbrace{\hat{S}_j \cdot \dots \cdot \hat{S}_j}_{k \text{ раз}} = \{\hat{D}_{t_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot \hat{D}_{t_k}^{(j)} \mid t_1, \dots, t_k \in \{1, \dots, m_j\}\},$$

где индексы t_i могут повторяться. Также пусть $\hat{S}_j^0 = \{E_n\}$. Тогда положим $\hat{S}_j^{\leq k} = \bigcup_{i=0}^k \hat{S}_j^i$. Затем для всех $s = 1, \dots, h-1$, $i = 1, \dots, h-s$, а также $k_i, \dots, k_{i+s} \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим множества $\Phi_{s,i,k_i,\dots,k_{i+s}}$, которые состоят из всех возможных произведений $\left(\prod_{j=i}^{i+s-1} \hat{C}^{(j)} \hat{A}_{j,j+1}\right) \cdot \hat{C}^{(i+s)}$, в которых $\hat{C}^{(j)} \in \hat{S}_j^{\leq k_j}$. Наконец положим

$$\Phi = \bigcup_{s=1}^{h-1} \bigcup_{i=1}^{h-s} \{ \Phi_{s,i,k_i,\dots,k_{i+s}} \mid s + \sum_{u=i}^{i+s} k_u \leq \gamma - 1, k_u \in \mathbb{N}_0 \}, \quad (4.3.6)$$

где величина γ была определена в предложении 4.3.1.

Установим некоторые свойства множества Φ .

Лемма 4.3.5. Верно включение $\Phi \subseteq J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$, причём линейная оболочка $\langle \Phi \rangle = J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$.

Доказательство. Из конструкции 4.3.4 получаем включение $\Phi_{s,i,k_i,\dots,k_{i+s}} \subseteq J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{s+k_i+\dots+k_{i+s}}(\mathbf{S})$. Из равенства (4.3.6) вытекает, что $\Phi \subseteq J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$. Соотношение $\langle \Phi \rangle = J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$ может быть получено на основе следующих наблюдений:

1) матрица $H \in \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$ имеет нулевую диагональ тогда и только тогда, когда H является линейной комбинацией таких произведений с количеством множителей $\leq \gamma - 1$ элементов множества $\mathbf{S}$, что хотя бы одним из множителей является матрица $\hat{A}_{j,j+1}$;

2) $\hat{A}_{i,i+1} \cdot \hat{A}_{j,j+1} = O_n$ если $i + 1 \neq j$;

3) если $j \neq i$, то $\widehat{D}_{i_j}^{(j)} \widehat{A}_{i,i+1} = O_n$ для всех $i_j = 0 \dots, m_j$;

4) если $j \neq i + 1$, то $\widehat{A}_{i,i+1} \widehat{D}_{i_j}^{(j)} = O_n$ для всех $i_j = 0 \dots, m_j$. $\square$

Наша следующая цель — выбрать другое подмножество $\Upsilon \subseteq \mathcal{A}$, которое, как мы увидим далее, в некотором смысле «меньше», чем множество Φ .

Конструкция 4.3.6. Будем использовать одночлены $f_1^{(j)}, \dots, f_{W_j}^{(j)}$ из конструкции 4.3.2. Для каждого $s = 1, \dots, h-1$, $i = 1, \dots, h-s$, а также $d_j = 1, \dots, \mathcal{W}_j$, где $j = i, \dots, i+s$ рассмотрим матрицу

$$B_{s,i,d_i,\dots,d_{i+s}} = \left(\prod_{j=i}^{i+s-1} f_{d_j}^{(j)}(\widehat{D}_1^{(j)}, \dots, \widehat{D}_{m_j}^{(j)}) \cdot \widehat{A}_{j,j+1} \right) \cdot f_{d_{i+s}}^{(i+s)}(\widehat{D}_1^{(i+s)}, \dots, \widehat{D}_{m_{i+s}}^{(i+s)}). \quad (4.3.7)$$

Тогда зададим множество Υ как

$$\Upsilon = \bigcup_{s=1}^{h-1} \bigcup_{i=1}^{h-s} \{B_{s,i,d_1,\dots,d_{i+s}} \mid s + \sum_{j=i}^{i+s} \deg f_{d_j}^{(j)} \leq \gamma - 1, 1 \leq d_j \leq \mathcal{W}_j\}, \quad (4.3.8)$$

где γ было определено в предложении 4.3.1.

Покажем, что линейная оболочка множества Υ совпадает с пересечением $J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$.

Лемма 4.3.7. Верно включение $\Upsilon \subseteq J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$. Более того, $\Phi \subseteq \langle \Upsilon \rangle$, а значит, $\langle \Upsilon \rangle = J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$.

Доказательство. Из равенства (4.3.7) получаем, что

$$B_{s,i,d_i,\dots,d_{i+s}} \in J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{s+\deg f_{d_i}^{(i)}+\dots+\deg f_{d_{i+s}}^{(i+s)}}(\mathbf{S}).$$

Значит, $\Upsilon \subseteq J(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$ согласно равенству (4.3.8).

Покажем, что $\Phi \subseteq \langle \Upsilon \rangle$. Рассмотрим произвольную матрицу X из множества Φ . Согласно конструкции 4.3.4 матрица X принадлежит некоторому множеству $\Phi_{s,i,k_i,\dots,k_{i+s}}$, а значит, она может быть представлена в виде

$$X = \left(\prod_{j=i}^{i+s-1} \widehat{C}^{(j)} \widehat{A}_{j,j+1} \right) \cdot \widehat{C}^{(i+s)}, \quad (4.3.9)$$

где $\widehat{C}^{(j)} \in \widehat{S}_j^{\leq k_j}$, $s \in \{1, \dots, h-1\}$, $i \in \{1, \dots, h-s\}$, причём

$$s + k_i + \dots + k_{i+s} \leq \gamma - 1. \quad (4.3.10)$$

В силу включения $\widehat{C}^{(j)} \in \widehat{S}_j^{\leq k_j}$ имеем разложение $\widehat{C}^{(j)} = \widehat{D}_{t_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot \widehat{D}_{t_{s_j}}^{(j)}$ для некоторых, возможно, повторяющихся индексов $t_1, \dots, t_{s_j} \in \{1, \dots, m_j\}$, и при этом $s_j \leq k_j$. Если $s_j = 0$, то $\widehat{C}^{(j)} = E_n$, однако ввиду блочной структуры матриц, а также равенства (4.3.9) мы положим в этом случае $s_j = 1$ (далее будет показана корректность такого перехода) и $\widehat{C}^{(j)} = \widehat{D}_0^{(j)}$, где, как и раньше,

$$\widehat{D}_0^{(j)} = O_{\mathscr{W}_1} \oplus \dots \oplus O_{\mathscr{W}_{j-1}} \oplus E_{\mathscr{W}_j} \oplus O_{\mathscr{W}_{j+1}} \oplus \dots \oplus O_{\mathscr{W}_h}. \quad (4.3.11)$$

Из определения матриц $D_{i_j}^{(j)}$ (см. конструкцию 4.3.2) получаем, что

$$\widehat{C}^{(j)} = O_{\mathscr{W}_1} \oplus \dots \oplus O_{\mathscr{W}_{j-1}} \oplus D_{t_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot D_{t_{s_j}}^{(j)} \oplus O_{\mathscr{W}_{j+1}} \oplus \dots \oplus O_{\mathscr{W}_h}.$$

Отметим, что $D_{t_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot D_{t_{s_j}}^{(j)}$ является произведением длины $s_j \leq k_j$, причём каждая матрица $D_{t_i}^{(j)}$ принадлежит порождающему подмножеству S_j алгебры $D_{\mathscr{W}_j}(\mathbb{F}_q)$. Значит, верно включение $D_{t_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot D_{t_{s_j}}^{(j)} \in \mathcal{L}_{k_j}(S_j)$. Из конструкции 4.3.2 и определения 4.2.2 получаем, что множество

$$\{f_{d_j}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}) \mid d_j : \deg f_{d_j}^{(j)} \leq k_j\}$$

является базисом пространства $\mathcal{L}_{k_j}(S_j)$. Рассмотрим разложение по этому базису

$$D_{t_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot D_{t_{s_j}}^{(j)} = \sum_{\substack{d_j \in \{1, \dots, \mathscr{W}_j\}: \\ \deg f_{d_j}^{(j)} \leq k_j}} \lambda_{d_j}^{(j)} \cdot f_{d_j}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)})$$

для некоторых коэффициентов $\lambda_{d_j}^{(j)}$ из основного поля $\mathbb{F}_q$. Вспомним, что $f_1^{(j)} \equiv 1$, поэтому $f_1^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}) = E_{\mathscr{W}_j}$. Возвращаясь к $n \times n$ матрицам, получаем

$$\widehat{C}^{(j)} = \widehat{D}_{t_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot \widehat{D}_{t_{s_j}}^{(j)} = \sum_{\substack{d_j \in \{2, \dots, \mathscr{W}_j\}: \\ \deg f_{d_j}^{(j)} \leq k_j}} \lambda_{d_j}^{(j)} \cdot f_{d_j}^{(j)}(\widehat{D}_1^{(j)}, \dots, \widehat{D}_{m_j}^{(j)}) + \lambda_1^{(j)} \widehat{D}_0^{(j)},$$

здесь было учтено равенство (4.3.11). Далее подставим полученное только что выражение для матрицы $\widehat{C}^{(j)}$ в равенство (4.3.9):

$$X = \prod_{j=i}^{i+s-1} \left(\left(\sum_{\substack{d_j \in \{2, \dots, \mathscr{W}_j\}: \\ \deg f_{d_j}^{(j)} \leq k_j}} \lambda_{d_j}^{(j)} \cdot f_{d_j}^{(j)}(\widehat{D}_1^{(j)}, \dots, \widehat{D}_{m_j}^{(j)}) + \lambda_1^{(j)} \widehat{D}_0^{(j)} \right) \widehat{A}_{j,j+1} \right) \cdot \left(\sum_{\substack{d_{i+s} \in \{2, \dots, \mathscr{W}_{i+s}\}: \\ \deg f_{d_{i+s}}^{(i+s)} \leq k_{i+s}}} \lambda_{d_{i+s}}^{(i+s)} \cdot f_{d_{i+s}}^{(i+s)}(\widehat{D}_1^{(i+s)}, \dots, \widehat{D}_{m_{i+s}}^{(i+s)}) + \lambda_1^{(i+s)} \widehat{D}_0^{(i+s)} \right).$$

Раскроем скобки, учитывая соотношения $\widehat{D}_0^{(j)} \widehat{A}_{j,j+1} = \widehat{A}_{j,j+1} \widehat{D}_0^{(j+1)} = \widehat{A}_{j,j+1}$, которые вытекают из вида блочной структуры матриц. Эти соотношения также позволяют заменить матрицу $\widehat{D}_0^{(j)}$ на единичную матрицу $E_n = f_1^{(j)}(\widehat{D}_1^{(j)}, \dots, \widehat{D}_{m_j}^{(j)})$ всюду в предыдущем равенстве. Поэтому, если ранее $s_j = 0$ было заменено на $s_j = 1$, то теперь мы можем вернуть $s_j = 0$. После раскрытия скобок получаем выражение вида

$$X = \sum_{(d_i, \dots, d_{i+s}) \in \Delta} \mu_{d_i, \dots, d_{i+s}} \left(\prod_{j=i}^{i+s-1} f_{d_j}^{(j)}(\widehat{D}_1^{(j)}, \dots, \widehat{D}_m^{(j)}) \widehat{A}_{j,j+1} \right) \cdot f_{d_{i+s}}^{(i+s)}(\widehat{D}_1^{(i+s)}, \dots, \widehat{D}_m^{(i+s)})$$

для подходящих скаляров $\mu_{d_i, \dots, d_{i+s}}$ из основного поля $\mathbb{F}_q$, некоторые из которых могут равняться нулю. Множество Δ состоит из таких наборов $(d_i, \dots, d_{i+s})$, что $1 \leq d_j \leq \mathscr{W}_j$ и при этом

$$\deg f_{d_i}^{(i)} + \dots + \deg f_{d_{i+s}}^{(i+s)} \leq k_i + \dots + k_{i+s}. \quad (4.3.12)$$

Учитывая равенство (4.3.7), предыдущее выражение для матрицы X может быть переписано как

$$X = \sum_{(d_i, \dots, d_{i+s}) \in \Delta} \mu_{d_i, \dots, d_{i+s}} \cdot B_{s,i,d_i, \dots, d_{i+s}}.$$

Полученное равенство вместе с соотношениями (4.3.8), (4.3.10), (4.3.12) позволяет сделать вывод, что $X \in \langle \Upsilon \rangle$. Так как X — это произвольная матриц из множества Φ , мы заключаем, что $\Phi \subseteq \langle \Upsilon \rangle$. Остаётся заметить, что из леммы 4.3.5 вытекает равенство

$$\langle \Upsilon \rangle = J(\mathscr{A}) \cap \mathscr{L}_{\gamma-1}(S).$$

Доказательство леммы окончено. □

Далее мы покажем, что некоторые элементы множества Υ заведомо являются нулевыми.

Лемма 4.3.8. *В обозначениях конструкции 4.3.2 верны равенства*

$$\widehat{A}_{j-1,j} f_{d_j}^{(j)}(\widehat{D}_1^{(j)}, \dots, \widehat{D}_{m_j}^{(j)}) \widehat{A}_{j,j+1} = O_n, \quad j = 2, \dots, h-1, \quad d_j \neq \mathscr{W}_j.$$

Доказательство. Утверждение эквивалентно следующему

$$A_{j-1,j} f_{d_j}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}) A_{j,j+1} = O_{\mathscr{W}_{j-1} \times \mathscr{W}_{j+1}} \quad j = 2, \dots, h-1, \quad d_j \neq \mathscr{W}_j.$$

При помощи равенств (4.3.2) предыдущие соотношения могут быть переписаны в терминах строк матриц $A_{j-1,j}$ и столбцов матриц $A_{j,j+1}$

$$\begin{pmatrix} z_\alpha^{(j-1)} & z_\alpha^{(j-1)} & \dots & z_\alpha^{(j-1)} \end{pmatrix} \cdot f_{d_j}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}) \cdot \begin{pmatrix} z_1^{(j)} \\ \vdots \\ z_{\mathscr{W}_j}^{(j)} \end{pmatrix} = 0$$

для всех $\alpha = 1, \dots, \mathscr{W}_{j-1}$, $j = 2, \dots, h-1$, $d_j \neq \mathscr{W}_j$. Соотношения (4.3.4) позволяют разделить обе части равенства на $z_\alpha^{(j-1)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot f_{d_j}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}) \cdot \begin{pmatrix} z_1^{(j)} \\ \vdots \\ z_{\mathscr{W}_j}^{(j)} \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $f_{d_j}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)})$ является диагональной матрицей, то предыдущие соотношения могут быть переписаны в терминах отображения $\mathscr{F}$ (см. обозначение 4.2.1)

$$\begin{pmatrix} z_1^{(j)} & \dots & z_{\mathscr{W}_j}^{(j)} \end{pmatrix} \cdot R^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.13)$$

$$R^{(j)} = \mathscr{F}(f_1^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}), \dots, f_{\mathscr{W}_{j-1}}^{(j)}(D_1^{(j)}, \dots, D_{m_j}^{(j)}), O_{\mathscr{W}_j \times \mathscr{W}_j})$$

Эти соотношения немедленно вытекают из равенств (4.3.1), (4.3.3), если заменить на нули все элементы последнего столбца матрицы G_j . $\square$

Из предыдущей леммы вытекает оценка на мощность $|\Upsilon|$.

Лемма 4.3.9. *Выполнено $|\Upsilon \setminus \{O_n\}| < \dim J(\mathscr{A})$.*

Доказательство. Рассмотрим равенства (4.3.7), (4.3.8). Из леммы 4.3.8 вытекает, что для любого $s \geq 2$ матрица $B_{s,i,d_i,\dots,d_{i+s}} = O$ при $d_j \neq \mathscr{W}_j$ для некоторого

$j \in \{i+1, \dots, i+s-1\}$. Значит любая матрица из множества $\Upsilon \setminus \{O\}$ имеет вид $B_{s,i,d_i,\mathscr{W}_{i+1},\dots,\mathscr{W}_{i+s-1},d_{i+s}}$ для $1 \leq s \leq h-1$. Более того, равенство (4.3.8) и определение 4.2.2 гарантируют, что $B_{h-1,1,\mathscr{W}_1,\mathscr{W}_2,\dots,\mathscr{W}_h} \notin \Upsilon$, т.к.

$$h-1 + \deg f_{\mathscr{W}_1}^{(1)} + \dots + \deg f_{\mathscr{W}_h}^{(h)} =$$

$$h-1 + \ell(D_{\mathscr{W}_1}(\mathbb{F}_q)) + \dots + \ell(D_{\mathscr{W}_h}(\mathbb{F}_q)) = \gamma > \gamma-1.$$

Далее определим множество наборов

$$\Lambda = \bigcup_{1 \leq i < j \leq h} \{(d_i, d_j, i, j) \mid d_i = 1, \dots, \mathscr{W}_i, d_j = 1, \dots, \mathscr{W}_j\},$$

а также отображение $\nu : \Lambda \setminus \{(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_h, 1, h)\} \rightarrow \Upsilon$, которое переводит набор (d_i, d_j, i, j) в матрицу $B_{j-i,i,d_i,\mathscr{W}_{i+1},\dots,\mathscr{W}_{j-1},d_j}$. Тогда

$$|\Upsilon \setminus \{O_n\}| \leq |\text{Im } \nu| \leq |\Lambda \setminus \{(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_h, 1, h)\}| < |\Lambda| =$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq h} \mathscr{W}_i \cdot \mathscr{W}_j = \sum_{1 \leq i < j \leq h} \dim M_{\mathscr{W}_i \times \mathscr{W}_j}(\mathbb{F}_q) = \dim J(\mathscr{A}),$$

т.к. $J(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{A}$ является подпространством матриц с нулевой диагональю. $\square$

Теперь всё готово для завершения доказательства предложения 4.3.1.

Доказательство предложения 4.3.1. Рассмотрим подмножество $\mathbf{S} \subseteq \mathscr{A}$ из конструкции 4.3.2. По лемме 4.3.3 оно является системой образующих алгебры $\mathscr{A}$. Далее рассмотрим пересечение $J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S}) \subseteq \mathscr{A}$. Согласно леммам 4.3.7, 4.3.9, существует такое подмножество $\Upsilon \subseteq J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$, что его линейная оболочка совпадает с $J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$ и при этом $|\Upsilon \setminus \{O_n\}| < \dim J(\mathscr{A})$. Следовательно, $\dim(J(\mathscr{A}) \cap \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})) < \dim J(\mathscr{A})$. Тогда $J(\mathscr{A}) \not\subseteq \mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S})$, а значит, $\mathcal{L}_{\gamma-1}(\mathbf{S}) \neq \mathscr{A}$. По определению длины алгебры получаем $\ell(\mathscr{A}) \geq \ell(\mathbf{S}) \geq \gamma$. $\square$

4.4 Связь длины с инвариантами частично упорядоченного множества

В этом разделе будет получена точная верхняя оценка на длину в терминах высоты и ширины частично упорядоченного множества. Перед этим необходимо объединить результаты трёх предыдущих параграфов.

Теорема 4.4.1. Пусть $(\{1, \dots, n\}, \preceq, \vartheta)$ — полное h -дольное частично упорядоченное множество, причём $n, h \geq 2$. Рассмотрим соответствующую алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_q)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Предположим, что числа Уитни $\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots, \mathcal{W}_{h-1}$ могут быть представлены в виде $\mathcal{W}_j = k_j q^{r_j}$ для некоторых $r_j \in \mathbb{N}_0$, $k_j \in \{1, \dots, q-1\}$. Тогда

$$\ell(\mathcal{A}) = \ell(D_{\mathcal{W}_1}(\mathbb{F}_q)) + \dots + \ell(D_{\mathcal{W}_h}(\mathbb{F}_q)) + h - 1,$$

В этой формуле длины алгебр диагональных матриц находятся по теореме 1.5.11.

Доказательство. Согласно доказательству предложения 4.1.1 найдётся другой частичный порядок $\preceq_\sigma$ на множестве $\{1, \dots, n\}$ такой, что $(\mathbf{n}, \preceq) \cong (\mathbf{n}, \preceq_\sigma)$ и алгебра $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_n(\preceq_\sigma, \mathbb{F}_q)$ имеет блочно-треугольную структуру как в предложении 4.3.1.

Обозначим $\gamma = \ell(D_{\mathcal{W}_1}(\mathbb{F}_q)) + \dots + \ell(D_{\mathcal{W}_h}(\mathbb{F}_q)) + h - 1$. Все пары $(\mathcal{W}_2, q)$, $(\mathcal{W}_3, q)$, $\dots$, $(\mathcal{W}_{h-1}, q)$ являются подходящими по предложению 4.2.8. Тогда $\ell(\mathcal{A}') \geq \gamma$ в силу предложения 4.3.1. Значит, $\ell(\mathcal{A}') = \gamma$ по предложению 4.1.1. Остаётся отметить, что $\ell(\mathcal{A}) = \ell(\mathcal{A}')$, так как $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$. $\square$

В качестве следствия получаем, что оценка из предложения 4.1.1 является точной в достаточно общих предположения.

Следствие 4.4.2. Зафиксируем натуральные числа $n \geq m$, $n \geq 2$. Рассмотрим произвольные $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие $x_1 + \dots + x_m = n$. Тогда существует m -дольное частично упорядоченное множество $(\{1, \dots, n\}, \preceq, \vartheta)$ такое, что $x_i = |\vartheta^{-1}(i)|$ и при этом для любого поля $\mathbb{F}$ выполняется

$$\ell(\mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})) = \ell(D_{x_1}(\mathbb{F})) + \dots + \ell(D_{x_m}(\mathbb{F})) + m - 1.$$

Доказательство. Если поле $\mathbb{F}$ бесконечно, то по теореме 1.5.11 $\ell(D_{x_i}(\mathbb{F})) = x_i - 1$. Тогда утверждение вытекает из теоремы 1.5.14. Далее предполагаем, что $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$.

Для каждого $i = 1, \dots, m$ определим $r_i = \lfloor \log_q x_i \rfloor$, а также $k_i = \left\lfloor \frac{x_i}{q^{\lfloor \log_q x_i \rfloor}} \right\rfloor = \lfloor q^{\{\log_q x_i\}} \rfloor$. Тогда найдутся такие $r_{0,i} \in \{0, \dots, q^{r_i} - 1\}$, что каждое x_i может быть представлено в виде $x_i = k_i \cdot q^{r_i} + r_{0,i}$. Зададим следующие величины

$$\mathcal{W}_i = k_i \cdot q^{r_i}, \quad N = \sum_{i=1}^m \mathcal{W}_i, \quad M = n - N = \sum_{i=1}^m r_{0,i}.$$

Для числа N рассмотрим полное m -дольное частично упорядоченного множество $(\{1, \dots, N\}, \preceq, \tilde{\vartheta})$ с набором чисел Уитни $(\mathscr{W}_1, \dots, \mathscr{W}_m)$. Обозначим через $\mathscr{B} = \mathscr{A}_N(\preceq, \mathbb{F}_q)$ соответствующую алгебру инцидентности.

Если $M = 0$, т.е. $r_{0,i} = 0$ для всех i , тогда имеем $\mathscr{W}_i = x_i$ и при этом $N = n$. В этом случае достаточно положить $\preceq = \tilde{\preceq}$, $\vartheta = \tilde{\vartheta}$ и применить теорему 4.4.1.

Далее будем предполагать, что $M \neq 0$, т.е. $r_{0,i} \neq 0$ для по крайней мере одного индекса i . Положим $\preceq = \tilde{\preceq} \cup \{(j, j) \mid j = N + 1, \dots, N + M\}$. Тогда соответствующая алгебра инцидентности $\mathscr{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_q) = \mathscr{B} \oplus D_M(\mathbb{F}_q)$.

Далее мы определим функцию $\vartheta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, которая сохраняет строгий порядок и при этом сюръективна. Пусть $r_{0,i_1}, \dots, r_{0,i_d}$ — это в точности все ненулевые элементы семейства $\{r_{0,i}\}_{i=1}^m$, причём индексы $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq m$ упорядочены. Для каждого $u = 1, \dots, d$ введём множество $\mathscr{Y}_u$ следующим образом

$$\mathscr{Y}_1 = \{N + 1, \dots, N + r_{0,i_1}\}, \mathscr{Y}_u = \{N + \sum_{j=1}^{u-1} r_{0,i_j} + 1, \dots, N + \sum_{j=1}^u r_{0,i_j}\}, u \geq 2.$$

Получаем разбиение

$$\{1, \dots, n\} = \{1, \dots, N\} \cup \mathscr{Y}_1 \cup \dots \cup \mathscr{Y}_d,$$

где $|\mathscr{Y}_u| = r_{0,i_u}$. Тогда положим

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \tilde{\vartheta}(t), & \text{если } t \in \{1, \dots, N\}, \\ i_u, & \text{если } t \in \mathscr{Y}_u. \end{cases}$$

Отображение ϑ является сюръективным и сохраняет строгий порядок в силу того, что $\tilde{\vartheta}$ обладает теми же свойствами.

Проверим, что $|\vartheta^{-1}(i)| = x_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Действительно, если i принадлежит множеству $\{i_1, \dots, i_d\}$, скажем $i = i_u$, то получаем $|\vartheta^{-1}(i)| = |\tilde{\vartheta}^{-1}(i)| + |\mathscr{Y}_u| = \mathscr{W}_i + r_{0,i} = k_j \cdot q^{r_i} + r_{0,i} = x_i$. Если i не принадлежит множеству $\{i_1, \dots, i_d\}$, тогда $|\vartheta^{-1}(i)| = |\tilde{\vartheta}^{-1}(i)| = \mathscr{W}_i = k_j \cdot q^{r_i} = x_i$, т.к. $r_{0,i} = 0$.

Вычислим длину алгебры $\mathscr{A} = \mathscr{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_q)$. По лемме 1.5.7 и теореме 4.4.1 выполнено

$$\ell(\mathscr{A}) \geq \ell(\mathscr{B}) = \ell(D_{\mathscr{W}_1}(\mathbb{F}_q)) + \dots + \ell(D_{\mathscr{W}_m}(\mathbb{F}_q)) + m - 1.$$

Однако по теореме 1.5.11

$$\begin{aligned} \ell(D_{\mathscr{W}_i}(\mathbb{F}_q)) &= (q - 1)[\log_q \mathscr{W}_i] + [q^{\{\log_q \mathscr{W}_i\}}] - 1 = (q - 1)r_i + k_i - 1 = \\ &= (q - 1)[\log_q x_i] + [q^{\{\log_q x_i\}}] - 1 = \ell(D_{x_i}(\mathbb{F}_q)). \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем

$$\ell(\mathcal{A}) \geq \ell(D_{x_1}(\mathbb{F}_q)) + \dots + \ell(D_{x_h}(\mathbb{F}_q)) + h - 1.$$

Обратное неравенство вытекает из предложения 4.1.1. $\square$

Теперь всё готово для доказательства основного результата главы.

Теорема 4.4.3. *Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$. Обозначим через h и w , соответственно, высоту и ширину частично упорядоченного множества $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$. Тогда*

$$\ell(\mathcal{A}) \leq (\ell(D_w(\mathbb{F})) + 1) \cdot h - 1.$$

В этой формуле длина алгебры диагональных матриц $\ell(D_w(\mathbb{F}))$ находится согласно теореме 1.5.11.

Более того, для любых $h', w' \in \mathbb{N}$ найдётся $n' \in \mathbb{N}$ и такой частичный порядок $\preceq'$ на множестве $\{1, \dots, n'\}$, что высота и ширина равны h' и w' , соответственно, и при этом

$$\ell(\mathcal{A}_{n'}(\preceq', \mathbb{F})) = (\ell(D_{w'}(\mathbb{F})) + 1) \cdot h' - 1.$$

Доказательство. Сначала докажем верхнюю оценку. Согласно предложению 1.2.4 найдётся по крайней мере одно отображение $\vartheta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, h\}$ такое, что тройка $(\{1, \dots, n\}, \preceq, \vartheta)$ является h -дольным частично упорядоченным множеством. Так как каждый прообраз $\vartheta^{-1}(i)$ — это антицепь, то по определению ширины $x_i = |\vartheta^{-1}(i)| \leq w$. В силу того, что функция $\phi(x) = \ell(D_x(\mathbb{F}))$ монотонна (см. теорему 1.5.12), то получаем $\ell(D_{x_i}(\mathbb{F})) \leq \ell(D_w(\mathbb{F}))$. Следовательно,

$$\ell(\mathcal{A}) \leq \ell(D_{x_1}(\mathbb{F})) + \dots + \ell(D_{x_h}(\mathbb{F})) + h - 1 \leq (\ell(D_w(\mathbb{F})) + 1) \cdot h - 1.$$

Докажем вторую часть следствия. Сначала рассмотрим случай, когда поле $\mathbb{F}$ бесконечно. Положим $n' = w' \cdot h'$ и пусть $(\{1, \dots, n'\}, \preceq', \vartheta')$ — полное h' -дольное частично упорядоченное множество, все числа Уитни которого равны w' . По теореме 1.5.14 выполнено $\ell(\mathcal{A}_{n'}(\preceq', \mathbb{F})) = n' - 1$. С другой стороны, по теореме 1.5.11 также получаем

$$(\ell(D_{w'}(\mathbb{F})) + 1) \cdot h' - 1 = w' \cdot h' - 1 = n' - 1.$$

Далее предполагаем, что $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Положим

$$r = [\log_q w'], \quad k = \left\lfloor \frac{w'}{q^{[\log_q w']}} \right\rfloor = [q^{\{\log_q w'\}}], \quad \tilde{w} = kq^r.$$

Заметим, что $0 \leq w' - \tilde{w} \leq q^r - 1$. Рассмотрим полное h' -дольное частично упорядоченное множество $(\{1, \dots, n'\}, \preceq', \vartheta')$ с числами Уитни

$$\mathcal{W}_1 = w', \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \dots = \mathcal{W}_{h-1} = \mathcal{W}_h = \tilde{w}.$$

Ширина частично упорядоченного множества $(\{1, \dots, n'\}, \preceq')$ совпадает с $\max_{j=1, \dots, h} \mathcal{W}_j = w'$. Алгебра инцидентности $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{n'}(\preceq', \mathbb{F})$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4.1. Тогда

$$\ell(\mathcal{A}') = \ell(D_{w'}(\mathbb{F})) + (h' - 1)\ell(D_{\tilde{w}}(\mathbb{F})) + h' - 1.$$

Заметим, что выполняются равенства

$$r = [\log_q w'] = [\log_q \tilde{w}], \quad k = \left\lfloor \frac{w'}{q^{[\log_q w']}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\tilde{w}}{q^{[\log_q \tilde{w}]}} \right\rfloor.$$

Тогда $\ell(D_{w'}(\mathbb{F})) = \ell(D_{\tilde{w}}(\mathbb{F}))$ по теореме 1.5.11. Получаем, что $\ell(\mathcal{A}') = (\ell(D_{w'}(\mathbb{F})) + 1) \cdot h' - 1$. $\square$

4.5 Диагональное число алгебры инцидентности

В этом параграфе выводится понятие диагонального числа алгебры инцидентности и приводится верхняя оценка на величину этого инварианта в следствии 4.5.4. Однако сначала нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.5.1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\preceq, \mathbb{F})$ — алгебра инцидентности, $n \geq 2$, $S = \{A_i = D_i + B_i\}_{i=1}^m$ — произвольная порождающая система алгебры $\mathcal{A}$, $D_i \in D_n(\mathbb{F})$, $B_i \in J(\mathcal{A})$ для $i = 1, \dots, m$. Определим величины

$$\ell_J(S) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \mathcal{L}_k(S) \supseteq J(\mathcal{A})\},$$

$$\ell_J(\mathcal{A}) = \max\{\ell_J(S) \mid S \subseteq \mathcal{A} : \mathcal{L}(S) = \mathcal{A}\},$$

$$\ell_D(S) = \ell(\{D_1, \dots, D_m\}).$$

Тогда

$$\ell(S) = \max\{\ell_J(S), \ell_D(S)\}, \quad \ell(\mathcal{A}) = \max\{\ell_J(\mathcal{A}), \ell(D_n(\mathbb{F}))\}.$$

Доказательство. Обозначим $\ell_J = \ell_J(S)$, $\ell_D = \ell_D(S)$, $M = \max\{\ell_J, \ell_D\}$. Согласно предложению 1.4.4 можно считать, что алгебра $\mathcal{A}$ верхнетреугольная.

[Шаг 1.] Покажем, что $\ell(S) \leq M$. Это эквивалентно тому, что $\mathcal{L}_M(S) \supseteq \mathcal{A}$. Так как $M \geq \ell_J$, получаем $J(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}_M(S)$. Из неравенства $M \geq \ell_D$ вытекает, что для любой матрицы $D \in D_n(\mathbb{F})$, найдётся матрица $A_D \in \mathcal{L}_M(S)$ такая, что $A_D = D + B_D$ для некоторой $B_D \in J(\mathcal{A})$. Тогда $D = A_D - B_D \in \mathcal{L}_M(S)$. Для всех $A = D + B \in \mathcal{A}$, где $D \in D_n(\mathbb{F})$, $B \in J(\mathcal{A})$, получаем $B, D \in \mathcal{L}_M(S)$, а значит, $A \in \mathcal{L}_M(S)$.

[Шаг 2.] Покажем, что $\ell(S) \geq M$. Рассмотрим случай $M = \ell_D$. Рассуждая от противного, предположим, что $\ell(S) < \ell_D$. Тогда проекция алгебры $\mathcal{L}(S) = \mathcal{A}$ на диагональ отличается от $D_n(\mathbb{F})$, что невозможно. Теперь перейдём к случаю $M = \ell_J$. Предполагая $\ell(S) < \ell_J$, получаем противоречие $J(\mathcal{A}) \not\subseteq \mathcal{L}(S) = \mathcal{A}$.

[Шаг 3.] Остаётся вывести формулу для $\ell(\mathcal{A})$. Начнём с определения $\ell(\mathcal{A}) = \max\{\ell(S) \mid S : \mathcal{L}(S) = \mathcal{A}\}$ и учтём уже доказанную формулу для $\ell(S)$. Тогда $\ell(\mathcal{A}) = \max\{\max\{\ell_J(S), \ell_D(S)\} \mid S : \mathcal{L}(S) = \mathcal{A}\}$, что может быть переписано как

$$\ell(\mathcal{A}) = \max\left\{\max_{S: \mathcal{L}(S)=\mathcal{A}} \ell_J(S), \max_{S: \mathcal{L}(S)=\mathcal{A}} \ell_D(S)\right\} = \max\{\ell_J(\mathcal{A}), \ell(D_n(\mathbb{F}))\}.$$

Выполняется $\max_{S: \mathcal{L}(S)=\mathcal{A}} \ell_D(S) = \ell(D_n(\mathbb{F}))$, т.к. можно положить

$$S = \tilde{S} \cup \{E_{ij} \mid i \prec j\},$$

где $\tilde{S} \subset D_n(\mathbb{F})$, причём $\ell(\tilde{S}) = \ell(D_n(\mathbb{F}))$. □

В следующей теореме будет показано, что если взять прямую сумму алгебры инцидентности с алгеброй диагональных матриц достаточно большого размера, то длина полученной алгебры будет такой же как у её проекции на диагональ.

Теорема 4.5.2. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — алгебра инцидентности. Тогда существует такое $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для всех $k \geq K$ выполнено $\ell(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbb{F}$ бесконечно. Тогда по теореме 1.5.14 $\ell(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = n + k - 1 = \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))$ для всех $k \geq 0$, и поэтому можно взять $K = 0$. Пусть теперь $|\mathbb{F}| = q < \infty$. Если $\mathcal{A} = D_n(\mathbb{F})$, то $K = 0$ тривиальным образом. Поэтому всюду далее будем считать, что $\mathcal{A} \neq D_n(\mathbb{F})$. Отсюда, в частности, $n \geq 2$ и $\text{ind}(J(\mathcal{A})) \geq 2$. Введём константу

$$M = q \cdot \ell_J(\mathcal{A}) \cdot (\text{ind}(J(\mathcal{A})) - 1),$$

где величина $\ell_J(\mathcal{A})$ определена как в лемме 4.5.1. Рассмотрим множество

$$\Lambda = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \ell(D_{n+k}(\mathbb{F})) \geq M\} \cap [q - n + 1, +\infty). \quad (4.5.1)$$

Тогда в силу теоремы 1.5.12 найдётся такое целое $K \geq 0$, что $\Lambda = \mathbb{Z} \cap [K, +\infty)$. Покажем, что данное K является искомым. Зафиксируем произвольное $k \in \Lambda$. Докажем, что $\ell_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leq \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))$.

[Шаг 1.] Выберем порождающую систему S алгебры $\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})$ таким образом, чтобы выполнялось $\ell_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \ell_J(S)$. Тогда

$$\ell_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \mathcal{L}_k(S) \supset J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F}))\}. \quad (4.5.2)$$

Так как S порождает $\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})$, то проекции матриц из S на первое прямое слагаемое порождают $\mathcal{A}$. Кроме того, согласно предложению 1.4.11 выполнено $J(\mathcal{A}) = \langle \{E_{ij}^{(n)} \mid i \prec j\} \rangle$. В частности, $J(\mathcal{A}) \supseteq \{E_{ij}^{(n)} \mid i \prec: j\}$. Тогда по определению величины $\ell_J(\mathcal{A})$ получаем

$$\mathcal{L}_{\ell_J(\mathcal{A})}(S) \supset \{E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)} \mid i \prec: j\}$$

для некоторых матриц $D^{(i,j)} \in D_k(\mathbb{F})$.

[Шаг 2.] Согласно равенству (4.5.1) выполнено $k \geq q - n + 1$, откуда $q \leq n + k - 1$. Значит, мы можем применить предложение 1.5.15 к алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})$. В качестве множества Φ возьмём, например, базис пространства $\mathcal{L}_{\ell_J(\mathcal{A})}(S)$. Ясно, что Φ порождает $\mathcal{B}$, т.к. $S \subseteq \mathcal{L}_{\ell_J(\mathcal{A})}(S) = \langle \Phi \rangle$. Матрицу B из предложения 1.5.15 будем поочерёдно полагать равной матрицам $E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)}$. Тогда предложение 1.5.15 гарантирует нам выполнение включений $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_q(\{E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)}\})$ для всех пар $i \prec: j$. Однако

$$\mathcal{L}_q(\{E_{ij}^{(n)} \oplus D^{(i,j)}\}) \subseteq \mathcal{L}_q(\Phi) = \mathcal{L}_q(S^{\ell_J(\mathcal{A})}) = \mathcal{L}_{q \cdot \ell_J(\mathcal{A})}(S).$$

Таким образом, для всех пар $i \prec j$ выполнено $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_{q \cdot \ell_J(\mathcal{A})}(S)$.

[Шаг 3.] Зафиксируем теперь произвольную пару $i \prec j$. Тогда из множества $\{1, \dots, n\}$ можно выбрать последовательность чисел $i_1, i_2, \dots, i_d$ такую, что $i = i_1 \prec i_2 \prec \dots \prec i_d = j$. Значит, $E_{ij}^{(n)} = E_{i_1 i_d}^{(n)} = E_{i_1 i_2}^{(n)} E_{i_2 i_3}^{(n)} \dots E_{i_{d-1} i_d}^{(n)}$. Согласно предыдущему шагу, для всех $t = 1, 2, \dots, d-1$ матрица $E_{i_t i_{t+1}}^{(n)} \oplus O_k$ лежит в $\mathcal{L}_{q \cdot \ell_J(\mathcal{A})}(S)$. Отсюда получаем, что выполнено $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_{q \cdot \ell_J(\mathcal{A}) \cdot (d-1)}(S)$.

[Шаг 4.] Заметим, что по построению d — мощность некоторой $\preceq$ -цепи. Значит, $d \leq \text{ind}(J(\mathcal{A}))$ согласно предложению 1.4.14. Поэтому для всех $i \prec j$ выполнено $E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \in \mathcal{L}_{q \cdot \ell_J(\mathcal{A}) \cdot (\text{ind}(J(\mathcal{A})) - 1)}(S) = \mathcal{L}_M(S)$. Применяя предложение 1.4.11, получим, что $J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \{E_{ij}^{(n+k)} \mid i \prec j\} = \{E_{ij}^{(n)} \oplus O_k \mid i \prec j\}$. Значит, $\mathcal{L}_M(S) \supset J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F}))$. Тогда из равенства (4.5.2) следует, что $\ell_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leq M$. Однако согласно равенству (4.5.1), выполнено $\ell(D_{n+k}(\mathbb{F})) \geq M$. В итоге получаем $\ell_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leq \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))$, что и требовалось.

Итак, мы показали, что $\ell_J(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) \leq \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))$. Тогда из леммы 4.5.1 следует, что $\ell(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))$. Отсюда в силу произвольности выбора целого $k \geq K$ получаем требуемое. $\square$

В терминах частично упорядоченного множества $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$ теорема 4.5.2 означает следующее. Назовем точку $i \in \{1, \dots, n\}$ изолированной, если она сравнима только сама с собой. Тогда получается, что, если в частично упорядоченном множестве “слишком много” изолированных точек, то функция длины начинает вести себя так, как будто абсолютно все точки изолированы. Фактически $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$ становится неотличимо от тривиального частично упорядоченного множества $(\{1, \dots, n\}, =)$ с точки зрения длин соответствующих алгебр инцидентности

Теорема 4.5.2 позволяет нам определить следующую константу.

Определение 4.5.3. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — произвольная алгебра инцидентности. Тогда определим её *диагональное число*

$$\lambda(\mathcal{A}) = \lambda(\preceq, \mathbb{F}) = \min\{K \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \forall k \geq K : \ell(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))\}.$$

Другими словами, диагональное число показывает, как много изолированных точек нужно добавить к $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$, чтобы функция длины перестала отличать его от тривиального частично упорядоченного множества.

В следующем следствии даны некоторые оценки на величину λ .

Следствие 4.5.4. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — матричная алгебра инцидентности, отличная от алгебры диагональных матриц.

1. Если $\mathbb{F}$ бесконечно, то $\lambda(\preceq, \mathbb{F}) = 0$.
2. Пусть $\mathbb{F}$ конечно, мощности q , тогда

$$\begin{aligned} \lambda(\preceq, \mathbb{F}) &\leq \left\lceil q^{1 + \frac{q}{q-1} \cdot \ell_J(\mathcal{A}) \cdot (\text{ind}(J(\mathcal{A})) - 1)} \right\rceil - n \\ &\leq \left\lceil q^{1 + \frac{q}{q-1} \cdot \ell(\mathcal{A}) \cdot (\text{ind}(J(\mathcal{A})) - 1)} \right\rceil - n \\ &\leq \left\lceil q^{1 + \frac{q(n-1)^2}{q-1}} \right\rceil - n, \end{aligned}$$

где величина $\ell_J(\mathcal{A})$ определяется как в лемме 4.5.1.

Доказательство. Случай бесконечного поля сразу следует из теоремы 1.5.14. Получаем, что $\ell(\mathcal{A} \oplus D_k(\mathbb{F})) = n + k - 1 = \ell(D_{n+k}(\mathbb{F}))$ для всех $k \geq 0$, и поэтому можно взять $\lambda(\preceq, \mathbb{F}) = 0$. Докажем пункт 2 следствия. Обозначим

$$M = q \cdot \ell_J(\mathcal{A}) \cdot (\text{ind}(J(\mathcal{A})) - 1), \quad N = \left\lceil q^{1 + \frac{M}{q-1}} \right\rceil - n.$$

При этом $M \geq 2$, так как $\mathcal{A} \neq D_n(\mathbb{F})$. Покажем, что $\lambda \leq N$. Обратимся к доказательству теоремы 4.5.2. Из него следует, что достаточно проверить включение $N \in \Lambda$, где множество Λ определено в равенстве (4.5.1). Указанное включение можно доказать следующим образом. Сначала заметим, что $N \in [q - n + 1, +\infty)$, или, что эквивалентно, $q^{1 + \frac{M}{q-1}} - n > q - n$. Тогда остается проверить, что $\ell(D_{n+N}(\mathbb{F})) \geq M$. Так как $N + n \geq q^{1 + \frac{M}{q-1}} > q$, то из теоремы 1.5.11 получаем

$$\begin{aligned} \ell(D_{N+n}(\mathbb{F})) &= (q-1)[\log_q(N+n)] + [q^{\{\log_q(N+n)\}}] - 1 \\ &\geq (q-1)[\log_q(N+n)] + 1 - 1 \\ &\geq (q-1) \left\lceil \log_q \left(q^{1 + \frac{M}{q-1}} \right) \right\rceil \\ &= (q-1) \left\lceil 1 + \frac{M}{q-1} \right\rceil \\ &\geq (q-1) \cdot \frac{M}{q-1} \\ &= M, \end{aligned}$$

что и требовалось. Другие два неравенства из пункта 2 следуют из уже известных соотношений $\ell_J(\mathcal{A}) \leq \ell(\mathcal{A})$, $\ell(\mathcal{A}) \leq n - 1$, а также $\text{ind}(J(\mathcal{A})) \leq n$. $\square$

Глава 5

Длина алгебр инцидентности над полем в случае квадратично-нильпотентного радикала

Результаты главы опубликованы в работах [68, 71]. Рассматривается вопрос вычисления длины алгебр инцидентности над полем при условии, что индекс нильпотентности радикала Джекобсона равен двум. Основным результатом является теорема 5.1.14, описывающая все реализуемые значения длин указанных алгебр. Помимо этого, будет получена верхняя оценка длины, а также исследованы некоторые свойства длин прямых сумм алгебр.

5.1 Реализуемые значения длины

На протяжении всего параграфа зафиксируем произвольное конечное поле $\mathbb{F}_q$.

Обозначение 5.1.1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим $g(n) = \ell(D_n(\mathbb{F}_q))$.

Как мы видели раньше, длину алгебр инцидентности можно оценить суммой длин алгебр диагональных матриц специальных размеров. Поэтому нам понадобится более детально рассмотреть основные свойства функции g . Для этого определим систему натуральных отрезков $I_{r,k} = [kq^r, kq^r + q^r - 1] \cap \mathbb{N}$ для $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1, \dots, q-1\}$. В частности, $I_{0,k} = \{k\}$. Обозначим

$$\Xi = \{I_{r,k} \mid r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \{1, \dots, q-1\}\}.$$

Тогда $\mathbb{N} = \bigcup_{I \in \Xi} I$, и для любых двух различных отрезков $I, I' \in \Xi$, их пересечение пусто $I \cap I' = \emptyset$. Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся единственный

отрезок $I_{r,k} \ni n$, поэтому существует целое $r_0 \in [0, q^r - 1]$ такое, что $n = kq^r + r_0$. Если представить число n в системе счисления по основанию q , тогда k — это первая цифра в этом представлении, r — количество цифр минус 1. Следовательно, $n \in I_{r,k}$ тогда и только тогда, когда

$$r = \lfloor \log_q n \rfloor, \quad k = \left\lfloor \frac{n}{q^{\lfloor \log_q n \rfloor}} \right\rfloor = \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor. \quad (5.1.1)$$

Введём естественный линейный порядок на множестве Ξ следующим образом. Для $I, I' \in \Xi$ положим $I < I'$ тогда и только тогда, когда для всех $i \in I$ и для всех $i' \in I'$ имеем $i < i'$. Отметим, что для того, чтобы гарантировать неравенство $I < I'$ достаточно проверить $i_0 < i'_0$ для любых двух конкретных $i_0 \in I$ и $i'_0 \in I'$.

Пусть $L(I)$ — длина отрезка $I \in \Xi$, т.е. если $I = [a, b] \cap \mathbb{N}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{N}$, тогда $L(I) = b - a$. Мы не будем использовать обозначение $|I|$, чтобы избежать двусмысленности, т.к. $|\cdot|$ — это также обозначение для мощности.

Замечание 5.1.2. Если $I, I' \in \Xi$ и $I' > I$, то $L(I') \geq L(I)$.

Скажем, что I' *накрывает* I и обозначим это как $I' :> I$, если $I' > I$ и не найдётся такого отрезка $I_0 \in \Xi$, что $I' > I_0 > I$.

Теперь всё готово для того, чтобы сформулировать лемму о свойствах функции $g(n)$.

Лемма 5.1.3. *Функция $g(n)$ обладает следующими свойствами.*

1. Для любых $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1, \dots, q - 1\}$ функция $g(n)$ постоянна на отрезке $I_{r,k} \in \Xi$ и равна $(q - 1)r + k - 1$.
2. Если $I_{r,k} < I_{r',k'}$, то $g(n)|_{I_{r',k'}} = g(n)|_{I_{r,k}} + 1$.
3. Ломанная $\Gamma(g)$ с последовательностью вершин $\{(n, g(n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ соответствует пути в решетке $\mathbb{Z}^2$ с шагами $(1, 1), (1, 0)$.

Доказательство. Пункт 1 следует из теоремы 1.5.11 и равенства (5.1.1). Также пункт 1 влечёт пункт 2. Пункт 3 в свою очередь вытекает из пункта 2. $\square$

Теперь введём специальные функции $\delta_+ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\delta_- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для натурального n , найдём отрезок $[a, b] \cap \mathbb{N} \in \Xi$, такой что $n \in [a, b]$. Тогда пусть $\delta_+(n) = b - n$ и $\delta_-(n) = n - a$.

С помощью равенства (5.1.1) можно вывести явные формулы для функций δ_+ , δ_- :

$$\delta_+(n) = \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor} + q^{\lfloor \log_q n \rfloor} - 1 - n, \quad \delta_-(n) = n - \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor}. \quad (5.1.2)$$

Теперь перейдем к алгебрам инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом. Тогда высота соответствующего частично упорядоченного множества должна равняться двум в силу предложения 1.4.14. Характеризация таких частичных порядков дана в замечании 1.2.9.

Необходимо отметить, что функция длины оказывается монотонной на множестве рассматриваемых алгебр.

Предложение 5.1.4. Пусть $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — алгебры инцидентности такие, что $\text{ind}(J(\mathcal{A})) = \text{ind}(J(\mathcal{B})) = 2$. Тогда $\ell(\mathcal{B}) \leq \ell(\mathcal{A})$.

Доказательство. Выберем подпространство $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ такое, что $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ и $\mathcal{C} \cap \mathcal{B} = \{O\}$. Тогда $D_n(\mathbb{F}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C} \cdot D_n(\mathbb{F}) = \mathcal{C}$ и $J(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C} \cdot J(\mathcal{A}) = \{O\} \subseteq \mathcal{C}$. Значит, $\mathcal{C} \triangleleft \mathcal{A}$. Остаётся применить предложение 1.5.10. $\square$

Из предыдущего предложения получаем, что минимальные по включению алгебры инцидентности с $\text{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$ имеют минимальную длину, а максимальные по включению обладают максимальной длиной. Этот факт окажется чрезвычайно полезен в дальнейшем. Отметим, что длина минимальных алгебр с $\text{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$ известна, см. лемму 1.5.17

Перейдем к рассмотрению максимальных алгебр с квадратично-нильпотентным радикалом.

Определение 5.1.5. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = n$. Введём следующую алгебру инцидентности

$$\widehat{\mathbf{S}}_{a,b} = \widehat{\mathbf{S}}_{a,b}(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} D_a(\mathbb{F}) & M_{a \times b}(\mathbb{F}) \\ O & D_b(\mathbb{F}) \end{pmatrix} \subset T_n(\mathbb{F}).$$

Замечание 5.1.6. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\preceq, \mathbb{F})$ — алгебра инцидентности, которая максимальна по включению среди всех алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом. Тогда соответствующее частично упорядоченное множество является полным 2-дольным, см. § 1.2. По замечанию 1.2.7 существует матрица P некоторой перестановки, такая что

$$\mathcal{A} = P^{-1} \widehat{\mathbf{S}}_{r_1, r_2}(\mathbb{F}) P,$$

где $r_i = |Pr_i(\prec)|$, $i = 1, 2$ согласно обозначению 1.2.8. Заметим, что r_1, r_2 — это числа Уитни. Поэтому согласно теореме 4.4.1 $\ell(\widehat{\mathbf{S}}_{a,b}) = g(a) + g(b) + 1$.

Далее мы будем исследовать реализуемые значения $\ell(\mathbf{S}_{a,b}(\mathbb{F}_q))$ для различных a, b , причём сумма $a + b$ фиксирована и равна некоторому n , т.е. $\mathbf{S}_{a,b}(\mathbb{F}_q) \subseteq T_n(\mathbb{F}_q)$.

Обозначение 5.1.7. Введем функцию

$$\mu : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mu(x) = g(x) + g(n-x).$$

Далее мы приступим к исследованию образа функции μ .

Предложение 5.1.8. Пусть $M = \max \mu(x)$, $m = \min \mu(x)$. Тогда образ $\text{Im } \mu = [m, M] \cap \mathbb{N}$.

Доказательство. Пункт 3 леммы 5.1.3 гарантирует, что $\Gamma(g(x))$ соответствует пути на решётке $\mathbb{Z}^2$ с шагами $(1,1)$, $(1,0)$. Значит, $\Gamma(g(n-x)|_{\{1,\dots,n-1\}})$ — это тоже путь на решётке $\mathbb{Z}^2$, но уже с шагами $(1, -1)$, $(1,0)$. Однако

$$\Gamma(\mu(x)) = \Gamma(g(n-x)|_{\{1,\dots,n-1\}}) + \Gamma(g(x)|_{\{1,\dots,n-1\}}),$$

что можно рассматривать как сумму двух непрерывных кривых. Тогда $\Gamma(\mu(x))$ — путь на решётке $\mathbb{Z}^2$ с шагами $(1,0)$, $(1,1)$, $(1, -1)$. Отсюда получаем, что $\text{Im } \mu = [m, M] \cap \mathbb{N}$. $\square$

Таким образом, для того, чтобы найти образ функции μ , достаточно решить задачу дискретной оптимизации.

Проблема 5.1.9. $\mu(x) \longrightarrow \max, \min, x \in \{1, \dots, n-1\}$.

Сначала нам понадобится следующая конструкция

Конструкция 5.1.10. Пусть $u, v \in \{1, \dots, n-1\}$, $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $u - h$ и $v + h$ принадлежат множеству $\{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим упорядоченное множество Ξ , определенное ранее. Выберем отрезки $\{I_i\}_{i=0}^{\alpha_-} \subseteq \Xi$ и $\{I^j\}_{j=0}^{\alpha_+} \subseteq \Xi$ такие, что

$$\begin{aligned} u &\in I_0 :> I_1 :> \dots :> I_{\alpha_-} \ni u - h, \\ v &\in I^0 <: I^1 <: \dots <: I^{\alpha_+} \ni v + h. \end{aligned}$$

Если $\alpha_- > 0$, тогда h удовлетворяет следующим неравенствам

$$1 + \delta_-(u) + \sum_{i=1}^{\alpha_- - 1} (L(I_i) + 1) \leq h \leq 1 + \delta_-(u) + \sum_{i=1}^{\alpha_- - 1} (L(I_i) + 1) + L(I_{\alpha_-}).$$

Если $\alpha_- = 1$, то сумма по пустому множеству индексов полагаем равной нулю.

Если $\alpha_- = 0$, тогда $0 \leq h \leq \delta_-(u)$. Для $\alpha_+ > 0$, имеем аналогично

$$1 + \delta_+(v) + \sum_{j=1}^{\alpha_+ - 1} (L(I^j) + 1) \leq h \leq 1 + \delta_+(v) + \sum_{j=1}^{\alpha_+ - 1} (L(I^j) + 1) + L(I^{\alpha_+}).$$

Если $\alpha_+ = 0$, то $0 \leq h \leq \delta_+(v)$. Однако нам будет достаточно использовать более простые неравенства. Обозначим $L_m = \min_{i=1, \dots, \alpha_-} L(I_i)$, $L_M = \max_{i=1, \dots, \alpha_-} L(I_i)$,

$L^m = \min_{j=1, \dots, \alpha_+} L(I^j)$, а также $L^M = \max_{j=1, \dots, \alpha_+} L(I^j)$. Тогда

$$\begin{cases} \begin{cases} 0 \leq h \leq \alpha_- + \delta_-(u) + \alpha_- L_M, & \text{если } \alpha_- \geq 0; \\ \alpha_- + \delta_-(u) + (\alpha_- - 1)L_m \leq h, & \text{если } \alpha_- > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq h \leq \alpha_+ + \delta_+(v) + \alpha_+ L^M, & \text{если } \alpha_+ \geq 0; \\ \alpha_+ + \delta_+(v) + (\alpha_+ - 1)L^m \leq h, & \text{если } \alpha_+ > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Важно отметить, что лемма 5.1.3 гарантирует следующие равенства

$$\alpha_- = g(u) - g(u - h), \quad \alpha_+ = g(v + h) - g(v). \quad (5.1.4)$$

Теперь всё готово для того, чтобы найти максимум и минимум функции μ . Начнём с максимума.

Теорема 5.1.11. $\max \mu(x) = \mu(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c$, где

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_-(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq \delta_+(\lceil \frac{n}{2} \rceil); \\ 1, & \text{если } \delta_-(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) > \delta_+(\lceil \frac{n}{2} \rceil). \end{cases}$$

Если $\delta_-(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) > \delta_+(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$, то максимум достигается в точке

$$x_{\max} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \delta_+(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведём в два этапа.

[Шаг 1.] Докажем, что $\max \mu(x) \leq \mu(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c$. Предположим противное, тогда существует $x \in \{1, \dots, n-1\}$ такое, что $\mu(x) > \mu(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c$. Так как $\mu(n-x) = \mu(x)$, то можно считать, что $x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ без ограничения общности. Далее, $g(x) + g(n-x) > g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + g(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + c$, следовательно, $g(n-x) - g(\lceil \frac{n}{2} \rceil) > g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - g(x) + c$.

Теперь используем конструкцию 5.1.10. Пусть $u = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $v = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $h = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - x$. Из равенства (5.1.4) вытекает, что $\alpha_- = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - g(x)$ и $\alpha_+ = g(n-x) - g(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$. Тогда

$$\alpha_+ > \alpha_- + c \quad (5.1.5)$$

и $\alpha_+ > 0$ в частности. Также согласно выбору u, v, h получаем, что $I_i \leq I^j$ для всех i, j . Тогда согласно замечанию 5.1.2

$$L_M \leq L^m. \quad (5.1.6)$$

Так как $\alpha_+ > 0$, из равенства (5.1.3) вытекает, что

$$\alpha_+ + \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right) + (\alpha_+ - 1)L^m \leq h \leq \alpha_- + \delta_- \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) + \alpha_- L_M. \quad (5.1.7)$$

[Случай 1.] Пусть $\delta_- \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) \leq \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right)$, поэтому $c = 0$. Применим неравенства (5.1.5–5.1.7), чтобы получить противоречие

$$h \leq \alpha_- + \delta_- \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) + \alpha_- L_M < \alpha_+ + \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right) + (\alpha_+ - 1)L^m \leq h.$$

[Случай 2.] Пусть $\delta_- \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) > \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right)$, поэтому $c = 1$. Снова согласно неравенствам (5.1.5–5.1.7), а также неравенствам $\delta_- \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) \leq L_M$, $0 \leq \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right)$, которые следуют из определения величин δ_+, δ_- , получаем противоречие

$$h \leq \alpha_- + (\alpha_- + 1)L_M < \alpha_+ + (\alpha_+ - 1)L^m \leq h.$$

[Шаг 2.] На втором шаге мы докажем, что $\max \mu(x) \geq \mu(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c$. Случай $c = 0$ тривиален, поэтому пусть $\delta_- \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) > \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right)$ и $c = 1$. Положим $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right) + 1$. Тогда $g(x) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$ по определению δ_+ и пункта 2 леммы 5.1.3. Однако $g(n-x) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right) - 1) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ по пункту 2 леммы 5.1.3 и неравенству $\delta_- \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) > \delta_+ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil \right)$. Таким образом, $\mu(x) = g(x) + g(n-x) = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 + g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \mu(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$. $\square$

В следующей теореме мы найдем минимум функции μ .

Теорема 5.1.12. $\min \mu(x) = \mu(1) = g(n-1)$.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $\mu(x) < \mu(1)$ для некоторого $x \in \{2, \dots, n-1\}$. Так как $\mu(n-x) = \mu(x)$, мы можем считать, что $x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ без ограничения общности. Далее, $g(x) + g(n-x) < g(1) + g(n-1)$ и $g(x) - g(1) < g(n-1) - g(n-x)$.

Теперь используем конструкцию 5.1.10. Пусть $u = n-1$, $v = 1$, $h = x-1$. Из равенства (5.1.4) вытекает, что $\alpha_- = g(n-1) - g(n-x)$ и $\alpha_+ = g(x) - g(1)$. Поэтому $\alpha_+ < \alpha_-$ и $\alpha_- > 0$, в частности. Кроме того, в соответствии с нашим выбором величин u, v, h имеем $I_i \geq I^j$ для всех i, j . Тогда $L_m \geq L^M$ в силу замечания 5.1.2.

Из равенств 5.1.3 заключаем, что $h \leq \alpha_+ + \delta_+(1) + \alpha_+ L^M = \alpha_+ + \alpha_+ L^M$ и $h \geq \alpha_- + \delta_-(u) + (\alpha_- - 1)L_m \geq \alpha_- + (\alpha_- - 1)L_m$. Отсюда получаем противоречие

$$h \leq \alpha_+ + \alpha_+ L^M < \alpha_- + (\alpha_- - 1)L_m \leq h.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 5.1.13. Пункт 2 леммы 5.1.3 гарантирует, что либо $\mu(1) = \ell(D_n(\mathbb{F}_q))$, либо $\mu(1) + 1 = \ell(D_n(\mathbb{F}_q))$.

Теперь всё готово для того, чтобы определить реализуемые значения функции длины на множестве алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом.

Теорема 5.1.14. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ — алгебра инцидентности, причём $\text{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$, $n \geq 2$. Если $n \leq |\mathbb{F}| \leq \infty$ или $(n, |\mathbb{F}|) = (3, 2)$, то $\ell(\mathcal{A}) = n-1$. Иначе

$$\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq \ell(\mathcal{A}) \leq \ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c,$$

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_- \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \leq \delta_+ \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right), \\ 1, & \text{если } \delta_- \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) > \delta_+ \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right), \end{cases}$$

где функции δ_+, δ_- определяются как

$$\delta_+(n) = \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor} + q^{\lfloor \log_q n \rfloor} - 1 - n, \quad \delta_-(n) = n - \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor}$$

для $q = |\mathbb{F}|$. Более того, для всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq k \leq \ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c,$$

существует алгебра инцидентности $\mathcal{A}_{(k)} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, у которой $\text{ind}(J(\mathcal{A}_{(k)})) = 2$ и при этом $\ell(\mathcal{A}_{(k)}) = k$.

Доказательство. Если $n \leq |\mathbb{F}| \leq \infty$, то всё следует из теоремы 1.5.14. Если $n = 3$ и $|\mathbb{F}| = 2$, то достаточно применить лемму 1.5.17 и предложение 5.1.4. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, $q < n$, $(n, q) \neq (3, 2)$. Функция длины монотонна на алгебрах инцидентности с $\text{ind}(J) = 2$ по предложению 5.1.4. Поэтому для того, чтобы получить требуемые границы, достаточно оценить длины максимальных и минимальных алгебр.

Минимальные алгебры инцидентности с $\text{ind}(J) = 2$ — это в точности алгебры размерности $n + 1$. Согласно лемме 1.5.17 их длины равны $\ell(D_n(\mathbb{F}_q))$ в силу наших ограничений на q, n . Это рассуждение даёт нам оценку снизу. Кроме того, все максимальные алгебры изоморфны алгебрам вида $\widehat{\mathbf{S}}_{a,b}(\mathbb{F}_q)$ по замечанию 5.1.6. Теорема 4.4.1 гарантирует, что $\ell(\widehat{\mathbf{S}}_{x,n-x}(\mathbb{F}_q)) = \mu(x) + 1$. Также $\max \mu(x) = \mu(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c$ по теореме 5.1.11, что доказывает оценку сверху.

Предложение 5.1.8 и замечание 5.1.13 гарантируют, что все значения из множества $[g(n) + 1, \mu(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 + c] \cap \mathbb{N}$ достигаются на алгебрах вида $\widehat{\mathbf{S}}_{a,b}(\mathbb{F}_q)$. При этом значение $g(n)$ достигается на алгебре размерности $n + 1$ согласно лемме 1.5.17. $\square$

Следующее следствие даёт нам все реализуемые длин алгебр инцидентности для случая $|\mathbb{F}| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Следствие 5.1.15. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Если $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq |\mathbb{F}| \leq \infty$, то для всех $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq k \leq n - 1$, существует алгебра инцидентности $\mathcal{A}_{(k)} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, для которой выполнено $\ell(\mathcal{A}_{(k)}) = k$.

Доказательство. Границы длины даны в теореме 1.5.14. Если $|\mathbb{F}| \geq n$, тогда снова теорема 1.5.14 даёт результаты реализуемости. Если $n = 3$, $|\mathbb{F}| = 2$, то имеем $\ell(D_n(\mathbb{F})) = 1$, $\ell(T_n(\mathbb{F})) = n - 1 = 2$. Пусть $(n, |\mathbb{F}|) \neq (3, 2)$ и при этом $|\mathbb{F}| \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n - 1]$. Тогда всё следует из теорем 1.5.11, 5.1.14, т.к.

$$\ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 + 1 + 0 = n - 1.$$

Следствие доказано. $\square$

5.2 Верхняя оценка длины

Основным результатом параграфа является теорема 5.2.2, в которой приводится верхняя оценка длины алгебры инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом. Для доказательства нам понадобится следующее вспомогательное техническое утверждение.

Лемма 5.2.1. *Пусть дана алгебра инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ и её произвольная порождающая система*

$$S = \{A_i = D_i + B_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{A}, \quad D_i \in D_n(\mathbb{F}), \quad B_i \in J(\mathcal{A}) \text{ для } i = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим пару (U, u) , состоящую из непустого подмножества $U \subseteq \{1, \dots, n\}$ и выделенной точки $u \in U$. Тогда найдется многочлен $\hat{f}$ от m некоммутирующих переменных с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$, так что выполнены следующие два условия:

1. $\deg \hat{f} \leq \ell(D_{|U|}(\mathbb{F}))$,
2. $\hat{f}(A_1, \dots, A_m) = E_{uu} + D + B$, где $D \in D_n(\mathbb{F})$, $B \in J(\mathcal{A})$, а также $(D)_{ii} = 0$ для всех $i \in U$.

Доказательство. Можно считать, что $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$, см. § 1.4. Занумеруем элементы множества U таким образом, чтобы выделенный элемент оказался первым: $U = \{u_1, \dots, u_{|U|}\}$, $u_1 = u$. Рассмотрим гомоморфизм $\mathbb{F}$ -алгебр:

$$\zeta : \mathcal{A} \rightarrow D_{|U|}(\mathbb{F}), \quad \forall A \in \mathcal{A} : (\zeta(A))_{\alpha\alpha} = (A)_{u_\alpha u_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, |U|.$$

Отметим, что образ $\zeta(S)$ является порождающей системой алгебры $D_{|U|}(\mathbb{F})$. Тогда существует многочлен $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]$ от m коммутирующих переменных такой, что $f(\zeta(A_1), \dots, \zeta(A_m)) = E_{11}$ и $\deg f \leq \ell(D_{|U|}(\mathbb{F}))$ по определению длины. Зафиксируем порядок переменных в каждом одночлене f произвольным образом. Как результат, мы получаем многочлен $\tilde{f}$ от m некоммутирующих переменных. В частности, $\deg \tilde{f} = \deg f$, откуда вытекает пункт 1. Также

$$\zeta(\tilde{f}(A_1, \dots, A_m)) = \tilde{f}(\zeta(A_1), \dots, \zeta(A_m)) = f(\zeta(A_1), \dots, \zeta(A_m)) = E_{11},$$

что влечёт пункт 2 для $\tilde{f}$. □

Докажем теорему о верхней оценке.

Теорема 5.2.2. Пусть поле $\mathbb{F}$ конечно и имеет мощность q . Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$. Предположим, что $q \leq n - 1$, $\text{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$. Обозначим $r_i = r_i(\mathcal{A}) = |\text{Pr}_i(\prec)|$ для $i = 1, 2$, см. обозначение 1.2.8. Положим

$$\kappa_1 = \kappa_1(\mathcal{A}) = \max\{t \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists j, i_1, \dots, i_t : i_1 \prec j, \dots, i_t \prec j\},$$

$$\kappa_2 = \kappa_2(\mathcal{A}) = \max\{s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \exists i, j_1, \dots, j_s : i \prec j_1, \dots, i \prec j_s\}.$$

Тогда $\kappa_1, \kappa_2 \neq 0$ и выполняется

$$\ell(\mathcal{A}) \leq \max\{\min\{\ell(D_{r_1}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})), \ell(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})) + \ell(D_{r_2}(\mathbb{F}))\} + q, \ell(D_n(\mathbb{F}))\}.$$

Доказательство. Можно считать, что $\mathcal{A} \subseteq T_n(\mathbb{F})$, см. § 1.4. Соотношения $\kappa_1, \kappa_2 \neq 0$ следуют из того, что $\mathcal{A} \neq D_n(\mathbb{F})$ ввиду $\text{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$. Теперь докажем верхнюю оценку для $\ell(\mathcal{A})$. В силу леммы 4.5.1 достаточно показать, что

$$\ell_J(\mathcal{A}) \leq \min\{\ell(D_{r_1}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})), \ell(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})) + \ell(D_{r_2}(\mathbb{F}))\} + q.$$

Обозначим $\gamma_1 = \ell(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})) + \ell(D_{r_2}(\mathbb{F})) + q$, $\gamma_2 = \ell(D_{r_1}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})) + q$. Рассмотрим произвольное конечное подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$, порождающее $\mathcal{A}$. Требуется доказать, что $J(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_{\gamma_1}(S)$ и $J(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_{\gamma_2}(S)$. Зафиксируем произвольную пару $\xi \prec \eta$. Покажем, что $E_{\xi\eta} \in \mathcal{L}_{\gamma_1}(S) \cap \mathcal{L}_{\gamma_2}(S)$.

[Шаг 1.] Пусть $S = \{A_k = D_k + B_k\}_{k=1}^m$, где $D_k \in D_n(\mathbb{F})$, $B_k \in J(\mathcal{A})$. Применяя лемму 5.2.1 к парам $(\xi, \text{Pr}_1(\prec))$, $(\eta, \text{Pr}_2(\prec))$, найдем многочлены от m некоммутирующих переменных $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ такие, что $\hat{f}_1(A_1, \dots, A_m) = E_{\xi\xi} + D_\xi + B_\xi$, $\hat{f}_2(A_1, \dots, A_m) = E_{\eta\eta} + D_\eta + B_\eta$, где $B_\xi, B_\eta \in J(\mathcal{A})$, а также $(D_\xi)_{ii} = 0$ и $(D_\eta)_{jj} = 0$ для всех $i \in \text{Pr}_1(\prec)$, $j \in \text{Pr}_2(\prec)$. Кроме того, $\deg \hat{f}_i \leq \ell(D_{r_i}(\mathbb{F}))$, где $i = 1, 2$.

[Шаг 2.] Введём множества

$$\mathcal{R}_\xi = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \xi \prec j\}, \quad \mathcal{R}_\eta = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid i \prec \eta\}.$$

Тогда $\mathcal{R}_\xi \subseteq \text{Pr}_2(\prec)$, $\mathcal{R}_\eta \subseteq \text{Pr}_1(\prec)$ и, кроме того, $\xi \in \mathcal{R}_\eta$, $\eta \in \mathcal{R}_\xi$. Применим лемму 5.2.1 к парам $(\mathcal{R}_\eta, \xi)$ и $(\mathcal{R}_\xi, \eta)$. Тогда получим многочлены от m некоммутирующих переменных $\hat{g}_1, \hat{g}_2$ такие, что $\hat{g}_1(A_1, \dots, A_m) = E_{\xi\xi} + \tilde{D}_\xi + \tilde{B}_\xi$

и $\hat{g}_2(A_1, \dots, A_m) = E_{\eta\eta} + \tilde{D}_\eta + \tilde{B}_\eta$, где $\tilde{B}_\xi, \tilde{B}_\eta \in J(\mathcal{A})$, причем $(\tilde{D}_\xi)_{ii} = 0$ и $(\tilde{D}_\eta)_{jj} = 0$ для всех $i \in \mathcal{R}_\eta, j \in \mathcal{R}_\xi$. Кроме того, в силу неравенств $|\mathcal{R}_\eta| \leq \kappa_1, |\mathcal{R}_\xi| \leq \kappa_2$, пункта 1 леммы 5.2.1, пункта 1 теоремы 1.5.12 получим

$$\deg \hat{g}_1 \leq \ell(D_{|\mathcal{R}_\eta|}(\mathbb{F})) \leq \ell(D_{\kappa_1}(\mathbb{F})), \quad \deg \hat{g}_2 \leq \ell(D_{|\mathcal{R}_\xi|}(\mathbb{F})) \leq \ell(D_{\kappa_2}(\mathbb{F})).$$

[Шаг 3.] Бинарные отношения $\prec, \prec$: совпадают по замечанию 1.2.9. Согласно теореме 1.4.15 найдется матрица $A \in \mathcal{L}_1(S)$ такая, что $(A)_{\xi\eta} \neq 0$. Применим предложение 1.5.15. Найдём многочлен $h \in \mathbb{F}[x]$, удовлетворяющий $\deg h \leq q$, $h(A) \in J(\mathcal{A})$, а также $(h(A))_{\xi\eta} \neq 0$.

[Шаг 4.] Докажем, что выполнено

$$\begin{aligned} E_{\xi\eta} &= \hat{f}_1(A_1, \dots, A_m) \cdot h(A) \cdot \hat{g}_2(A_1, \dots, A_m), \\ E_{\xi\eta} &= \hat{g}_1(A_1, \dots, A_m) \cdot h(A) \cdot \hat{f}_2(A_1, \dots, A_m). \end{aligned}$$

Проверим первое равенство, второе доказывается аналогично. Так как $h(A) \in J(\mathcal{A})$ и при этом $\text{ind}(J(\mathcal{A})) = 2$, то получаем, что

$$\hat{f}_1(A_1, \dots, A_m) \cdot h(A) \cdot \hat{g}_2(A_1, \dots, A_m) = (E_{\xi\xi} + D_\xi) \cdot h(A) \cdot (E_{\eta\eta} + \tilde{D}_\eta).$$

Далее будем использовать обозначение 1.4.1. Для всех $G \in J(\mathcal{A})$ выполнено $D_\xi G = O$ в силу того, что

$$\text{Pr}_2(\Omega(D_\xi)) \cap \text{Pr}_1(\prec) = \emptyset.$$

Поэтому предыдущее произведение преобразуется к виду

$$E_{\xi\xi} h(A) (E_{\eta\eta} + \tilde{D}_\eta) = E_{\xi\eta} + E_{\xi\xi} h(A) \tilde{D}_\eta,$$

где второе слагаемое обращается в ноль в силу соотношений

$$\text{Pr}_2(\Omega(E_{\xi\xi} h(A))) \subseteq \mathcal{R}_\xi, \quad \text{Pr}_1(\Omega(\tilde{D}_\eta)) \cap \mathcal{R}_\xi = \emptyset.$$

[Шаг 5.] В силу

$$\deg \hat{f}_1 + \deg h + \deg \hat{g}_2 \leq \gamma_2, \quad \deg \hat{g}_1 + \deg h + \deg \hat{f}_2 \leq \gamma_1$$

получаем $E_{\xi\eta} \in \mathcal{L}_{\gamma_1}(S) \cap \mathcal{L}_{\gamma_2}(S)$, что и требовалось. $\square$

Следующие примеры показывают, что оценка из предыдущей теоремы достигается в некоторых частных случаях.

Пример 5.2.3. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = T_2(\mathbb{F}_2) \oplus T_2(\mathbb{F}_2) \oplus D_m(\mathbb{F}_2)$, $m \geq 0$, $n = m + 4$. Тогда $\ell(\mathcal{A}) = \max\{3, \ell(D_n(\mathbb{F}_2))\}$ согласно теореме 1.5.16. При этом $r_1 = r_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $\ell(D_{r_1}(\mathbb{F}_2)) + \ell(D_{\kappa_2}(\mathbb{F}_2)) + q = 1 + 0 + 2 = 3$.

Пример 5.2.4. Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F}_2)$, $\dim \mathcal{A} = n + 1$. Тогда согласно лемме 1.5.17 выполнено $\ell(\mathcal{A}) = \max\{2, \ell(D_n(\mathbb{F}_2))\}$. При этом $r_1 = r_2 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $\ell(D_{r_1}(\mathbb{F}_2)) + \ell(D_{\kappa_2}(\mathbb{F}_2)) + q = 0 + 0 + 2 = 2$.

Теорема 5.2.2 позволяет получить оценку для длины алгебр инцидентности следующего вида.

Пример 5.2.5. Над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов рассмотрим алгебру

$$\widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q & M_{1 \times a}(\mathbb{F}_q) \\ O & D_a(\mathbb{F}_q) \end{pmatrix}.$$

По теореме 4.4.1 получим $\ell(\widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q)) = \ell(D_a(\mathbb{F}_q)) + 1$. Теорема 5.2.2 позволяет оценить длину алгебры $D_k(\mathbb{F}_q) \otimes \widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q) \cong \underbrace{\widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q) \oplus \dots \oplus \widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q)}_{k \text{ раз}}$ при условии, что $q < k(a + 1)$ (иначе длина равна $k(a + 1) - 1$ по теореме 1.5.14). В этом случае получим

$$\ell(D_a(\mathbb{F}_q)) + \ell(D_k(\mathbb{F}_q)) + 1 \leq \ell(D_k(\mathbb{F}_q) \otimes \widehat{\mathbf{S}}_{1,a}(\mathbb{F}_q)) \leq \max\{\ell(D_a(\mathbb{F}_q)) + \ell(D_k(\mathbb{F}_q)) + q, \ell(D_n(\mathbb{F}_q))\}$$

Действительно, верхняя оценка следует из теоремы 5.2.2, т.к. $r_1 = k$, $\kappa_2 = a$. Нижняя оценка следует из теоремы 1.5.8.

В качестве следствия из теоремы 5.2.2 можно получить асимптотическую оценку на длину прямых сумм алгебр инцидентности.

Следствие 5.2.6. Пусть дана последовательность алгебр инцидентности $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\mathcal{A}_n \subseteq M_{k_n}(\mathbb{F}_q)$ и при этом $\text{ind}(J(\mathcal{A}_n)) = 2$. Предположим, что найдется такая константа $M \geq 2$, что $k_n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\ell(\mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n) \sim \ell(D_{\sum_{m=1}^n k_m}(\mathbb{F}_q)) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$. Для алгебр $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ введём параметры r_1 , r_2 , κ_1 , κ_2 как в теореме 5.2.2. Выберем натуральное число N

достаточно большим, чтобы было выполнено неравенство $\sum_{m=1}^N k_m > q$. Применим теорему 5.2.2 к алгебрам $\mathcal{B}_n$ для всех $n \geq N$. Обозначим $g(s) = \ell(D_s(\mathbb{F}_q))$. Тогда

$$g\left(\sum_{m=1}^n k_m\right) \leq \ell(\mathcal{B}_n) \leq \max\left\{g(r_1(\mathcal{B}_n)) + g(\kappa_2(\mathcal{B}_n)) + q, g\left(\sum_{m=1}^n k_m\right)\right\},$$

где нижняя оценка следует из теоремы 1.5.14. Заметим, что $r_1(\mathcal{B}_n) = \sum_{m=1}^n r_1(\mathcal{A}_m) \leq \sum_{m=1}^n k_m$, а также $\kappa_2(\mathcal{B}_n) = \max_{m=1, \dots, n} \kappa_2(\mathcal{A}_m) \leq \max_{m=1, \dots, n} k_m \leq M$. Не ограничивая общности, можно считать, что M – натуральное число. Тогда в силу пункта 1 теоремы 1.5.12

$$g\left(\sum_{m=1}^n k_m\right) \leq \ell(\mathcal{B}_n) \leq g\left(\sum_{m=1}^n k_m\right) + g(M) + q.$$

Отсюда, принимая во внимание пункт 2 теоремы 1.5.12, получим, что $\ell(\mathcal{B}_n) \sim g(\sum_{m=1}^n k_m) = \ell(D_{\sum_{m=1}^n k_m}(\mathbb{F}_q))$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

5.3 Прямые суммы треугольных алгебр порядка 2

В этом параграфе будут получены оценки длин алгебр инцидентности следующего вида.

Обозначение 5.3.1. $\mathcal{T}_{\alpha, \beta}(\mathbb{F}_q) = \underbrace{T_2(\mathbb{F}_q) \oplus \dots \oplus T_2(\mathbb{F}_q)}_{\alpha \text{ раз}} \oplus D_{\beta}(\mathbb{F}_q), \alpha \geq 1, \beta \geq 0.$

Замечание 5.3.2. Рассмотрим параметры κ_1, κ_2 , определённые в теореме 5.2.2. Тогда $\kappa_1(\mathcal{T}_{\alpha, \beta}(\mathbb{F}_q)) = \kappa_2(\mathcal{T}_{\alpha, \beta}(\mathbb{F}_q)) = 1$ для $\alpha \geq 1$. Более того, можно показать, что, если для некоторой алгебры инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F}_q)$ выполнено $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, то она изоморфна алгебре вида $\mathcal{T}_{\alpha, \beta}(\mathbb{F}_q)$ для некоторых значений параметров α, β . Действительно, заметим, что в этом случае строгое отношение порядка $\prec$ имеет вид $\{(i_k, j_k)\}_{k=1}^{\alpha}$, где все числа $i_1, \dots, i_{\alpha}, j_1, \dots, j_{\alpha}$ различны. Тогда рассмотрим подстановку на множестве $\{1, \dots, n\}$ следующего вида. Пусть $\beta = n - 2\alpha$, а также

$$\{m_1, \dots, m_{\beta}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{\alpha}, j_1, \dots, j_{\alpha}\}.$$

Тогда положим

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2\alpha - 1 & 2\alpha & 2\alpha + 1 & \dots & 2\alpha + \beta \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_\alpha & j_\alpha & m_1 & \dots & m_\beta \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{A} = P^{-1} \mathcal{T}_{\alpha, \beta}(\mathbb{F}_q) P$, где P — матрица перестановки σ , т.е. $(P)_{ij} = 1$, если $j = \sigma(i)$ и $(P)_{ij} = 0$ иначе.

Следующее следствие теоремы 5.2.2 задаёт ограничения на возможные значения длин алгебр вида $\mathcal{T}_{\alpha, \beta}(\mathbb{F}_q)$.

Следствие 5.3.3. *Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{\alpha, \beta}(\mathbb{F}_q) \subseteq T_n(\mathbb{F}_q)$, $n = 2\alpha + \beta$. Предположим, что $q \leq n - 1$. Тогда*

$$\begin{aligned} \ell(D_n(\mathbb{F}_q)) &\leq \ell(\mathcal{A}) \\ &\leq \max\{\ell(D_\alpha(\mathbb{F}_q)) + q, \ell(D_n(\mathbb{F}))\} \\ &\leq \max\{\ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F}_q)) + q, \ell(D_n(\mathbb{F}))\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Оценка снизу следует из теоремы 1.5.14. Докажем оценки сверху. Для алгебры $\mathcal{A}$ рассмотрим величины $\kappa_1, \kappa_2, r_1, r_2$, определённые в теореме 5.2.2. Тогда $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Кроме того, $\min\{r_1, r_2\} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, так как $Pr_1(\prec) \cap Pr_2(\prec) = \emptyset$ в силу замечания 1.2.9. Однако $r_i = \alpha$, $i = 1, 2$. Тогда оценки длины сверху следует из теорем 1.5.12, 5.2.2. $\square$

Теперь наша цель — оценить, сколько возможных значений длины допускают оценки из предыдущего следствия. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3.4. *В следствии 5.3.3 разность между верхней и нижней оценками*

$$\Delta\ell = \ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F}_q)) + q - \ell(D_n(\mathbb{F}_q))$$

может быть вычислена для всех $n \geq 2$ следующим образом. Сначала введём величины

$$r = \left\lceil \log_q \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\rceil, \quad k = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{q^r} \right\rfloor = \left\lfloor q^{\{\log_q \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}} \right\rfloor, \quad r_0 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - kq^r,$$

откуда, в частности, $k \in \{1, \dots, q-1\}$, $r_0 \in \{0, \dots, q^r-1\}$. Выберем $s \in \{0, 1\}$ так, чтобы $s \equiv n \pmod{2}$. Тогда число $\Delta\ell$ определяется согласно следующей таблице.

	$2k \leq q - 2$	$2k = q - 1$	$2k \geq q$
$2r_0 + c \leq q^r - 1$	$q - k$	$q - k$	k
$2r_0 + c \geq q^r$	$q - k - 1$	k	k

Доказательство. Обозначим $g(s) = \ell(D_s(\mathbb{F}_q))$. Тогда $\Delta\ell = g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + q - g(n)$. Заметим, что согласно теореме 1.5.11 имеем $g(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = (q - 1)r + k - 1$. Чтобы вычислить $\Delta\ell$, необходимо выразить величину $g(n)$ через q, k, r . Заметим, что $n = 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + c = 2kq^r + 2r_0 + c$. Рассмотрим, три случая, которые соответствуют трём столбцам таблицы.

[Случай 1.] Пусть $2k \leq q - 2$. Если $2r_0 + c \leq q^r - 1$, то $\lfloor \log_q n \rfloor = r$ и $\left[q^{\lfloor \log_q n \rfloor} \right] = \left[\frac{n}{q^r} \right] = 2k$. По теореме 1.5.11 получим $g(n) = (q - 1)r + 2k - 1$. В итоге $\Delta\ell = (q - 1)r + k - 1 + q - ((q - 1)r + 2k - 1) = q - k$. Пусть теперь $2r_0 + c \geq q^r$. Тогда $n = (2k + 1)q^r + 2r_0 + c - q^r$. При этом $2r_0 + c - q^r \leq 2q^r - 2 + 1 - q^r = q^r - 1$. Значит, $\lfloor \log_q n \rfloor = r$ и $\left[q^{\lfloor \log_q n \rfloor} \right] = \left[\frac{n}{q^r} \right] = 2k + 1$. По теореме 1.5.11 получим $g(n) = (q - 1)r + 2k$. Тогда $\Delta\ell = (q - 1)r + k - 1 + q - ((q - 1)r + 2k) = q - k - 1$.

[Случай 2.] Пусть $2k = q - 1$. Если $2r_0 + c \leq q^r - 1$, то $\Delta\ell = q - k$ аналогично предыдущему случаю. Пусть $2r_0 + c \geq q^r$. Тогда $n = (2k + 1)q^r + 2r_0 + c - q^r$. В силу $2k = q - 1$, получим $n = q^{r+1} + 2r_0 + c - q^r$. Аналогично предыдущему случаю $2r_0 + c - q^r \leq q^r - 1 < q^{r+1} - 1$. Значит, $\lfloor \log_q n \rfloor = r + 1$ и $\left[q^{\lfloor \log_q n \rfloor} \right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}} \right] = 1$. Тогда из теоремы 1.5.11 следует, что $g(n) = (q - 1)(r + 1)$. Отсюда $\Delta\ell = (q - 1)r + k - 1 + q - (q - 1)(r + 1) = k$.

[Случай 3.] Пусть $2k \geq q$. Тогда $n = q^{r+1} + (2k - q)q^r + 2r_0 + c$. Обозначим $\hat{r} = (2k - q)q^r + 2r_0 + c$. Тогда $\hat{r} \geq 0$, т.к. $2k \geq q$. В силу $k \leq q - 1$, $r_0 \leq q^r - 1$, а также $c \in \{0, 1\}$, получим $\hat{r} \leq (q - 2)q^r + 2q^r - 2 + 1 \leq q^{r+1} - 1$. Значит, $n = q^{r+1} + \hat{r}$, где $\hat{r} \in \{0, \dots, q^{r+1} - 1\}$. Отсюда $\lfloor \log_q n \rfloor = r + 1$, $\left[q^{\lfloor \log_q n \rfloor} \right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}} \right] = 1$. Теперь применим теорему 1.5.11 и получим $g(n) = (q - 1)(r + 1)$. В итоге $\Delta\ell = (q - 1)r + k - 1 + q - (q - 1)(r + 1) = k$. $\square$

В доказательстве следующего следствия мы увидим, что равенство $\Delta\ell = 0$ невозможно. Однако над полями из двух и трех элементов в ряде случаев $\Delta\ell = 1$, т.е. длина может принимать не более двух значений.

Следствие 5.3.5. *Рассмотрим матричную алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{\alpha,\beta}(\mathbb{F}_q) \subseteq T_n(\mathbb{F}_q)$, $n = 2\alpha + \beta$, причём $q \leq n - 1$. Предположим, что выполнено одно из двух условий:*

1. $q = 2$;

2. $q = 3$, однако при этом $n = 2m + c$, где $c \in \{0,1\}$, $m = 3^r + r_0$ для некоторого $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а также $r_0 \in [\frac{3^r - c}{2}, 3^r - 1] \cap \mathbb{Z}$.

Тогда либо $\ell(\mathcal{A}) = D_n(\mathbb{F}_q)$, либо $\ell(\mathcal{A}) = D_n(\mathbb{F}_q) + 1$.

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из таблицы, представленной в лемме 5.3.4. Действительно, если $q = 2$, то случаи $2k \leq q - 2$ и $2k = q - 1$ невозможны. Значит, $\Delta\ell = k = 1$. Пусть теперь $q \geq 3$. Тогда из таблицы следует, что неравенство $\Delta\ell \geq 2$ выполнено всегда, за исключением случая, когда $2k = q - 1$ и $2r_0 + c \geq q^r$. В этих ограничениях $\Delta\ell = k$. Значит, $\Delta\ell = 1$ тогда и только тогда, когда $q = 3$ и $r_0 \geq \frac{3^r - c}{2}$. Таким образом, равенство $\Delta\ell = 1$ эквивалентно выполнению одного из условий 1 или 2. Причём случай $\Delta\ell = 0$ невозможен. $\square$

Таким образом, было получено обобщение теоремы 1.5.16 о длине алгебр вида $T_2(\mathbb{F}_2) \oplus T_2(\mathbb{F}_2) \oplus D_m(\mathbb{F}_2)$, $m \geq 0$.

Заключение

В диссертационной работе проведено исследование систем образующих колец инцидентности. Установлен критерий, когда подмножество является системой образующих. Вычислена минимальная мощность систем образующих в случае, когда кольцо коэффициентов полулокально, а также для ряда других колец.

В случае алгебр инцидентности над коммутативным кольцом отдельно рассматривались системы образующих, состоящие из идемпотентных матриц. Установлена их связь с вложениями диаграммы Хассе в дополнение булева куба. Найдена формула для минимальной мощности идемпотентных систем образующих.

Для алгебр инцидентности над полем был исследован вопрос о значениях функции длины. Найдена точная верхняя оценка, связывающая длину с двумя инвариантами частично упорядоченного множества — высотой и шириной. В случае, когда радикал квадратично-нильпотентен, найдены все реализуемые значения длины.

Литература

- [1] Марков В. Т. О матричных алгебрах с двумя образующими и о вложении PI-алгебр // УМН. — 1992. — Т. 47. — № 4 (286). — С. 199—200. — Англ. версия: Markov V. T. Matrix algebras with two generators and the embedding of PI-algebras // Russ. Math. Surv. — 1992. — Vol. 47. — No. 4. — pp. 216—217.
- [2] Маркова О. В. Верхняя оценка длины коммутативных алгебр // Мат. сборник. — 2009. — Т. 200. — № 12. — С. 41—62. — Англ. версия: Markova O. V. Upper bound for the length of commutative algebras // Sb. Math. — 2009. — Vol. 200. — No. 12. — pp. 1767—1787.
- [3] Маркова О. В. Вычисление длин матричных подалгебр специального вида // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13. — № 4. — С. 165—197. — Англ. версия: Markova O. V. Length computation of matrix subalgebras of special type // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 155. — pp. 908—931.
- [4] Маркова О. В. Коммутативные нильпотентные подалгебры индекса нильпотентности $n - 1$ в алгебре матриц порядка n // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 453. — С. 219—242. — Англ. версия: Markova O. V. Commutative nilpotent subalgebras with nilpotency index $n - 1$ in the algebra of matrices of order n // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 224. — pp. 956—970.
- [5] Маркова О. В. О длине алгебры верхнетреугольных матриц // УМН. — 2005. — Т. 60. — № 5 (365). — С. 177—178. — Англ. версия: Markova O. V. On the length of the algebra of upper-triangular matrices // Russ. Math. Surv. — 2005. — Vol. 60. — No. 5. — pp. 984—985.
- [6] Маркова О. В. О некоторых свойствах функции длины // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87. — № 1. — С. 83—91. — Англ. версия: Markova O. V. On some properties of the length function // Math. Notes. — 2010. — Vol. 87. — pp. 71—78.

- [7] Маркова О. В. Функция длины и матричные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17. — № 6. — С. 65—173. — Англ. версия: Markova O. V. The length function and matrix algebras // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 193. — pp. 687—768.
- [8] Маркова О. В. Функция длины и одновременная триангулируемость пар матриц // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 514. — С. 126—137. — Англ. версия: Markova O. V. Length function and simultaneous triangularization of matrix pairs // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 272. pp. 566—573.
- [9] Agnarsson G. On multipartite posets // Discrete Math. — 2008. — Vol. 308. — pp. 5284—5288.
- [10] Aiura D., Kakimura N., Murota K. On the number of matrices to generate a matrix $\ast$ -algebra over the real field // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438. — pp. 1252—1266.
- [11] Al'pin Y. A., Ikramov K. D. Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 313. — pp. 155—161.
- [12] Amitsur S. A. Identities and generators of matrix ring // Selected Papers of S. A. Amitsur with Commentary. In 2 parts. Part 2 / ed. by A. Mann [et al.]. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2001. — pp. 39—44. — First published in: Bull. Res. Council Israel. Sect. A. — 1955. — Vol. 5. — No. 1. — pp. 5—10.
- [13] Amitsur S. A. Invariant submodules of simple rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 7. — pp. 987—989.
- [14] Brešar M. Characterizing homomorphisms, derivations and multipliers in rings with idempotents // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. — 2007. — Vol. 137. — pp. 9—21.
- [15] Brešar M. Finite dimensional zero product determined algebras are generated by idempotents // Expo. Math. — 2016. — Vol. 34. — pp. 130—143.
- [16] Burnside W. On the condition of reducibility of any group of linear substitutions // Proc. London Math. Soc. — 1905. — Vol. 3. — pp. 430—434.

- [17] Carlson J. F., Matthews G. Generators and relations for matrix algebras // J. Algebra. — 2006. — 300. — No. 1. — pp. 134–159.
- [18] Chen H. Full elements in regular rings // Taiwanese J. Math. — 2004.— Vol. 8. — No. 2. — pp. 203–209.
- [19] Drensky V., Szigeti J., van Wyk L. Algebras generated by two quadratic elements // Commun. Algebra. — 2011. — Vol. 39. — pp. 1344–1355.
- [20] Gaines F. Some generators for the algebra of $n \times n$ matrices // Linear Multilinear Algebra. — 1977. — Vol. 2. — pp. 95–98.
- [21] Gaines F. J., Laffey T. J., Shapiro H. M. Pairs of matrices with quadratic minimal polynomials // Linear Algebra Appl. — 1983. — Vol. 52. — pp. 289–292.
- [22] Gerstenhaber M. On dominance and varieties of commuting matrices // Ann. Math. — 1961. — Vol. 73. — No. 2. — pp. 324–348.
- [23] Guralnick R. M. A note on commuting pairs of matrices // Linear Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 31. No. 1–4. — pp. 71–75.
- [24] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Invariant subspaces of matrices with applications. — Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. — 692 p.
- [25] Guterman A. E., Laffey T. J., Markova O. V., Šmigoc H. A resolution of Paz’s conjecture in the presence of a nonderogatory matrix // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — pp. 234–250.
- [26] Hammack R., Imrich W., Klavžar S. Handbook of Product Graphs. — 2nd ed. — Boca Raton : CRC Press, 2011. — 518 p.
- [27] Holbrook J., O’Meara K. C. Some thoughts on Gerstenhaber’s theorem. — Linear Algebra Appl. — 2015. — Vol. 466. — pp. 267–295.
- [28] Hu W., Xiao Z. A characterization of algebras generated by idempotents // J. Pure Appl. Algebra. — 2021. — Vol. 225. — Article 106693.
- [29] Kawai H. Algebras generated by idempotents and commutative group algebras over a ring // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — pp. 119–128.

- [30] Kelarev A. V., van der Merwe A. B., van Wyk L. The minimum number of idempotent generators of an upper triangular matrix algebra // J. Algebra. — 1998. — Vol. 205. — No. 2. — pp. 605—616.
- [31] Krot-Sieniawska E. On incidence algebras description of cobweb posets // Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2013. — Vol. 16. — No. 1. — pp. 125—132.
- [32] Kravchenko R. V., Mazur M., Petrenko B. V. On the smallest number of generators and the probability of generating an algebra // Algebra Number Theory. — 2012. — Vol. 6. — No. 2. — pp. 243—291.
- [33] Krupnik N., Minimal number of idempotent generators of matrix algebras over arbitrary field // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20. — pp. 3251—3257.
- [34] Kwaśniewski A. K., Dziemiańczuk M. Cobweb posets — Recent Results // Adv. Stud. Contemp. Math., Kyungshang. — 2008. — Vol. 16. — No. 2. — pp. 197—218.
- [35] Laffey T. J. A criterion for generating full matrix algebras // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — pp. 191—198.
- [36] Laffey T. J. A note on matrix subalgebras containing a full Jordan block // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — pp. 187—189.
- [37] Laffey T. J. Algebras generated by two idempotents // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — pp. 45—53.
- [38] Laffey T. J., Markova O. V., Šmigoc H. The effect of assuming the identity as a generator on the length of the matrix algebra // Linear Algebra Appl. — 2016. — Vol. 498. — pp. 378—393.
- [39] Lam T. Y. A theorem of Burnside on matrix rings // Am. Math. Mon. — 1998. — Vol. 105. — No. 7. — pp. 651—653.
- [40] Lambek J. Lectures on rings and modules. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1966. — 197 p.
- [41] Lomonosov V., Rosenthal P. The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 383. — pp. 45—47.
- [42] Longstaff W. E., Rosenthal P. Generators of matrix incidence algebras // Australas. J. Combin. — 2000. — 22. — pp. 117—121.

- [43] Lucchini A., Maróti A. Some results and questions related to the generating graph of a finite group // Ischia group theory 2008: proceedings of the conference / ed. by M. Chiara [et al.]. — Hackensack, NJ: World Scientific, 2009. — pp. 183—208.
- [44] van der Merwe A. B., van Wyk L. The minimum number of idempotent generators of a complete blocked triangular matrix algebra // J. Algebra. — 1999. — Vol. 222. — pp. 190—203.
- [45] Mirsky L.A. Dual of Dilworth’s decomposition theorem // Am. Math. Mon. — 1971. — 78. — pp. 876—877.
- [46] Neumann P. M., Praeger C. E. Cyclic matrices over finite fields // J. Lond. Math. Soc. — 1995. — Vol. 52. — No. 2. — pp. 263—284.
- [47] O’Meara, K. C. The Gerstenhaber problem for commuting triples of matrices is “decidable” // Commun. Algebra. — 2020. — Vol. 48. — No. 2. — pp. 453—466.
- [48] Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — pp. 535—545.
- [49] Paz A. An application of the Cayley—Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear Multilinear Algebra. — 1984. — Vol. 15. — pp. 161—170.
- [50] Petrenko B. V., Sidki S. N. On pairs of matrices generating matrix rings and their presentations // J. Algebra. — 2007. — Vol. 310. — No. 1. — pp. 15—40.
- [51] Pierce R. S. Associative algebras. — New York: Springer-Verlag, 1982. — 436 p.
- [52] Rota G.-C. On the foundations of combinatorial theory: I. Theory of Möbius functions // Classic Papers in Combinatorics / ed. by I. Gessel, G.-C. Rota. — Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1987. — pp. 332—360.
- [53] Rowen L., Segev Y. Associative and Jordan algebras generated by two idempotents // Algebr. Represent. Theory. — 2017. — 20. — pp. 1495—1504.
- [54] Schröder B. Ordered Sets. — Cham : Springer International Publishing, 2016. — 412 p.

- [55] Sercombe D., Shalev A. Random generation of associative algebras // J. Lond. Math. Soc. — 2024. — Vol. 109. — No. 1. — Article e12827.
- [56] Shitov Ya. An improved bound for the lengths of matrix algebras // Algebra Number Theory. — 2019. — Vol. 13. — No. 6. — pp. 1501–1507.
- [57] Spiegel E. O'Donnell C. J. Incidence algebras. — New York: Marcel Dekker, 1997. — 346 p.
- [58] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua // Arch. Rational Mech. Anal. — 1958. — Vol. 2. — pp. 309–336.
- [59] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Further results in the theory of matrix polynomials // Arch. Rational Mech. Anal. — 1959. — Vol. 4. — pp. 214–230.
- [60] Stanley R. P. Structure of incidence algebras and their automorphism groups // Bull. Am. Math. Soc. — 1970. — Vol. 76. — No. 6. — pp. 1236–1239.
- [61] Voss E. R. On the isomorphism problem for incidence rings // Illinois J. Math. — 1980. — Vol. 24. — No. 4. — pp. 624–638.
- [62] Wang C. On the length of generating sets with conditions on minimal polynomial // Commun. Appl. Math. Comput. — 2025. — Published online: 16 September 2025. — DOI: 10.1007/s42967-025-00507-0.
- [63] Weiss Y. On Banach algebras generated by two idempotents // Algebraic Methods in Operator Theory / ed. by R. E. Curto, P. E. T. Jørgensen. — Boston, MA: Birkhäuser, 1994. — pp. 90–97.
- [64] Winter C. Poset Ramsey number $R(P, Q_n)$. I. Complete multipartite posets // Order. — 2024. — Vol. 41. — pp. 391–399.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

- [65] Kolegov N. A. A sharp upper bound for the length of incidence algebras // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2026. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 29—49.

EDN: LKWYJK. Импакт-фактор 0,5 (JIF). 1,53 п.л.

- [66] Kolegov N. A., Idempotent generators of incidence algebras // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 2024. — Vol. 110. — No. 3. — pp. 488—497.

DOI: 10.1017/S0004972724000078. Импакт-фактор 0,5 (JIF). 0,68 п.л.

- [67] Kolegov N. A. On generators of incidence rings over finite posets // Journal of Algebra. — 2023. — Vol. 619. — pp. 686—706.

EDN: PSTBRC. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 1,18 п.л.

- [68] Kolegov N. A. On the lengths of matrix incidence algebras with radicals of square zero // Linear and Multilinear Algebra. — 2023. — Vol. 71. — No. 10. — pp. 1736—1753.

EDN: SHSAXF. Импакт-фактор 1,0 (JIF). 1,04 п.л.

- [69] Kolegov N. A. On the probability of generating matrix incidence rings // Beiträge zur Algebra und Geometrie. — 2026. — Vol. 67. — pp. 619—628.

EDN: RYVIBG. Импакт-фактор 0,4 (JIF). 0,53 п.л.

- [70] Kolegov N. A., Markova O. V. Systems of generators of matrix incidence algebras over finite fields // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 240. — pp. 783—798.

EDN: RNVGXM. Импакт-фактор 0.253 (SJR). 1,21 п.л. Общая доля диссертанта составляет 50%.

- [71] Kolegov N. A., Markova O. V. The lengths of matrix incidence algebras over small finite fields // Journal of Mathematical Sciences. — 2022. — Vol. 262. — pp. 62—83.

EDN: HOOSWI. Импакт-фактор 0.253 (SJR). 1,38 п.л. Общая доля диссертанта составляет 50%.

Другие публикации автора

- [72] Kolegov N. A. On real algebras generated by positive and nonnegative matrices // Linear Algebra Appl. — 2021. — Vol. 611. — pp. 46—65.
- [73] Колегов Н. А., Маркова О. В. Коммутативность матриц с точностью до матричного множителя // Зап. научн. сем. ПОМИ. — Т. 482. — С. 151—168. — Англ. версия: Kolegov N. A., Markova O. V. Commutativity of matrices up to a matrix factor // J. Math. Sci., New York. — 2020. — Vol. 249. — pp. 209—220.